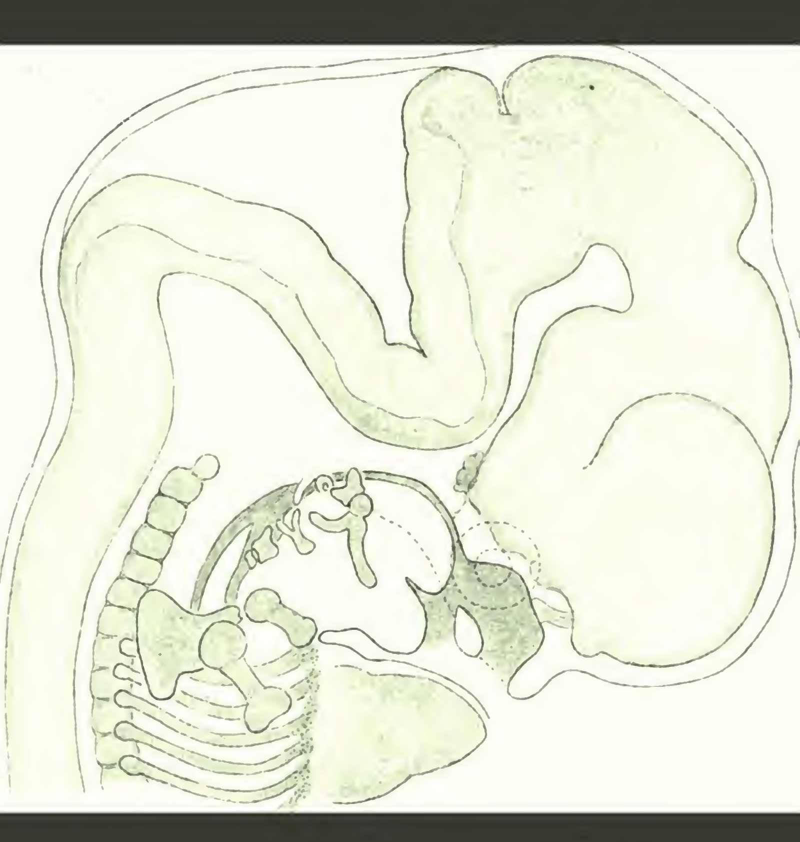
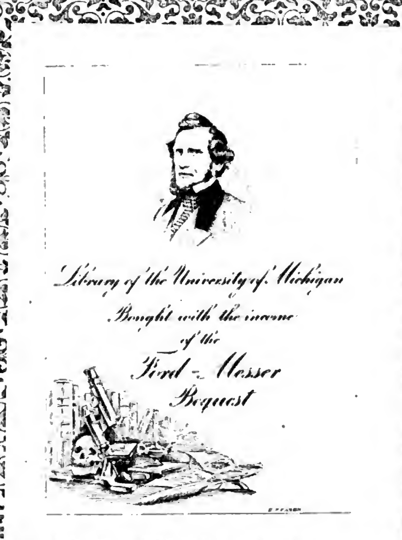


Abhandlungen der Sächsischen Akademie der ...

Sächsische Akademie der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-Naturwissenschaftliche ...


Library of the University of Michigan
Bought with the income
of the
Ford - Messer
Bequest



ABHANDLUNGEN

SECHSUNDVIERZIGSTER BAND.

ABHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.



SECHSUNDVIERZIGSTER BAND.

MIT 13 TAFELN UND 60 TEXTFIGUREN.

LEIPZIG
BEI B. G. TEUBNER
1902.

ABHANDLUNGEN

DER MATHEMATISCH-PHYSISCHEN CLASSE

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.



SIEBENUNDZWANZIGSTER BAND.

MIT 13 TAFELN UND 60 TEXTFIGUREN.

LEIPZIG
BEI B. G. TEUBNER
1902.

INHALT.

BEOBACHTUNGEN

AM REPSOLDSCHEN MERIDIANKREISE

DER VON KUFFNERSCHEN STERNWARTE IN WIEN-OTTAKRING

IN DEN JAHREN 1896—1898

VON

DR. ERNST GROSSMANN.

Des XXVII. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe
der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

Nº I.

MIT 4 TEXTFIGUREN.

LEIPZIG
BEI B. G. TEUBNER
1901.

Vorgetragen für die Abhandlungen am 7. Januar 1901.
Das Manuscript eingeliefert am 30. Juni 1901.
Den letzten Bogen druckfertig erklärt am 4. Oktober 1901.

BEOBACHTUNGEN

AM REPSOLD'SCHEN MERIDIANKREISE

DER VON KUFFNER'SCHEN STERNWARTE IN WIEN-OTTAKRING

IN DEN JAHREN 1896—1898

VON

ERNST GROSSMANN.

Inhalt.

§ 1.

Einleitung.

Während meiner Stellung als Assistent an der von KUFFNER-schen Sternwarte in Wien-Ottakring wurde mir von dem Director derselben, Herrn Dr. L. DE BALL der im Besitz der Sternwarte befindliche REPSOLD'sche Meridiankreis überwiesen mit dem Auftrage, an demselben eine Beobachtungsreihe auszuführen zur Untersuchung der astronomischen Refraktion und der Bestimmung der Polhöhe der Sternwarte. Ich kam diesem Auftrage um so lieber nach, als mir damit Gelegenheit gegeben wurde, meine in vierjähriger Thätigkeit an dem REICHENBACH'schen Meridiankreise der Göttinger Sternwarte gesammelten Erfahrungen an einem Instrumente neuester Konstruktion zu verwerten, und als ferner kurz zuvor eine gleiche Arbeit von Professor BAUSCHINGER an dem REPSOLD'schen Meridiankreise in München ausgeführt war, die in mehrfacher Beziehung neue und interessante Resultate ergeben hatte, deren weitere Bestätigung wünschenswert erschien.

Mit den Beobachtungen selbst musste eine eingehende Untersuchung aller Teile des Instruments, besonders soweit sie zur Messung von Zenithdistanzen in Frage kommen, verbunden werden, zumal eine solche während der langjährigen Zonen-Beobachtungen, zu denen das Instrument bis dahin lediglich gedient hatte, nur zum Teil ausgeführt worden war.

Nach Beschaffung und Anfertigung der nötigen Hilfsinstrumente, des Beobachtungsstuhls, der Nadirtreppe etc. und nach einigen Vorarbeiten begann die Arbeit am 16. August 1896 und wurde abgeschlossen am 2. Mai 1898, mit meinem Fortgange von Wien. Wegen der noch nicht beendigten Zonen-Beobachtungen musste jedoch eine längere Unterbrechung eintreten vom 14. November 1896 bis 4. März 1897 und eine zeitweilige von Januar bis März 1898. Weitere Störungen wurden verursacht im Herbst 1897 durch seismische Erschütterungen, die an manchen Abenden so

stark auftraten, dass Nadirbestimmungen völlig unmöglich waren. Ebenso verhinderte häufig starker Sturm die Ausnutzung aller klaren Abende.

Insgesammt wurden an 189 sternklaren Tagen 5387 Beobachtungen mit 6910 Einstellungen erhalten bei 1116 Nadirbestimmungen. Die Verteilung der Beobachtungen auf die einzelnen Tage ist jedoch infolge der ausserordentlichen Veränderlichkeit des Wetters eine sehr ungleiche; sie variieren von 30 Minuten Beobachtungszeit mit 5 Einstellungen (als Minimum) bis zu 14 Stunden mit 149 Einstellungen. Ein regelmässiger Wechsel der Kreislage konnte der Zonen wegen nicht durchgeführt werden.

Ueber die Liste der zu beobachtenden Sterne, ihre Verteilung am Himmel etc. wird später ausführlich berichtet werden, ebenso über die Bestimmung der Instrumentalfehler. Soweit angängig habe ich dahin gestrebt, die letzteren unabhängig von den Beobachtungen am Himmel zu bestimmen, und diese lediglich als Controlle für die Sicherheit jener zu benutzen, denn der gelegentlich auch von autoritativer Seite geäusserten Meinung, dass die Instrumentalfehler am besten durch die Beobachtungen selbst zu bestimmen seien, kann ich keineswegs so allgemein beistimmen; es liessen sich eine Reihe von Fällen anführen, wo sich bei diesem Verfahren Widersprüche ergeben haben, deren nachherige Aufklärung nicht möglich war. Die Durchführung des obigen Princips ist mir fast durchweg gelungen; nur zur Bestimmung der Biegung, dieses complicierten, sich aus einer grossen Anzahl von uncontrollierbaren Factoren zusammensetzenden Instrumentalfehlers haben die Beobachtungen selbst herangezogen werden müssen. Es ist hierbei vorauszusetzen, dass die instrumentellen Untersuchungen möglichst unter gleichen Verhältnissen geschehen, wie die Beobachtungen am Himmel, so z. B. die Untersuchung der Mikrometerschrauben und des Fadennetzes.

Die Reduktion der Beobachtungen ist, so weit es die Zeit und die Kenntnis der Instrumentalfehler erlaubte, sofort ausgeführt worden, denn auch für den Meridiankreisbeobachter erscheint mir die Innehaltung des Grundsatzes sehr notwendig, dass der wissenschaftliche Beobachter wissen muss, was er erzielt: nur so kann er sich eine fortlaufende Controlle über sein Instrument und über seine Beobachtungsmethode verschaffen. Ganz unabhängig von der ersten Reduktion ist später zur Controlle eine zweite vor-

genommen worden. Da mir bei allen Rechnungen Hilfskräfte nicht zur Verfügung standen, so wäre ein Abschluss derselben vorläufig nicht abzusehen gewesen, wenn nicht Herr Professor BRUNS mir meine gesammte Zeit, die mir neben meinen laufenden Arbeiten für die Leipziger Sternwarte frei blieb, in zuvorkommendster Weise hierzu zur Verfügung gestellt hätte, wofür ich ihm auch an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank auszusprechen mich verpflichtet fühle.

Vor Mitteilung der Beobachtungen bedürfen die von dem ersten Director der Sternwarte, Herrn Dr. HERZ in dem I. Bande der Publikationen gegebenen Beschreibungen über die Lage der Sternwarte, den Beobachtungsraum und den Meridiankreis noch einer weiteren Ergänzung unter besonderer Berücksichtigung des Zwecks der vorliegenden Arbeit.

Wenn in Zukunft kurz auf Arbeiten von BAUSCHINGER und RADAU I und II verwiesen wird, so sind hiermit die folgenden gemeint:

BAUSCHINGER: Untersuchungen über die astronomische Refraktion etc., Annalen der Münchner Sternwarte, Bd. III.

RADAU: Recherches sur la théorie des réfractions astronomiques, Annales de l'observatoire de Paris t. XVI.

RADAU: Essai sur les réfractions astronomiques, Annales de l'observatoire de Paris t. XIX.

§ 2.

Lage der Sternwarte, Beobachtungsraum und Meridiankreis.

Wenn man an den Aufstellungsort von Meridiankreisen die Bedingungen knüpft: Fern ab vom Getriebe der Grossstadt, umgeben von einem Gelände, welches sich den täglichen Temperaturschwankungen möglichst rasch anpasst und keine allzu störende, langwährende Ausstrahlung verursacht und schliesslich freier Horizont nach beiden Seiten, so kann man im vorliegenden Falle die beiden ersten als hinreichend erfüllt betrachten, die dritte jedoch nur teilweise.

Freilich ist die Entfernung der Sternwarte von Wien keine sehr grosse; durch den vorherrschenden Westwind werden jedoch Rauch und Dunst ferngehalten und nur in seltenen Fällen treibt der Ostwind die Dunstmassen der Grossstadt zur Sternwarte

hinauf, so zwar, dass in kürzester Zeit jegliche Aussicht verschwunden ist. Erschütterungen durch den Bahn- und Wagenverkehr habe ich nicht beobachtet.

Die nächste Umgebung der Sternwarte besteht zum grossen Teil aus Wiesenland. In 25 m Entfernung liegt nach Süden der Mirenturm, hinter demselben jenseits einer Fahrstrasse ein ca. 12 m hohes, kleines Wohnhaus. Darüber hinaus erstrecken sich auf langsam abfallendem Gelände Wiesen bis zu den 1800 m entfernten, im Wienthal liegenden westlichen Bezirken Penzing und Hietzing. Hart an der Grenze der letzten Ausläufer des Wiener Waldes überschreitet alsdann der Meridian eine weite Ebene.

Nach Norden hin liegt bis auf ca. 300 m abfallend zuerst Garten- und Wiesenland, dann das Liebhardsthal mit vereinzelten Wohnhäusern; steil ansteigend folgt der Wilhelminenberg mit Ackergründen, dessen bewaldeter Hang in ca. 1 km Entfernung den Horizont mit 86°5 Z. D. begrenzt. Nach 15 km langem, hügeligen Waldland überschreitet der Meridian die Donau.

Bei ansteigendem Gelände beginnt im Westen der ausgedehnte Wiener Wald, während sich im Osten die Grossstadt Wien ausbreitet.

Was die klimatischen Verhältnisse betrifft, so muss hier bemerkt werden, dass bei der Anlage der Sternwarte hierauf keine besondere Rücksicht genommen zu sein scheint, denn während der zwei Jahre meines dortigen Aufenthalts gestalteten sich dieselben derartig ungünstig, dass das Beobachten nur unter sehr erschwerenden Umständen möglich war. Windstille Beobachtungstage waren nur selten und mehrfach musste das Beobachten des heftigen Sturmes wegen abgebrochen werden. Tagsüber habe ich nur selten reinen Himmel gesehen, und dieses auch nur bei starkem Winde, so dass die Ausführung absoluter AR.-Beobachtungen sich hier kaum erzielen lassen wird.

Die Anlage des Meridiansaals und die Einrichtung des Spalts mit seinen Verschlüssen steht mit den heutigen Anschauungen nicht ganz im Einklang. In einer Zeit, in der durch eine ausgedehnte Thätigkeit an allen Meridiankreisen die Erfahrung über Bau und Einrichtung von Meridiansälen eine hohe Stufe erreicht hatte, und in der die Herren REPSOLD einen völligen Wandel in der Konstruktion der Meridiankreise herbeigeführt und bereits

ihre ersten Bauwerke abgeliefert hatten, wodurch die von den Meridianbeobachtungen zu fordernde Genauigkeit um ein bedeutendes erhöht wurde; in dieser Zeit hätten Uebelstände vermieden werden müssen, deren Beseitigung nunmehr nur noch mit grossen Schwierigkeiten verknüpft, wenn nicht überhaupt unmöglich ist. Der Bau der Sternwarte begann im Sommer 1884, während Gill in den Cape Observations 1879/81 pag. XXX der Einleitung bereits mit allem Nachdruck die symmetrische Aufstellung eines Meridiankreises in seinem Raum gefordert und die zweckmässigste Konstruktion des letzteren angegeben hatte.

Es will fast scheinen, als ob bei der Anlage der von Kuffnerschen Sternwarte die architektonischen Rücksichten des Baumeisters mehr gegolten hätten, als die Anforderungen des Astronomen. Es mag hier offen gesagt sein, dass bei dem Bau eines Privatinstituts, welches nicht über gleiche Mittel verfügen kann, wie ein finanzkräftiger Staat, an manchen Stellen eine weisere Mässigung am Platze gewesen wäre. Eine Sternwarte kann nie als völlig fertig angesehen werden, und bitter zu beklagen ist es, wenn die anfangs reichlich vorhandenen Mittel später nicht mehr ausreichen, oder gar in mancher Beziehung ganz versiegen.

Der Meridiansaal nimmt das erste Stockwerk des westlichen Flügels der Sternwarte ein. Ueber den Pfeiler und seine Dimensionen ist bereits im I. Bande der Publikationen ausführlich berichtet worden. Die Stabilität desselben wird in dem Abschnitt über den Fundamentalpunkt des Kreises einer eingehenden Diskussion unterworfen; sie kann im Allgemeinen als befriedigend angesehen werden, wenn auch beim Drehen der nahen Refraktorkuppel sich störende Erschütterungen bemerkbar machen.

Bei einer Spaltbreite von 110 cm haben die Seitenmauern, auch im Spalt, eine Stärke von 47 cm. Die Höhe des Saals bis zur ersten Decke beträgt 4.10 m. Die letztere besteht aus Brettern, darüber folgt ein Hohlraum, dann wieder Bretter, die mit Erde und Ziegelsteinen bedeckt sind. Nach einem gut 1 m hohen Bodenraum folgt in ca. 20° Neigung nach Nord und Süd abfallend das aus mit Blech bedeckten Brettern bestehende Dach. Die Seitenwände des somit mehr als 1 m breiten Dachspalts bestehen wiederum aus Brettern. Die Ostseite dieser breiten Holzwände wird noch um mehr als 1 m erweitert durch die im geöffneten Zustande vertikal stehenden Dachklappen: in den Nachmittags-

stunden ein gewaltiger Sonnenschirm, bei dem anhaltenden Winde dagegen ein manchmal Gefahr drohender Windfang! Der völlig abgeschlossene Bodenraum bietet hingegen ein Wärmereservoir, welches die am Tage aufgespeicherte Wärmemenge nachher nur nach der am wenigsten dicht verschlossenen Seite, also nach dem Spalt zu abgeben kann, wodurch die Bildbeschaffenheit wesentlich beeinträchtigt wird.

Die eisernen Seitenklappen bestehen aus drei Teilen, einem oberen Flügel von ganzer und zwei unteren von je halber Spaltbreite. Auch die Konstruktion dieser erscheint als nicht zweckmässig, denn der obere Flügel lässt sich nicht öffnen, wenn nicht vorher die Dachklappe geöffnet ist, und ohne dass zugleich der eine untere Flügel geöffnet ist, welcher sich wiederum ohne den oberen auch nicht schliefsen lässt. Ein Schutz des Instruments vor Wind oder Sonne durch Schliessen der unteren Seitenklappen ist somit nicht möglich, was sich um so fühlbarer machte, als Sonnenschirme und dergl. überhaupt nicht vorhanden waren. Grössere Einfachheit in dem ganzen Klappenmechanismus wäre sicherlich zu wünschen gewesen.

In der Westwand befindet sich ein grosses Fenster von fast 3 m Breite und 2 m Höhe, dessen Zweck nicht recht erkenntlich ist. Wenn dieses auch beständig durch einen grossen Vorhang verschlossen ist, so macht sich in den Nachmittagsstunden die Sonnenstrahlung doch in bedenklicher Weise bemerklich.

In dem 8,30 m langen und 6 m breiten Saal befindet sich das Instrument excentrisch um 1,30 m nach Westen und um 0,40 m nach Süden verschoben, eine Anordnung, gegen die sich gewiss schwere Bedenken erheben lassen, welche von den Gründen für dieselbe, möglichste Entfernung vom Hauptgebäude und bequemere Einführung des Umlegebocks, nicht ausgeglichen werden. Da der Collimatorpfeiler nur um 1,20 m und der Mirenpfeiler gar nur um 0,60 m vom Hauptpfeiler, am Fussboden gemessen, entfernt ist, so ist die Einführung des Beobachtungsstuhls, der Nadirtreppe u. s. w. nur unter grösster Vorsicht angängig. Die Anstellung von Reflex-Beobachtungen ist völlig ausgeschlossen. Der Grund dieser äussersten Beengung ist nicht recht erkenntlich.

Der besonders für diese Arbeit angefertigte Beobachtungsstuhl gewährte dem Körper für kleinere Z. D. eine bequeme Lage und dem Kopfe eine sichere Stütze, was ohne Frage zur Erzielung

einer grösseren Sicherheit des Einstellens beiträgt. Aus dem gleichen Grunde ist auch die Treppe zum Ablesen der Mikroskope mit einem Sitz versehen, so dass die unteren im Sitzen und die oberen in aufrechter Stellung des Körpers abgelesen wurden. Die Nadirtreppe ist bis zur Höhe des Okulars zum Schutz des Rohrs gegen die Körperwärme mit einer allerdings wegen der Grössenverhältnisse des Instruments nur schmalen hölzernen Wand versehen.

Eine ausführliche Beschreibung des Instruments ist im I. Bande der Publikationen von Dr. Herz gegeben, Berichtigungen hierzu von Gebr. Repsold am Ende des III. Bandes; ich kann mich deshalb auf die Wiedergabe weniger Daten beschränken.

Der Ottakringer Kreis unterscheidet sich von den anderen neueren Repsold'schen Kreisen wesentlich nur dadurch, dass er kleiner ist. Das Objektiv, von Steinheil, hat 123 mm freie Oeffnung und 150 cm Brennweite; hierdurch ist seine Güte jedoch keineswegs beeinträchtigt. Die Bilder sind scharf und punktförmig; auch ausserhalb der Mitte ist eine Deformation nicht zu erkennen. Nur bei besonders gutem Luftzustande macht sich bei helleren Sternen ein schwacher Lichtansatz erkenntlich, dessen Ursprung in Spannungen im Objektive, veranlasst durch dessen Feder, zu suchen ist. Da jedoch dieser Schwanz genau in die Bewegungsrichtung des Sterns fällt, so wird die Genauigkeit der Deklinationseinstellung hierdurch nicht beeinträchtigt, ja, ich möchte glauben, dass sie sogar erhöht wird. Für AR.-Beobachtungen könnte sich allerdings infolge der Verschiebung des Lichtschwerpunktes ein systematischer Unterschied zwischen hellen und schwächeren Sternen einschleichen, der wegen der Schwäche des Ansatzes jedoch nur gering sein wird.

Von den vorhandenen vier Okularen wurde dasjenige mit 120facher Vergrösserung benutzt; eine stärkere erschien wegen der steten Luftunruhe nicht angezeigt. Mit dem Okular war ein Reversionsprisma ständig verbunden, dessen eine Kathetenfläche zugleich als Nadirspiegel diente. Da eine Reihe von Versuchen einen Unterschied in der Einstellung bei den verschiedenen Stellungen des Prismas nicht ergaben, so wurde es in der Lage belassen, die der Bewegungs-Richtung der Sterne entsprach.

Okular und Objektiv können leicht und bequem mit einander

vertauscht werden; ebenso war ein Verdrehen um die optische Achse zur Untersuchung von etwaigen Gestaltfehlern des Objektivs möglich. Da jedoch vor Beendigung der Zonen derartige Aenderungen am Instrument nicht vorgenommen werden sollten, so konnte die für die Untersuchung der Biegung immerhin sehr wesentliche Operation des Vertauschens nur einmal, am Ende der Arbeit, 1898 April 18, vorgenommen werden.

Das Mikrometer besitzt in vertikaler Richtung 23 feste Fäden und einen beweglichen, in horizontaler Richtung einen festen und einen beweglichen Doppelfaden, ferner einen beweglichen einfachen Faden. Die Einstellungen erfolgten stets auf das feste Fadenpaar, denn angestellte Versuche ergaben, dass Einstellungen mit dem beweglichen Faden bei fester Lage des Kreises um konstante Unterschiede von jenen abwichen, die nur infolge eines durch die Berührung der Mikrometerschraube ausgeübten Druckes entstanden sein konnten.

Für die Untersuchung des Fadennetzes jedoch leisteten die beweglichen Fäden gute Dienste und als völlig entbehrlich möchte ich sie nicht bezeichnen, zumal der Mikrometerapparat hierdurch keineswegs unnötig belastet wird.

Ausser den 8 Mikroskopen zur Ablesung des Kreises (auf jeder Seite 4) war für die Bestimmung der Teilungsfehler noch ein Hilfsmikroskop vorhanden, ein zweites fehlte leider, so dass durch mehrfaches Abnehmen und Ansetzen eines der gewöhnlichen Ablesemikroskope unangenehme Störungen verursacht wurden.

Eine unzureichende Rectificierung des Einstellfernrohrs (Indexrohrs) hatte Herz zu der Forderung nach zwei solchen, einem auf jeder Seite, Anlass gegeben. Indessen konnte durch leichte Mühe und zwar durch eine infolge ovaler Ausbohrung der Schraubenlöcher der Anschlagplatte ermöglichte Verschiebung der letzteren dem Uebelstande abgeholfen werden, so zwar, dass jetzt das Indexrohr für beide Kreislagen für gleichzeitiges Ablesen von Norden und von Süden zu gebrauchen war.

In bezug auf die Schlüssel zur Feinbewegung wäre eine leichte Abnahme derselben wünschenswert gewesen, da hierdurch ein breiterer Raum für die Nadirtreppe geschaffen wäre.

Infolge des häufigen und starken Windes war es nötig, das Instrument mit grösserem Gewichte in den Lagern ruhen zu lassen, als es sonst üblich und zur Schonung der Zapfen gut ist. Trotz-

dem ist es mehrfach vorgekommen, dass während der Ablesung der Mikroskope das Instrument durch einen kräftigen Windstoss plötzlich verschoben und damit die Einstellung unbrauchbar wurde.

Die Beleuchtungslampen befanden sich nur 2,30 m vom Mittelpunkt des Instruments; doch zeigten in den Strahlengang eingeschaltete Thermometer keinen nennenswerten Unterschied. Rohre zum Abführen der Verbrennungsgase waren nicht vorhanden.

Auf Einzelheiten, sowie auf die Hilfsinstrumente wird in den folgenden Abschnitten noch eingegangen werden.

§ 3.

Beobachtungsplan. Liste der beobachteten Sterne.

Für eine Sternwarte, die mit erstklassigen Instrumenten, vor allem mit einem Meridiankreise neuester Konstruktionstechnik ausgerüstet ist, muss es als eine Notwendigkeit bezeichnet werden, dass sie eine Kenntnis ihrer Polhöhe besitzt mit der Genauigkeit, welche diesen Instrumenten selbst eigen ist, und ferner, dass die Refraktionsverhältnisse ihres Standortes einer möglichst eingehenden Untersuchung unterworfen sind. Gerade in bezug auf diese können wir bei dem heutigen Stande der die Refraktion betreffenden theoretischen Untersuchungen und bei unserer jetzigen Kenntnis der Atmosphäre die noch vielfach gebrauchten BESSEL'schen Tafeln nicht mehr als den Anforderungen entsprechend bezeichnen.

Den hiermit kurz skizzierten Zwecken der Arbeit entsprechend ergaben sich die Bedingungen für die Auswahl der zu beobachtenden Sterne von selbst. Ihre Eigenbewegungen mussten genau bekannt sein; sie sind deshalb aus dem AUWERSschen Fundamentalkatalog entnommen, und zwar sind es im grossen und ganzen dieselben, die bereits von Professor BAUSCHINGER (l. c.) benutzt sind. Ausgeschlossen von diesen sind diejenigen Circumpolarsterne, die in Ottakring nicht mehr in unterer Culmination zu erlangen waren. Dafür sind zur grösseren Berücksichtigung der südlichen Meridianhälfte hauptsächlich Südsterne hinzugefügt worden, eine Massregel, die sich besonders zur Beurteilung der Genauigkeit des Nadirpunktes (s. § 9) als zweckmässig erwiesen hat; und ferner zur Ausfüllung von Lücken 28 von jenen Südsternen[1]), welche zu

1) Vergl. Vierteljahrsschrift der Astron. Gesellschaft. 16. Jahrgang. 1881. pag. 342.

gleicher Zeit am Cap wie auf nördlichen Sternwarten zur Untersuchung der Refraktion bestimmt worden sind.

Soweit angängig, sind nur helle Sterne gewählt worden, die auch bei Tage und bei unterer Culmination der Beobachtung zugänglich waren. Das Abendprogramm sollte sich im allgemeinen so gestalten, dass Sterne der verschiedensten Zenithdistanzen, im Norden wie im Süden in demselben enthalten waren. Es ist jedoch an anderer Stelle gesagt, wie wenig sich ein programmmässiges Beobachten hat durchführen lassen.

Aus dem gleichen Grunde ist auch die Anzahl der Beobachtungen der einzelnen Sterne eine sehr ungleiche. Es war beabsichtigt, jeden Stern in jeder Kreislage etwa 10 mal zu beobachten; doch weisen einzelne Sterne bis zu 30 und mehr Beobachtungen auf, während für andere insgesammt kaum 10 zu erlangen waren. Eine Ausnahme hiervon machen α Urs. min. und 1 H. Drac., die zur ersten Ableitung der Polhöhe dienen und deshalb beobachtet werden sollten, sobald es das Wetter nur gestattete. Zur Controlle über das Verhalten des Nadirpunkts, wie zur Aufklärung etwaiger Refraktionsanomalien sind in AR. benachbarte Sterne, besonders südlich vom Zenith, möglichst hinzugefügt worden, deshalb sind z. B. ε Urs. maj. 50mal, 12 Can. ven. sq. 40mal, η Urs. maj. 40mal u. s. w. beobachtet worden. Wegen der noch erforderlichen Zonenbeobachtungen konnte, wie bereits erwähnt, ein gleichmässiger Wechsel der beiden Kreislagen nicht durchgeführt werden.

Da die Beobachtung von Rectascensionen von vorne herein ausgeschlossen war, so konnte die Einstellung stets in voller Ruhe und Sorgfalt geschehen.

Weitere Aufschlüsse über das Beobachtungsprogramm geben die folgenden Zahlen. Insgesammt beobachtet sind 184 Sterne, davon sind 84 Circumpolarsterne. Abgesehen ist hier von zwei Sternen erster Grösse (α Orionis und α Can. min.), die anfangs dem Programm beigefügt waren, um möglichst zahlreiche Tagesbeobachtungen zu erzielen, was sich jedoch wegen der Ungunst der Witterung nachher als unausführbar erwies, weshalb die beiden Sterne von der Liste wieder gestrichen wurden.

Von den 28 südlichen Refraktionssternen sind 8 im F.-C. enthalten, 12 im Catalog Auwers-Bradley und 8 sind näher auf E.-B. zu bestimmen. Auf die einzelnen Z. D. verteilen sich die Sterne und Beobachtungen wie folgt:

Südl. Z. D.	Sterne	Beob.	Nördl. Z. D.	Sterne	Beob.
bis 80°	7	98	bis 85°	11	147
70	29	502	80	19	352
60	12	197	70	27	534
50	15	251	60	13	247
40	12	190	50	10	242
30	9	170	40	5	233
20	10	176	30	4	71
10	5	120	20	12	227
0	17	332	10	20	419
			0	31	689

Ausserdem liegen für die beiden genannten Polsterne vor:

α Urs. min. 123 Beob. mit 1058 Einstellungen
1 H. Drac. 67 „ „ 227 „ .

Die Anzahl der Einstellungen von α Urs. min. ist höher als nötig getrieben und zwar, weil ich hieraus Anhaltspunkte für die Genauigkeit einer Einstellung als solcher ableiten wollte. Wegen der Begrenzung des Horizonts konnten Z. D. tiefer als 87° nicht erlangt werden; es muss auch zweifelhaft erscheinen, ob Beobachtungen, bei denen der Lichtstrahl sich nahe über dem Erdboden durch die tiefsten Schichten der Atmosphäre bewegt, für die Beurteilung der astronomischen Refraktion grossen Wert haben.

Liste der beobachteten Sterne für 1897.0.

Stern	Gr.	Culm.	AR.	Decl.	Schb. Z. D.	Anzahl O	Anzahl W
β Cassiop.	2.1		0h 3m 41s	+58° 34'.9	+10° 21'.9	14	13
$\varkappa^2$ Sculptoris . . .	5.4		0 6 21	−28 22.4	−76 31.1	10	9
4 H. Drac.	4.6	U	0 7 22	+78 11.3	+53 34.5	10	6
δ Urs. maj.	3.4	U	0 10 20	+57 36.3	+74 7.4	11	11
ι Ceti	3.3		0 14 11	− 9 23.7	−57 34.9	11	10
ι Sculptoris	5.3		0 16 21	−29 33.0	−77 41.3	11	9
ϰ Cassiop.	4.3		0 27 9	+62 21.8	+14 8.7	13	11
α Cassiop.	(2.5)		0 34 40	+55 58.3	+ 7 45.4	18	9
o Cassiop.	5.0		0 38 59	+47 43.2	− 0 29.6	13	9
δ Piscium	4.3		0 43 20	+ 7 1.5	−41 10.4	12	6
ε Urs. maj.	2.0	U	0 49 30	+56 31.1	+75 12.3	16	11
α Sculptoris	4.2		0 53 39	−29 54.8	−78 2.9	12	13
η Ceti	3.1		1 3 24	−10 43.7	−58 54.8	13	12
τ Piscium	4.0		1 5 59	+29 32.6	−18 39.9	13	10
α Urs. min.	2.0		1 21 19	+88 45.5	+40 31.8	34	30
υ Persei	3.6		1 31 40	+48 6.4	− 0 6.4	16	12
φ Persei	4.0		1 37 12	+50 10.2	+ 1 57.4	16	12
η Urs. maj.	2.0	U	1 43 29	+49 49.6	+81 50.9	13	12
i Dracon.	5.0	U	1 48 25	+65 13.9	+66 31.0	12	5
50 Cassiop.	4.0		1 54 38	+71 55.4	+23 42.2	13	6

Stern	Gr.	Culm.	AR.	Decl.	Schb. Z. D.	Anzahl O	Anzahl W
α Dracon.	3.3	U	$2^h\ 1^m\ 36^s$	+ 64° 52′.1	+ 66° 52′.8	12	5
Lac. μ Forn. . . .	5.2		2 8 22	− 31 12.4	− 79 20.0	11	5
λ Bootis	4.0	U	2 12 28	+ 46 33.7	+ 85 3.1	11	5
κ Fornacis	5.2		2 17 50	− 24 17.1	− 72 26.8	10	5
ϑ Bootis	3.8	U	2 21 41	+ 52 19.6	+ 79 22.4	10	5
δ Ceti	4.0		2 34 12	− 0 7.0	− 48 18.7	10	2
ϑ Persei	4.0		2 37 10	+ 48 47.6	+ 0 34.8	10	3
η Persei	3.6		2 43 11	+ 55 28.1	+ 7 15.2	11	3
β Fornacis	4.5		2 44 47	− 32 50.4	− 80 57.1	10	3
τ Persei	4.0		2 46 54	+ 52 20.4	+ 4 7.5	10	3
β Urs. min.	2.0	U	2 51 0	+ 74 34.6	+ 57 11.0	11	3
γ Persei	3.0		2 57 20	+ 53 6.2	+ 4 53.3	11	3
ι Persei	4.0		3 1 38	+ 49 13.2	+ 1 0.4	10	4
12 Eridani	3.3		3 7 42	− 29 23.6	− 77 31.9	9	4
α Persei	2.0		3 16 58	+ 49 29.7	+ 1 16.9	9	4
ι Dracon.	3.0	U	3 22 38	+ 59 19.6	+ 72 24.5	8	4
ε Eridani	3.0		3 28 5	− 9 48.4	− 57 59.6	8	3
δ Persei	3.1		3 35 35	+ 47 27.5	− 0 45.3	9	3
5 H. Cam.	4.3		3 39 29	+ 71 0.9	+ 22 11.5	8	2
12 H. Drac. . . .	5.3	U	3 45 6	+ 62 55.1	+ 68 49.5	8	2
ζ Urs. min.	4.3	U	3 47 44	+ 78 6.7	+ 53 39.1	8	2
γ Eridani	3.0		3 53 13	− 13 48.1	− 61 59.0	7	2
ϑ Dracon.	3.6	U	3 59 58	+ 58 50.4	+ 72 53.6	8	3
φ Herculis	4.0	U	4 5 31	+ 45 12.3	+ 86 21.8	5	3
X Eridani	3.3		4 13 59	− 34 3.0	− 82 8.9	6	3
τ Herculis	3.3	U	4 16 39	+ 46 33.5	+ 85 3.4	7	3
η Dracon.	2.6	U	4 22 36	+ 61 44.8	+ 69 59.7	7	5
υ′ Eridani	4.7		4 29 28	− 29 58.4	− 78 6.5	6	2
ν Eridani	3.3		4 31 10	− 3 33.8	− 51 45.3	5	3
54 Eridani	5.0		4 35 56	− 19 52.1	− 68 2.4	5	2
9 Camelop.	4.3		4 43 48	+ 66 10.0	+ 17 56.9	5	4
ε Urs. min.	4.3	U	4 56 31	+ 82 12.4	+ 49 33.6	6	4
β Eridani	3.0		5 2 47	− 5 13.2	− 53 24.6	5	4
α Aurigae	1.0		5 9 5	+ 45 53.6	− 2 19.2	6	5
τ Orionis	4.0		5 12 36	− 6 57.4	− 55 8.8	3	4
γ Orionis	2.0		5 19 36	+ 6 15.4	− 41 56.5	5	5
β Leporis	3.2		5 23 50	− 20 50.5	− 69 0.7	4	4
β Dracon.	2.6	U	5 28 6	+ 52 22.7	+ 79 19.3	4	4
α Columbae	2.5		5 35 55	− 34 7.7	− 82 13.5	4	4
ι Herculis	3.3	U	5 36 33	+ 46 3.7	+ 85 32.3	4	2
κ Orionis	2.6		5 42 52	− 9 42.4	− 57 53.6	3	4
β Aurigae	2.0		5 51 58	+ 44 56.2	− 3 16.5	7	5
γ Draconis	2.3	U	5 54 13	+ 51 30.1	+ 80 11.5	6	3
ν Orionis	4.6		6 1 41	+ 14 46.8	− 33 25.3	4	3
δ Urs. min.	4.3	U	6 5 31	+ 86 36.8	+ 45 9.4	4	5
2 Lyncis	4.6		6 10 32	+ 59 2.9	+ 10 49.9	5	6
ρ Can. maj.	3.2		6 16 22	− 30 1.1	− 78 9.2	4	5
ψ′ Aurigae	5.1		6 16 58	+ 49 20.4	+ 1 7.6	5	6
χ Draconis	3.8	U	6 22 55	+ 72 41.3	+ 59 4.2	6	6
γ Geminorum . .	2.3		6 31 46	+ 16 29.2	− 31 43.0	6	6

Stern	Gr.	Culm.	AR.	Decl.	Schb. Z. D.	Anzahl O	Anzahl W
ε Geminorum . . .	3.3		6^h 37^m 36^s	+ 25° 14′.0	− 22° 58′.4	6	5
24 H. Cam.	4.6		6 45 3	+ 77 6.5	+ 28 53.1	6	4
15 Lyncis	4.7		6 48 22	+ 58 33.5	+ 10 20.5	6	4
o Draconis	4.6	U	6 49 41	+ 59 15.7	+ 72 28.3	5	4
51 H. Ceph. . . .	5.1		6 52 16	+ 87 12.6	+ 38 59.0	6	4
ε Can. maj.	1.6		6 54 35	− 28 49.9	− 76 58.4	4	4
δ Can. maj.	2.0		7 4 12	− 26 13.8	− 74 23.0	6	4
δ Draconis	3.0	U	7 12 32	+ 67 28.8	+ 64 16.3	7	3
κ Cygni	4.0	U	7 14 43	+ 53 10.7	+ 78 31.7	6	3
ι Geminorum . .	4.0		7 19 20	+ 28 0.2	− 20 12.2	7	3
Gr. 1308	6.0		7 20 10	+ 68 40.5	+ 20 27.3	6	3
ι Cygni	4.1	U	7 27 7	+ 51 30.6	+ 80 11.0	6	4
f Puppis	4.8		7 33 33	− 34 44.2	− 82 49.5	5	4
θ Cygni	4.6	U	7 33 41	+ 49 58.9	+ 81 41.7	6	4
τ Navis	4.2		7 39 40	− 28 42.5	− 76 51.1	7	4
δ Cygni	2.8	U	7 41 45	+ 44 52.8	+ 86 40.4	4	3
26 Lyncis	6.1		7 47 13	+ 47 49.9	− 0 22.9	6	6
ψ Cygni	5.2	U	7 52 58	+ 52 9.9	+ 79 32.0	6	4
χ Geminorum . .	5.0		7 57 12	+ 28 5.0	− 20 7.4	8	4
27 Lyncis	4.6		8 0 43	+ 51 48.2	+ 3 35.3	10	7
Br. 1147	5.1		8 6 36	+ 76 4.3	+ 27 51.0	10	11
o′ sq. Cygni	4.5	U	8 10 23	+ 46 25.7	+ 85 10.9	5	9
o Urs. maj.	3.3		8 21 42	+ 61 3.7	+ 12 50.7	10	12
θ Cephei	4.0	U	8 27 51	+ 62 38.9	+ 69 5.7	10	11
Gr. 1460	5.6		8 31 40	+ 53 4.3	+ 4 51.4	11	12
α Cygni	1.6	U	8 37 55	+ 44 54.7	+ 86 38.6	6	9
η Cephei	3.6	U	8 43 12	+ 61 26.3	+ 70 18.1	12	11
ζ Hydrae	3.3		8 49 57	+ 6 20.2	− 41 51.7	11	11
ι Urs. maj.	3.0		8 52 9	+ 48 26.8	+ 0 14.0	11	11
κ Urs. maj.	3.3		8 56 36	+ 47 33.8	− 0 39.0	12	12
19 Hydrae	5.9		9 3 40	− 8 10.4	− 56 21.7	11	9
θ Hydrae	4.0		9 9 0	+ 2 44.9	− 45 26.9	11	10
α Cephei	2.6	U	9 16 7	+ 62 8.9	+ 69 35.6	12	11
λ Pyxidis	5.3		9 18 45	− 28 23.6	− 76 32.3	9	10
1 H. Drac.	4.3		9 22 24	+ 81 46.9	+ 33 33.4	12	12
θ Urs. maj.	3.0		9 25 58	+ 52 8.8	+ 3 55.9	11	11
Lal. 18817	5.8		9 28 28	− 20 39.6	− 68 49.8	9	10
o Leonis	3.6		9 35 39	+ 10 21.7	− 37 50.3	10	11
ε Leonis	3.0		9 40 0	+ 24 14.9	− 23 57.5	11	12
π² Cygni	4.3	U	9 42 59	+ 48 50.0	+ 82 49.7	9	5
Gr. 1586	6.0		9 49 11	+ 73 22.2	+ 25 8.9	12	12
π Leonis	5.0		9 54 46	+ 8 32.3	− 39 39.7	11	13
20 Cephei	5.8	U	10 1 53	+ 62 17.0	+ 69 27.5	10	13
α Leonis	1.3		10 2 53	+ 12 28.2	− 35 43.9	12	11
ζ Cephei	3.4	U	10 7 17	+ 57 41.6	+ 74 2.1	11	13
ζ Leonis	3.0		10 10 58	+ 23 55.8	− 24 16.5	11	13
3 Lacertae	4.4	U	10 19 30	+ 51 42.8	+ 79 58.9	10	13
α Antliae	4.4		10 22 26	− 30 32.6	− 78 40.5	10	12
7 Lacertae	4.0	U	10 27 3	+ 49 45.2	+ 81 55.2	10	13
41 Leon. min. . .	5.3		10 37 49	+ 23 43.7	− 24 28.6	9	13

Stern	Gr.	Culm.	AR.	Decl.	Schb. Z. D.	Anzahl O	Anzahl W
42 Leon. min. . .	5.0		10ʰ 40ᵐ 8ˢ	+31° 13′.5	−16° 59′.0	9	13
ι Cephei	3.4	U	10 46 1	+65 39.5	+66 5.4	11	13
β Urs. maj.	2.3		10 55 38	+56 56.1	+ 8 43.1	12	14
χ Leonis	4.8		10 59 42	+ 7 53.6	−40 18.3	11	14
ψ Urs. maj.	3.1		11 3 52	+45 3.4	− 3 9.3	10	15
Br. 3077	6.0	U	11 8 19	+56 36.0	+75 7.5	10	13
δ Crateris	3.3		11 14 11	−14 13.3	−62 24.2	11	15
ι Leonis	4.0		11 18 33	+11 5.8	−37 6.2	11	15
4 Cassiop.	5.8	U	11 20 16	+61 43.0	+70 1.5	12	14
λ Dracon.	3.3		11 25 18	+69 54.0	+21 40.8	14	15
ξ Hydrae	3.7		11 27 56	−31 17.3	−79 24.9	10	15
λ Androm.	4.0	U	11 32 31	+45 54.0	+85 41.6	5	11
γ Cephei	3.3	U	11 35 7	+77 3.4	+54 42.4	12	14
χ Urs. maj. . . .	3.8		11 40 37	+48 21.0	+ 0 8.2	11	14
γ Urs. maj.	2.3		11 48 25	+54 16.0	+ 6 3.1	11	14
ο Virginis	4.0		11 59 58	+ 9 18.3	−38 53.7	10	13
β Cassiop.	2.1	U	12 3 41	+58 34.9	+73 9.0	10	14
4 H. Drac.	4.6		12 7 22	+78 11.3	+29 57.9	9	14
δ Urs. maj.	3.4		12 10 20	+57 36.3	+ 9 23.3	11	16
η Virginis	3.3		12 14 38	− 0 5.7	−48 17.4	10	14
δ Corvi	2.3		12 24 32	−15 56.5	−64 7.2	8	13
κ Cassiop.	4.3	U	12 27 9	+62 21.8	+69 22.7	7	14
B. A. C. 4253 . .	5.6		12 32 14	−26 34.1	−74 43.3	8	14
α Cassiop.	2.5	U	12 34 40	+55 58.3	+75 45.0	14	16
ο Cassiop.	5.0	U	12 38 59	+47 43.2	+83 55.3	5	13
ε Urs. maj.	2.0		12 49 30	+56 31.1	+ 8 18.2	22	28
12 Can. ven. sq. .	2.9		12 51 13	+38 52.5	− 9 20.1	16	24
Lal. 24277	6.1		12 58 15	−20 1.8	−68 12.1	8	18
ϑ Virginis	4.3		13 4 37	− 4 59.3	−53 10.8	13	18
α Urs. min.	2.0	U	13 21 19	+88 45.5	+43 0.8	29	30
υ Persei	3.6	U	13 31 40	+48 6.4	+83 32.5	5	14
φ Persei	4.0	U	13 37 12	+50 10.2	+81 30.5	8	17
η Urs. maj.	2.0		13 43 29	+49 49.6	+ 1 36.8	15	25
i Dracon.	5.0		13 48 25	+65 13.9	+17 0.8	11	12
50 Cassiop.	4.0	U	13 54 38	+71 55.4	+59 50.1	11	12
π Hydrae	3.6		14 0 30	−26 11.1	−74 20.4	10	10
α Dracon.	3.3		14 1 36	+64 52.1	+16 39.0	11	11
κ Virginis	4.3		14 7 24	− 9 47.7	−57 58.9	12	11
λ Bootis	4.0		14 12 28	+46 33.7	− 1 39.1	12	11
ϑ Bootis	3.8		14 21 41	+52 19.6	+ 4 6.7	11	10
ρ Bootis	3.6		14 27 23	+30 49.4	−17 23.1	10	8
ϑ Persei	4.0	U	14 37 10	+48 47.6	+82 52.0	10	8
η Persei	3.6	U	14 43 11	+55 28.1	+76 15.1	11	10
τ Persei	4.0	U	14 46 57	+52 20.4	+79 21.6	8	10
β Urs. min.	2.0		14 51 0	+74 34.6	+26 21.3	11	10
γ Persei	3.0	U	14 57 20	+53 6.2	+78 36.1	10	10
ι Persei	4.0	U	15 1 38	+49 13.2	+82 26.8	12	9
ι Librae	2.6		15 6 21	−19 24.1	−67 34.5	10	9
β Librae	2.0		15 11 28	− 9 0.2	−57 11.4	11	9
α Persei	2.0	U	15 16 58	+49 29.7	+82 10.6	12.	9

Stern	Gr.	Culm.	AR.	Decl.	Schb. Z. D.	Anzahl O	W
ι Dracon.	3.0		15h 22m 38s	+59° 19'.6	+11° 6'.6	12	6
ϑ Cor. bor.	4.0		15 28 46	+31 42.4	−16 30.1	12	6
α Cor. bor.	2.0		15 30 20	+27 3.7	−21 8.7	12	6
δ Persei	3.1	U	15 35 35	+47 27.5	+84 10.6	9	6
5 H. Cam.	4.3	U	15 39 29	+71 0.9	+60 44.5	11	4
12 H. Drac.	5.3		15 45 6	+62 55.1	+14 42.0	10	4
ζ Urs. min.	4.3		15 47 44	+78 6.7	+29 53.3	10	4
δ Scorpii	2.3		15 54 15	−22 19.7	−70 29.7	10	4
ϑ Dracon.	3.6		15 59 58	+58 50.4	+10 37.4	11	4
φ Herculis	4.0		16 5 31	+45 12.3	− 3 0.4	10	4
τ Herculis	3.3		16 16 39	+46 33.5	− 1 39.3	12	4
η Dracon.	2.6		16 22 36	+61 44.8	+13 31.8	10	4
α Scorpii	1.4		16 23 5	−26 12.2	−74 21.5	9	3
β Herculis	2.3		16 25 47	+21 42.8	−26 29.5	11	4
ζ Ophiuchi	2.6		16 31 29	−10 21.5	−58 32.7	10	3
ζ Herculis	2.6		16 37 24	+31 47.4	−16 25.1	11	3
ε Scorpii	2.3		16 43 30	−34 6.3	−82 12.4	8	3
9 Camelop.	4.3	U	16 43 48	+66 10.0	+65 35.0	8	3
24 Ophiuchi	6.1		16 50 35	−22 59.2	−71 9.1	9	3
ε Urs. min.	4.3		16 56 31	+82 12.4	+33 58.9	10	4
60 Herculis	5.0		17 0 36	+12 52.9	−35 19.2	10	4
η Ophiuchi	2.3		17 4 28	−15 35.8	−63 46.6	14	4
α Aurigae	1.0	U	17 9 5	+45 53.6	+85 42.0	10	5
ϑ Ophiuchi	3.4		17 15 41	−24 53.8	−73 3.3	9	6
51 Ophiuchi	5.1		17 25 8	−23 53.0	−72 2.7	8	7
β Dracon.	2.6		17 28 6	+52 22.7	+ 4 9.8	11	11
ι Herculis	3.3		17 36 33	+46 3.7	− 2 9.1	12	11
β Ophiuchi	3.0		17 38 23	+ 4 36.6	−43 35.2	9	9
γ Ophiuchi	3.6		17 42 44	+ 2 44.8	−45 27.0	11	9
β Aurigae	2.0	U	17 51 58	+44 56.2	+86 37.2	10	10
γ Dracon.	2.3		17 54 13	+51 30.1	+ 3 17.2	14	11
γ Sagitt.	3.3		17 59 11	−30 25.5	−78 33.4	11	10
δ Urs. min.	4.3		18 5 31	+86 36.8	+38 23.2	13	10
ε Lyncis	4.6	U	18 10 32	+59 2.9	+72 41.1	11	8
ψ¹ Aurigae	5.1	U	18 16 58	+49 20.4	+82 19.7	10	8
ε Sagitt.	2.2		18 17 20	−34 26.0	−82 31.6	10	7
χ Dracon.	3.8		18 22 55	+72 41.3	+24 28.0	12	10
Br. 2329	5.8		18 29 19	−11 3.4	−59 14.5	11	10
Br. 2333	6.1		18 32 15	−23 35.6	−71 45.4	10	8
110 Herculis	4.0		18 41 14	+20 26.9	−27 45.4	11	10
24 H. Cam.	4.6	U	18 45 3	+77 6.5	+54 39.3	11	10
15 Lyncis	4.7	U	18 48 22	+58 33.5	+73 10.4	11	9
ο Dracon.	4.6		18 49 41	+59 15.7	+11 2.7	11	9
51 H. Ceph.	5.1	U	18 52 16	+87 12.6	+44 33.6	10	10
ζ Aquilae	3.0		19 0 41	+13 42.6	−34 29.5	11	9
π Sagitt.	3.1		19 3 38	−21 11.2	−69 21.3	11	10
δ Dracon.	3.0		19 12 32	+67 28.8	+19 15.6	13	11
κ Cygni	4.0		19 14 43	+53 10.7	+ 4 57.8	13	11
Gr. 1308	6.0	U	19 20 10	+68 40.5	+63 4.7	10	10
ι Cygni	4.1		19 27 7	+51 30.6	+ 3 17.7	12	10

Stern	Gr.	Culm.	AR.	Decl.	Schb. Z. D.	Anzahl O	Anzahl W
ϑ Cygni	4.6		19h 33m 41s	+49° 58′.9	+ 1° 46′.1	13	10
δ Cygni	2.8		19 41 45	+44 52.8	− 3 19.9	15	12
26 Lyncis	6.1	U	19 47 13	+47 49.9	+83 48.7	10	11
ψ Cygni	5.2		19 52 58	+52 9.9	+ 3 57.0	14	12
c Sagitt.	4.7		19 56 19	−27 59.8	−76 8.6	10	13
27 Lyncis	4.6	U	20 0 43	+51 48.2	+79 53.5	12	11
Br. 1147	5.1	U	20 6 36	+76 4.3	+55 41.4	14	10
o¹ sq. Cygni	4.5		20 10 23	+46 25.7	− 1 47.1	12	10
o Urs. maj.	3.3	U	20 21 42	+61 3.7	+70 40.7	14	10
ϑ Cephei	4.0		20 27 51	+62 38.9	+14 25.8	14	11
Gr. 1460	5.6	U	20 31 40	+53 4.3	+78 38.0	14	10
α Cygni	1.6		20 37 55	+44 54.7	− 3 18.0	14	10
η Cephei	3.6		20 43 12	+61 26.3	+13 13.3	14	10
ω Capric.	4.1		20 45 41	−27 18.3	−75 27.3	10	10
ι Urs. maj.	3.0	U	20 52 9	+48 26.8	+83 12.5	22	10
κ Urs. maj.	3.3	U	20 56 36	+47 33.8	+84 4.5	21	12
ν Aquarii	4.3		21 3 59	−11 47.3	−59 58.4	15	11
α Equulei	4.0		21 10 40	+ 4 49.3	−43 22.5	17	11
α Cephei	2.6		21 16 7	+62 8.9	+13 55.9	22	11
1 H. Drac.	4.3	U	21 22 24	+81 46.9	+49 59.1	30	13
ϑ Urs. maj.	3.0	U	21 25 58	+52 8.8	+79 33.1	12	11
γ Capric.	3.6		21 34 23	−17 7.7	−65 18.3	19	8
ι Pisc. austr.	4.4		21 38 49	−33 29.7	−81 36.0	21	10
π² Cygni	4.3		21 42 59	+48 50.0	+ 0 37.2	21	10
Gr. 1586	6.0	U	21 49 11	+73 22.2	+58 23.4	16	11
η Pisc. austr.	5.7		21 54 55	−28 56.9	−77 5.4	13	10
20 Cephei	5.8		22 1 53	+62 17.0	+14 3.9	14	10
ζ Cephei	3.4		22 7 17	+57 41.6	+ 9 28.6	15	12
ϑ Aquarii	4.3		22 11 24	− 8 17.8	−56 29.1	12	12
γ Aquarii	3.4		22 16 20	− 1 54.4	−50 6.0	12	12
3 Lacertae	4.4		22 19 30	+51 42.8	+ 3 29.9	12	10
7 Lacertae	4.0		22 27 3	+49 45.2	+ 1 32.4	12	11
ε Pisc. austr.	4.3		22 34 58	−27 34.9	−75 43.8	10	11
λ Pegasi	4.0		22 41 34	+23 1.4	−25 10.9	11	9
ι Cephei	3.4		22 46 1	+65 39.5	+17 26.4	11	11
α Pisc. austr.	1.4		22 51 58	−30 10.1	−78 18.1	14	11
β Urs. maj.	2.3	U	22 55 38	+56 56.1	+74 47.4	14	12
ψ Urs. maj.	3.1	U	23 3 52	+45 3.4	+86 30.2	10	10
Br. 3077	6.0		23 8 19	+56 36.0	+ 8 23.1	13	12
γ Piscium	4.0		23 11 49	+ 2 43.2	−45 28.6	11	9
4 Cassiop.	5.8		23 20 16	+61 43.0	+13 30.0	12	10
λ Dracon.	3.3	U	23 25 18	+69 54.0	+61 51.3	12	11
λ Androm.	4.0		23 32 31	+45 54.0	− 2 18.8	12	10
γ Cephei	3.3		23 35 7	+77 3.4	+28 50.0	12	13
χ Urs. maj.	3.8	U	23 40 37	+48 21.0	+83 18.2	10	9
δ Sculptoris	4.6		23 43 34	−28 42.0	−76 50.6	11	10
γ Urs. maj.	2.3	U	23 48 25	+54 16.0	+77 26.8	11	9
ω Piscium	4.0		23 54 1	+ 6 17.6	−41 54.3	11	9

§ 4.

Aufstellungsbestimmungen.

Wenn auch bei Deklinationsbeobachtungen die Kenntnis der Aufstellungskonstanten nicht unmittelbar erforderlich ist, so wurden sie doch von Zeit zu Zeit bestimmt, einmal, um das Instrument unter fortwährender Kontrolle zu halten und ferner, weil sie bei der Reduction extrameridionaler Einstellungen von Polaris auf den Meridian zu berücksichtigen waren; schliesslich konnten aus dem Verhalten der Neigung der Rotationsaxe wertvolle Rückschlüsse auf die Neigung des Pfeilers in der Meridianrichtung und damit auf das Verhalten des Nadirpunktes gemacht werden.

Die Bestimmung der Neigung geschah vermittelst des Niveaus oder des Nadirhorizonts; der Collimationsfehler wurde erhalten durch Richten von Collimator auf Mire oder durch Umlegen des Instruments mit Einstellen auf Nadirhorizont, Mire oder Collimator. Das Azimut selbst ist nicht bestimmt, sondern Deklination und Stundenwinkel der über das Westende hinaus verlängert gedachten Drehungsaxe des Instruments (der BESSEL'schen Grössen n und m) vermittelst Beobachtung von Polsternen.

Man überzeugt sich aus der nachfolgenden Zusammenstellung sofort, dass der Collimationsfehler besonders von Mai 1897 bis April 1898 sich ausserordentlich konstant verhalten hat. Der Grund für die Aenderungen in der ersten Zeit ist mir nicht erkenntlich. Eine Abhängigkeit von der Temperatur ist offenbar nicht vorhanden, und ebenso hat sich ein systematischer Unterschied zwischen den drei zur Verwendung gelangten Methoden nicht ergeben. Die beim Vertauschen von Objectiv und Okular (1898 April 18) eingetretene Aenderung von nur 0ˢ85 (linear ca. 0,1 mm) zeugt für die sorgfältige Anfertigung des Instruments.

Die Neigung lässt deutlich eine jährliche Periode mit starker Amplitude erkennen. 1897 Febr. 16 und September 13 sind Correctionen vorgenommen; zwischen Febr. 27 und März 4 ist aus mir unbekannten Ursachen offenbar ein Sprung vorgekommen. Betrachtet man in allen drei Fällen die Aenderung der Neigung als lediglich durch die Correctionen verursacht und zieht zu Gruppen zusammen, so ergiebt sich folgende Zusammenstellung:

1896	September	$+0^{s}.36$	1897	Aug.-September	$+0^{s}.34$
	Oktober	$+0.28$		Oktober	$+0.34$
	November	$+0.54$		November	$+0.51$
	December	$+0.67$		December	$+0.61$
1897	Januar	$+0.68$	1898	Januar } Februar }	$+0.63$
	Februar	$+0.65$			
	März-Mai	$+0.66$		März-April	$+0.65$
	Juni-Juli	$+0.50$			

Die jährliche Amplitude ergiebt sich bei guter Uebereinstimmung der Monatswerte zu ca. $0^{s}.33$, und zwar liegt im Anfang des Jahres das Westende um so viel höher als im August-Oktober. Zur Untersuchung auf tägliche Schwankungen reicht das vorhandene Material nicht aus. In dem Abschnitt über den Fundamentalpunkt des Kreises wird hierauf noch zurückgekommen.

Auch die Werte von n lassen deutlich eine jährliche Periode mit beträchtlicher Amplitude erkennen. Zu einer eingehenden Untersuchung reicht leider das Material nicht aus; ausserdem scheinen mehrfach Sprünge stattgefunden zu haben, so dass eine Diskussion über das Verhalten des Azimuths und in Verbindung mit den Neigungs- und Nadirbestimmungen über das Verhalten des Pfeilers überhaupt kaum Aussicht auf Erfolg verspricht. Es ist nicht anzunehmen, dass der Pfeiler lediglich eine Schwankung in der West-Ost-Richtung ausführt, sondern vielmehr, dass derselbe eine Art kegelförmiger Bewegung um eine Mittellinie im Laufe eines Jahres und wahrscheinlich auch eines Tages beschreibt und mit ihm die obersten Erdschichten.

Für den vorliegenden Zweck sind indessen die ausgeführten Bestimmungen völlig genügend.

Datum	Temp.	Kreislage	i	c	n	m	Bem.
96 Sept. 9	$+20^{\circ}6$	O/W	$+0^{s}.365$	$-0^{s}.074$			
23	$+13.5$	W/O/W	$+360$	-62			
Okt. 16	$+13.7$	W/O	$+281$	-24			
Nov. 10	$+4.5$	O			$+0^{s}.129$		
12	$+4.5$	O	$+537$	$+25$	$+194$	$+0^{s}.559$	
30	-2.8	O	$+545$	$+125$	$+254$	$+691$	
Dec. 1	0.0	O/W	$+656$	$+113$	$+305$	$+634$	
11	-2.0	W	$+694$	$+138$	$+359$	$+640$	
29	$+0.8$	W	$+649$		$+117$	$+837$	

Datum	Temp.	Kreislage	*i*	*c*	*n*	*m*	Bem.
97 Jan. 20	− 3°4	W	+0°599	+0°160			
30	− 0.8	W/O	+ 762	+ 102	+0°254	+0°616	
Febr. 16	+ 1.2	O/W	+ 650	+ 85			*i* corr.
18	+ 2.0	W	+ 108	+ 37	− 62	+ 238	
27	+ 11.8	W/O/W	+ 187	+ 142			
März 4	+ 7.0	W	− 113	+ 126	− 234	+ 91	
10	+ 3.0	W	− 149				
April 5	+ 2.8	W			− 264	+ 73	
Mai 12	+ 6.8	W	− 149	+ 27	− 261	+ 69	
19	+ 16.5	W/O	− 134	+ 49			
22	+ 17.0	O			− 191	+ 12	Mai 26: Stoss
29	+ 15.8	O	− 225	+ 70	− 158	− 160	gegen Okul.
Juni 5	+ 21.7	O	− 309	+ 98			
11	+ 15.0	O	− 309	+ 78	− 247	− 176	
23	+ 17.0	O	− 307	+ 110	− 135	− 305	
27	+ 21.4	O/W	− 239	+ 82			
Juli 2	+ 25.3	W	− 348	+ 42	− 58	− 457	
Aug. 16	+ 23.0	W	− 433	+ 80			
18	+ 27.0	W	− 497	+ 19	− 266	− 450	
26	+ 18.5	W	− 480	+ 9	− 306	− 378	
Sept. 9	+ 18.0	W			− 399	− 176	
13	+ 15.0	W/O	− 418	+ 48	− 388	− 188	*i* corr.
Okt. 11	+ 10.2	O			− 121	+ 520	
25	+ 8.4	O	+ 188	+ 46			
29	+ 3.4	O			− 197	+ 870	
Nov. 3	+ 3.5	O	+ 360	+ 54			
8	+ 0.2	O	+ 259	+ 73	− 9	+ 580	
19	+ 9.8	O			+ 170	+ 620	
22	+ 7.5	O	+ 472	+ 43			
30	− 1.0	O	+ 456	+ 30	− 80	+ 783	
Dec. 6	+ 0.6	O	+ 467	+ 57	− 35	+ 739	
21	—	O/W	+ 457	+ 63			
98 Jan. 8	+ 1.2	W			+ 90	+ 662	
10	+ 2.1	W	+ 506	+ 83			
Febr. 6	− 0.4	W/O	+ 453	+ 49	+ 254	+ 967	
März 1	+ 3.6	O	+ 550	+ 28	+ 168	+ 663	
3	+ 3.3	O/W	+ 569	+ 41	0	+ 870	
11	+ 1.3	W	+ 607	+ 83	0	+ 870	
33	+ 9.8	W/O	+ 492	+ 75	+ 100	+ 473	
April 11	+ 12.0	O	+ 536	+ 46	+ 176	+ 539	[tauscht.
18	+ 10.0	O	+ 396	+ 71			Obj. u. Ok. ver-
	+ 10.0	O	+ 400	− 767			*c* corr.
27	+ 12.3	W	+ 463	+ 67	+ 113	+ 714	
28	+ 12.5	W	+ 464	+ 59			
Mai 2	+ 14.1	W	+ 318	+ 17	+ 118	+ 607	

§ 5.

Untersuchung der Mikroskope.

Dem Instrument sind 9 Mikroskope, bezeichnet mit den Buchstaben A bis I, beigegeben. Da somit das zweite Hilfsmikroskop zur Bestimmung der Teilungsfehler fehlte, und da andrerseits bei einzelnen häufiger Reparaturen notwendig waren, so erwies sich eine wiederholte Versetzung erforderlich. Aus diesem Grunde geschah die Bezeichnung der Reihenfolge der Ablesungen nicht nach den Buchstaben, sondern je nach dem Platze mit I—IV und der Kreislage. Hierbei bezeichnet I links oben, II links unten, III rechts oben und IV rechts unten. Um einer Erwärmung durch den Körper vorzubeugen, erfolgte die Ablesung in dem Sinne II, I, IV, III. Auf die Berichtigung der Mikroskope wurde stets grosse Sorgfalt verwandt; es sind namentlich ihre Collimationslinien möglichst centriert und senkrecht zur Kreisebene gestellt. Die Vergrösserung ist eine 36fache.

Zur Untersuchung der Mikrometerschrauben sind auf dem Limbus bei dem 0° Striche neben der Hauptteilung Hilfsstriche gezogen in verschiedenen Distanzen von einander, von deren Verwendung jedoch abgesehen werden musste, einmal, weil dieselben zu stark, zum Teil breiter als die Fadenintervalle ausgefallen waren und sodann, weil hierdurch eine immerhin störende Verstellung der Mikroskope erforderlich war. Da ferner der ursprünglich vorhandene zweite Doppelfaden aus den Mikroskopen entfernt war zur Vermeidung von Verwechslungen bei den Zonenbeobachtungen, so musste zu einem anderen Hilfsmittel gegriffen werden.

Stellte man eine Handlampe in der Höhe des zu untersuchenden Mikroskops etwas seitlich in hinlänglicher Entfernung der Limbusfläche gegenüber auf, so zeigten sich bei Abdämpfung der Hauptbeleuchtungslampe auf der Limbusfläche infolge kleiner Unebenheiten oder Staubteilchen kleine, zum Teil scharf begrenzte, helle Lichtpünktchen, die mit grosser Sicherheit durch einen Faden des Mikrometers zu bisecieren waren. Auf diese wurden beide Fäden, deren Entfernung zwischen 25″ bis 27″ variierte, nach einander eingestellt und zwar von 0.2 zu 0.2 Trommelteilen über einen ganzen Umlauf fortschreitend an fünf verschiedenen Stellen, am Mittelrechen und an jeder zweiten und vierten Um-

drehung zu beiden Seiten desselben. Jede Einstellung wurde vier Mal wiederholt und zwar nur mit Rechtsdrehung der Schraube, da ja eine Verwendung derselben nur in diesem Sinne stattfand. Bei dieser Untersuchung, wie überhaupt bei allen dieser Art, hätte eine Uebertragung der Feinbewegung des Kreises nach den Mikroskopen hin die Arbeit sehr erleichtert; das liess sich jedoch mit den vorhandenen Hilfsmitteln nur schwer durchführen. Es wäre gewiss erwünscht, wenn die Erbauer für derartige Vorrichtungen von vorne herein Fürsorge treffen wollten.

Die Abweichungen vom Mittelwert eines Fadenintervalls aus sämmtlichen Einstellungen einer Schraube sind folgende:

Trommel	A	B	C	D	E	F	G	H	I
$0^R.0$	+0″.026	−0″.011	−0″.006	+0″.022	+0″.011	+0″.054	+0″.019	−0″.030	+0″.029
0.2	+ 2	+ 21	− 14	− 18	− 21	− 42	− 13	+ 26	− 19
0.4	− 6	− 11	− 46	− 18	− 21	− 46	− 21	+ 50	− 15
0.6	− 30	− 3	+ 10	− 2	+ 3	− 18	+ 19	+ 10	− 3
0.8	+ 10	+ 5	+ 58	+ 14	+ 27	+ 30	− 5	− 54	+ 5

Je nach der Schärfe des verwandten Lichtpünktchens variieren die mittleren Fehler einer Messung; derselbe beträgt im Mittel für eine Distanz ± 0″.06, woraus man schliessen kann, mit welcher Genauigkeit die Schrauben functionieren. Aber auch die obigen Zahlen lassen erkennen, dass die Schrauben von periodischen Fehlern völlig frei sind und dass eine weitere Untersuchung unnötig ist. Auffallend ist freilich der gleiche Gang bei den Schrauben A, D, E, F und I, dessen Realität bei der Kleinheit der Grössen jedoch sehr zweifelhaft ist. Es ist kaum anzunehmen, dass gleichen Stellen der Trommeln auch gleiche Stellen des Schraubengangs entsprechen; wir würden es somit hier wahrscheinlich nur mit Fehlern in der Trommelteilung zu thun haben, wobei vorauszusetzen ist, dass gleichen Ziffern gleiche Striche entsprechen.

Es sei noch hinzugefügt, dass die Saaltemperatur bei allen Untersuchungen sich zwischen 13—15° hielt.

Der mittlere Fehler eines Fadenintervalls, ± 0″.06, setzt sich zusammen aus zwei Einstellungen, deren jede wiederum aus 4 Bisectionen besteht; der m. F. einer Bisection ergiebt sich also zu ± 0″.08. Dieser kann jedoch nicht identisch betrachtet werden mit dem m. F. einer Einstellung der Mikroskopfäden auf einen Teilstrich. Um diesen zu bestimmen, habe ich die Gesammtheit

der Runbestimmungen (156 Gruppen zu je vier Einst.) benutzt und aus ihnen für die einzelnen Mikroskope folgende Werte abgeleitet:

A $\pm$ 0.″08,	E $\pm$ 0.″08,	H $\pm$ 0.″09,
C $\pm$ 0.12,	F $\pm$ 0.09,	I $\pm$ 0.10.
D $\pm$ 0.08,		

Die Mikroskope B und G sind zu den Runbestimmungen nicht benutzt, da sie erst später von Hensoldt aus Wetzlar zurückkamen, der in alle Mikroskope neue Linsen gesetzt hatte (vgl. Publ. Bd. IV).

Die Verschiedenheit der mittleren Fehler begründet sich teils durch die Ungleichheit der Fadenintervalle in den einzelnen Mikroskopen, teils durch die ungleiche Schärfe der Bilder, die durch die Verschiedenheit der Mattplatten vor den Mikroskopen zur Herstellung diffuser Beleuchtung für die Limbusfläche veranlasst wurde. Sie sind indessen kleiner, als sie z. B. beim Münchner Kreis von Professor Bauschinger erzielt wurden, wo sie im Durchschnitt $\pm$ 0.″11 betrugen. Diese höhere Genauigkeit ist meines Erachtens dem Umstande zuzuschreiben, dass auf Wunsch von Dr. Herz ein Zwei-Minuten-Intervall gleich 3 Revolutionen der Schraube gemacht wurde und dass der Schraubenumgang, d. h. also die Mikrometertrommel, in 100 Teile geteilt wurde, so dass also ein Trommelpars 0.″4 entspricht, und sich noch 0.″04 schätzen lassen. Diese Einrichtung verdient unzweifelhaft Nachahmung, denn einmal wird hierdurch die Reduktion der Beobachtungen ganz wesentlich erleichtert, insofern die Summe der 4 Ablesungen sofort die gewünschten Sekunden mit Zehntel und Hundertstel ergiebt, andrerseits wird auch die Trommelablesung genauer als bei der üblichen Einrichtung. Unter der Annahme gleichen Trommelumfangs von etwa 100 mm hat hier ein Pars die Länge von 1 mm, dessen Zehntel sich sicherlich ebenso genau, wenn nicht überhaupt genauer schätzen lassen, als bei einer Länge von 1,7 mm. Dass die Schrauben und Mikroskope eine solche Genauigkeit noch hergeben, beweisen die mitgeteilten mittl. Fehler einer Einstellung.

Nach den Untersuchungen Foerster's[1]) beträgt die Minimal-

1) W. Foerster: Sur le rapport entre le grossissement des microscopes et la précision des mesures micrométriques. Procès-verbaux du Comité international des Poids et Mesures, séances de 1878.

breite des Netzhautbildes, welche zur Erkennung einer hellen Linie zwischen dem Rande eines dunklen Striches auf hellem Grunde und einem Mikrometerfaden genügt, ungefär 2,5 μ; der wahrscheinliche Fehler, der uns naturgemäss bei der Beurteilung der Genauigkeit der mikrometrischen Einstellung von grösserer Wichtigkeit ist, ist gleich $^1/_{10}$ der Lichtbreite selbst, also gleich 0,25 μ, linear auf der Netzhaut gemessen. Da ein Object von der Breite eines Mikron für das mittlere Auge in der deutlichen Sehweite auf der Netzhaut 0,073 μ beträgt, bei einer Vergrösserung von 36 somit 2,63 μ, so wird der wahrscheinliche Fehler auf das Object übertragen gleich 0,094 μ sein.

Bei dem Ottakringer Kreise entspricht dem zu schätzenden Trommelteil von 0.″04 eine Lineardistanz auf dem Kreise von 0,053 μ; würde man entsprechend der sonst üblichen Einrichtung 0.″1 schätzen, so würde diese Distanz 0,133 μ ausmachen, einen Betrag, der den erreichbaren wahrscheinlichen Fehler einer Einstellung bedeutend übersteigt. Es folgt somit, dass die für den Ottakringer Kreis getroffene Einrichtung theoretisch ihre volle Berechtigung hat; ob auch practisch, hängt von der Frage nach der Gestaltung des wahrscheinlichen Fehlers ab für den Fall, dass man nicht mehr auf den Grenzwert der Lichtlinie zwischen Teilstrich und Faden einstellt, sondern den Strich in die Mitte des Doppelfadens bringt. Je schmaler die Lichtlinien auf beiden Seiten sind, um so kleiner wird der wahrscheinliche Fehler sein. Dass er aber auch bei dieser Sachlage die Grösse von 0,133 μ nicht übersteigt, erscheint nach den obigen Angaben wahrscheinlich.

Wie weit die hier etwas weiter getriebene Vergrösserung der Mikroskope von 36 gegen 25 in München und Strassburg an der Gestaltung des mittleren Fehlers teil hat, ist ohne weiteres nicht zu unterscheiden; zu hoch war sie jedenfalls nicht, denn die Bilder erschienen klar und scharf begrenzt, ohne erkennbare schädliche Wirkungen der Beugung auf die Konturen.

Grosse Vorsicht erheischte die Orientierung der Beleuchtungsspiegel; eine nur geringe Neigung des einen oder anderen verursachte bei den Strichen Lichtreflexe, die die Auffassung der Einstellung wesentlich veränderten. Ebenso störte Nebenlicht die Gleichmässigkeit der Auffassung. Ich halte eine Schutzvorrichtung des gesammten Mikroskopsystems mit Kreis gegen Tageslicht für dringend geboten, wenn anders man nicht Gefahr laufen will, mit

veränderlicher Sonnenstellung, mit vorüberziehenden leichten Haufenwolken, mit dem zeitweiligen Schliessen einzelner Klappen etc. etc. auch seine Auffassung zu ändern. Aus diesem Grunde sind auch die Nadirbestimmungen stets bei geöffnetem Spalt angestellt.

Als charakteristische Fälle führe ich die Polarisreihen von 1897 April 30, Ob. Culm. Kreis West und 1897 Oktober 13/14, Unt. Culm. Kreis Ost an. Die ersten Columnen enthalten die verbesserten Kreisablesungen, die zweiten die scheinbaren Zenithdistanzen. Wie man sieht, zeigen die ersteren einen Sprung: April 30 zwischen der 5. und 6., Okt. 13/14 zwischen der 3. und 4. Einstellung, der sich in den Nadirpunkten wiederspiegelt. Die Uebereinstimmung der Z. D. wird eine gute, wenn man die Aenderung des N. P. nicht der Zeit proportional, sondern plötzlich annimmt.

April 30		Oktober 13/14	
Nadirpunkt 0° 0′ 23″.26		Nadirpunkt 0° 0′ 3″.58	
319° 28′ 22″.15	40° 32′ 1″.11	43° 0′ 30″.91	43° 0′ 27″.33
22.41	0.85	30.65	27.07
22.13	1.13	30.47	26.89
22.46	0.80	31.07	27.07
22.54	0.72	31.27	27.27
23.27	0.80	31.02	27.02
23.51	0.56	31.31	27.31
23.40	0.67	31.21	27.21
23.15	0.92	31.05	27.05
23.49	0.58	31.38	27.38
Nadirpunkt 0° 0′ 24″.07		Nadirpunkt 0° 0′ 4″.00	

Die Annahme ist in beiden Fällen begründet, denn April 30 zeigten bei der 6. Einstellung plötzlich die Teilstriche in den Mikroskopen ein völlig verändertes Aussehen, was dadurch veranlasst wurde, dass sich plötzlich im Zenith eine grosse weisse Haufenwolke gebildet hatte, deren heller Schein teils direct, teils durch die Spiegel die Kreisablesung wesentlich beeinträchtigte. Sie verblieb bis zum Schluss der Beobachtung. Oktober 13/14 war es die gerade kulminierende Sonne selbst, die bei der 2. Einstellung durch Reflexe gegen die Nordwand des Saales die veränderte Beleuchtung plötzlich herbeiführte. Wären in beiden Fällen die Nadirbestimmungen bei geschlossenen Klappen angestellt, so würden die Endwerte einen direct falschen Wert erhalten haben.

Aus gleichen Gründen halte ich es für nicht angezeigt, vom hellen Tageslicht in die Dunkelheit hinein zu beobachten. In § 10 wird hierauf noch zurückzukommen sein.

Der Gangwert der Mikrometerschrauben wurde unter regelmässiger Controlle gehalten. Infolge der bequemen Einrichtung der REPSOLDschen Mikroskope, in denen sich Okular und Objectiv in langen Röhren unabhängig von einander bewegen lassen, ist eine genaue Justierung sehr leicht durchzuführen, wenn ich auch hier die an den Objectivrohren des Strassburger Meridiankreises angebrachten Schrauben und Trommeln für Feinbewegung vermisste. Der Gangwert hat sich aber konstant gehalten, und nur in wenigen Fällen erwies sich eine Berücksichtigung einer Gangcorrection als notwendig.

Bei der Berichtigung gelangt man sehr rasch zum Ziele, wenn man sich die erforderlichen Daten ableitet. Bezeichnet man mit m das Intervall zweier Teilstriche, mit n sein Bild in der Fadenebene, mit a und b die Entfernungen von m und n vom Objectiv, dessen Brennweite f sei, so ergiebt sich, wenn noch $a + b = s$ gesetzt wird, zufolge der Relationen

$$\frac{m}{n} = \frac{a}{b} \text{ und } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

durch Differentiation

$$dn = m \cdot \frac{adb - bda}{a^2}; \; db = -\frac{b^2}{a^2} \cdot da,$$

folglich $$da = -\frac{dn}{n} \cdot \frac{a^2}{s} \text{ und } ds = (b - a)\frac{dn}{n}.$$

Hieraus folgt, dass, wenn das Bild in der Fadenebene zu vergrössern, also dn positiv ist, das Objektiv dem Limbus genähert und das Okular dementsprechend entfernt werden muss.

Die betreffenden Maasse beim Ottakringer Kreise sind folgende: $m = 0.16$ mm, $n = 0.48$ mm, $a = 172$ mm, $b = 490$ mm, also $s = 662$ mm, und ein Trommelpars $= 0.0016$ mm. Hiermit ergeben die obigen Formeln für den Fall, dass das Bild um 10 Partes vergrössert werden soll, dass das Objectiv dem Limbus um 1.5 mm zu nähern, und das Okular mit Mikrometer um 10.6 mm zu entfernen ist, Operationen, die sich mit Leichtigkeit ausführen lassen, wobei natürlich eine strenge Controlle darauf zu üben ist, dass Faden und Bild zugleich in aller Schärfe im Okular erscheinen.

Zur numerischen Bestimmung der Gangcorrection genügt es

nicht, ein einzelnes Teilstrichintervall auszumessen, wegen der Teilungsfehler seiner Endstriche. Misst man aber mehrere nebeneinander liegende Intervalle, etwa n, so verschwinden aus der Summe der einzelnen Messungen die Teilungsfehler der Zwischenstriche und die Differenz derjenigen der Endstriche geht nur mit $^1/_n$ ihres Betrages in das Resultat ein. Verteilt man diese Messungen gleichmässig auf verschiedene Stellen des Kreises, so werden dadurch noch die Fehler eliminiert, die durch eine geneigte Lage des Kreises gegen seine Axe entstehen.

Auf diese Weise gelingt es, die Fehler einer Reihe von Strichintervallen genau zu bestimmen, so dass man für weitere Bestimmungen nur nötig hat, eins oder besser einige dieser bekannten Strichintervalle auszumessen.

Ich habe diese Untersuchung in beiden Kreislagen je zwei Mal an allen Vielfachen der 30° Striche mit je zweimaliger Einstellung ausgeführt und zwar an den beiden die vollen Gradstriche begrenzenden Intervallen; die Resultate giebt die folgende Zusammenstellung:

Strich	K. O. 1896 Juni 9 + 19°4 Mikroskop I	II	III	IV	K. O. 1896 Nov. 2 + 9°0 Mikroskop I	II	II	IV	Teilungsfehler K. O.
15°	+ 0ᵖ8	— 0ᵖ7	+ 0ᵖ6	+ 0ᵖ7	— 0ᵖ4	+ 1ᵖ0	+ 0ᵖ2	— 0ᵖ5	+ 0″035
	— 1	— 1.0	0	— 0.3	— 5	+ 0.9	+ 3	— 4	— 130
45	+ 1	+ 0.8	— 5	— 0.3	— 4	+ 5	+ 3	— 7	— 060
	— 5	+ 1	— 4	— 0.6	— 4	— 1	+ 3	— 2	— 150
75	— 4	0	+ 6	+ 1.1	— 5	+ 1.1	+ 5	+ 1	+ 065
	+ 2	— 5	— 9	+ 0.4	— 8	+ 0.2	— 5	— 1.3	— 220
105	+ 4	+ 5	0	+ 0.8	— 3	+ 3	+ 8	+ 0.1	+ 070
	0	+ 5	— 3	+ 1.3	— 1	+ 4	+ 7	— 4	+ 045
135	+ 9	+ 6	— 4	+ 1.3	— 4	+ 5	+ 1	— 4	+ 050
	— 2	— 4	— 1.0	— 0.1	— 4	+ 8	— 1	— 1	— 135
165	+ 6	— 5	— 0.3	+ 0.7	0	+ 8	+ 3	+ 5	+ 045
	+ 3	0	+ 1.0	+ 1.9	+ 4	+ 9	+ 4	— 2	+ 175
195	+ 8	+ 1	— 0.6	+ 1.5	— 1	+ 3	0	+ 2	+ 050
	— 7	— 5	+ 6	+ 1.1	— 2	+ 8	+ 7	0	+ 070
225	+ 1.9	+ 5	0	+ 0.7	— 4	+ 3	+ 2	— 1	+ 095
	+ 0.7	— 7	— 3	+ 0.4	— 1.0	— 3	— 1	+ 1	— 110
255	+ 2	— 5	0	+ 0.5	— 0.3	+ 5	— 4	— 4	— 080
	— 3	+ 4	+ 3	+ 0.3	— 4	+ 8	+ 1.0	0	+ 045
285	+ 1.1	— 2	— 5	+ 0.6	— 5	+ 6	+ 0.2	— 7	— 030
	+ 0.8	+ 3	— 1	+ 1.1	— 3	— 2	+ 1	— 1	+ 020
315	+ 4	+ 2	+ 4	+ 0.9	— 5	+ 3	+ 2	— 5	+ 010
	+ 1.0	+ 9	0	+ 0.2	— 7	+ 3	+ 5	0	+ 050
345	+ 1.0	0	— 4	+ 1.2	+ 5	+ 9	+ 1	+ 6	+ 135
	+ 0.4	+ 3	0	+ 0.9	— 1.0	0	— 1	— 9	— 070
Mittel	+ 0.39	0.00	— 0.09	+ 0.68	— 0.36	+ 0.48	+ 0.24	— 0.22	
	R = + 0″10				R = + 0″01				

Strich	K. W. 1896 Sept. 24 + 14°0				K. W. 1896 Okt. 15. + 15°0				T.-Fehler
15°	+ 0ᵖ.3	− 0ᵖ.5	− 0ᵖ.2	+ 0ᵖ.2	− 0ᵖ.4	− 0ᵖ.1	− 0ᵖ.3	+ 0ᵖ.9	+ 0″025
	− 9	+ 2	+ 2	− 6	+ 2	− 5	− 1	− 8	− 085
45	+ 2	+ 5	− 8	− 6	+ 1	+ 5	+ 2	+ 2	+ 075
	− 4	− 1.4	− 3	− 1	− 3	− 6	− 7	− 7	− 195
75	− 6	− 0.2	+ 1	0	− 1	+ 4	+ 5	+ 7	+ 065
	− 3	− 1.8	− 3	− 2	− 9	− 1.2	− 2	− 1.1	− 270
105	− 2	0.0	− 2	+ 1	0	− 3	+ 2	+ 0.8	+ 050
	0	− 5	+ 7	+ 5	+ 3	+ 5	+ 1.0	+ 1	+ 160
135	0	+ 2	+ 7	− 1	− 1	+ 3	0.0	+ 4	+ 100
	− 5	− 8	− 2	− 2	− 8	− 4	− 5	− 3	− 155
165	− 2	0	+ 2	+ 6	− 6	+ 3	+ 3	+ 2	+ 070
	+ 5	+ 2	+ 6	− 1	+ 4	+ 6	+ 1.3	+ 5	+ 240
195	+ 5	+ 6	+ 4	+ 5	+ 3	− 2	+ 0.6	+ 4	+ 185
	+ 3	+ 5	0	0	0	− 1	+ 4	+ 5	+ 110
225	− 2	+ 6	− 1	+ 4	+ 4	0	+ 4	− 3	+ 090
	+ 4	− 4	+ 4	− 1	− 8	− 5	+ 2	+ 1	− 005
255	− 2	− 7	− 3	− 4	− 5	− 2	− 2	− 6	− 125
	+ 5	− 8	− 4	− 5	0	− 1	− 4	+ 5	− 030
285	+ 3	+ 3	− 1	− 1	− 1	− 2	+ 6	− 4	+ 045
	− 5	− 5	− 6	− 1	− 1	− 1.1	− 5	− 7	− 175
315	− 1	+ 2	− 6	0	+ 8	− 6	+ 2	− 3	+ 010
	− 5	− 4	− 5	− 7	− 1.1	− 4	− 3	+ 1	− 170
345	− 5	− 4	+ 6	+ 4	+ 0.5	+ 3	+ 7	+ 7	+ 145
	0	+ 6	0	− 5	− 6	− 8	− 6	− 7	− 180
	−0.09	−0.19	−0.03	−0.07	−0.14	−0.18	+0.12	+0.01	
	R = −0″04				R = −0″02				

Die Vorzeichen sind in dem Sinne von „Correction" und nicht Fehler genommen; so zeigt das Minuszeichen an, dass auf das betreffende Intervall mehr als drei Schraubenrevolutionen gehen. In der ersten Columne stehen die Gradzahlen, wie sie im Mikroskop I erscheinen, nicht im Index, und zwar bezieht sich die erste Horizontalreihe auf das vorangehende Intervall 58′ — 0′, die zweite auf das folgende 0′ — 2′. Das Mittel aller Differenzen giebt die Gangcorrection; bringt man diese für jedes Mikroskop gesondert an, so erhält man die Differenz der Teilungsfehler der beiden Endstriche. Diese sind in der letzten Columne gegeben und zeigen für beide Kreislagen eine sehr befriedigende Uebereinstimmung.

Für die weiteren Untersuchungen des Gangwertes sind folgende Intervalle benutzt worden:

14°58′ — 15°0′	= 119″97	194°58′ — 195°0′	= 119″88
15 0 — 15 2	120.11	195 0 — 195 2	119.91
104 58 — 105 0	119.94	284 58 — 285 0	119.99
105 0 — 105 2	119.90	285 0 — 285 2	120.98.

Hieraus haben sich nachfolgende Gangcorrectionen ergeben, zu denen nur hinzuzufügen ist, dass 1897 Febr. 20 nach der ausgeführten Bestimmung eine geringe Correction von Mikroskop III (I) vorgenommen ist.

Zusammenstellung der Gangcorrectionen.

Datum	Kreislage	Mikroskope I	II	III	IV	Mittel	Temp.	Mikroskope I	II	III	IV
96 Juni 9	O	+0.″16	0.″00	−0.″04	+0.″27	+0.″10	+19.°4	F	I	C	H
Sept. 10	O	+0.02	+0.04	+0.08	+0.26	+0.10	+18.6	"	"	"	"
24	W	−0.04	−0.08	−0.01	−0.03	−0.04	+14.0	D	I	E	H
Okt. 15	W	−0.06	−0.07	+0.05	0.00	−0.02	+15.0	"	"	"	"
Nov. 2	O	−0.14	+0.19	+0.10	−0.09	+0.01	+ 9.0	C	H	F	A
97 Febr. 20	W	+0.02	−0.03	+0.18	+0.04	+0.05	+ 2.0	B	A	I	G
März 10	W	−0.02	−0.03	0.00	−0.05	−0.03	+ 3.0	"	"	"	"
April 27	W	−0.05	+0.01	+0.05	+0.05	−0.02	+12.8	"	"	"	"
Juni 22	O	−0.01	−0.08	−0.03	−0.14	−0.07	+15.4	C	H	F	A
Sept. 13	W	−0.08	+0.04	+0.03	−0.09	−0.02	+15.0	B	A	I	G
Dec. 20	O	+0.08	+0.06	−0.11	+0.05	+0.02	0.0	F	D	C	H
98 Jan. 10	W	−0.11	−0.10	−0.11	−0.10	−0.10	+ 2.1	B	A	I	G
März 3	O	+0.05	+0.03	−0.04	0.00	+0.01	+ 3.3	F	D	C	H
31	W	−0.04	−0.01	0.00	−0.05	−0.02	+ 9.8	B	A	I	G
April 19	O	−0.02	−0.01	−0.01	+0.02	0.00	+13.1	F	D	C	H
Mai 9	W	+0.02	+0.03	+0.04	−0.03	+0.02	+12.0	B	A	I	G

Um ein immerhin interessantes Urteil über die Excentricität des Kreises zu gewinnen, ist dieselbe aus zwei Sätzen der Gangwert-Bestimmungen abgeleitet worden; sie hat sich ergeben zu

$$e = 9.''33 \quad \text{und} \quad P = 297.^\circ 2,$$

deren Bedeutung ohne weiteres verständlich ist.

§ 6.

Untersuchung des Kreises.

Da die Bestimmung der Teilungsfehler, die bis dahin noch nicht durchgeführt war, neben den Beobachtungen am Himmel herlaufen musste, so war dieser Arbeit von vornherein eine gewisse Beschränkung auferlegt, und die Untersuchung sämmtlicher Teilstriche, wie sie bei dem heutigen Stande der Beobachtungskunst besonders für Fundamentalbeobachtungen zu fordern ist, ausgeschlossen. Die Untersuchungen neuerer Repsold'scher Kreise, besonders des Strassburger und des Münchener, haben ergeben, dass die periodischen Teilungsfehler nur gering sind und zum

Teil durch die zufälligen verdeckt werden. Wie weit bei dem Strassburger Kreise eine bessere Uebereinstimmung der beiden Kreislagen durch Berücksichtigung der Teilungsfehler erzielt wird, habe ich nicht ohne weiteres ersehen können; das von Professor BAUSCHINGER für den Münchner Kreis gefundene negative Resultat bedarf wegen eines Vorzeichenfehlers der Revision.

Aus den genannten Gründen musste und konnte der Zweck meiner Arbeit zunächst nur dahin gehen, aus der Untersuchung einer beschränkten Anzahl von Strichen einige Anfangsglieder der periodischen Function abzuleiten, um ein ungefähres Urteil von der Grösse der zufälligen Teilungsfehler zu gewinnen.

Eine Unterstützung bei der Arbeit war nicht vorhanden; ich würde sie auch abgelehnt haben, denn es will mir scheinen, dass ein Zusammenarbeiten Mehrerer nur auf Kosten der Homogenität geschehen kann, und dass, falls die Beobachter zu gleicher Zeit thätig sind, hierdurch eine gewisse Unruhe verursacht wird.

In Bezug auf das einzuschlagende Verfahren konnte für mich an sich kein Zweifel bestehen, jenes zu wählen, welches meines Wissens zuerst in einem speciellen Fall von GROMADZKI für die Untersuchung des Moskauer Kreises[1]) angewandt ist, dann von General SCHREIBER[2]) theoretisch weiter ausgearbeitet und von Prof. H. BRUNS[3]) ganz allgemein und erschöpfend behandelt ist. Es mag lediglich mit der hohen Autorität ihres Begründers zu erklären sein, dass die alte BESSELsche Methode, trotzdem Besseres bekannt ist, auch jetzt noch so häufig zur Anwendung gelangt.

Die Vorzüge der neueren Methoden bestehen darin, dass sämmtliche Strichcorrectionen aus der Ausgleichung mit gleichem Gewicht hervorgehen und zwar mit dem grössten, welches überhaupt mit der durch die Anordnung vorgeschriebenen Zahl von Beobachtungen erreichbar ist, und ferner, dass die Rechenarbeit selbst bei grosser Strichzahl als Arbeitsleistung kaum in Betracht kommt.

Zur Bestimmung der Durchmesser-Correctionen der Vielfachen der 20° Striche, auf die ich mich aus dem angeführten Grunde zunächst beschränken wollte, sind den Mikroskopen nach einander die Entfernungen zu geben: 20°, 40°, 60° und 80°. Dadurch ent-

1) Annales de l'observatoire de Moscou. Vol. II.
2) Zeitschrift für Instrumentenkunde. 1886. Jahrgang 6.
3) Astron. Nachr. Band 130.

steht ein System von 36 Bedingungsgleichungen, in dem jede Unbekannte 8 Mal vertreten ist. Die Normalgleichungen führen auf die einfache Form

$$x_0 = 8 n_0$$
$$x_1 = 8 n_1 \text{ u. s. w.}$$

wo die n aus den beobachteten Ablesungen durch einfache Summation hervorgehen, so dass also jede Unbekannte mit dem achtfachen Gewicht einer Ablesung bestimmt ist.

Ich muss mich mit diesem kurzen Hinweise begnügen, mit dem ich hauptsächlich die Aufmerksamkeit aller jener Astronomen auf dieses Verfahren gelenkt haben will, die unter günstigeren Verhältnissen in der Lage sind, eine Teilungsfehleruntersuchung auszuführen; denn als die Arbeit bereits weit vorgeschritten war, nahm ich erst wahr, dass unbeschadet des durchaus notwendigen Fortgangs der Himmelsbeobachtungen und infolge der breiten Speichen der grossen Lagertrommeln den Mikroskopen nicht die gewünschten Stellungen von 40° und 80° gegeben werden konnten, so dass ich mich auf 20° und 60° beschränken musste.

Um allen Missverständnissen bezüglich des anzuwendenden Vorzeichens von vorne herein vorzubeugen, soll mit „Strichcorrection“ jene Grösse bezeichnet werden, die an die Kreisablesung wegen etwa vorhandener Teilungsfehler anzubringen ist; dieselbe ist positiv, wenn der wirkliche Teilstrich dem idealen im Sinne der Teilung nachfolgt.

Es seien in beistehender Figur A und B die Oerter zweier Mikroskope, o und r zwei Teilstriche, p und s ihre idealen Lagen. Bedeutet (A, o) die Einstellung des Mikroskops A auf o, dessen Strichcorrection gleich $op = (o)$ ist, so sind auch die Symbole (B, r) und (r) sofort verständlich; und es ist

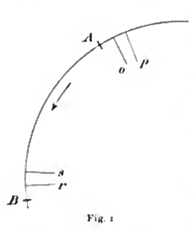


Fig. 1

$$(A, o) + (o) = \alpha$$
$$(B, r) + (r) = \alpha + a$$

wo α eine Grösse bedeutet, die von der Stellung des Kreises zum Mikroskopsystem abhängt, bei Schreiber Orientierungsfehler genannt, und a der Abstand der beiden Mikroskope. Durch Subtraction ergiebt sich $(B, r) - (A, o) + (r) - (o) = a$.

Auf einen concreten Fall angewandt, ergiebt sich, wenn wir noch beachten, dass, da stets 4 Mikroskope abgelesen sind, von denen je zwei um 180° von einander entfernt waren, (A, o) identisch ist mit dem Mittel aus (A, o) und $(C, 180)$, und (o) mit jenem aus (o) und (180) etc., folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
(B, \ \ 0) - (A, 120) + (\ \ 0) - (120) &= a_{60} \\
(B, \ 20) - (A, 140) + (\ 20) - (140) &= a_{60} \\
(B, \ 40) - (A, 160) + (\ 40) - (160) &= a_{60} \\
(B, \ 60) - (A, \ \ \ 0) + (\ 60) - (\ \ \ 0) &= a_{60} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(B, 140) - (A, \ 80) + (140) - (\ 80) &= a_{60} \\
(B, 160) - (A, 100) + (160) - (100) &= a_{60}.
\end{aligned}$$

Ein gleiches System ergiebt sich aus der Entfernung der Mikroskope um 20°, so dass wir im Ganzen 16 Bedingungsgleichungen mit 9 Unbekannten erhalten, von denen über die eine (o) frei verfügt werden kann; am bequemsten setzt man sie gleich 0.″00. Wie man sofort sieht, gehen auch hieraus die gesuchten Strichcorrectionen mit gleichem Gewicht hervor; jedoch ist wegen der complicierteren Form der Normalgleichungen der Rechenaufwand ein ungleich grösserer.

Hauptsächlich zur Controlle ist, sobald sich während der Beobachtungen die Zeit hierzu bot, die Reihe

$$(B, 90) - (A, 0) + (90) - (0) = a_{90} \text{ etc.}$$

gemessen worden. Wie man aus den mitgeteilten Daten sieht, stimmt der ganz unabhängig gefundene Wert (90) sehr gut mit dem aus der Ausgleichung hervorgehenden überein. Bemerken muss ich noch, dass von dem System (60°) eine Reihe von Sätzen leider nicht mehr zur Ausführung gelangen konnte.

Um auch in Bezug auf die weiteren Rechnungen alle Zweifel bezüglich des Vorzeichens zu heben, gebe ich folgenden kurzen Auszug aus dem Beobachtungsbuch:

Mikroskop A: 0°.	Mikr. A 1.^R243		Mikr. B 0.^R958		
	C 0.988	1.116	D 1.158	1.058	
60°.	A 0.504		B 0.643		
	C 0.623	0.564	D 0.404	0.524	
120°.	A 0.176		B 0.500		
	C 0.716	0.446	D 0.239	0.370.	

Hieraus ergiebt sich $a_{60} = 60^0 - 0^R058$,

$$(60) - (0) = 0^R000 = 0''00$$
$$(120) - (60) = -0.018 = -0''72.$$

Die Bedingungsgleichungen erhielten folgende Gestalt:

(20)—(0) = +0″052 ± 0″019	(140)—(120) = +0″082 ± 0″023
(40)—(20) = −0.462 ± 0.024	(160)—(140) = +0.089 ± 0.026
(60)—(40) = +0.298 ± 0.018	(0)—(160) = +0.553 ± 0.026
(80)—(60) = −0.412 ± 0.027	(60)—(0) = −0.143 ± 0.015
(100)—(80) = −0.190 ± 0.026	(120)—(60) = −0.582 ± 0.018
(120)—(100) = −0.025 ± 0.026	(90)—(0) = −0.719 ± 0.025

Jede Bestimmung ist etwa 36 Mal, in jeder Kreislage 18 Mal durchgeführt. Die Auflösung ergiebt:

(0) = 0″000	(90) = − 0″719 ± 0″016
(20) = + 0.045 ± 0″013	(100) = − 0.719 ± 0.019
(40) = − 0.424 ± 0.013	(120) = − 0.733 ± 0.016
(60) = − 0.131 ± 0.014	(140) = − 0.658 ± 0.016
(80) = − 0.536 ± 0.016	(160) = − 0.556 ± 0.014.

Wenn auch diese Grössen jene des Strassburger und Münchner Kreises nicht übersteigen, so erschien mir eine Ausdehnung der Untersuchung doch notwendig, da besonders im ersten Quadranten ein gesetzmässiger Verlauf noch nicht zu erkennen war. Ausserdem hatte ich bereits aus den stets sofort angenähert reducierten Beobachtungen das Vorhandensein eines systematischen Unterschiedes in den beiden Kreislagen erkannt. Ich entschloss mich deshalb, auch noch die 5° Striche zu bestimmen, in der Weise, dass die Mikroskope auf 25° Entfernung gestellt und so die 5° Striche in einen Satz (100) — (0) eingehängt wurden, da die mittleren Fehler der 20° Striche eine völlig ausreichende Genauigkeit der weiteren Resultate erwarten liessen. Die Beobachtungsresultate sind folgende:

(25)—(0) = +0″26	(70)—(45) = −0″33	(115)—(90) = −0″24	(160)—(135) = +0″35
(30)—(5) = −0.28	(75)—(50) = −0.64	(120)—(95) = +0.17	(165)—(140) = +0.74
(35)—(10) = −0.69	(80)—(55) = −0.48	(125)—(100) = −0.66	(170)—(145) = +0.46
(40)—(15) = −0.21	(85)—(60) = −0.78	(130)—(105) = −0.11	(175)—(150) = +0.14
(45)—(20) = −0.26	(90)—(65) = −0.23	(135)—(110) = −0.30	(180)—(155) = +0.32
(50)—(25) = −0.12	(95)—(70) = −0.30	(140)—(115) = +0.14	(5)—(160) = +0.55
(55)—(30) = +0.23	(100)—(75) = −0.20	(145)—(120) = −0.09	(10)—(165) = +0.02
(60)—(35) = +0.46	(105)—(80) = −0.44	(150)—(125) = +1.11	(15)—(170) = +0.19
(65)—(40) = +0.12	(110)—(85) = −0.30	(155)—(130) = +0.77	(20)—(175) = +0.19

Jeder Satz ist vier Mal gemessen worden. Der mittlere Fehler einer der Grössen ergiebt sich aus dem gesammten Material berechnet zu $E = \pm 0''.058$. Nimmt man den m. F. der Endstriche im Mittel zu $e = \pm 0''.016$, so ergiebt sich der m. F. des ersten und dritten der eingehängten Striche zu $\pm 0''.051$ und der des zweiten zu $\pm 0''.059$ nach der bekannten Formel:

$$\varepsilon = \sqrt{r\left(1-\frac{r}{m}\right)E^2 + \left\{\left(1-\frac{r}{m}\right)^2 + \left(\frac{r}{m}\right)^2\right\}e^2},$$

wo m die Anzahl der Unterabteilungen und r der betreffende eingehängte Strich ist.

Das Gesammtresultat giebt folgende Tabelle:

Mikr. A	Index	Corr.	Mikr. A	Index	Corr.	Mikr. A	Index	Corr.
0°	135°	0″.000	60°	15°	−0″.131	120°	75°	−0″.733
5	140	−0.006	65	20	−0.304	125	80	−1.379
10	145	+0.102	70	25	−0.545	130	85	−1.086
15	150	−0.173	75	30	−0.519	135	90	−0.911
20	155	+0.045	80	35	−0.536	140	95	−0.658
25	160	+0.260	85	40	−0.911	145	100	−0.823
30	165	−0.286	90	45	−0.719	150	105	−0.269
35	170	−0.588	95	50	−0.845	155	110	−0.326
40	175	−0.424	100	55	−0.719	160	115	−0.556
45	0	−0.215	105	60	−0.976	165	120	+0.082
50	5	+0.140	110	65	−0.611	170	125	−0.363
55	10	−0.056	115	70	−0.774	175	130	−0.129

An das Mittel aus den Ablesungen aller vier Mikroskope ist somit, auf den Index bezogen, folgende Correction anzubringen:

Index				Strichcorr.	$F(z)_{16}$	$F(z)_{20}$	Δ_{16}	Δ_{20}
0°	90°	180°	270°	0″.000	0″.000	+0″075	0″000	−0″075
5	95	185	275	+0.304	+0.242	+0.171	+ 62	+ 133
10	100	190	280	+0.123	+0.286	+0.235	− 163	− 122
15	105	195	285	+0.363	+0.226	+0.315	+ 137	+ 48
20	110	200	290	+0.248	+0.209	+0.228	+ 39	− 20
25	115	205	295	+0·012	+0.213	+0.118	− 201	− 106
30	120	210	300	+0.345	+0.172	+0.185	+ 173	+ 160
35	125	215	305	+0.113	+0.112	+0.203	+ 1	− 90
40	130	220	310	+0.043	+0.130	+0.085	− 87	− 42
45	135	225	315	+0.203	+0.180	+0.105	+ 23	+ 98
50	140	230	320	+0.138	+0.162	+0.233	− 24	− 95
55	145	235	325	+0.254	+0.110	+0.161	+ 144	+ 93
60	150	240	330	−0.012	+0.154	+0.065	− 166	− 77
65	155	245	335	+0.280	+0.267	+0.248	+ 13	+ 32
70	160	250	340	+0.306	+0.247	+0.342	+ 59	− 36
75	165	255	345	+0.053	−0.008	−0.021	+ 61	+ 74
80	170	260	350	−0.421	−0.272	−0.363	− 149	− 58
85	175	265	355	−0.192	−0.266	−0.221	+ 74	+ 29

Die Darstellung durch eine periodische Function ergiebt:

$$\begin{aligned}F(z) = +0.''120 - 0.''077 \cos 4z + 0.''072 \sin 4z \\ - 0.081 \cos 8z + 0.121 \sin 8z \\ - 0.013 \cos 12z + 0.109 \sin 12z \\ + 0.051 \cos 16z + 0.058 \sin 16z \\ + 0.075 \cos 20z - 0.059 \sin 20z.\end{aligned}$$

Die obige Tabelle enthält die Werte der Function bis zum 16- und 20fachen des Winkels und deren Abweichungen Δ_{16} und Δ_{20} im Sinne Beob.-Rechnung. Betrachtet man diese letzteren lediglich als zufällige Teilungsfehler, so liefern sie uns ein Kriterium darüber, bis zu welchem Gliede der periodischen Function wir zu gehen haben, sobald wir nämlich aus anderweitigen Beobachtungen uns ein Urteil über die thatsächliche Grösse der zufälligen Teilungsfehler zu verschaffen in der Lage sind.

Bei der Bestimmung des Gangwerts der Mikrometerschrauben haben wir die zufälligen Teilungsfehler von 24 Intervallen kennen gelernt. Machen wir die immerhin zulässige Annahme, dass bei den in Frage kommenden 36 Strichen die zufälligen Teilungsfehler ebenso oft positiv wie negativ sind, so liefert uns das Gesammtmittel einen mittleren Wert dieser Grössen; derselbe beträgt für zwei Durchmesser 0.''113. Ferner sind von Dr. Schwarzschild und mir eine Reihe von Strichen nach der für die Untersuchung geradliniger Teilungen von Gill und Lorentzen vorgeschlagenen Methode ausgemessen worden. Hieraus findet sich der mittlere Wert des zufälligen Fehlers zu 0.''105, in guter Uebereinstimmung mit dem obigen.

Bringt man keine Correction wegen Teilungsfehler an, so ist nach den mitgeteilten Zahlen als mittlerer Fehler einer Position, so weit er von diesen herrührt, $\pm$ 0.''24 zu erwarten; berücksichtigt man jedoch in der periodischen Function die Glieder bis zum 16fachen des Winkels, so reduciert er sich auf $\pm$ 0.''112, und bis zum 20fachen auf $\pm$ 0.''089, so dass es also wohl zulässig erscheint, diese Glieder bei der Entwickelung noch mitzunehmen.

Es geht ferner hieraus hervor, dass bei Beobachtungen in beiden Kreislagen der mittlere von den zufälligen Teilungsfehlern herrührende Fehler einer Position etwa $\pm$ 0.''065 betragen wird. Bei der Geringfügigkeit dieser Zahlen kann über die Realität der

abgeleiteten Teilungsfehler kein Zweifel sein, und es steht zu erwarten, dass die Beobachtungen in den beiden Kreislagen eine bemerkenswerte Annäherung an einander erfahren werden; mit dieser Untersuchung werden wir uns nunmehr beschäftigen. Zuvor aber mögen die Strichcorrectionen für jeden Grad des Quadranten folgen; die Gradzahl ist nur für den ersten Quadranten gegeben, und zwar wie sie im Indexrohr erscheint.

Zusammenstellung der Strichcorrectionen.

0°	+ 0″075	23°	+ 0″146	46°	+ 0″134	69°	+ 0″362
1	+ 100	24	+ 132	47	+ 164	70	+ 343
2	+ 134	25	+ 119	48	+ 191	71	+ 303
3	+ 153	26	+ 119	49	+ 216	72	+ 242
4	+ 162	27	+ 128	50	+ 234	73	+ 165
5	+ 170	28	+ 143	51	+ 239	74	+ 074
6	+ 179	29	+ 164	52	+ 232	75	− 022
7	+ 188	30	+ 180	53	+ 218	76	− 116
8	+ 200	31	+ 196	54	+ 190	77	− 202
9	+ 216	32	+ 212	55	+ 160	78	− 286
10	+ 234	33	+ 218	56	+ 125	79	− 331
11	+ 257	34	+ 213	57	+ 098	80	− 364
12	+ 276	35	+ 202	58	+ 074	81	− 374
13	+ 296	36	+ 186	59	+ 062	82	− 362
14	+ 308	37	+ 160	60	+ 064	83	− 328
15	+ 314	38	+ 132	61	+ 080	84	− 281
16	+ 314	39	+ 107	62	+ 109	85	− 220
17	+ 303	40	+ 084	63	+ 152	86	− 156
18	+ 282	41	+ 070	64	+ 199	87	− 087
19	+ 249	42	+ 062	65	+ 249	88	− 026
20	+ 229	43	+ 064	66	+ 296	89	+ 030
21	+ 198	44	+ 082	67	+ 334	90	+ 075
22	+ 168	45	+ 105	68	+ 356		

Die folgende Zusammenstellung giebt die endgültigen Werte der Zenithdistanzen der beiden Kreislagen, die Anzahl der Beobachtungen derselben in jeder Lage, ferner unter $\Delta_{\rm I}$ die Differenz K. O. — K. W. ohne und unter $\Delta_{\rm II}$ dieselbe nach Anbringung der Strichcorrectionen, jedoch ohne Biegungscorrection. Die Columne $\Delta_{\rm III}$ findet später ihre Erklärung.

Stern	AR.	Z. D.	K. O.	Anz.	K. W.	Anz.	Δ_I	Δ_{II}	Δ_{III}
f Puppis	7h 33m	82° 57′	1″95	5	0″74	4	+1″19	+1″33	+1″21
ε Sagitt.	18 17	82 38	45.05	10	46.65	7	−1.62	−1.48	−1.60
α Columb.	5 36	82 20	31.89	4	32.28	4	−0.41	−0.26	−0.39
ε Scorpii	16 43	82 19	8.84	8	7.00	1	+1.81	+1.97	(+1.84)
X Eridani	4 14	82 15	48.63	7	49.26	2	−0.66	−0.50	−0.63
ι Pisc. austr.	21 39	81 42	31.65	21	31.42	10	+0.20	+0.36	+0.23
β Fornacis	2 45	81 3	7.29	10	7.55	3	−0.28	−0.13	−0.26
ξ Hydrae	11 28	79 30	4.09	9	2.51	11	+1.62	+1.71	+1.58
Lac. μ Forn.	2 8	79 25	12.84	12	11.74	5	+1.14	+1.23	+1.10
α Antliae	10 22	78 45	23.69	9	22.94	11	+0.82	+0.88	+0.75
γ Sagitt.	17 59	78 38	17.21	11	17.59	10	−0.32	−0.25	−0.38
α Pisc. austr.	22 52	78 22	53.04	14	52.00	11	+1.13	+1.17	+1.04
ζ Can. maj.	6 16	78 13	50.78	4	51.12	5	−0.22	−0.21	−0.34
υ′ Eridani	4 30	78 11	16.22	5	16.54	2	−0.20	−0.19	−0.32
α Sculptoris	0 54	78 7	38.32	12	37.99	13	+0.45	+0.46	+0.33
ι Sculptoris	0 16	77 45	50.60	11	51.59	9	−0.82	−0.86	+0.99
12 Eridani	3 8	77 36	22.83	9	22.64	4	+0.36	+0.32	+0.19
η Pisc. austr.	21 55	77 9	40.33	13	38.98	10	+1.59	+1.49	+1.35
ε Can. maj.	6 55	77 2	42.03	4	42.07	4	+0.19	+0.09	−0.04
τ Navis	7 39	76 55	19.18	7	17.80	4	+1.62	+1.52	+1.38
δ Sculptoris	23 44	76 54	47.73	11	46.17	10	+1.56	+1.46	+1.56
λ Pyxidis	9 19	76 36	23.97	9	23.27	10	+0.98	+0.84	+0.70
κ² Sculptoris	0 6	76 35	11.51	10	11.09	9	+0.70	+0.56	+0.42
c Sagitt.	19 57	76 12	32.86	10	31.95	13	+1.24	+1.05	+0.91
ε Pisc. austr.	22 35	75 47	37.81	10	37.54	11	+0.60	+0.41	+0.27
ω Capric.	20 46	75 31	3.25	10	2.87	10	+0.81	+0.52	+0.38
B. A. C. 4253	12 32	74 46	56.77	8	56.32	11	+0.87	+0.56	+0.45
δ Can. maj.	7 4	74 26	34.03	7	35.22	4	−0.72	−1.01	−1.19
α Scorpii	16 23	74 24	58.65	9	58.26	1	+0.91	+0.53	+0.39
π Hydrae	14 0	74 23	56.69	10	56.73	7	+0.46	+0.08	−0.04
ϑ Ophiuchi	17 16	73 6	33.83	9	34.47	6	−0.03	−0.50	−0.64
κ Fornacis	2 18	72 29	50.34	11	51.05	5	−0.07	−0.56	−0.71
51 Ophiuchi	17 25	72 5	45.73	7	45.07	7	+1.33	+0.81	+0.66
Br. 2333	18 32	71 48	20.39	10	20.24	8	+0.82	+0.30	+0.15
24 Ophiuchi	16 51	71 11	58.46	9	58.61	2	+0.55	0.00	−0.15
δ Scorpii	15 54	70 32	29.10	10	28.20	2	+1.62	+1.05	+0.90
π Sagitt.	19 4	69 24	0.76	11	0.75	10	+0.72	+0.16	+0.01
β Leporis	5 24	69 3	17.08	4	16.80	4	+0.99	+0.43	+0.28
Lal. 18817	9 28	68 52	22.47	9	22.88	10	+0.30	−0.26	−0.41
Lal. 24277	12 58	68 14	35.83	8	36.21	14	+0.31	−0.23	−0.38
54 Eridani	4 36	68 4	56.39	5	56.25	2	+0.82	+0.29	+0.14
ι Librae	15 6	67 36	53.11	10	53.31	6	+0.45	−0.05	−0.20
γ Capric.	21 34	65 20	25.89	19	25.66	9	+0.75	+0.62	+0.23
δ Corvi	12 25	64 9	17.52	8	17.77	10	+0.12	−0.20	−0.25
η Ophiuchi	17 4	63 48	36.93	14	36.91	3	+0.49	+0.17	+0.02
δ Crateris	11 14	62 26	2.73	10	3.27	11	−0.11	−0.38	−0.54
γ Eridani	3 53	62 0	52.98	7	52.79	2	+0.60	+0.35	+0.19
ν Aquarii	21 4	60 0	6.16	15	5.97	11	+0.59	+0.35	+0.19
Br. 2329	18 29	59 16	13.50	11	13.09	10	+0.83	+0.57	+0.41
η Ceti	1 3	58 56	29.23	13	28.66	12	+0.99	+0.73	+0.57
ζ Ophiuchi	16 31	58 34	17.45	10	17.28	2	+0.61	+0.33	+0.17
κ Virginis	14 7	58 0	25.93	12	25.75	8	+0.62	+0.34	+0.18

Stern	AR.	Z. D.	K. O.	Anz.	K. W.	Anz.	Δ_I	Δ_{II}	Δ_{III}
ε Eridani	$3^h\ 28^m$	$58^\circ\ 1'$	12″.42	8	11″.85	3	+1″.01	+0″.73	+0″.57
κ Orionis	5 43	57 55	9.74	4	9.00	4	+1.18	+0.90	+0.74
ι Ceti	0 14	57 36	29.00	11	28.55	10	+0.91	+0.62	+0.45
β Librae	15 11	57 12	56.68	11	57.18	6	−0.02	−0.34	−0.50
ϑ Aquarii ...	22 11	56 30	33.18	12	32.49	12	+1.16	+0.83	+0.69
19 Hydrae ...	9 4	56 23	9.90	11	9.79	9	+0.62	+0.28	+0.11
τ Orionis	5 13	55 10	7.96	3	7.30	4	+1.19	+0.83	+0.66
β Eridani	5 3	53 25	57.65	5	57.73	4	+0.47	+0.09	−0.08
ϑ Virginis ...	13 5	53 12	7.25	13	7.34	13	+0.46	+0.08	−0.09
ν Eridani	4 31	51 46	33.90	5	34.58	3	−0.14	−0.50	−0.68
γ Aquarii	22 16	50 7	9.24	12	9.78	12	−0.05	−0.36	−0.54
δ Ceti	2 34	48 19	43.64	10	43.89	2	+0.18	−0.07	−0.25
η Virginis	12 15	48 18	26.39	10	26.39	10	+0.44	+0.18	0.00
γ Piscium	23 12	45 29	36.58	11	36.39	9	+0.59	+0.37	+0.19
γ Ophiuchi ...	17 43	45 28	0.54	11	0.52	9	+0.42	+0.20	+0.02
ϑ Hydrae	9 9	45 27	51.12	11	50.88	10	+0.63	+0.42	+0.24
β Ophiuchi ...	17 38	43 36	9.42	9	9.39	8	+0.42	+0.21	+0.03
α Equulei	21 11	43 23	27.65	17	27.58	11	+0.47	+0.25	+0.07
γ Orionis	5 20	41 57	24.19	5	23.76	5	+0.87	+0.62	+0.43
ω Piscium ...	23 54	41 55	11.65	11	11.79	9	+0.29	+0.04	−0.14
ζ Hydrae	8 50	41 52	31.90	11	31.31	11	+0.99	+0.77	+0.59
δ Piscium	0 43	41 11	18.50	12	18.77	6	+0.21	−0.08	−0.27
χ Leonis	11 0	40 19	12.18	10	12.34	11	+0.34	+0.03	−0.16
π Leonis	9 55	39 40	28.27	10	28.28	12	+0.49	+0.18	−0.01
o Virginis	12 0	38 54	28.24	10	28.46	9	+0.32	−0.03	−0.22
o Leonis	9 36	37 51	7.82	10	7.42	11	+0.95	+0.59	+0.40
ι Leonis	11 19	37 6	58.61	10	58.77	11	+0.41	+0.03	−0.16
α Leonis	10 3	35 44	32.37	12	32.21	12	+0.73	+0.35	+0.16
60 Herculis ..	17 1	35 19	50.36	10	49.96	3	+0.95	+0.59	+0.40
ξ Aquilae	19 1	34 30	9.13	11	8.81	9	+0.87	+0.51	+0.32
ν Orionis	6 2	33 25	56.54	4	56.55	3	+0.52	+0.18	−0.01
γ Geminor. ...	6 32	31 43	32.90	6	32.88	6	+0.50	+0.22	+0.02
110 Herculis .	18 41	27 45	53.93	12	54.52	10	−0.14	−0.39	−0.59
β Herculis ...	16 26	26 29	55.74	11	56.86	2	−0.61	−0.92	−1.12
λ Pegasi	22 41	25 11	21.38	11	21.60	9	+0.35	−0.02	−0.22
41 Leon. min. .	10 38	24 29	7.03	8	7.23	10	+0.42	+0.01	−0.20
ζ Leonis	10 11	24 16	56.48	10	56.29	11	+0.82	+0.39	+0.19
ε Leonis	9 40	23 57	51.92	10	51.82	12	+0.73	+0.30	+0.10
ε Geminor. ...	6 38	22 28	47.85	6	48.19	5	+0.34	−0.14	−0.34
α Cor. bor. ...	15 30	21 9	5.24	13	5.74	4	+0.26	−0.30	−0.50
ι Geminor. ...	7 19	20 12	37.02	7	37.55	3	+0.24	−0.33	−0.53
χ Geminor. ...	7 57	20 7	47.61	8	47.72	4	+0.66	+0.09	−0.11
τ Piscium	1 6	18 40	12.79	13	12.56	10	+0.98	+0.43	+0.23
ρ Bootis	14 27	17 23	21.55	10	21.48	4	+0.75	+0.28	+0.07
42 Leon. min. .	10 40	16 59	17.12	8	17.32	10	+0.46	−0.01	−0.20
ϑ Cor. bor. ...	15 29	16 30	21.88	13	22.28	4	+0.19	−0.19	−0.40
ζ Herculis	16 37	16 25	24.98	11	25.16	2	+0.45	+0.02	−0.18
12 Can. ven. sq.	12 51	9 20	18.37	16	18.85	20	−0.42	−0.27	−0.48
δ Cygni	19 42	3 20	1.20	14	0.99	12	+0.49	+0.43	+0.21
α Cygni	20 38	3 18	3.06	14	2.82	10	+0.51	+0.45	+0.24
β Aurigae	5 52	3 16	34.80	8	34.86	5	+0.21	+0.15	−0.06
ψ Urs. maj. ...	11 4	3 9	20.80	10	20.73	12	+0.34	+0.28	+0.07

Stern	AR.	Z. D.	K. O.	Anz.	K. W.	Anz.	Δ_{I}	Δ_{II}	Δ_{III}
φ Herculis ...	16^h 6^m	3° 0′	29″.39	10	29″.87	2	−0″.21	−0″.27	−0″.48
α Aurigae	5 9	2 19	12.28	6	12.35	5	+0.25	+0.15	−0.07
λ Androm. ...	23 33	2 18	46.54	12	46.37	10	+0.49	+0.39	+0.17
ι Herculis	17 37	2 9	7.03	12	7.04	11	−0.13	−0.23	−0.01
o′ sq. Cygni ..	20 10	1 47	3.26	11	3.07	9	+0.50	+0.40	+0.19
τ Herculis ...	16 17	1 39	15.65	12	16.43	2	−0.44	−0.56	−0.78
λ Bootis	14 12	1 39	6.31	8	6.33	12	−0.12	−0.24	−0.02
δ Persei	3 36	0 45	18.15	9	18.52	3	−0.01	−0.15	−0.37
κ Urs. maj. ...	8 57	0 38	57.65	12	57.88	12	+0.13	−0.01	−0.23
o Cassiop.	0 39	0 29	32.92	13	33.18	9	+0.12	−0.04	−0.26
26 Lyncis ...	7 47	0 22	53.78	6	54.08	5	+0.08	−0.08	−0.30
υ Persei	1 32	0 6	24.35	16	24.81	12	−0.08	−0.24	−0.46
χ Urs. maj. ...	11 41	0 8	14.50	11	14.06	10	+0.06	+0.22	+0.44
ι Urs. maj. ...	8 53	0 13	58.38	11	58.00	11	+0.01	+0.16	+0.38
ϑ Persei	2 37	0 34	46.38	10	45.71	3	+0.29	+0.45	+0.67
π^2 Cygni	21 43	0 37	11.23	20	11.01	10	−0.14	0.00	+0.22
ι Persei	3 2	1 0	23.26	10	23.10	4	−0.19	−0.06	+0.16
ψ′ Aurigae ...	6 17	1 7	37.50	5	37.16	6	−0.01	+0.12	+0.34
α Persei	3 17	1 16	52.53	9	52.16	4	+0.02	+0.15	+0.37
7 Lacertae ...	22 27	1 32	23.32	12	22.98	11	0.00	+0.12	+0.34
η Urs. maj. ...	13 43	1 36	51.32	16	50.87	22	+0.11	+0.23	+0.45
ϑ Cygni	19 34	1 46	10.09	12	10.00	10	−0.21	−0.12	+0.09
φ Persei	1 37	1 57	23.74	16	23.60	12	−0.18	−0.08	+0.14
γ Draconis ...	17 54	3 17	16.15	14	16.25	11	−0.38	−0.32	−0.10
ι Cygni	19 27	3 17	49.85	11	49.87	10	−0.29	−0.23	−0.02
3 Lacertae ...	22 20	3 29	59.36	12	59.13	10	0.00	+0.02	+0.23
27 Lyncis ...	8 1	3 35	24.73	10	24.77	7	−0.30	−0.26	−0.04
ϑ Urs. maj. ..	9 26	3 56	1.05	10	0.88	11	−0.04	−0.04	+0.17
ψ Cygni	19 53	3 57	8.30	13	8.60	11	−0.51	−0.51	−0.30
ϑ Bootis	14 22	4 6	49.34	11	49.22	7	−0.09	−0.09	+0.12
τ Persei	2 47	4 7	39.29	10	39.25	3	−0.17	−0.17	+0.04
β Draconis ...	17 28	4 9	52.25	11	51.98	10	+0.06	+0.06	+0.27
Gr. 1460	8 32	4 51	33.08	11	33.27	12	−0.35	−0.38	−0.19
γ Persei	2 57	4 53	22.89	11	23.28	3	−0.54	−0.60	−0.39
κ Cygni	19 15	4 57	55.02	13	55.44	11	−0.58	−0.63	−0.42
γ Urs. maj. ...	11 48	6 3	15.07	11	15.80	11	−0.84	−0.94	−0.73
η Persei	2 43	7 15	16.60	11	16.70	3	−0.17	−0.31	−0.10
α Cassiop. ...	0 35	7 45	33.22	18	33.79	9	−0.62	−0.78	−0.55
ε Urs. maj. ...	12 50	8 18	21.12	22	20.81	24	+0.26	+0.10	+0.31
Br. 3077	23 8	8 23	11.64	13	11.50	12	+0.09	−0.07	+0.14
β Urs. maj. ...	10 56	8 43	17.18	11	16.78	11	+0.34	+0.19	+0.40
δ Urs. maj. ...	12 10	9 23	30.11	11	30.41	13	−0.36	−0.51	−0.30
ζ Cephei	22 7	9 28	49.12	15	49.41	12	−0.35	−0.50	−0.29
15 Lyncis	6 48	10 20	39.33	6	39.34	4	−0.11	−0.22	−0.01
β Cassiop. ...	0 4	10 22	6.35	13	6.35	13	−0.08	−0.21	0.00
ϑ Draconis ...	16 0	10 37	37.81	11	37.54	2	+0.19	+0.06	+0.27
2 Lyncis	6 11	10 50	5.01	5	4.80	6	+0.07	0.00	+0.21
o Draconis ...	18 49	11 2	57.38	11	57.90	9	−0.66	−0.73	−0.52
ι Draconis ...	15 23	11 6	49.54	12	49.33	4	+0.07	0.00	+0.21
o Urs. maj. ...	8 22	12 50	56.77	10	57.53	12	−1.07	−0.97	−0.76
η Cephei	20 43	13 13	31.96	14	32.30	10	−0.63	−0.53	−0.34

Stern	AR.	Z. D.	K. O.	Anz.	K. W.	Anz.	Δ_{I}	Δ_{II}	Δ_{III}
4 Cassiop.	23ʰ 20ᵐ	13° 30′	14″.82	12	15″.39	10	−0″.93	−0″.78	−0″.57
η Draconis . . .	16 23	13 32	3.24	10	3.11	2	−0.24	−0.10	+0.13
α Cephei	21 16	13 56	9.79	22	9.88	11	−0.49	−0.30	−0.09
20 Cephei. . . .	22 2	14 4	11.63	14	12.15	10	−0.92	−0.73	−0.52
κ Cassiop.	0 27	14 9	0.32	13	0.65	11	−0.73	−0.54	−0.33
ϑ Cephei	20 28	14 26	5.25	14	5.27	11	−0.47	−0.23	−0.02
12 H. Drac. . .	15 45	14 42	17.30	10	17.26	2	−0.46	−0.17	+0.04
α Draconis . . .	14 2	16 39	18.39	11	18.05	8	−0.29	+0.13	+0.34
i Draconis. . . .	13 48	17 1	8.50	11	8.32	9	−0.49	−0.02	+0.18
ι Cephei	22 46	17 26	44.38	11	44.29	11	−0.61	−0.12	+0.09
9 Camel.	4 44	17 57	15.18	5	15.29	4	−0.83	−0.31	−0.11
δ Draconis . . .	19 13	19 16	2.26	13	2.34	11	−0.83	−0.28	−0.08
Gr. 1308	7 20	20 27	45.72	6	45.42	3	−0.46	+0.10	+0.30
λ Draconis . . .	11 25	21 41	10.95	13	10.76	11	−0.54	−0.01	+0.19
5 H. Cam.	3 39	22 48	5.61	8	5.17	2	−0.24	+0.24	+0.44
50 Cassiop. . . .	1 55	23 42	34.43	13	34.84	6	−1.04	−0.61	−0.41
χ Draconis . . .	18 23	24 28	30.66	12	30.51	10	−0.48	−0.05	+0.15
Gr. 1586	9 49	25 9	21.98	11	21.65	12	−0.24	+0.13	+0.33
β Urs. min. . . .	14 51	26 21	48.70	10	48.34	7	−0.16	+0.16	+0.36
Br. 1147	8 7	27 51	28.13	10	28.29	11	−0.61	−0.36	−0.16
γ Cephei	23 35	28 50	39.71	12	40.14	13	−0.88	−0.63	−0.43
24 H. Cam. . . .	6 45	28 53	41.41	6	41.93	4	−0.96	−0.72	−0.52
ζ Urs. min. . . .	15 48	29 53	53.38	10	53.42	2	−0.48	−0.24	−0.04
4 H. Drac. . . .	12 7	29 58	31.35	9	31.58	10	−0.67	−0.43	−0.23
1 H. Drac. . . .	9 22	33 34	5.97	11	6.25	13	−0.80	−0.47	−0.28
ε Urs. min. . . .	16 57	33 59	36.99	10	37.33	3	−0.87	−0.53	−0.34
δ Urs. min. . . .	18 6	38 23	59.28	13	58.98	10	−0.25	+0.11	+0.30
51 H. Cephei .	6 52	38 59	47.00	6	46.85	4	−0.39	−0.04	+0.15
α Urs. min. . . .	1 22	40 32	42.94	33	42.32	28	+0.13	+0.43	+0.62
Untere Culminationen.									
α Urs. min. . . .	1 22	43 1	42.77	29	42.62	27	−0.26	−0.04	+0.15
51 H. Ceph. . .	6 52	44 34	38.68	10	38.94	10	−0.66	−0.44	−0.26
δ Urs. min. . . .	18 6	45 10	25.81	4	26.07	5	−0.66	−0.44	−0.26
ε Urs. min. . . .	16 57	49 34	48.50	6	48.08	4	−0.06	+0.24	+0.42
1 H. Drac. . . .	9 22	50 0	19.57	30	19.48	13	−0.40	−0.09	+0.09
4 H. Drac. . . .	12 7	53 35	53.65	10	53.77	6	−0.67	−0.29	−0.12
ζ Urs. min. . . .	15 48	53 40	31.31	18	31.50	2	−0.74	−0.36	−0.19
24 H. Cam. . .	6 45	54 40	43.42	2	43.62	10	−0.73	−0.37	−0.20
γ Cephei	23 35	54 43	45.50	12	45.86	10	−0.89	−0.53	−0.36
Br. 1147	8 7	55 42	57.17	13	57.65	10	−0.99	−0.65	−0.48
β Urs. min. . . .	14 51	57 12	36.68	11	37.15	3	−0.96	−0.64	−0.47
Gr. 1586	9 49	58 25	3.53	16	3.95	11	−0.86	−0.58	−0.42
χ Draconis . . .	18 23	59 5	55.13	6	55.36	6	−0.65	−0.39	−0.23
50 Cassiop. . . .	1 55	59 51	51.26	11	50.93	9	−0.07	+0.17	+0.33
5 H. Cam.	3 39	60 46	20.24	11	19.81	2	+0.03	+0.27	+0.43
λ Draconis . . .	11 25	61 53	14.65	12	14.62	11	−0.38	−0.13	+0.03
Gr. 1308	7 20	63 6	40.11	10	39.65	10	+0.03	+0.31	+0.46
δ Draconis . . .	19 13	64 18	23.10	7	23.24	3	−0.61	−0.19	−0.14
9 Camel.	4 44	65 37	10.01	8	9.77	2	−0.01	+0.39	+0.24
ι Cephei	22 46	66 7	41.63	10	42.07	10	−1.02	−0.59	−0.44
i Draconis. . . .	13 48	66 33	17.04	12	16.78	5	−0.35	+0.11	+0.26

Stern	AR.	Z. D.	K. O.	Anz.	K. W.	Anz.	Δ_I	Δ_{II}	Δ_{III}
α Draconis	$14^h\ 2^m$	66° 55′	6″.96	12	7″.15	5	−0″.82	−0″.34	−0″.19
12 H. Drac.	15 45	68 52	8.17	8	8.61	2	−1.15	−0.59	−0.44
ϑ Cephei	20 28	69 8	20.44	10	20.45	11	−0.70	−0.14	−0.01
ϰ Cassiop.	0 27	69 25	25.19	7	24.91	11	−0.37	+0.19	+0.28
20 Cephei	22 2	69 30	13.85	9	13.98	11	−0.85	−0.28	−0.13
α Cephei	21 16	69 38	15.98	11	15.83	11	−0.56	0.00	+0.15
η Draconis	16 23	70 2	22.22	7	22.12	5	−0.70	−0.05	+0.10
4 Cassiop.	23 20	70 4	10.89	11	10.56	11	−0.39	+0.18	+0.33
η Cephei	20 43	70 20	53.94	12	54.28	11	−1.06	−0.49	−0.34
o Urs. maj.	8 22	70 43	28.63	14	29.04	10	−1.11	−0.56	−0.41
ι Draconis	15 23	72 27	36.08	8	36.31	4	−0.87	−0.37	−0.23
o Draconis	18 49	72 31	28.14	5	28.66	4	−1.15	−0.66	−0.52
2 Lyncis	6 11	72 44	20.62	11	20.07	8	−0.05	+0.42	+0.55
ϑ Draconis	16 0	72 56	47.45	8	46.53	3	+0.32	+0.79	+0.92
β Cassiop.	0 4	73 12	18.56	10	19.38	11	−1.41	−0.96	−0.82
15 Lyncis	6 48	73 13	45.74	11	46.20	9	−1.07	−0.60	−0.46
ζ Cephei	22 7	74 5	36.69	10	37.21	11	−1.04	−0.66	−0.52
δ Urs. maj.	12 10	74 10	54.57	11	55.47	11	−1.42	−1.04	−0.90
β Urs. maj.	10 56	74 51	8.74	14	9.21	12	−0.90	−0.61	−0.47
Br. 3077	23 8	75 11	13.98	9	15.26	11	−1.71	−1.42	−1.28
ε Urs. maj.	12 15	75 16	4.71	16	5.26	10	−0.98	−0.69	−0.55
α Cassiop.	0 35	75 48	52.02	14	52.07	14	−0.41	−0.16	−0.05
η Persei	2 43	76 19	8.21	11	8.57	7	−0.69	−0.50	−0.36
γ Urs. maj.	11 48	77 31	10.17	11	10.69	9	−0.71	−0.66	−0.52
ϰ Cygni	19 15	78 36	30.68	6	31.82	3	−1.23	−1.27	−1.14
γ Persei	2 57	78 41	2.88	10	2.71	7	+0.11	+0.04	+0.17
Gr. 1460	8 32	78 42	53.41	14	53.45	10	−0.08	−0.17	−0.04
β Draconis	17 28	79 24	34.16	4	34.80	4	−0.67	−0.77	−0.64
τ Persei	2 47	79 26	46.48	8	46.18	7	+0.24	+0.17	+0.30
ϑ Bootis	14 22	79 27	36.65	11	37.15	5	−0.53	−0.63	−0.50
ψ Cygni	19 53	79 37	18.00	6	17.54	4	+0.46	+0.33	+0.46
ϑ Urs. maj.	9 26	79 38	25.62	12	25.98	11	−0.36	−0.49	−0.36
27 Lyncis	8 1	79 59	1.68	11	2.39	11	−0.71	−0.84	−0.71
3 Lacertae	22 20	80 4	26.10	9	26.77	11	−0.67	−0.80	−0.67
ι Cygni	19 27	80 16	34.98	6	35.33	4	−0.34	−0.47	−0.35
γ Draconis	17 54	80 17	9.75	6	10.31	3	−0.56	−0.69	−0.56
φ Persei	1 37	81 37	2.33	8	1.40	14	+0.95	+0.80	+0.93
ϑ Cygni	19 34	81 48	15.83	6	16.58	4	−0.72	−0.88	−0.75
η Urs. maj.	13 43	81 57	34.74	13	34.76	12	+0.01	−0.15	−0.02
7 Lacertae	22 27	82 2	3.01	9	3.61	11	−0.57	−0.73	−0.60
α Persei	3 17	82 17	32.42	12	33.05	6	−0.60	−0.76	−0.63
ψ′ Aurigae	6 17	82 26	48.86	10	49.25	8	−0.37	−0.49	−0.39
ι Persei	3 2	82 34	2.78	12	2.29	6	+0.52	+0.37	+0.49
π^2 Cygni	21 43	82 57	15.31	8	15.35	5	−0.02	−0.16	−0.04
ϑ Persei	2 37	82 59	40.19	10	39.30	5	+0.91	+0.77	+0.89
ι Urs. maj.	8 53	83 20	27.19	22	28.89	10	−1.68	−1.82	−1.70
χ Urs. maj.	11 41	83 26	12.74	10	10.98	9	+1.78	+1.65	+1.76
υ Persei	1 32	83 40	49.94	5	50.45	11	−0.49	−0.63	−0.51
26 Lyncis	7 47	83 57	21.14	9	22.60	11	−1.48	−1.58	−1.46
o Cassiop.	0 39	84 3	59.91	5	60.74	12	−0.85	−0.95	−0.83
ϰ Urs. maj.	8 57	84 13	24.44	21	24.21	12	+0.21	+0.11	+0.23
δ Persei	3 36	84 19	44.64	9	44.30	4	+0.32	+0.22	+0.34

Stern	AR.	Z. D.	K. O.	Anz.	K. W.	Anz.	Δ_I	Δ_{II}	Δ_{III}
λ Bootis	14ʰ 12ᵐ	85° 13′	34″36	11	32″93	5	+1″36	+1″31	+1″43
τ Herculis ...	16 17	85 13	42.02	7	43.76	3	−1.81	−1.86	−1.74
o′ sq. Cygni ...	20 10	85 21	29.43	5	29.70	9	−0.36	−0.39	−0.27
ι Herculis	17 37	85 43	33.21	4	36.13	2	−3.02	−3.04	−2.92
λ Androm.....	23 33	85 53	14.60	5	14.91	8	−0.43	−0.43	−0.31
α Aurigae	5 9	85 53	38.62	10	40.13	4	−1.63	−1.63	−1.51
φ Herculis ...	16 0	86 34	57.88	5	57.66	3	+0.07	+0.10	+0.22
ψ Urs. maj. ..	11 4	86 43	47.33	10	48.20	10	−1.05	−0.99	−0.87
β Aurigae	5 52	86 51	0.71	10	3.18	10	−2.64	−2.58	−2.47
α Cygni	20 38	86 52	33.80	6	30.24	8	+3.38	+3.44	+3.56
δ Cygni	19 42	86 54	29.54	4	25.29	3	+4.07	+4.13	+4.25

Sieht man von den Zenithdistanzen über 70° ab, so erkennt man sofort, dass durch die Strichcorrectionen bereits eine wesentliche Annäherung der beiden Kreislagen erzielt wird, jedoch nicht in gleicher Weise in allen Z. D. Ordnet man in Gruppen, so ergiebt sich:

Zenithdistanz	Anzahl	Δ_I	Δ_{II}
−70° bis −48°2	29	+0″57	+0″22
−16.4	33	+0.53	+0.19
0.0	13	+0.18	+0.11
0°0 bis +1.6	9	+0.02	+0.15
+40.5	59	−0.40	−0.25
+70.0	27	−0.56	−0.20.

Ein eigenartiges Verhalten zeigt die Gruppe 0°0 bis +1°6, die deshalb auch hier besonders aufgeführt ist.

Aus der Gesammtheit der Beobachtungen (bis 70° Z. D.) ergiebt sich als mittlere Abweichung (nach Art des mittleren Fehlers gebildet) 0″28, während aus den Teilungsfehlern 0″24 folgte. Nach Anbringung der Strichcorrectionen sind die betreffenden Zahlen 0″18 und 0″11. Es sind also offenbar noch systematische Differenzen vorhanden; welcher Natur dieselben sind, ist schwer zu entscheiden. Zu beachten bleibt immer, dass die hier, wie auch fast überall anderswo vorgenommene Ableitung der Strichcorrectionen nur eine rohe Interpolation genannt werden kann, die allerdings im vorliegenden Falle noch ein sehr günstiges Resultat ergiebt, die uns aber keineswegs das völlige Verschwinden der Teilungsfehler verbürgt.

Da aus den Differenzen der beiden Kreislagen die Sinusglieder der periodischen Function herausfallen, so erhält diese die Form:

$$\frac{1}{2}(\text{K. O.} - \text{K. W.}) = b_0 + b_4 \cos 4z + b_8 \cos 8z \cdots$$

Die Ausgleichung ergiebt:

$$\frac{1}{2}(\text{K. O.} - \text{K. W.}) = +0''225 - 0''060 \cos 4z - 0''078 \cos 8z \\ - 0''005 \cos 12z + 0''020 \cos 16z.$$

Die Cosinusglieder stimmen mit den früher gefundenen gut überein, während die Konstante um 0''105 grösser ausfällt, so dass die verbleibenden Differenzen nicht von den Teilungsfehlern herzurühren scheinen. Während auf die Biegung noch besonders eingegangen wird, möchte ich hier nur noch an eine Reihe von Fehlerquellen erinnern, deren Erforschung ausserordentlich schwierig ist, zumal wir im vorliegenden Falle es mit Grössen zu thun haben, die an der äussersten zu erreichenden Genauigkeitsgrenze liegen. Die Neigung der Limbusfläche zur Rotationsaxe, die Abweichung derselben von einer Ebene, ihre Verschiebung längs der Rotationsaxe während der Drehung, dazu unrichtige Stellung der Mikroskope, ferner Verspannungen in der Rotationsaxe, veranlasst durch die Einwirkung der Equilibrierungshebel, die sich zwischen Kreis und Rohr befinden, Gestaltfehler des Objectivs, infolge deren der Lichtschwerpunkt nicht mit dem Mittelpunkt der Scheibchen der Sterne zusammenfällt, und schliesslich ungleiche Beleuchtung können sehr wohl die Ursache obiger Erscheinung sein, wenn auch zu beachten ist, dass durch den sehr stabilen Bau des Instruments, wie auch durch äussere Umstände, z. B. mehrfaches Versetzen der Mikroskope u. s. w., die eine oder andere der genannten Fehlerquellen auf ein Minimum reduciert ist.

Ordnet man die Differenzen Δ_{11} nach den Grössenklassen der Sterne, so ergeben sich im Mittel folgende Zahlen:

Grössenklasse	Nördl. Z. D.	Südl. Z. D.
2 —3	— 0''24	+ 0''23
3.1—4	— 0.22	+ 0.09
4.1—5	— 0.24	+ 0.23
5.1—6	— 0.31	—

Eine Abhängigkeit der Differenzen von der Grössenklasse scheint somit nicht vorhanden zu sein, was jedoch keineswegs zu dem Schlusse berechtigt, dass das Objectiv fehlerfrei ist, höchstens zu dem, dass innerhalb des Bereiches der hier auftretenden Grössenklassen eine verschiedenartige Wirkung des Fehlers nicht erkennbar ist.

Die Annahme, dafs ein wesentlicher Bestandteil der Teilungsfehler einen periodischen Verlauf nimmt, können wir als durch die Beobachtungen bestätigt betrachten. Ich hebe dieses besonders hervor, denn es ist immerhin gewagt, eine Reihe von Grössen, die die Grenzen des Beobachtungsfehlers kaum überschreiten und die überdies noch durch eine weitere Grösse, den zufälligen Teilungsfehler, entstellt werden, durch eine periodische Function darzustellen, um daraus Zwischenwerte abzuleiten; man wird eine solche Darstellung kaum ohne weiteres als befriedigend erachten können, wenn, wie es mehrfach vorgekommen ist, ein Teil der übrigbleibenden Reste von der Ordnung der gegebenen Grössen selbst ist. Wir brauchen nur zu fragen, wie ist die Teilung entstanden, um zu erfahren, dass wir es bei den REPSOLDschen Kreisen keineswegs mit einem einheitlichen Ganzen zu thun haben, sondern mit einer bruchstückweisen Uebertragung einer Urteilung. Schon W. STRUVE weist darauf hin[1]), dass an den Unterbrechungsstellen sehr leicht Sprünge zu befürchten sind; dieselben können instrumentellen, wie auch physiologischen Ursprungs sein, insofern ein frisches Auge anders einstellt als ein ermüdetes. Wir fragen weiter: In welcher Weise wird eine neue Arbeitsreihe an die vorhergehende angeschlossen, wird nur auf den zuletzt gezogenen Strich zurückgegangen oder stets auf den Nullpunkt, denn zweifelsohne können während der Arbeit in den beiden Kreisen ungleiche Verziehungen eintreten? In welcher Weise wird schliesslich eine Controlle darüber geübt, dass das letzte Anschluss-Intervall ($359° 58' - 0° 0'$) den richtigen Wert erhält, was bekanntlich nicht bei allen Kreisen der Fall ist (z. B. beim Pulkowaer Vertikalkreise beträgt es $120''.72$), und wie werden allenfallsige, sich während der Arbeit zeigende Fehler wieder ausgeglichen? Es ist klar, dass durch alle diese Fragen die Annahme von dem periodischen Verlauf der Teilungsfehler bedingt wird, ja, dass sie sogar völlig illusorisch gemacht werden kann. Ist aber die Kopie ein getreues Abbild der Urteilung, so ist wiederum die Frage nach der Entstehung dieser von Interesse.

Soweit das Material reicht, habe ich die aufgeworfenen Fragen einer Prüfung unterworfen.

Ueber den Fortgang der Arbeit haben mir die Künstler das

1) Astron. Nachr. Bd. 15. Nr. 345.

1885	von bis		s.		t.		d.
Aug. 28	$9^3/_4{}^h$ — 1^h		0°	0′	15°.0	16.0	0″.00
	$2^1/_2$	5	20	32	16.2	16.6	+ 0.32
29	$9^1/_2$	1	36	2	14.8	16.0	0.00
	$2^1/_2$	5	61	2	16.1	16.6	+ 0.08
31	$9^1/_2$	1	76	2	14.6	15.7	+ 0.12
	$2^1/_2$	5	102	2	15.6	15.8	— 0.12
Septr. 1	$9^1/_2$	1	117	2	13.6	15.0	+ 0.48
	$2^1/_2$	5	143	2	15.0	15.5	+ 0.16
2	$9^1/_2$	1	160	2	14.0	15.2	+ 0.36
	$2^1/_2$	5	188	2	15.2	15.6	+ 0.16
3	$9^1/_2$	1	205	2	14.2	15.6	— 0.56
	$2^1/_2$	5	230	2	15.8	16.4	+ 0.20
4	$9^1/_2$	1	245	2	15.5	17.5	— 0.08
	$2^1/_2$	5	274	2	17.6	17.9	— 0.08
5	$9^1/_2$	1	290	2	16.8	17.8	— 0.12
	$2^1/_2$	5	319	2	17.6	18.0	— 0.08
7	$9^1/_2$	$12^1/_2$	335	2	15.9	17.0	+ 0.04

beifolgende Protokoll geliefert, aus dem zunächst hervorgeht, dafs im Arbeitsraume stets dieselbe Temperatur (t) geherrscht hat. Unter s ist der erste Strich jeder Arbeitsreihe gegeben. Auf meine Bitte hat nach meinem Fortgange von Wien Herr Direktor Dr. DE BALL sämmtliche Unterbrechungsintervalle ausgemessen und als Vergleichsintervalle die in § 5 bestimmten (14° 58′ — 15° 0′ — 15° 2′ etc.) benutzt. Das Resultat ist in der letzten Columne unter d gegeben; es bezieht sich auf das der betreffenden Arbeitsreihe vorangehende Intervall, das erste also auf 359° 58′ — 0° 0′, auf dessen Wert 0″.00 ich besonders aufmerksam mache. Positives Vorzeichen bedeutet, dass das Intervall kleiner als 120″ ist. Das Resultat kann im allgemeinen als durchaus befriedigend angesehen werden. Wenn einzelne Intervallfehler grösser sind als zu erwarten stand, so ist zu beachten, dass die Messungen bei einem mittleren Fehler einer Intervallmessung von ± 0″.30 nur viermal ausgeführt sind. Ausserdem scheint es wahrscheinlich, dass an vereinzelten Stellen die zufälligen Teilungsfehler grösser sind als die oben abgeleiteten Resultate. So verbleiben bei einigen Zenithsternen nach Anbringung aller Correctionen und bei dem mittleren Fehler einer Einstellung von nur ± 0″.22, also für ca. 10 Einstellungen in jeder Kreislage ± 0″.07, folgende Differenzen der beiden Kreislagen:

β Herculis	z = — 26°	29′	Δ_{III} = — 1″.12
γ Urs. maj.	+ 6	3	— 0.73
o Urs. maj.	+ 12	50	— 0.76
4 Cassiop.	+ 13	30	— 0.57

Ueber die Frage, wie weit die Kopie ein Abbild der Urteilung ist, gewährt uns ein Vergleich einer Reihe von REPSOLD'schen Kreisen ein Urteil. Ein solcher ist zuerst von GROMADZKI[1]) für 2 Pulkowaer Kreise und einen Moskauer ausgeführt worden, welche alle drei mit der REPSOLD'schen Teilmaschine geteilt sind. An dieser ist seitdem nichts geändert und ebenso ist die Art der Teilung dieselbe geblieben, nur mit dem Unterschiede, dass früher Nullstrich von Kopie und Urteilung nicht ohne weiteres zusammenfielen, was bei den neueren Kreisen als Regel inne gehalten wird. Der Untersuchung GROMADZKI's sind die ersten drei Reihen der folgenden Zusammenstellung entnommen, in der Annahme, dass der Strich 70° des Pulkowaer Kreises dem Nullstrich der Urteilung entspricht. Es sind noch die Kreise von Strassburg und vom Washburn Observatory zum Vergleiche herangezogen worden, während von dem Münchner aus dem anfangs angegebenen Grunde zunächst abgesehen werden musste.

	Pulkowa		Moskau	Ottakring	Strassburg	Washburn Obs.
	A.	B.				
0°	+0″36	+0″52	+0″39	+0″45	+0″37	+0″39
10	+ 08	+ 22	+ 33	+ 47	+ 64	+ 73
20	+ 42	+ 33	+ 57	+ 54	+ 47	+ 36
30	+ 60	+ 17	+ 58	+ 30	+ 48	+ 39
40	+ 49	+ 17	+ 57	+ 9	0	+ 39
50	+ 43	+ 5	− 16	+ 46	+ 3	+ 2
60	+ 58	+ 24	+ 27	+ 34	+ 18	− 3
70	+ 22	+ 4	+ 2	+ 14	+ 25	+ 2
80	− 15	− 23	− 34	− 5	+ 37	− 35
90	0	+ 15	− 7	− 23	− 36	− 22
100	− 39	− 40	− 47	− 24	− 53	− 10
110	− 60	− 60	− 60	− 29	− 13	− 29
120	− 59	− 58	− 63	− 46	− 13	− 24
130	− 35	− 46	− 34	− 63	− 52	− 25
140	− 20	− 18	− 26	− 30	− 42	− 11
150	+ 27	+ 27	+ 1	+ 2	− 25	− 5
160	− 11	+ 4	+ 10	+ 23	− 12	− 6
170	− 7	+ 22	+ 59	+ 36	− 3	+ 20
180	+ 36	+ 52	+ 39	+ 45	+ 37	+ 39

Bei den kleinen Grössen, um die es sich hier handelt, ist die Uebereinstimmung allerdings überraschend; selbst kürzere Ausbuchtungen in der Curve fallen bei graphischer Darstellung in die Augen. Es ist also einerseits die Teilung mit einer Genauig-

1) Annales de l'observatoire de Moscou, Vol. III. Liv. 2.

keit ausgeführt und andrerseits das Material in Bezug auf Güte und Homogenität mit einer Sorgfalt gewählt, die uneingeschränkte Anerkennung verdient.

Für den Fall, dass die Minutenstriche bei der Urteilung unabhängig von den übrigen Strichen, etwa mit einer Lamelle zwischen die Gradstriche eingehängt sind, wie bei der ersten Teilung des Ertel'schen Vertikalkreises in Pulkowa, ist es nicht unmöglich, dass diese neue periodisch verlaufende Fehler aufweisen. Zur Entscheidung der Frage habe ich die Abweichungen der beiden Kreislagen nach den Minutenstrichen geordnet. Da einem Zwei-Minutenstrich in der einen Lage seine Ergänzung zu 60′ in der anderen entspricht, so ergeben sich folgende Differenzen:

2′ — 58′ =	+ 0″.02	12′ — 48′ =	+ 0″.18	22′ — 38′ =	— 0″.06
4 — 56	+ 0.12	14 — 46	— 0.06	24 — 36	— 0.11
6 — 54	+ 0.21	16 — 44	— 0.03	26 — 34	+ 0.09
8 — 52	+ 0.12	18 — 42	— 0.04	28 — 32	— 0.22
10 — 50	0.00	20 — 40	— 0.10	30 — 30	0.00

Sind die gefundenen Grössen auch klein, so ist die Vorzeichenfolge doch auffallend. Leider sind wir nicht in der Lage, die Differenzen aufzulösen, aber eine besondere Untersuchung dieser Frage erscheint keineswegs nutzlos.

Fassen wir nunmehr alles zusammen, so ergiebt sich, dass der Ottakringer Kreis als ein Werk ersten Ranges zu bezeichnen ist, dass jedoch zur Erlangung der weitest gehenden Genauigkeit bei Fundamentalbeobachtungen die Teilungsfehlerbestimmung auf alle Striche auszudehnen ist.

§ 7.

Die Biegung.

Die Bestimmung oder Elimination dieses Instrumentalfehlers dürfte zu den schwierigsten Aufgaben des Meridiankreisbeobachters gehören; die ausgedehnte Litteratur hierüber beweist, wie sehr sich die Astronomen stets bemüht haben, diese Fehlerquelle hinreichend zu berücksichtigen. Die mannigfaltigsten Apparate sind konstruiert worden, aber nur vereinzelt zur Anwendung gelangt, teils weil sie zu kompliciert sind, teils weil sie nur einen Teil der Gesammtbiegung zu bestimmen geeignet sind.

Es ist ja gewiss wünschenswert, wenn die Biegung, wie alle anderen Instrumentalfehler, von Zeit zu Zeit, und zwar in allen Zenithdistanzen, mit instrumentellen Hilfsmitteln bestimmt werden kann. Dieses dürfte aber wohl kaum jemals erreichbar sein, denn wir haben es hier mit so ausserordentlich vielen, teils im Instrument liegenden, teils äusserlichen Factoren zu thun wie bei keinem anderen Instrumentalfehler. Die Theorie trägt lediglich der Einwirkung der Schwere auf die einzelnen Instrumententeile Rechnung; ob aber Factoren wie die Art der Verbindung der einzelnen Teile, die Befestigung des Objektivs in seiner Fassung, des Mikrometers mit seinem Fadennetze und das Verhalten des letzteren selbst in der gewählten Functionsform die genügende Berücksichtigung finden, erscheint sehr fraglich. Wie weit die strahlende Wärme die Biegung beeinflusst, ist in den Arbeiten von Leitzmann[1]) und Bauschinger[2]) näher ausgeführt worden.

Bei den Repsold'schen Kreisen hat sich die Biegung überall sehr gering erwiesen; der Münchner Kreis ist völlig biegungsfrei, und in Strassburg und Madison haben sich nur wenige Zehnteile einer Sekunde ergeben, so dass man sie bei relativen Beobachtungen ganz vernachlässigen kann. Nur dort, wo es sich um die höchste zu erstrebende Genauigkeit handelt, vor allem also bei absoluten Beobachtungen, ist sie näher zu untersuchen und zu kontrollieren.

Unter der Voraussetzung, dass die Biegung bei der Vertauschung von Objectiv und Okular lediglich ihr Vorzeichen ändert, ist diese Methode, sie zu bestimmen, ohne Frage die zuverlässigste und zweckmässigste. Die Operation lässt sich bei den Repsold-schen Kreisen mit grosser Leichtigkeit und Sicherheit ausführen; in Strassburg änderte sich der Collimationsfehler in zwei Fällen nur um 0ˢ07, der Nadirpunkt um 0″6, in Ottakring um 0″8 resp. 0″4 und 1″2. Diese Zahlen beweisen, mit welcher Sorgfalt die Instrumente angefertigt sind.

Ein Kriterium über die Berechtigung der Methode gewinnt man leicht dadurch, dass man nebenbei die Biegung im Horizont und im Nadir mit Hilfe von Collimatoren bestimmt, wodurch man sich zu gleicher Zeit eine Kontrolle über allenfallsige zeitliche Aenderungen dieser Fehlers überhaupt verschafft. Wie weit

1) H. Leitzmann: Von dem Einfluss der Wärmestrahlung auf die Teilung eines Meridiankreises u. s. w. 1885.

2) Münchner Annalen, Neue Folge, Bd. II.

reflektierte Beobachtungen einen Beitrag zur Biegungsbestimmung bei den neueren Repsold'schen Meridiankreisen zu liefern geeignet sind, darüber kann meines Erachtens vorläufig ein abschliessendes Urteil nicht abgegeben werden, da homogene, wesentlich diesem Zweck dienende Beobachtungsreihen bislang nicht vorliegen; die Misserfolge, die man hiermit in Greenwich erzielt hat, können wegen der völlig anderen Einrichtung des Instruments nicht massgebend sein. In Ottakring lassen sie sich leider nicht ausführen wegen der Nähe der Pfeiler für die Hilfsinstrumente.

Der oben kurz skizzierte Plan konnte nur teilweise zur Durchführung gebracht werden, denn einmal sollten vor Beendigung der Zonenbeobachtungen die fraglichen Veränderungen am Instrument nicht vorgenommen werden, und sodann gestattete die Ungunst der Witterung eine systematische, programmässige Arbeit nicht. Infolgedessen habe ich von Zeit zu Zeit die Biegung im Horizont mit Hilfe von Mire und Collimator bestimmt und nach Abschluss der Arbeit, auch der Zonen, noch eine grössere Reihe von Sternen in allen Z. D. nach Vertauschung von Okular und Objectiv beobachtet. Die Bestimmung der Biegung mit Hilfe des Nadirspiegels und nivellierter Collimatoren und durch Umlegen des Instruments führte zu einem negativen Resultat, denn einmal functionierte in Anbetracht der kleinen zu bestimmenden Grösse die vorhandene Collimator-Libelle nicht zuverlässig genug, und andrerseits war, da die Untersuchung erst ca. zwei Stunden nach Sonnenuntergang angestellt werden konnte, ein Umlegen in der Dunkelheit bei dem engbegrenzten Raum bedenklich.

Die Untersuchungen sind stets bei völlig geöffnetem Spalt angestellt worden, um möglichst überall gleiche Temperatur zu erzielen. Wegen des häufigen Windes und der grossen Nähe der Mire (25 m) war das Bild derselben fast stets in empfindlich störender Unruhe. Will man nicht klare Abende opfern, so bleiben nur windstille, trübe Abende zur Verfügung; an diesen aber ist die Gefahr plötzlich eintretenden Regens sehr gross, und drei Mal musste deshalb vor Schluss des Programms abgebrochen werden.

Der Mikrometerapparat des Collimators ist nicht sehr zweckmässig eingerichtet, insofern das Rohr über diesen noch hinausragt, der Art, dass das Rädchen zur Bewegung des Collimatorfadens noch innerhalb des Rohrs liegt. Befindet sich das Auge vor dem Okular, so ist eine Handhabung des Rädchens mit zwei Fingern

überhaupt ausgeschlossen. Ebenso lässt sich beim Einstellen ein unmittelbares Berühren des Körpers mit dem Pfeiler nicht vermeiden.

An die Stelle der Mirenplatte, die eine Oeffnung von 2 mm Durchmesser hatte, wurde eine mit Stanniol beklebte Glasplatte gesetzt; ein mit einer feinen Nadel in das Stanniol gebohrtes Loch erschien, von hinten beleuchtet, im Meridiankreis etwa wie ein Sternchen dritter Grösse, auf welches sich der Faden sehr scharf einstellen liess.

Eine vollständige Biegungsbestimmung bestand aus:

1) Nadirbestimmung,

2) Einstellen von Collimatorfaden auf Mire, und zwar in 4 Absätzen zu je 4 Einstellungen, um einem allenfallsigen Einfluss der Körperwärme auf den Collimatorpfeiler Rechnung zu tragen,

3) Richten von Meridiankreis auf Collimator (4 Einst.),

4) Richten von Meridiankreis auf Mire (4 Einst.),

und alsdann wurden die Beobachtungen in folgender Reihenfolge wiederholt: 2, 4, 3, 2, 1. Vorher und nachher wurde Thermometer am Objectiv und im Südspalt abgelesen; die Differenz beider hat sich sehr klein gehalten, nicht über 0°5. Die Bestimmung des Nadirpunktes geschah lediglich zur Kontrolle des Hauptinstruments; 1897, Mai 19 ist in demselben eine grössere Aenderung eingetreten, wodurch auch der stark heraustretende Biegungswert zu erklären sein wird; demselben ist nur halbes Gewicht gegeben, ebenso wie dem vom 20. April 1898, wo wegen drohenden Regens das Programm nur zum Teil ausgeführt werden konnte.

Der mittlere Fehler einer Einstellung von Collimator auf Mire schwankte an den einzelnen Beobachtungstagen zwischen 0″16 und 0″24; der m. F. aus 16 Einstellungen ergiebt sich somit im Mittel zu 0″050. Da sich jedoch die Coincidenz von Collimator und Mire nicht konstant verhielt, so ist der der Berechnung der Genauigkeit eines Biegungswertes zu Grunde zu legende mittlere Fehler ohne Frage grösser anzunehmen.

Der m. F. einer Einstellung von Meridiankreis auf Mire ergab sich zu 0″17, und auf Collimator zu 0″21; der Unterschied dürfte daher rühren, dass auf den Lichtpunkt der Mire weit sicherer einzustellen war als auf die etwas verschwommenen Fadenbilder des Collimators, dessen Objectiv von nur 68 mm Oeffnung im

Laufe der Zeiten etwas gelitten zu haben schien. Für 8 Einstellungen reducieren sich die obigen Zahlen auf 0.″060 resp. 0.″074. Aus der folgenden Zusammenstellung ergiebt sich der m. F. einer Biegungsmessung zu 0.″13, während sich nach den obigen Zahlen nur 0.″11 ergeben sollte, so dass also die Annahme über die Unsicherheit der Coincidenz von Collimator und Mire zutreffen dürfte.

Das Vorzeichen in der folgenden Zusammenstellung hat folgende Bedeutung: Ist die Kreisablesung $270 + m$ und $90 + n$ und die Biegung im Horizont a, so sind die verbesserten Kreisablesungen $270 + m - a$ und $90 + n + a$ in Objectivlage I und $270 + m + a$ und $90 + n - a$ in Lage II.

Da die Differenz beider Ablesungen 180° ergeben sollte, so folgt für a

in Objectivlage I: $a = \frac{1}{2}(m - n)$ und

in Objectivlage II: $a = \frac{1}{2}(n - m)$.

Das Vorzeichen + bedeutet, dass die Objectivhälfte tiefer sinkt als die Okularhälfte.

Objectivlage I.				Objectivlage II.			
Datum	Kreis	a_I	t	Datum	Kreis	a_{II}	t
1897 Mai 19	W.	−0.″57	+18.°0	1898 Apr. 20	O.	+0.″03	+11.°6
Spt. 13	W.	−0.35	+14.2	21	O.	+0.18	+11.7
14	O.	−0.10	+13.5	25	W.	+0.27	+12.3
Okt. 27	O.	−0.30	+ 5.7	28	W.	+0.33	+12.6
1898 Apr. 16	O.	−0.25	+10.5				
Mai 9	W.	−0.30	+12.2				
Mittel $a_I = -$ 0.″29				Mittel $a_{II} = +$ 0.″23.			

Die Uebereinstimmung beider Werte stellt die Realität derselben ausser allen Zweifel.

Frühere Bestimmungen sind von Dr. Herz[1]) in den Jahren 1887/88 ausgeführt; dieselbe Methode ergab $a = +$ 0.″29. Da eine Vertauschung von Objectiv und Okular seitdem meines Wissens nicht vorgekommen ist, so scheint eine Aenderung wahrscheinlich. Die von Herz (l. c.) aus Beobachtungen von Fundamentalsternen abgeleiteten Biegungswerte stimmen sehr wenig überein; doch dürfte es auch vergebliche Mühe sein, aus solchen Beobachtungen, und zwar relativ nur weniger Sterne bei einem Repsold'schen Kreise auf Biegung, Abhängigkeit derselben von der Temperatur

1) Publikationen der v. K. Sternwarte, I. Bd. pag. 98 u. f.

und Jahreszeit, Fadenkrümmung etc. schliessen zu wollen, zumal über die Teilungsfehler noch gar nichts bekannt war.

Am 18. April 1898 wurden Objectiv und Okular vertauscht. Wegen Ungunst der Witterung konnten nur an fünf Abenden insgesammt 240 Z. D., 172 bis zu 70° Z. D., beobachtet werden, sodass von vornherein kein sicheres Resultat für die Biegung zu erwarten war, zumal auch keine Nadircorrectionen (cf. § 12) abgeleitet werden konnten, die für Mai 3 ganz unzweifelhaft erforderlich wären.

Die folgende Zusammenstellung enthält neben den Objecten die Kreislage, die Anzahl n der Beobachtungen in Objectivlage I und II, die angenäherte Zenithdistanz und die Differenz in dem Sinne Objectivlage I—II.

Stern	Kr.	n I	n II	Z. D.	$2d.$	Stern	Kr.	n I	n II	Z. D.	$2d.$
χ Urs. maj. . . .	W	10	4	+ 0° 8′	−0″13	ζ Leonis	O	10	1	−24° 17′	−0″25
η Urs. maj. . . .	W	22	3	+ 1 37	+ 41	41 Leon. min. .	W	10	3	−24 29	− 42
λ Bootis	W	8	3	− 1 39	+ 03	„	O	8	1	−24 29	− 18
τ Persei	W	2	2	− 1 39	+ 05	Gr. 1586	O	11	1	+25 9	− 11
φ Persei	W	2	2	− 3 0	− 13	β Urs. min. . . .	W	7	3	+26 22	+ 28
ψ Urs. maj. . . .	W	12	3	− 3 9	+ 19	β Herculis . . .	W	2	2	−26 30	+ 62
„	O	10	1	− 3 9	− 16	ζ Urs. min. . . .	W	2	2	+29 54	+ 21
ϑ Urs. maj. . . .	O	10	1	+ 3 56	− 48	4 H. Drac. . . .	W	10	4	+29 59	+ 41
ϑ Bootis	W	7	3	+ 4 7	− 10	1 H. Drac. . . .	O	11	1	+33 34	− 23
γ Urs. maj. . . .	W	11	4	+ 6 3	− 07	ε Urs. min. . . .	W	3	1	+34 0	− 32
ε Urs. maj. . . .	W	24	4	+ 8 18	− 25	60 Herculis . . .	W	3	1	−35 20	+ 32
β Urs. maj. . . .	W	11	3	+ 8 43	− 05	α Leonis	O	12	1	−35 45	− 03
„	O	11	1	+ 8 43	− 02	ι Leonis	W	11	4	−37 7	+ 33
12 Can. ven. sq.	W	20	4	− 9 20	− 14	„	O	10	1	−37 7	+ 37
δ Urs. maj. . . .	W	13	4	+ 9 24	+ 07	ο Virginis	W	9	3	−38 54	− 05
ϑ Draconis . . .	W	2	2	+10 38	− 17	π Leonis	W	12	1	−39 40	− 51
ι Draconis . . .	W	4	2	+11 7	+ 05	„	O	10	1	−39 40	− 33
η Draconis . . .	W	2	2	+13 32	− 62	χ Leonis	W	11	3	−40 19	− 38
12 H. Drac. . .	W	2	2	+14 42	− 37	„	O	10	1	−40 19	+ 11
ζ Herculis	W	2	1	−16 25	+ 02	α Urs. min. O.C.	W	29	2	+40 33	+ 36
ϑ Cor. bor. . . .	W	4	2	−16 30	− 21	α Urs. min. U.C.	W	27	4	+43 2	+ 22
α Draconis . . .	W	8	3	+16 38	− 17	η Virginis	W	10	4	−48 18	− 02
42 Leon. min. .	W	10	3	−16 59	− 44	ϑ Virginis	W	13	4	−53 12	+ 35
„	O	8	1	−16 59	− 18	γ Cephei U.C. .	W	10	4	+54 44	+ 08
i Draconis . . .	W	9	3	+17 1	+ 43	β Librae	W	6	3	−57 13	+ 46
ϱ Bootis	W	4	4	−17 23	− 43	κ Virginis	W	8	3	−58 0	+ 01
α Cor. bor. . . .	W	4	2	−21 9	+ 12	ζ Ophiuchi . . .	W	2	1	−58 34	+ 47
λ Draconis . . .	W	11	4	+21 41	− 29	50 Cassiop. U.C.	W	9	3	+59 52	+ 53
„	O	13	1	+21 41	− 44	5 H. Cam. U.C.	W	2	2	+60 46	− 09
ε Leonis	O	10	1	−23 58	− 31	δ Crateris	W	11	4	−62 26	− 51
ζ Leonis	W	11	2	−24 17	− 03	„	O	10	1	−62 26	− 46

Nördliche Zenithdistanzen sind positiv, südliche negativ bezeichnet.

Bezeichnet man die von der gesammten Biegung befreiten Z. D. mit z_{I} resp. z_{II}, je nach der Objectivlage, mit z_0 die unverbesserte Z. D., an die jedoch alle anderen Correctionen, auch die Polhöhenschwankungen, angebracht sind, so ergiebt sich, wenn wir uns auf die einfachen Glieder der periodischen Function beschränken, folgendes Gleichungssystem:

$z_{I} = z_0 + a_1 \sin z_0 + b_1(1+\cos z_0)$	für K. O. nördl. Z. D.,	K. W. südl. Z. D.	
$z_{I} = z_0 + a_1 \sin z_0 - b_1(1+\cos z_0)$	K. W. „	K. O.	„
$z_{II} = z_0 - a_1 \sin z_0 - b_1(1+\cos z_0)$	K. O. „	K. W.	„
$z_{II} = z_0 - a_1 \sin z_0 + b_1(1+\cos z_0)$	K. W. „	K. O.	„

und somit

$$d = \tfrac{1}{2}(z_{I} - z_{II}) = a_1 \sin z_0 \pm b_1(1 + \cos z_0).$$

Den Gleichungen, in denen in Objectivlage I mehr als 7 mal und in II mehr als 3 mal beobachtet ist, wurde doppeltes Gewicht gegeben. Aus der Ausgleichung folgt

$$a_1 = 0''.000 \quad \text{und} \quad b_1 = -0''.009.$$

Dieses Resultat widerspricht in bezug auf den Sinuscoefficienten dem vorhin auf instrumentellem Wege gefundenen, welches ohne Zweifel grösseres Vertrauen verdient.

Zur weiteren Untersuchung des Cosinuscoefficienten habe ich die zwischen den beiden Kreislagen nach Berücksichtigung aller Correctionen noch verbleibenden Differenzen einer Diskussion unterworfen, denn wie in dem vorigen Abschnitt bemerkt ist, sind offenbar noch solche systematischer Natur vorhanden. Rühren sie von der Biegung her, so müssen sie nach den obigen Gleichungen die Form haben:

$$\tfrac{1}{2}(\text{K. O.} - \text{K. W.}) = \pm b_1(1 + \cos z_0)\begin{Bmatrix} + \text{nördl. Z. D.} \\ - \text{südl. „} \end{Bmatrix}$$

Gleicht man hiernach die im vorigen Abschnitt mit Δ_{II} bezeichneten Grössen aus, so ergiebt sich

$$b_1 = +0''.053$$

und nach nördlichen und südlichen Z. D. getrennt

$$b_n = +0''.061, \quad b_s = +0''.041.$$

Die Grössen sind klein; da sie jedoch in ihrem doppelten Betrage sich genau mit dem vorhin bei den Teilungsfehlern für die Vergrösserung der Konstanten der periodischen Function gefundenen

Werte decken, so scheinen ihre Werte in der That reell zu sein. Dazu kommt, dass durch ihre Berücksichtigung die mittlere Abweichung in den beiden Kreislagen von 0."18 auf 0."15 reduciert wird, während der aus den beiden Objectivlagen gefundene Wert offenbar weniger Vertrauen verdient. Der Wert 0."15 liesse sich noch wesentlich verringern, wenn man von der Rechnung ausschlösse:

1) Einzelne heraustretende, auf grössere zufällige Teilungsfehler zu schreibende Abweichungen, wovon einige bereits früher angeführt sind,

2) Alle Tagbeobachtungen, die, wie in § 10 gezeigt wird, weniger genau sind als die Nachtbeobachtungen,

3) Die Zone 0° 0′ bis + 1° 36′ Z. D.

Ich habe jedoch hiervon abgesehen und der Biegung die Form gegeben

$$B = +\,0.''260 \sin z \pm 0.''053(1 + \cos z).$$

Hiermit ist die folgende Tabelle gerechnet:

Z	I	II	Z	I	II
0°	+ 0."106	− 0."106	50°	+ 0."285	+ 0."111
10	+ 0.151	− 0.061	60	+ 0.305	+ 0.145
20	+ 0.192	− 0.014	70	+ 0.315	+ 0.173
30	+ 0.228	+ 0.032	80	+ 0.317	+ 0.193
40	+ 0.260	+ 0.074	90	+ 0.313	+ 0.207

I. K. O. nördl. Z. D. K. W. südl. Z. D.
II. K. W. „ „ K. O. „ „

Mit diesen Werten ergeben sich die in der im vorigen § gegebenen Zusammenstellung enthaltenen Zenithdistanzen und unter Δ_{III} die nunmehr noch verbleibenden Abweichungen der beiden Kreislagen. In Gruppen zusammengefasst ergiebt sich als Mittel der Abweichungen:

	Δ_I	Δ_{III}
− 70° bis − 48° 13′	= + 0."57	= + 0."05
− 16 25	+ 0.53	− 0.02
0 0	+ 0.18	− 0.04
+ 1 36	+ 0.02	+ 0.36
+ 40 32	− 0.40	− 0.06
+ 70 8	− 0.56	− 0.04

Damit ist die Darstellung völlig befriedigend mit Ausnahme in der nördlichen Zenithzone, sowie für die ersten südlichen Zenithsterne, bei der merkwürdiger Weise Strich- wie Biegungscorrection

eine auffallende Verschlechterung herbeiführen. Der Grund hierfür ist nicht erkenntlich; möglich ist, dass bei diesen ein stärkerer physiologischer Fehler bei der Einstellung im Spiele ist, denn wegen der unbequemen Hantierung des Beobachtungsstuhls sind sie sämmtlich mit nördlicher Beinlage eingestellt, so dass die Feineinstellung einmal mit der linken Hand, das andere Mal mit der rechten Hand auszuführen war, was bei der etwas gezwungenen Körperhaltung vielleicht einen Einfluss auszuüben vermochte. Möglich aber ist auch das Vorhandensein von grösseren zufälligen Teilungsfehlern in dieser Zone. Indessen vermag ich nachträglich die Frage nicht mehr definitiv zu entscheiden.

Ueber Krümmung und Durchbiegung der Horizontalfäden wird der folgende § das Nähere bringen.

§ 8.

Die Neigung des Fadennetzes.

Wenn bei dem gegenwärtigen Zustande unserer optischen Instrumente das Augenmerk der Meridiankreisbeobachter im allgemeinen darauf gerichtet ist, bei Deklinationsbeobachtungen die Feineinstellung in möglichster Nähe des Meridians vorzunehmen, so dürfte dieses hauptsächlich seinen Grund darin haben, eine Correction zu vermeiden, die durch eine geneigte und allenfalls auch gekrümmte Lage der Horizontalfäden bedingt ist, und deren Bestimmung nicht hinreichend zuverlässig erscheint, da sie mit wenigen Ausnahmefällen indirect, d. h. entweder aus den extrameridionalen Einstellungen der Sterne selbst oder durch Fixierung der beiden Momente, in denen der Stern vor und nach seinem Meridiandurchgange die Horizontalfäden passiert, abgeleitet wird. Da in beiden Fällen besonders Sterne höherer Deklination zu benutzen sind, so ist mit diesen Methoden der Uebelstand eines unbequemen Zeitverlustes verbunden, den man bei Beobachtungen am Himmel gern zu vermeiden sucht, zumal wenn kein Hilfsbeobachter zur Verfügung steht. Zur Ableitung von Fadenkrümmungen dürften diese Methoden selten befriedigende Resultate ergeben haben. Dass bei der zweiten Methode das Resultat sehr leicht durch physiologische Fehler entstellt werden kann, liegt auf der Hand.

Ein weiterer Grund für dieses Verfahren liegt darin, Fehler zu vermeiden, die durch eine etwa vorhandene Verzerrung der

Bilder oder des optischen Feldes entstehen; doch dürfte er bei der jetzigen Güte der optischen Teile eines grösseren, erstklassigen Instruments wenigstens innerhalb des durch das Fadennetz begrenzten Raumes nicht hinreichend stichhaltig sein.

Beschränkt man sich auf Einstellungen in der Nähe des Meridians, so wird ferner ohne Frage die Sicherheit der Einstellung leiden, denn durch diese Beschränkung in der Zeit wird eine gewisse Hast und Unruhe verursacht; sodann ist man hierbei fast stets auf directes Einstellen angewiesen und kann nicht die Sterne in die gewünschte Position hineinlaufen lassen, was eine grössere Genauigkeit gewährt. Schliesslich ist die Beschränkung in der Zeit an sich ein Uebelstand, denn von den 2—3 Minuten des Durchgangs (bei Polsternen noch mehr) bleiben nur wenige Sekunden zur Verfügung.

Die Unbequemlichkeit der genannten Methoden hat es in manchen Fällen zur Folge gehabt, dass in der Kenntnis der Correction wegen Fadenneigung eine Unsicherheit bestehen blieb von der Ordnung derjenigen der Einstellung selbst. Ist z. B. die Fadenneigung um 3′ ungenau, so macht dieses in 40ˢ Stundenwinkel im Aequator etwa 0″50 aus, eine Grösse, die bei Beobachtungen der Sonne und des Mondes (resp. ihrer Ränder) systematische Differenzen herbeiführen kann, zu deren Erklärung man später zu allen möglichen Hypothesen seine Zuflucht nimmt.

Lösungen der Aufgabe auf rein instrumentellem Wege sind mehrfach ausgeführt, so von HAMY und BOQUET[1]), deren instrumentelle Anordnung jedoch ziemlich kompliciert ist und die Berücksichtigung einer Reihe von Fehlerquellen verlangt. Sie besteht kurz darin, dass man die Entfernung zweier nahezu in einer horizontalen, im Focus der Mire liegenden Lichtpunkte mit dem beweglichen Vertikal- und Horizontalfaden ausmisst, dann die Lichtpunktplatte um 180° dreht, so dass die beiden Punkte ihre Lage vertauschen, und die Messung wiederholt. Die Platte befindet sich an einem Pendel, welches nach der Drehung dieselbe Gleichgewichtslage wieder annimmt; es ändert also die Neigung der Verbindungslinie der beiden Punkte zur Horizontalen nur ihr Vorzeichen, nicht ihre Grösse, so dass sich aus den beiden Ausmessungen die gesuchte Fadenneigung ergiebt.

Ein anderer Vorschlag rührt von GAUTIER[2]) her, der von

1) Bulletin astron. Bd. 7 u. 8.

2) Bulletin astron. Bd. 7 pag. 97.

Professor Ambronn und Dr. Hayn[1]) wieder aufgenommen ist und zu einer einfachen und bequemen Methode geführt hat, die meines Wissens bislang nur am Göttinger Meridiankreise und zwar mit gutem Erfolge zur Anwendung gekommen ist, und in etwas veränderter, einfacherer Gestalt am Ottakringer Meridiankreis durch den Verfasser.

Die Justierung des Fadennetzes hat darin zu bestehen, dass der bewegliche Vertikalfaden dem festen Hauptfaden scharf parallel zu stellen ist und ferner, dass dieser gegen die Axe des Instruments auch wirklich vertikal gestellt wird, denn auf seine jeweilige Lage haben sich alle weiteren Untersuchungen zu beziehen. Der ersten Forderung genügt man bekanntlich dadurch, dass man festen und beweglichen Faden so nahe zusammenbringt, dass nur eine schwache Lichtlinie übrig bleibt, und diese an verschiedenen Stellen ihrer Länge vermittelst der vorhandenen Correctionsschrauben auf gleiche Breite bringt. Die Vertikalität des Hauptfadens prüft man dadurch, dass man einen scharfen Punkt des Collimators oder der Mire an dem Faden durch Drehung des ganzen Instruments langsam vorbeiführt. Besser noch als der blosse Augenschein ist jedoch die wirkliche Messung; man stellt den beweglichen Vertikalfaden an verschiedenen Stellen seiner Länge, die durch den Kreis oder durch den beweglichen Horizontalfaden bestimmt sind, auf den Punkt ein und erhält so eine Reihe von Gleichungen von der Form $\sin x = \frac{a}{b}$. Ist die Neigung nur gering, so mag man sie ruhig bestehen lassen, da sie kleinen Aenderungen doch unterworfen ist.

Um das horizontale Fadensystem auf das feste zu beziehen, bringt man in den Focus des Collimators eine Platte mit vier äusserst kleinen Durchbohrungen, die sich um ihr Centrum drehen lässt (Figur 2). Von hinten beleuchtet, erscheinen die Durchbohrungen im Meridiankreise als scharfe Lichtpunkte, auf die sich ein Faden mit grosser Sicherheit einstellen lässt.

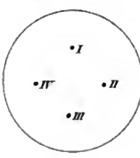


Fig. 2.

Dreht man die Platte so, dass die Punkte I, III nahezu vertikal liegen und misst man mit den entsprechenden Fäden die horizontale Distanz von I—III und die vertikale Distanz II—IV, und wiederholt die Messung

1) Zeitschrift für Instrumentenkunde 1891 pag. 77.

nach Drehung der Platte um etwa 90°, so ist die ganze Operation fertig, nachdem man noch die directen Entfernungen I—III und II—IV mit einem der beweglichen Fäden ausgemessen hat.

Es seien (Fig. 3) I bis IV die Lichtpunkte, *VV* und *HH* der bewegliche Vertikal- und Horizontal-Faden. Durch die erste Ausmessung erhält man die Strecken p und q, und ferner I—III und II—IV, wenn man die Punkte I und III, resp. II und IV durch

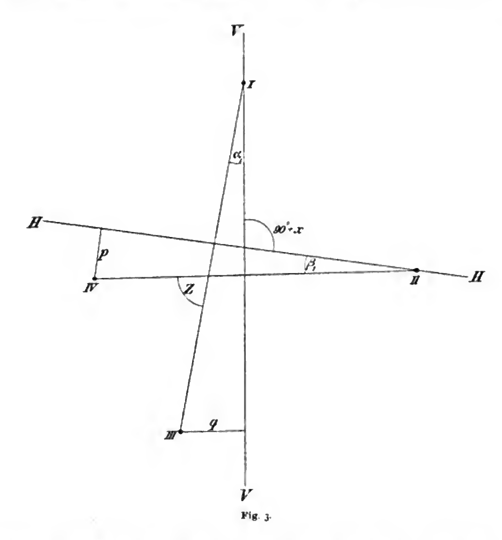


Fig. 3.

Drehung der Platte auf den Vertikalfaden bringt und alsdann mit dem Horizontalfaden oder direct mit dem Kreise ihre Entfernung ausmisst. Hieraus ergeben sich die Winkel α_1 und β_1. Nach der Drehung der Platte um 90° ändern die Winkel α und β ihre Indices, der gesuchte Winkel $90+x$ bleibt aber konstant und für den Diagonalwinkel Z tritt sein Complement zu 180° ein. Daraus ergiebt sich:

$$90 + x - Z = \alpha_1 + \beta_1$$

$$90 + x - (180 - Z) = \alpha_2 + \beta_2, \quad \text{und folglich}$$

$$x = \tfrac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2).$$

Es sind hierbei natürlich die Richtungen, in welchen man die Vorzeichen von α und β zählen will, vorher festzulegen und bei der Auswertung der Formel zu berücksichtigen. Je kleiner p und q und je grösser die Diagonalen I—III und II—IV sind, desto genauer erhält man natürlich die Winkel.

Ist ein vertikaler Okularschieber nicht vorhanden, und will man I—III nicht gar zu klein machen, so dass beide Punkte zu gleicher Zeit nicht im Gesichtsfeld sichtbar sind, so ist eine scharfe Justierung des Vertikalfadens notwendig, wenn man mit Hülfe der Feinbewegung des Instruments die Lichtpunkte I und III nach einander in die Mitte des Gesichtsfeldes bringen und dort die Grösse q messen will. Statt der Diagonalen könnte man auch die anderen, grossen Katheten messen; doch müsste dieses nach jeder Drehung der Platte von Neuem geschehen, während die Diagonalen konstant bleiben.

Zu bemerken ist noch, dass das horizontale Dreieck (und allenfalls auch das vertikale, wenn der Vertikalfaden nicht scharf justiert ist) nicht scharf rechtwinklig ist, sondern dass der Kathetenwinkel $90 + x$ beträgt; doch kann man unbeschadet der Genauigkeit hiervon absehen, da x stets nur eine kleine Grösse sein wird.

Fehlt der bewegliche Horizontalfaden, so kann man den Kreis benutzen oder den Winkel β gleich Null machen, indem man die beiden Horizontalpunkte durch Drehung der Platte in Koincidenz mit dem festen Faden bringt, was jedoch einige Mühe macht; ausserdem ist hierzu ein Gehülfe erforderlich.

Zur Erhöhung der Genauigkeit des Resultats wird man noch weitere Drehungen der Platte vornehmen. Hat man sich erst von einer genügenden Stabilität des Fadennetzes überzeugt, so beschränkt sich die Arbeit auf zeitweilige Wiederholung der Bestimmung des Neigungswinkels des Vertikalfadens, und nur ab und zu, bei starken Temperaturschwankungen oder bei grosser Luftfeuchtigkeit, ist die vollständige Untersuchung notwendig.

Die instrumentelle Einrichtung richtet sich nach der jeweiligen Konstruktion des Okularkopfes des Collimators; sie dürfte stets leicht zu beschaffen sein, da es nur nötig ist, die Punktplatte (Fig. 2) an die Stelle des Collimatorfadennetzes anzubringen, der Art, dass sie sich um die Axe des Collimators drehen lässt. Als Punktplatte diente eine solche aus weichem Metall, in die

sich die Löcher leicht mit der nötigen Feinheit hinein bohren lassen.

Es ist klar, dass sich auf diese Weise auch Krümmung und Durchbiegung durch die Schwere beim Horizontalfaden scharf bestimmen lässt, indem man die Neigungsuntersuchung an verschiedenen Stellen seiner Länge ausführt, wozu sich die am Okularende des Collimators befindliche starke Azimuthalführung sehr gut verwenden lässt. Ebenso können bei geeigneter Lage der Löcher mit Hülfe eines solchen Apparats die Schrauben des Okularmikrometers untersucht werden.

Es mögen nunmehr die Ausführungen der Beobachtungen selbst folgen:

Der Parallelismus der festen und beweglichen Fäden hat sich zufolge wiederholter Prüfungen als sehr konstant erwiesen. Als Hauptfäden galten der vertikale Mittelfaden und die beiden horizontalen festen Fäden, die selbst unter einander völlig parallel waren. Ungleiche Krümmung war nicht vorhanden. Die Resultate der Neigungsuntersuchungen des vertikalen Mittelfadens und derjenigen der horizontalen Fäden gegen diesen sind neben dem Datum, der Temperatur des Beobachtungsraums und der Kreislage in folgender Zusammenstellung gegeben.

Datum	Temp.	Kr.	y	x	Datum	Temp.	Kr.	y	x
96 Nov. 18	+ 3°9	O	+ 4′ 2″	+ 0′38″	97 Juni 28	+ 21°4	O	− 0′11″	
19	+ 4.5	O		+ 0 29	Aug. 17	+ 23.0	W	− 0 18	
Dec. 5	− 5.5	W	+ 3 40		Septr. 11	+ 14.3	W	− 0 6	+ 0′50″
12	+ 0.7	W	+ 3 26	+ 0 18	Nov. 22	+ 7.5	O	− 0 23	
97 Mai 8	+ 10.0	W	+ 4 36	+ 0 43	Dec. 3	+ 1.6	O	− 0 25	+ 0 41
10	+ 10.4	W		+ 0 34	98 Jan. 10	+ 2.1	W	− 0 16	
14	+ 7.0	W	− 0 16	+ 0 38	März 1	+ 3.6	O	− 0 16	
15	+ 5.7	W		+ 0 41	April 12	+ 12.0	O	− 0 20	+ 0 36
Juni 9	+ 18.3	O	− 0 23	+ 0 45	29	+ 14.1	W	+ 9 26	+ 1 8

1897 Mai 12 wurde der Winkel y corrigiert und 1898 April 18 wurde Objectiv und Okular vertauscht, und zwar nur für kurze Zeit, weshalb keine Correctur von y erfolgte. Die Bestimmung von x wurde in der Regel durch eine völlige Drehung der Punktplatte ausgeführt.

Es ergiebt sich, dass sich beide Winkel, besonders aber x sehr constant verhalten haben und dass man für x einfach das Mittel nehmen kann. In Figur 4 sei AA die Richtung der Axe

des Instruments, VV und HH Vertikal- und Horizontalfaden, BB senkrecht zu AA, so ist J der gesuchte Neigungswinkel; für denselben ergiebt sich

$$J = y - x$$

und numerisch, wenn wir für die ganze Reihe x konstant $= + 0'38''$ annehmen:

1896 Nov. 18 — 1897 Mai 10 $J = + 3'18''$.
1897 Mai 14 — 1898 April 12 $J = - 0'55''$.

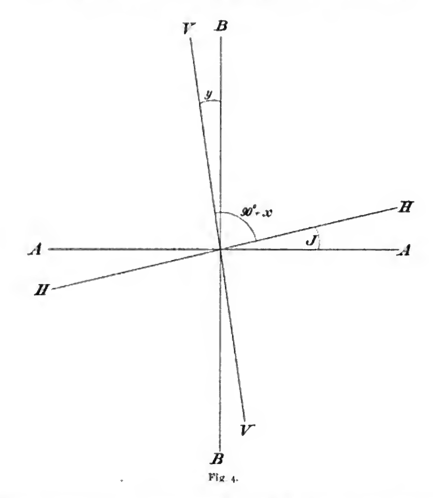


Fig. 4.

Streng genommen wäre noch die Neigung der Instrumentalaxe zu berücksichtigen, doch spielt dieselbe wegen ihrer Kleinheit hierbei keine Rolle.

Bezüglich des Vorzeichens gilt folgendes: Liegt bei dem nach Süden gerichteten Fernrohr das Ostende des Fadens tiefer als das Westende, so sind die vor der Kulmination gemessenen Zenithdistanzen zu klein, nach derselben zu gross; dasselbe gilt für Zenithdistanzen in unterer Kulmination, während für solche nördlich vom Zenith in oberer Kulmination das Gegenteil eintritt. Ueberträgt man dieses der Einfachheit halber auf die Kreis-

ablesung, so ergiebt sich, wenn man den westlichen Stundenwinkel positiv rechnet, folgendes Schema für die an die Kreisablesung anzubringende Correction:

	Kreis Ost	Kreis West
Obere Kulm.	$+C.$	$-C.$
Untere Kulm.	$-C.$	$+C.$

Die Correction selbst hat die Form

$$C = J' \sin 1' \cdot t \cos \delta.$$

Diese lässt sich mit t und δ als Argument für $J = 1'$ leicht tabulieren. Da jedoch mit Ausnahme vom Polaris der Stundenwinkel der Einstellung mit den Vertikalfäden bezeichnet wurde, so ergab sich hierfür folgende einfache Tafel für $J = 1'$ und für die Kreis-Ost-Lage der Fäden:

I	0.″277	VI	0.″133	X	0.″032	XV	0.″075	XIX	0.″178
II	0.253	VII	0.114	XI	0.016	XVI	0.094	XX	0.205
III	0.229	VIII	0.094	XII	0.000	XVII	0.112	XXI	0.223
IV	0.205	IX	0.075	XIII	0.016	XVIII	0.130	XXII	0.246
V	0.182			XIV	0.032			XXIII	0.269.

Am 9. Juni 1897 wurde eine Untersuchung auf Krümmung der Horizontalfäden ausgeführt, indem ihre Neigung an 5 um je etwa 4 Revolutionen der Vertikalfadenschraube entfernten Stellen bestimmt wurde. Das Resultat ist folgendes:

Stellung des Vertikalfadens	0^R0	$x = +0'52''$
	4.5	35
	8.5	43
	12.5	57
	16.0	36

Eine Krümmung dürfte hiernach nicht vorhanden sein. Dasselbe Resultat ergiebt sich aus den Abweichungen der einzelnen Einstellungen gegen die Mittelwerte für diejenigen Sterne, die mehrfach während eines Durchgangs symmetrisch vor und nach Meridiandurchgang beobachtet sind, da für die einzelnen AR.-Fäden im Mittel folgende Werte folgen:

I	−0.″09	VI	+0.″03	X	+0.″03	XV	0.″00	XIX	+0.″02
II	+0.10	VII	−0.03	XI	+0.13	XVI	+0.02	XX	+0.01
III	−0.01	VIII	−0.05	XII	+0.04	XVII	−0.03	XXI	−0.20
IV	−0.09	IX	−0.03	XIII	−0.01	XVIII	−0.02	XXII	+0.02
V	−0.05			XIV	−0.05			XXIII	−0.03.

Der Vollständigkeit halber gebe ich noch die Neigungsbestimmungen aus Sternen, die zum Teil vor der Fertigstellung des Collimatorapparates ausgeführt sind:

I. Fixierung der beiden Momente der Durchgänge eines Sterns durch die Mitte der Horizontalfäden vor und nach Meridiandurchgang:

1896 Sept. 12	$J = +2'14''$	(3 St.)	1896 Nov. 25	$J = +4^\circ 29'$	(2 St.)
21	$+2\ 31$	(10 „)	Dec. 11	$+3\ 19$	(6 „)
Okt. 10	$+3\ 13$	(10 „)	1897 März 4	$+2\ 42$	(6 „).
21	$+3\ \ 6$	(6 „)			

II. Mehrfache Einstellungen von Sternen:

1896 Nov. 25	$J = +4'24''$	4 St.	mit je 7 Einst.	in 70°	Decl.
Dec. 9	$+4\ \ 9$	5 „	„ 6 „	„ 23	„
—	$+3\ 53$,	aus Zonenbeob. im December.			

§ 9.

Bestimmung des Fundamentalpunktes des Kreises.

Der Fundamentalpunkt des Kreises, der der vertikalen Stellung der Collimationslinie entspricht, ist vermittelst des Quecksilberhorizontes im Nadir abgeleitet worden. Diese Methode hat freilich gewisse Bedenken, doch ist sie vorläufig noch ohne Frage die einfachste und zweckmässigste, da andere kaum über die ersten Stadien des Versuches hinaus gekommen sind.

Auf dem Pfeilerfundament ruht auf drei Stellschrauben ein eiserner Untersatz, welcher die angequickte Kupferschale aufnimmt, und welcher um diese herum mit einer Rinne versehen ist, in die ein auf dem Fussboden aufgeschraubter eiserner Kegelmantel frei hineinragt. Die Rinne ist mit einem Gemisch von Oel mit etwas Petroleum angefüllt, so dass Luftzug und Staub von unten abgehalten werden. Ein eiserner Deckel schützt den Spiegel nach oben hin.

Man hat diese Aufstellungsart an einigen Sternwarten (Strassburg und Leiden) dahin umgeändert, dass man den Nadirspiegel oberhalb des Fussbodens auf einem die Pfeiler knapp unter dem Objectiv verbindenden Brett angebracht hat. Diese Art verursacht zwar etwas mehr Mühe, ist aber unbedingt vorteilhafter, denn wenn auch die Quecksilberoberfläche sich in Ottakring im Allge-

meinen durch grosse Ruhe auszeichnete und nicht jene Erzitterungen aufwies, die infolge der Luftunruhe nur die obersten Schichten des Quecksilbers bewegen, so zeigte sich doch bei plötzlichen Temperatur-Schwankungen, wie sie z. B. am 4. September 1897 nach einer längeren Periode warmen Wetters bis zu 15° eintraten, infolge Heraufströmens der im Keller und Fundament aufgespeicherten Wärme eine derartige Unruhe des Quecksilbers, dass ein Beobachten unmöglich war.

Da die Kupferschale nur um ein weniges grösser ist, als die Objectivöffnung, so habe ich mit Sorgfalt darauf gesehen, dass sie stets bis zum Rande gut verquickt war, um einem schädlichen Einfluss der Capillarität vorzubeugen. Die Verquickung einer schadhaften Stelle, wie sie leicht durch Berührung mit dem Finger entsteht, geschieht am einfachsten dadurch, dass man auf derselben etwas Quecksilber mit feinem Schmirgelpapier verreibt.

Trotz der guten Verschlüsse des Horizonts nach unten und oben war doch vor jeder Beobachtungsreihe ein Abziehen der Oberfläche mit einem angefeuchteten Papierstreifen notwendig. Zur Erzielung eines hinreichenden Temperaturausgleichs wurde der eiserne Deckel geraume Zeit vor jeder Nadirbestimmung abgenommen, zu Beginn bereits beim Oeffnen des Spalts.

Die Höhe des Objectivs über dem Spiegel beträgt 1.10 m; zwischen beide wurde zur Abhaltung von Luftströmungen und von fremdem Licht ein Blechcylinder gestellt, wodurch selbst bei starkem Winde Einstellungen mit grosser Schärfe ermöglicht wurden. Sämmtliche Nadirbestimmungen sind bei offenem Spalt, also unter gleichen Verhältnissen wie die Beobachtungen am Himmel ausgeführt. Ich halte dieses für dringend erforderlich, selbst auf die Gefahr grösserer Unsicherheit der Nadirbestimmungen hin, da sich andernfalls besonders bei Tagesbeobachtungen systematische Fehler einschleichen können, deren nachherige Aufdeckung völlig unmöglich ist. (Siehe hierüber die Beispiele in § 5.)

Zur Beleuchtung der Fäden wurde bis 1897 Juni 10 der gewöhnliche BOHNENBERGER'sche Okularspiegel benutzt, von hier an die untere Kathetenfläche des für den Meridiankreis angeschafften Reversionsprismas, welches die REPSOLDS auf meinen Vorschlag hin mit einer Durchbohrung der äusseren Hülse an der entsprechenden Stelle für den Eintritt des Lichts versehen hatten. Das Prisma

verblieb stets auf dem Okular, zumal dadurch keine Verschlechterung der Bilder und keine störende Begrenzung des Gesichtsfeldes eintrat. Die Lichtquelle bestand anfangs aus einer gewöhnlichen Handlampe; des fortwährenden Windes wegen wurde sie jedoch bald durch eine electrische Glühlampe ersetzt.

Die Handhabung der obwohl leichten Nadirtreppe war bei dem engen Bau des Meridiansaals besonders schwierig. Zum Schutze des Rohrs gegen die Körperwärme war sie mit einer, den obwaltenden Verhältnissen entsprechend, nur schmalen Bretterbrüstung versehen.

Die Uebertragung der Feinbewegung von der Nadirstellung geschah mittels Kettenlaufs, den ich nicht für sehr zweckmässig halten kann, da er eine gleichmässige Bewegung erschwert und leicht sprungweise wirkt.

Die Einstellungen erfolgten in der Weise, dass die Bilder nacheinander in die Mitte der Fäden gebracht wurden, zuerst das dem Beobachter nächste. Einfache Coincidenzen ergaben eine ungenügende Sicherheit, denn einmal schwankte der Spielraum des völligen Verschwindens der Bilder unter den Fäden bis zu 0.″2, und andrerseits stellt man ohne Frage sicherer ein, wenn man besonders bei leise zitterndem Horizont sowohl Faden wie Bild im Auge hat.

Die Doppeleinstellung wurde sowohl mit Beobachter im Norden wie im Süden im regelmässigen Wechsel ausgeführt, so dass jede Nadirpunktbestimmung aus vier Einzeleinstellungen besteht. Erst nachdem sich ein systematischer Unterschied zwischen beiden Stellungen nicht herausgestellt hatte, wurden auch einseitige Bestimmungen ausgeführt, aber nur zur Controlle innerhalb einer Beobachtungsreihe. Die Anzahl der Nadirbestimmungen an einem Beobachtungstage schwankt zwischen 4 und 16 (1898 März 11 bei 14 stündiger Beobachtungsdauer). Insgesammt wurden 1160 Einzelbestimmungen ausgeführt.

Zur Ermittlung der Genauigkeit einer Einstellung im Nadir, wie sie das Ablesen aller vier Mikroskope ergiebt, sind die sich gleichzeitig ergebenden Distanzen des Doppelfadens benutzt, da diese eine grössere Gewähr für Unveränderlichkeit und Freisein von systematischen Fehlern darbieten. Jedoch konnte nicht das Mittel aus sämmtlichen beobachteten Fadendistanzen der Rechnung zu Grunde gelegt werden, denn einmal war im Winter

1896/97 eine Verminderung von 10″.64 auf 9″.92 eingetreten, wahrscheinlich gelegentlich des Herausziehens eines alten Fadenrestes, und andrerseits konnten Einflüsse der verschiedensten Art wie Temperatur, Feuchtigkeit etc. eine Veränderung veranlassen. So ergab sich aus den Tagbeobachtungen die Distanz zu 9″.78 und aus denen der Nacht 9″.96. Nach den Temperaturen geordnet ergaben sich folgende Werte:

— 2°	10″.08	+ 15°	9″.92
+ 3	10.02	+ 21	9.92
+ 8	9.96	+ 27	9.68,

die eine Abhängigkeit von derselben vermuten lassen, während für die Feuchtigkeit sich eine solche nicht ergab. Aus diesen Gründen ist der mittlere Fehler abgeleitet worden aus den Differenzen zweier zeitlich zusammengehöriger Distanzen und hat sich ergeben zu

$$E_1 = \pm 0''.078.$$

Hiermit ist der mittlere Fehler eines Nadirpunkts identisch, während derjenige einer Einzeleinstellung sich zu ± 0″.109 ergiebt. Vergleichs halber habe ich auch den mittleren Fehler aus den Abweichungen zweier zeitlich zusammengehöriger Nadirbestimmungen (Treppe Süd und Treppe Nord) abgeleitet und gefunden

$$E_2 = \pm 0''.109.$$

Die Differenz gegen den obigen Wert lässt entweder auf das Vorhandensein eines systematischen Fehlers oder auf Aenderungen in der Zwischenzeit schliessen. Der erstere ist jedoch nicht vorhanden, denn aus 483 Doppelbestimmungen ergiebt sich

$$\tfrac{1}{2}\,(\text{Nadir Süd} - \text{Nadir Nord}) = + 0''.004.$$

Da der mittlere Fehler aus der Summe der Ablesungen aller 4 Mikroskope sich zu ± 0″.045 ergeben hat (§ 5), so gestaltet sich derjenige der Einstellung im Nadir für Nachtbeobachtungen zu ± 0″.087 und für dieselben am Tage zu ± 0″.115, während Professor Bauschinger (l. c.), der Faden und Bild zur Coincidenz gebracht hat, hierfür + 0″.101 findet, wobei aber zu beachten ist der Unterschied der angewandten Vergrösserungen (270 gegen 120 in Ottakring), und dass Bauschinger die Nadirbestimmungen bei geschlossenen Klappen ausgeführt hat.

Vergleicht man nun mit dem immerhin kleinen mittleren Fehler die zeitlich getrennt liegenden Nadirpunkte eines Abends

sowie längerer Zwischenräume, so ergiebt sich in diesen eine Diskontinuität zu erkennen, die überraschen muss. Die folgende Zusammenstellung giebt einen Ueberblick über die Veränderungen des N.-P. während einer Beobachtungsreihe, also innerhalb 1—3 Stunden; eine Vergrösserung ist mit +, eine Verminderung mit — bezeichnet:

Aenderung		Anzahl				Aenderung		Anzahl			
von	bis	K.O.	K.W.	a	b	von	bis	K.O.	K.W.	a	b
0."00		11	17	4	1						
+0."01	0."10	70	43	15	4	—0."01	0."10	78	50	11	4
0.11	0.20	20	14	7	2	0.11	0.20	24	31	11	1
0.21	0.30	4	5	4	2	0.21	0.30	6	8	0	0
0.31	0.40	2	5	1	2	0.31	0.40	2	6	0	2
0.41	0.50	2	1	2	0	0.41	0.50	3	3	2	1
0.51	0.60	0	1	1	0	0.51	0.60	1	3	0	2
0.61	0.70	0	1	1	0	0.61	0.70	0	2	0	1
0.71	0.80	0	0	—		0.71	0.80	2	1	0	1
0.81	0.90	0	0	—		0.81	0.90	1	1	1	1
0.91	1.00	0	0	—		0.91	1.00	1	1	1	1
1.13			1			1.05			1		
						1.16			1		
						1.36			1		

Die unter a und b befindlichen Zahlen geben die Veränderungen für Beobachtungen am Tage und für die Uebergänge von Tag zur Nacht. Man sieht, dass gerade die stärksten Veränderungen auf diese beiden Reihen fallen. Im Allgemeinen ergiebt sich, dass bei Kreis Ost der N.-P. bei Tage kleiner ist als bei Nacht, bei Kreis West umgekehrt.

Wenn nun auch für die Ableitung der Zenithdistanzen lediglich das Verhalten des N.-P. während einer Beobachtungsreihe massgebend ist, so muss für uns auch dasselbe während längerer Zeiträume von Interesse sein, denn es legt uns die Frage nach seinem Ursprung nahe: ob diese Veränderungen nicht etwa durch unzureichende Stabilität des Instruments, durch fehlerhafte, lückenhafte Anordnung etc. bedingt sind.

Um dieses festzustellen, haben wir zu untersuchen einmal das Verhalten des Systems des Kreises und der Collimationslinie und andrerseits das Verhalten des Kreises zum Mikroskopsystem. In dem ersteren liegt ein Teil des Instrumentalfehlers ausgedrückt,

den wir zur Biegung rechnen und an anderer Stelle behandeln. Dieselbe ist stets nur klein gewesen und Aenderungen der vorliegenden Art sind bei dieser völlig ausgeschlossen.

In Bezug auf das zweite System wollen wir zunächst untersuchen, wie weit die Mikroskope gegen einander Aenderungen unterworfen sind. In seinem Referat über Band I und II der Annalen des Kaiserl. Sternwarte zu Strassburg (Vierteljahrsschrift der Astron. Gesellsch. 1900) weisst Nyrén darauf hin, dass es wohl ein Vorteil ist, dass bei den neueren Repsold'schen Meridiankreisen die Mikroskope an zwei weit von einander entfernten Stützpunkten befestigt werden, dass aber dieser Vorteil zum grossen Teil dadurch aufgehoben wird, dass je grösser diese Entfernung ist, desto grösser auch der Unterschied der linearen Verstellung der beiden Punkte in Bezug auf die durch die Umdrehungsaxe des Instruments und das Mikroskop gelegte Ebene sein kann, sei es durch Spannungen, sei es durch Temperaturveränderungen, die bei den grossen Massen nicht so leicht ausgeglichen werden können. Als weiteres Bedenken führt er noch die grosse Entfernung der Limbusfläche von dem zunächst liegenden Stützpunkt des Mikroskops an.

In der That haben sich bei dem Strassburger Instrument starke Veränderungen der Lagen der Mikroskope zu einander und zu einem Fixpunkt gezeigt, bei dem Bonner hingegen nicht, während beim Münchner Kreise die Mikroskope der Schwere folgend sich mehr und mehr gesetzt haben. Da der Ottakringer Kreisdurchmesser noch um 10 cm kleiner ist als bei den genannten, so würden hier die von Nyrén befürchteten linearen Verstellungen von noch grösserem Einflusse auf die Kreisablesung sein.

Eine weitere Aenderung in den Entfernungen der Mikroskope von einander, wie sie sich aus den Kreisablesungen ergeben, kann herbeigeführt werden durch die Differenz der Ausdehnungscoefficienten von Gusseisen und Messing. Da der Abstand der Mikroskope etwa 400 mm von einander beträgt, so würde durch eine Temperaturveränderung von einem Grad sich der Kreis von einem Mikroskop bis zum nächsten um 0.00265 mm mehr ausdehnen, was in Bogenmass 2″ gleichkäme.

Zur Untersuchung dieser Fragen habe ich aus sämmtlichen Nadirbestimmungen die Entfernungen der Mikroskope von einander abgeleitet und ebenso die Differenzen aus den Mitteln je

zweier einander gegenüber stehender Mikroskope gebildet. Das Resultat muss im allgemeinen als ein günstiges bezeichnet werden, insofern sich die geäusserten Bedenken nicht bestätigen. Für die einzelnen Abendreihen halten sich die Mikroskoplagen sehr konstant; nur in wenigen Fällen zeigt sich eine Aenderung von einem, und auch wohl von zwei Mikroskopen, und zwar sowohl eine sprungweise wie auch allmähliche, bis zu 2″, die sich natürlich auch im Nadirpunkt zu erkennen giebt.

Zum Teil sind diese Aenderungen nur scheinbar, wenn nämlich die Ablesung durch Aenderungen in der Beleuchtung beeinflusst ist, so z. B. beim Uebergang von Tag zu Nachtbeobachtungen. Der Grund für die reellen Aenderungen ist mir nicht recht erkenntlich, denn einmal treten sie plötzlich während einer längeren Reihe auf, während welcher an den Mikroskopen keinerlei Eingriffe vorgenommen sind, und ferner zeigt sich gerade bei starken Temperaturschwankungen an einem Abend (bis zu 7°5) keine Verschiebung, woraus sich noch ergiebt, dass die starken Metallmassen den Schwankungen nur langsam und unmerklich nachfolgen. Auch für längere Perioden ergiebt sich die Lage der Mikroskope als sehr stabil; nur in der Zeit von 1897 September 18 — November 26 zeigt sich bei einer Temperaturschwankung von 25° eine Abhängigkeit von dieser schwach angedeutet, nämlich bis zu 2″ für das ganze Zeit-Intervall.

Aus der Konstanz der Differenzen der Mittel je zweier einander gegenüber liegender Mikroskope ergiebt sich, dass Aenderungen in der Excentricität des Kreises oder seiner Lage zum Mikroskopsystem nicht vorhanden sind.

Da nun mehrfach Aenderungen im Nadirpunkt vorkommen, hingegen keine in den Mikroskoplagen, so bleibt nur anzunehmen, dass das gesammte Mikroskopsystem in seiner Stellung zum Kreise und somit auch zur Collimationslinie eine Aenderung erfährt, was sehr leicht dadurch möglich ist, dass die Pfeiler mit den daran befestigten Mikroskopen unregelmässigen Schwankungen gegen die Lotlinie unterworfen sind, die zu erkennen die neueren Repsold-schen Meridiankreise keine Hilfsmittel bieten. Die Wichtigkeit dieser Frage für Fundamentalbeobachtungen mag es rechtfertigen, wenn ich auf dieselbe etwas näher eingehe.

Bei dem Strassburger Kreise ist mit Sicherheit eine tägliche Periode in dem Azimut und in der Neigung der Drehungsaxe von

ca. 0″40, und für letztere auch eine jährliche Periode von ca. 5″ Amplitude nachgewiesen.[1]) Bei unserem Kreise ist ebenso eine jährliche Periode von 5″ Amplitude in der Neigung wahrscheinlich. Hier wie dort liegt das Westende im Winter um diesen Betrag höher wie im Spätsommer; und wenn dort die Erklärung hierfür in der Lage des nach Osten freien, auf der Westseite aber durch den Passagensaal und den Vorbau mit den beiden Kuppeln geschützten Meridiansaales in Verbindung mit der Einstrahlung und Leitung der Sonnenwärme gefunden wird, so liegen in Ottakring die baulichen Verhältnisse gerade umgekehrt: Der Meridianbau ist im Westen frei und im Osten durch einen starken Anbau geschützt. Ferner hat sich in Strassburg auch für den Nadirpunkt besonders für die Kl.-Ost-Lage des Instruments eine tägliche Periode von 0″60 Amplitude ergeben, und wahrscheinlich würden wir bei anderen Meridiankreisen auf gleiche Erscheinungen stossen, wenn uns für sie ein ebenso zahlreiches Material zur Verfügung stände. Da wir es bei allen diesen Schwankungen ohne Frage weniger mit relativen Bewegungen der Instrumententeile zu thun haben, als mit Hebungen und Senkungen der gesammten Pfeilermasse, so können wir schliessen, dass zunächst im Grossen, im Laufe eines Jahres die vertikale Pfeileraxe eine Art kegelförmiger Bewegung um die Lotlinie ausführt, wobei die horizontalen Axen nicht parallel gerichtet bleiben, sondern in gleicher Periode um eine Mittellinie schwanken, und dass diese ganze Bewegung sich wiederum im Kleinen im Laufe eines Tages abspielt.

Indessen scheint noch eine längere Periode vorhanden zu sein, denn Professor FOERSTER[2]) hat über das Verhalten der Grundpfeiler der Berliner Sternwarte in dem Zeitraum 1839—81 Untersuchungen angestellt und ist hierbei zu folgenden Resultaten gekommen:

1) Unabhängigkeit der Bewegung vom Grundwasserstande.

2) Es besteht eine Periode von einem und von 11 Jahren, und zwar thermischen Charakters.

3) Die Gestaltänderungen und Verziehungen beschränken sich auf die Pfeiler; die Bodenschichten nehmen keinen Anteil daran, denn jene sind offenbar eine Folge der Temperaturverteilung innerhalb der Pfeiler.

1) Annalen Bd. I, pag. XXIX und XLVIII.
2) Astron. Nachr. Bd. 107.

4) Die Hauptursache ist weniger in den Schwankungen der Lufttemperatur zu suchen als vielmehr in der Verschiedenheit der Ausstrahlung und Einstrahlung.

Diese Schlüsse dürften sich zum Teil kaum vereinbaren lassen mit den neueren Ergebnissen mit dem Horizontalpendel, die eine fortwährende Aenderung der Lage der obersten Erdschichten mit allem, was sich darauf befindet, zur Lotlinie dargethan haben.

Diese Arbeiten können indes noch keineswegs als abgeschlossen betrachtet werden, denn die dem äusserst subtilen Instrument anhaftenden Fehler sind von den reellen Terrainbewegungen noch nicht mit voller Sicherheit zu trennen, wie besonders die Untersuchungen Dr. Hecker's[1]) in Potsdam gezeigt haben. Soviel ist jedoch nach den bisherigen Beobachtungen besonders von v. Rebeur-Paschwitz und Ehlert als sicher anzunehmen, dass sowohl periodische wie besonders plötzlich eintretende Terrainschwankungen bestehen und Beträge erreichen von mindestens gleicher Ordnung wie die Nadirpunktänderungen. v. Rebeur-Paschwitz teilt die unperiodischen, kurzen Bewegungen, die uns hier am meisten interessieren, in drei Gruppen: Die mikroseismischen Bewegungen, die Pulsationen und die Erdbebenstörungen. Die ersteren bestehen aus zahlreichen, zur Normallage symmetrisch liegenden Schwingungen, deren Amplitude mehrere Zehntel Bogensekunden erreichen kann, im Allgemeinen aber kleiner ist. Als Ursache dieser Erscheinung wird der Wind angenommen; die über die Erdoberfläche hinströmenden Luftmassen, welche durch Unebenheiten aufgehalten, sodann wieder mit verstärkter Geschwindigkeit nachdrängen, erzeugen dadurch Stösse, welche um so heftiger sind, je grösser die Windgeschwindigkeit und je rauher der Erdboden ist. Diese Bedingungen treffen in reichlicherem Masse als in Strassburg bei der v. Kuffner'schen Sternwarte zu. Ich habe mehrfach beobachtet, besonders bei heftigem Winde, dass die Bilder im Horizont wohl scharf und deutlich erschienen, aber mit einem Erzittern, welches eine sichere Einstellung sehr erschwerte, ein zur Coincidenzbringen aber völlig unmöglich machte.

Von gleicher Wirkung ist die zweite Klasse dieser Bewegungen, die Pulsationen, nur dass mit ihnen reelle Lotstörungen verbunden sind, jedoch von im Allgemeinen sehr geringer Amplitude (0."05).

---

1) Zeitschrift für Instrumentenkunde XIX.

Die für unsere Arbeit wichtigste Rolle spielen die abnormen und plötzlich eintretenden Bewegungen des Pendels, die ohne Zweifel auf reelle Bodenbewegungen, Senkungen der Pfeiler etc. hindeuten. Das Pendel wandert oft tagelang nach Nord oder Süd, so rasch und ungleichförmig, in so gewaltigen und unregelmässigen Sprüngen, dass eine Auswertung der Curve völlig illusorisch wird. In den mitgeteilten meridionalen Componenten der Bewegung finden wir ständliche Schwankungen bis zu einer halben Bogensekunde und mehr.

Auch in Ottakring zeigten sich Erscheinungen, die offenbar als Ausläufer entfernter Erdbeben mit den geschilderten identisch waren. Am 19. und 21. Mai 1897 traten, anfangs weniger stark, bei scharfen und klaren Bildern der Fäden Schwankungen auf, die ein Einstellen sehr erschwerten. Nach längerer Pause stellten sie sich am 24. August wieder ein und wurden bis zum März 1898 hin beobachtet, an manchen Abenden so stark, besonders Ende Oktober und Anfang November, dass ein Beobachten unmöglich wurde, während sie an anderen Abenden wieder völlig verschwanden. Die Bilder waren hierbei zeitweilig scharf und deutlich, zeitweilig kaum zu erkennen, dann wieder zeigte sich eine gewisse Regelmässigkeit: die Bilder schwankten um eine Mittellage mit ca. 20—25″ Amplitude und 18ˢ Periode. Auffallend war, dass die Bilder der Vertikalfäden weit besser waren als die der Horizontalfäden. Anfangs war mir diese Erscheinung völlig räthselhaft; die gesammte Pfeilerbekleidung wurde abgenommen und alles aufs eingehendste untersucht, aber es zeigte sich gar nichts. Als dann aber die ersten Nachrichten über das Erdbeben in Böhmen und Sachsen im Jahre 1897 bekannt wurden, erschien mir der innere Zusammenhang beider Erscheinungen keineswegs mehr zweifelhaft.

Nach diesen Betrachtungen erscheinen die beobachteten Nadirpunktänderungen vollauf erklärlich. Ein weiterer Grund könnte noch in den Störungen der Lotrichtung selbst gesucht werden, wie sie bereits für längere Perioden in den sogenannten Polhöhenschwankungen nachgewiesen sind; jedoch ist die Amplitude so klein und dürfte für allenfalls vorhandene kürzere, tägliche oder dergleichen Perioden noch kleiner sein, dass sie durch die auftretenden Aenderungen völlig verdeckt wird.

In der Hauptsache haben wir es mit einer Drehung des ge-

sammten Mikroskopsystems um die Drehungsaxe des Instruments zu thun; dieselbe kann kontinuierlich sein, in ihrem grösseren Betrage aber regellos und plötzlich, entsprechend der Wellenbewegung der Erdkruste bei Erdbeben einerseits, den plötzlichen Erschütterungen und Stössen andrerseits. Es ist somit nicht ohne weiteres erlaubt, die Nadirpunktänderung besonders für längere Zeitdauer proportional der Zeit anzunehmen, ja, es ist keineswegs erwiesen, dass wenn auch die die Beobachtungsreihe einschliessenden Nadirpunkte übereinstimmen, derselbe sich in der Zwischenzeit konstant verhalten hat.

Der mittlere Fehler einer Polariseinstellung beträgt ca. $\pm 0''.20$, der einer Position jedoch $\pm 0''.40$. Die starke Abweichung beider Zahlen dürfte zum grössten Teil auf die Unsicherheit des angenommenen Nadirpunkts zurückzuführen sein, weniger auf Refraktionsanomalien und auf eine ungenaue Kenntnis der Instrumentalfehler. Somit ergiebt sich die Notwendigkeit, für das Verhalten des Nadirpunkts eine schärfere Controlle zu schaffen, da eine häufigere Bestimmung desselben mittels des Quecksilberhorizonts kaum durchführbar ist. Die bereits von Dr. v. Rebeur-Paschwitz[1]) aufgeworfene Frage, ob es nicht ratsam wäre, die Pfeiler astronomischer Instrumente mit Registriervorrichtungen der Art zu versehen, dass dadurch eine beständige Controlle des Zustandes der Erdoberfläche ermöglicht wird, kann in Bezug auf Meridiankreise angesichts der geschilderten Verhältnisse nur aufs allerbestimmteste bejaht werden. Zunächst halte ich es für nötig, die Pfeiler mit einem guten Niveau in der Meridianrichtung zu versehen, und ebenso die grossen Mikroskoptrommeln, da es immerhin möglich ist, dass infolge von Temperaturschwankungen, durch die Körperwärme etc. diese eine noch gesonderte Bewegung ausführen. Es muss hierbei in Anbetracht der mehrfach erhobenen Bedenken gegen die Libelle betont werden, dass sie nicht etwa ein Controllmittel für Schwankungen von längerer Dauer sein soll, sondern nur ein Hilfsinstrument, welches leichter und rascher, möglichst bei jeder Einstellung abzulesen ist und uns nur Aufklärung geben soll über den Verlauf der durch die nur umständlich auszuführenden Nadirpunktbestimmungen angezeigten Schwankungen. Es hindert nichts, die Libelle von Zeit zu Zeit aufs sorgfältigste zu

1) Astron. Nachr. 133 p. 142.

prüfen und sie im Falle ihres Schadhaftwerdens durch eine neue zu ersetzen.

Sobald man aber dahin gelangt ist, mit dem Horizontalpendel absolut sichere Resultate zu erzielen, halte ich dafür, einen weit verbreiteten Horizontalpendeldienst einzurichten, bei ihrer Aufstellung aber besonders die Meridiankreispfeiler zu bevorzugen, denn alsdann dienen sie einem doppelten Zweck: Zeigen sie ihrerseits die Lagenveränderungen der Pfeiler an, so wird andrerseits eine Reihe sorgfältiger Nadirbestimmungen eine gute Controlle für die so ausserordentlich empfindlichen Apparate geben.

Es erübrigt jetzt noch für die erste Reduction der Beobachtungen eine Grenze zu ziehen, innerhalb welcher der Nadirpunkt als konstant anzusehen ist; ausserhalb derselben bleibt vor der Hand nichts anderes übrig, als seine Veränderung proportional der Zwischenzeit anzunehmen. Setzen wir diese Grösse zu $\pm 0''.20$ fest, so liegt die bei weitem grösste Anzahl der Bestimmungen innerhalb derselben und nur in wenigen Fällen ist eine Aenderung anzunehmen. Wie weit hierdurch der Darstellung der Beobachtungen genügt wird, wird in dem Abschnitt über deren Genauigkeit näher erörtert werden.

Die folgende Zusammenstellung giebt Datum, Kreislage, Sternzeit der Beobachtung, Nadirpunkt mit Beobachter im Norden und im Süden des Instruments getrennt. Grad- und Minutenzahl sind fortgelassen; sie sind gleich 180°0′ und nur in wenigen Fällen 179°59′, die daran erkenntlich sind, dass die Sekundenzahl 50 übersteigt. In den nachfolgenden Bemerkungen zu den Nadirbestimmungen bezieht sich die Bezeichnung „Südklappe oder Nordklappe geschlossen" nur auf die Seitenklappen.

Zusammenstellung der Nadirpunktbestimmungen.

Datum	Kr.	Sternzeit	N. N.	N. S.	Datum	Kr.	Sternzeit	N. N.	N. S.
96 Aug. 16	O	$17^h 30^m$	55″.50	—	96 Sept. 4	O	$16^h 40^m$	56″.22	56″.19
18	O	5 10	56.68	—			18 0	56.40	56.21
		6 10	56.03	56″.32			20 30	56.25	56.26
20	O	19 35	55.93	56.38			23 30	56.19	56.19
25	O	18 50	56.20	56.62	5	O	16 45	55.52	55.59
		21 10	56.15	56.18	6	O	16 40	56.00	55.89
		23 30	56.18	56.41			18 35	55.98	55.96
Sept. 1	O	19 40	55.81	55.89	9	O	21 25	56.34	56.24
[illegible]		21 55	55.63	55.69			23 20	56.19	56.15

Datum	Kr.	Sternzeit	N. N.	N. S.
96 Sept. 10	O	$18^{h}40^{m}$	56″38	56″25
		20 40	56.43	56.29
13	W	20 25	5.28	5.28
14	W	7 0	4.80	4.93
15	W	21 25	23.52	23.56
		23 30	23.47	23.57
16	W	18 10	23.94	23.95
17	W	19 50	23.39	23.47
		23 15	23.42	23.56
18	W	18 40	24.89	24.99
		21 0	24.33	24.61
		22 50	24.16	24.20
		23 50		24.26
		2 5	24.13	24.30
19	W	18 0	25.40	25.40
		20 10		25.05
		22 0	24.27	
		0 5	24.25	24.31
21	W	7 25	23.31	23.47
22	W	21 20	23.55	23.66
		23 50	23.58	23.80
		2 20	23.44	23.49
24	W	18 30	23.56	23.50
		22 10	23.57	23.71
27/28	W	11 50	23.19	23.09
		15 40	23.39	23.35
Okt. 2	W	18 0	25.38	25.58
		19 30	24.42	24.56
		22 0	23.95	23.98
		2 0	22.85	22.78
3	W	18 10	23.36	23.57
5	W	18 35	23.65	23.73
6	W	19 40	23.17	23.26
		21 40	22.81	22.91
		1 50	22.66	22.79
7	W	20 45	24.04	23.98
		22 20	24.02	24.05
		1 55	24.01	24.05
		3 40	24.11	24.08
8	W	19 30	24.63	24.65
		22 0	24.64	24.80
		7 20	23.85	23.92
9	W	19 0	24.26	24.46
		22 20	23.49	23.66
		0 40	23.51	23.43
		2 40	23.68	23.65
10	W	22 20	21.60	21.69
		0 20	21.57	21.59
15	W	11 40	21.36	21.31
16	W	13 55	21.24	21.18
		20 30	18.90	19.17
		23 40	20.10	20.28
96 Okt. 16	W	$2^{h}28^{m}$		20″43
		3 40	20″56	20.40
17	W	20 10	20.22	20.25
		21 50	20.29	20.29
		0 25	20.29	20.23
		2 25	20.45	20.34
18	W	0 45	21.66	21.78
		2 28		21.69
		4 35	21.66	21.57
21	O	0 50	8.42	8.29
		2 28	7.62	
		3 25	7.51	7.73
		12 50	7.74	7.76
22	O	19 25	8.15	7.99
		19 30	8.00	
		21 10	8.19	8.12
24	O	22 50	3.88	3.92
		2 5	4.00	4.00
25	O	22 25	4.01	3.88
		0 0	3.99	
		2 5	3.63	3.67
26	O	19 25	3.99	3.95
		21 30	4.03	4.01
		23 45		4.02
		2 40	3.88	4.02
28	O	3 0	2.54	2.54
		4 50	2.74	2.74
Nov. 4	O	12 20	3.45	3.47
5	O	14 0	3.36	3.30
		19 45	3.42	3.47
		22 35	3.52	3.40
		0 10	3.37	3.30
		1 35	3.36	3.24
		10 40	4.45	4.46
		14 10	4.35	4.28
6	O	20 40	3.93	3.90
		22 5	3.87	3.79
10	O	20 35	3.35	3.26
		22 45	3.33	3.28
		12 55	4.60	4.47
12	O	12 30	1.27	1.13
13	O	20 30	1.34	1.19
		20 35		1.29
		22 45	1.38	1.40
		0 30	1.53	1.47
		1 40	1.40	1.39
14	O	20 0	2.85	2.86
		21 40	2.81	2.60
97 Febr. 18	W	0 45	18.53	18.46
		1 30	18.47	18.61
19	W	0 45	17.00	16.97
		1 35	17.07	17.13

Datum	Kr.	Sternzeit	N. N.	N. S.
97 Febr. 25	W	$0^h 45^m$	25″.23	25″.37
		1 35	25.53	25.51
März 4	W	11 30	23.18	23.18
		14 0	23.19	23.23
5	W	0 45	24.80	24.81
		1 35	24.69	24.71
10	W	10 10	24.49	24.57
		12 15	24.47	
		14 0	24.46	24.48
13	W	0 40	28.30	28.27
18	W	0 40	27.12	27.15
		1 40	27.20	27.41
24	W	0 40	25.81	25.84
		0 45		25.77
26	W	8 30	24.02	24.04
		10 40	23.96	24.06
27	W	9 0	24.30	24.51
		9 5		24.58
30	W	0 30	25.16	25.17
31	W	1 40	25.22	25.27
		0 30	27.31	27.23
April 1	W	1 40	27.08	27.19
3	W	9 0	25.54	25.60
		11 45		25.52
		14 0	25.55	25.55
5	W	12 15	26.03	26.07
		15 30	24.65	24.73
		0 30	26.44	26.45
		0 33		26.47
6	W	1 40	26.32	26.30
7	W	10 0	26.12	26.12
		10 30	26.14	
		11 55		26.01
		14 0	26.08	26.02
		0 30	26.08	26.04
8	W	1 40	26.01	26.03
		7 15	25.91	25.93
		9 30	25.62	25.55
		11 20	25.33	25.48
		11 55		25.47
		14 0	25.49	25.45
		0 30	26.01	25.92
		0 35	26.04	
9	W	1 40	26.00	25.92
		9 15	25.90	25.88
		11 45	25.84	25.79
		14 0	25.76	25.85
10	W	10 40	25.79	25.86
		11 55	25.82	
		15 20	25.70	25.72
12	W	7 30		25.31
14	W	10 40	25.43	25.31

Datum	Kr.	Sternzeit	N. N.	N. S.
97 April 14	W	$10^h 43^m$		25″.42
		14 0	25″.47	25.43
		0 40	25.63	25.54
17	W	7 45	26.02	26.07
		8 12	25.92	
		11 0	25.79	25.75
		12 20	25.61	25.70
		14 30		25.56
		15 30	25.55	25.57
21	W	21 0	25.20	25.24
		23 50	25.24	
		0 40		25.11
27	W	10 25	25.07	25.08
		11 55	24.88	24.90
		0 30	24.02	24.13
		1 40	24.25	24.16
28	W	9 0	25.11	25.09
		10 35		24.89
		11 40	24.72	
		12 45	24.31	24.44
		14 25		24.34
		15 40		24.47
		16 45		24.56
		18 20	24.52	24.63
30	W	10 40	23.28	23.44
		11 55	23.18	
		12 40		23.20
		13 50		23.17
		15 50	23.18	
		18 30	23.18	23.16
		0 40	23.08	23.46
		0 43		23.24
		1 50	24.12	24.02
Mai 12	W	11 50	26.62	26.64
		15 40	26.50	26.56
		16 45		26.28
		17 45	26.40	
17	W	11 35	26.90	26.99
		14 50	25.61	25.90
19	W	0 40	24.35	24.32
		0 43	24.35	
		1 50	24.33	24.35
20	O	0 30	2.66	2.76
		1 45	1.96	1.62
21	O	12 0	2.19	1.44
		12 5	2.02	1.73
		14 30	2.12	
		16 35	1.97	1.95
		0 30	1.95	1.76
		1 45	1.96	1.93
22	O	13 50	1.16	1.10
		15 20	1.09	

Datum	Kr.	Sternzeit	N. N.	N. S.
97 Mai 22	O	$17^h\ 0^m$	1".07	1".05
		18 5	0.96	
26	O	14 15	1.46	1.40
		16 10	1.41	
		17 30	1.37	1.47
28	O	0 30	1.37	1.33
		1 45	1.40	1.45
29	O	11 20	1.68	1.67
		11 55	1.99	
		12 40	1.89	
		14 0	2.04	2.02
		16 30	2.06	2.06
		0 40	2.17	2.12
30	O	11 0	2.41	2.36
		11 55	2.50	
		12 40	2.20	
		13 35	2.12	2.12
		14 45		2.13
		17 30	2.07	2.07
Juni 1	O	12 20	2.41	2.35
		15 50	2.30	2.30
		0 15	1.97	1.93
		1 50	2.06	2.06
		3 20		2.18
2	O	12 20	2.25	2.29
		14 15	2.21	
3	O	13 35	2.28	2.20
		15 40	2.12	
		18 35	2.12	2.24
		0 20	2.11	2.10
		0 35	2.15	2.09
5	O	13 25	2.14	1.79
		13 30	1.86	
		14 35	1.93	
		19 0	1.97	2.00
8	O	12 40	0.47	0.43
11	O	15 35	0.01	0.19
		18 5	0.20	0.16
12	O	12 25	1.81	1.06
		12 30	1.35	
		13 30	1.50	
		14 45	1.54	1.36
13	O	12 30	2.28	2.20
		13 30	2.24	
		16 10	2.28	
		17 30	2.16	
		19 35	2.10	2.13
		0 15	1.74	1.66
		1 40	1.80	1.78
14	O	12 30	1.38	1.26
		13 30	1.42	
		15 50	1.44	

Datum	Kr.	Sternzeit	N. N.	N. S.
97 Juni 14	O	$16^h\ 40^m$	1".52	
		18 40	1.47	1".38
18	O	14 0	1.67	1.67
		16 10	1.76	
		16 50	1.66	1.66
22	O	15 0	2.11	2.05
		16 10	2.06	
23	O	12 25	3.38	3.40
		14 20	3.38	
		16 0	3.01	2.91
		18 30	3.02	2.95
		0 10	2.67	2.60
		1 50	2.64	2.65
24	O	12 15	3.27	3.26
		14 20	3.31	
		16 0	3.32	3.23
		17 45	3.30	
		18 40	3.30	
		0 15	3.27	3.16
		1 45	3.21	3.15
25	O	11 40	3.43	3.44
		12 55	3.57	
		14 20	3.59	
		16 0	3.52	
		19 30	3.59	3.53
26	O	0 30	2.72	2.66
		1 50	2.75	2.64
27	O	12 30	3.03	2.98
		13 45	3.07	2.95
		0 15	2.27	2.15
		1 50	2.28	2.41
28	W	12 30	23.78	24.02
		14 15	23.45	23.68
		16 10		23.68
		17 10	23.72	23.65
29	W	0 30	23.93	23.98
30	W	23 50	24.28	24.32
		1 35		24.34
Juli 2	W	12 40	24.06	24.07
		13 50	24.02	
• Aug. 17	W	17 0	23.88	23.90
		20 20	23.88	23.88
18	W	12 25	25.62	25.63
		13 50	25.60	25.42
		17 10	24.00	24.04
		20 40	23.92	23.95
		23 20	24.33	24.28
		2 0	23.99	24.04
19	W	12 40	23.56	23.64
		13 45	23.62	23.57
		17 0	24.16	24.18
		21 0	24.10	24.08

Datum	Kr.	Sternzeit	N. N.	N. S.
97 Aug. 21	W	$12^h 40^m$	24″87	24″85
		13 45	24.92	24.83
22	W	18 45	23.41	23.45
		20 35		23.49
24	W	18 25	23.76	23.88
		22 10	23.97	24.05
		23 10	25.04	25.21
		0 0	25.43	
		1 0	25.33	
		2 25	25.31	25.32
26	W	12 25	23.80	23.71
		14 0	24.05	24.13
		17 40	24.35	24.46
		19 30	24.16	24.28
		20 25		24.12
		23 50	23.83	23.90
30	W	12 40	24.04	23.96
		13 40	23.99	23.91
		17 5	23.67	23.72
		19 0	23.65	
		19 50		23.73
		23 20	23.73	
		0 15		23.56
31	W	17 5	23.81	23.90
		18 40	23.75	23.77
Sept. 2	W	17 0	23.77	23.85
		19 10		23.74
		19 40	23.59	
		23 30	23.64	23.59
3	W	12 40	24.22	24.23
		13 40	24.80	24.75
5	W	17 10	22.79	23.14
		17 45	22.91	
		19 30	22.88	23.06
		21 10	22.78	23.15
		23 50	22.83	22.87
7	W	17 40	22.37	22.44
8		21 10	22.37	22.46
		22 40	22.44	22.41
9	W	12 20	24.38	24.45
		13 45	24.92	24.74
		17 0	24.40	24.35
		19 20	23.86	23.96
		20 40	23.52	23.54
		23 55		23.53
		0 38	23.43	
		2 5	23.50	23.56
13	W	19 0	22.75	22.77
		20 30	22.70	
		22 0	22.65	22.65
		0 15		22.69
		1 30	22.69	
97 Sept. 14	O	$18^h 50^m$	3″73	3″73
		19 40	3.94	
		20 40	4.05	
18	O	12 25	50.14	50.06
		13 40	49.97	50.06
		17 40	2.46	2.42
		20 15	2.42	
		21 35	2.36	2.41
21	O	12 40	1.97	1.95
		13 50	1.96	2.00
		17 20	2.72	2.82
		19 50	2.67	
		23 0	2.58	
24	O	17 35	2.88	2.99
		20 15	3.00	
		21 30		3.20
		22 50	3.15	
		2 40	2.88	2.97
25	O	12 30	3.07	2.99
		13 40	2.85	
27	O	17 35	2.40	2.58
		21 30	2.43	
		0 0		2.41
28	O	17 45	2.98	2.89
		20 0	2.93	2.97
		23 45	2.85	2.69
		3 25	2.48	2.48
29	O	18 0	2.87	2.95
		21 30	2.95	
		0 50		2.73
		2 25	2.79	2.89
30	O	18 5	2.98	3.05
		21 30	3.06	
		22 15	3.08	
		2 25	2.98	3.05
Okt. 1	O	18 25	3.47	3.41
		21 30	3.49	
		22 40	3.36	
		1 45	3.19	3.20
2	O	18 55	3.34	3.27
		20 15	3.30	
10	O	12 40	4.05	4.00
11	O	13 45	4.12	4.11
		21 0	3.56	3.44
		12 30	3.77	3.81
13	O	20 40	3.30	
		21 10		3.39
		23 50	3.37	3.42
		12 40	3.58	3.58
14	O	13 45	4.06	3.95
		21 0	4.10	3.99
		23 55	4.07	

Datum	Kr.	Sternzeit	N. N.	N. S.
97 Okt. 14	O	0h 20m		4″09
		12 40	4″87	4.76
15	O	13 45	4.76	
		21 10	3.81	3.89
		23 55	3.83	
		0 20		3.73
		2 25	3.65	3.68
19	O	21 0	5.25	5.07
		23 10	5.17	5.03
24	O	21 15	4.82	4.82
		0 5	4.70	4.72
		12 30	4.58	4.61
25	O	14 0	4.16	4.05
		21 5	3.36	3.29
		21 50	3.21	
		22 50	2.44	2.50
		1 0	2.55	2.40
26	O	19 40	2.97	2.81
		21 0	2.78	
		21 50	2.94	2.93
27	O	19 45	2.24	2.32
		21 0	2.20	2.20
		21 50	2.18	
		22 45		2.17
		0 55	2.25	
		2 20		2.25
		3 40		2.04
		6 15	2.01	1.96
28	O	20 50	2.19	2.14
		22 10	2.21	
		0 45	1.75	1.95
		2 25	1.83	
		5 15	1.87	1.87
29	O	21 0	1.65	1.67
		21 50	1.60	
		0 45	1.81	1.69
		2 30	1.75	
		4 20	1.59	1.63
30	O	21 0	1.56	
		22 0	1.65	1.61
		23 50	1.53	
		1 0	1.54	
		2 20	1.50	
		4 35	1.34	1.47
Nov. 8	O	0 40	6.37	6.49
		1 40	6.18	6.21
		3 10	6.05	
		12 0	3.34	3.40
9	O	20 30	2.26	2.29
		23 10		2.42
		12 50	0.48	0.46
		12 55	0.51	

Datum	Kr.	Sternzeit	N. N.	N. S.
97 Nov. 9	O	13h 45m	59″49	59″77
11	O	20 40	2.25	2.46
		20 43	2.58	
		21 50	2.50	2.80
		2 0	4.99	4.97
		4 40	5.25	5.01
19	O	0 30	4.15	4.07
		1 45	4.44	4.38
		4 0	4.48	4.31
22	O	2 10	5.02	4.98
		4 25	5.03	
		6 0	5.01	5.02
		9 0	4.91	4.98
24	O	3 40	4.12	4.17
25	O	21 0	3.52	3.43
		22 0		3.41
26	O	21 0	0.43	0.44
		22 20	0.30	0.22
		2 15	1.27	1.29
		4 10	0.69	
		5 40	0.31	
		6 40	0.77	
30	O	12 40	2.02	2.00
		13 45	2.02	1.92
Dec. 6	O	0 40	5.01	5.08
		2 20	5.00	4.90
		3 45	4.53	4.70
		8 25	4.66	4.73
10	O	0 15	5.16	5.07
		2 10	5.04	5.00
		4 40	4.69	4.60
		9 15	3.70	3.66
31	W	2 45	8.40	8.31
		4 55	8.39	
98 Jan. 8	W	3 45	8.47	8.38
		6 20		8.42
		7 20		8.48
		9 15	8.57	8.62
Febr. 5	W	5 55	17.90	17.92
		7 10		17.88
6	W	7 50	18.20	18.18
		9 30	18.26	18.22
9	O	6 45	4.14	4.15
		10 20	4.09	4.18
18	O	7 15	3.50	3.46
		10 35	3.45	3.53
20	O	6 0	3.06	3.00
		7 40	3.01	
		8 30	2.30	2.21
		11 50	2.38	2.39
22	O	9 50	2.52	2.60
		11 50	2.64	2.61

Datum	Kr.	Sternzeit	N. N.	N. S.
98 Febr. 25	O	8ʰ 35ᵐ	3".07	3".09
		10 15	3.03	3.10
März 1	O	4 5	3.30	3.26
		5 15	3.26	
		6 27		3.21
		7 50	3.30	
		8 25		3.28
		11 40	3.31	3.33
3	O	7 40	3.25	3.21
		12 0	3.20	3.19
4	W	4 5	20.19	20.22
		5 50	19.53	19.73
		9 40	17.12	17.18
		10 30		17.18
		12 35	17.21	17.11
5	W	7 45	21.83	21.98
		10 0	21.70	21.72
11	W	0 40	19.92	19.75
		1 45	20.05	20.10
		4 0	19.90	19.96
		5 50	19.85	
		6 25		19.84
		7 55		19.85
		8 15	19.71	
		10 35	19.81	
		11 50		19.97
		12 30	20.36	20.50
		14 30	20.44	20.42
12	W	6 0	22.32	22.30
		8 0	21.49	21.56
		11 25	21.51	21.50
13	W	8 15	22.31	22.35
		11 0	23.05	22.97
14	W	0 40	23.43	23.41
		1 50	23.59	23.62
		4 25	25.28	25.24
		6 30	24.39	24.38
		10 40	22.44	22.54
		12 20	22.55	22.55
		14 10	22.53	22.50
15	W	7 50	22.46	22.44
		10 25	22.28	22.24
19	W	6 15	23.59	23.55
		9 0	23.56	23.36
21	W	6 0	20.38	20.35
		8 15	19.31	
		9 5	19.31	
		11 0	19.13	19.19
23	W	4 50	21.28	21.30
		5 15	21.26	
		6 28	20.71	
		6 55	20.06	
98 März 23	W	8ʰ 10ᵐ	20".10	20".14
31	W	7 40	22.15	22.14
		10 40	22.26	22.26
		12 40	22.17	22.17
		14 30	22.22	
		16 10	22.31	22.27
April 5	O	10 30	1.33	1.27
		12 45	1.18	
		13 0	1.02	
		14 0	1.06	1.01
		0 40	0.90	0.96
6	O	1 45	0.97	0.99
		4 40	0.89	0.95
		6 0	1.05	
		7 25	1.37	
		8 10	1.46	
		9 30		1.39
		10 30		1.23
		11 55	1.14	
		14 0	0.96	0.95
7	O	7 40	1.00	
		8 10		1.00
		10 20	1.04	
		12 30	1.05	1.10
		13 45	1.03	1.05
8	O	7 50	1.27	1.33
		10 25	1.24	1.24
		0 40	1.46	1.46
9	O	1 45	1.39	1.43
		7 40	1.44	1.49
		10 15	1.57	
		11 55		1.54
		12 25	1.51	
11	O	7 35	1.63	
		8 10		1.67
		10 35	1.67	
		11 55		1.72
		12 45	1.65	
		14 40	1.60	1.61
14	O	7 45	0.67	0.67
		0 20	0.22	
		0 45	0.27	0.19
15	O	1 45	0.43	0.30
		9 45	1.29	1.25
		11 55	1.18	
		13 45	1.21	1.20
16	O	9 0	1.23	1.23
		9 45	1.25	
		10 30	1.29	
		12 45	1.24	1.22
		13 50	1.25	1.15
18	O	9 0	0.83	



Datum	Kr.	Sternzeit	N. N.	N. S.	Datum	Kr.	Sternzeit	N. N.	N. S.
98 April 18	O	$9^h 20^m$		0″.73	98 April 27	W	$17^h 25^m$	9″.39	9″.38
		11 40	0″.69	0.71	28	W	11 0	9.37	9.45
20	O	12 20	1.11	1.17	Mai 1	W	0 30	8.39	8.45
		13 20	1.25				1 50	8.46	8.39
21	O	10 0	1.61	1.59	2	W	9 40	6.86	6.96
		11 50	1.65	1.71			12 20		7.36
25	W	9 50	9.05	9.03			14 30		7.33
		11 0	9.02				15 35	7.33	7.29
26	W	10 40	9.71	9.66			0 30	6.32	6.52
		12 40		9.73			1 50	6.71	6.70
		14 25		9.65	3	W	9 30	7.17	7.17
		16 35	9.67	9.55			11 55		7.48
27	W	10 20	10.15	10.15			12 45		7.48
		12 45		9.89			14 40	7.51	7.42
		13 40		9.65	9	W	11 0	8.68	
		14 20	9.60				12 20	8.59	

Bemerkungen zu den Nadirbestimmungen.

1896 Sept. 19. Letzte Bestimmung wegen plötzlicher Regengefahr bei geschlossenen Klappen.

27./28. Südklappe wegen Sonne geschlossen.

Oct. 2. Während der Einstellung bewegt sich das Instrument fortwährend infolge des Windes.

8. Beim ersten Nadir Südklappe wegen Sonne geschlossen,

15./16. wie Oct. 8.

18. Bilder im Horizont sehr verschwommen.

26. Instrument vom Sturm bewegt.

28. Wie Oct. 26, deshalb Südklappe geschlossen.

Nov. 5./6. Wie Oct. 28.

1897 März 18. Instrument bewegt sich vom Sturm.

26. Zweites Nadir bei geschlossenen Klappen wegen Regengefahr.

April 8. Instrument vom Winde bewegt.

9. Wie April 8, deshalb Südklappen geschlossen.

27. Südklappen wegen Sonne geschlossen.

Mai 12. Nadir des Windes wegen unsicher.

19. Es zeigen sich starke Nachziehungen.

20. Die Kreisablesungen sind bedeutend beeinflusst durch glänzende Haufenwolken im Zenith.

21. Wiederum starke Nachziehungen, die sich jedoch

an den Teilstrichen unter den Mikroskopen nicht zeigen; die Bilder im Nadirspiegel sind scharf.

1897 Mai 30. Nordklappe wegen Sturm geschlossen.
Juni 1. Südklappe wegen Sturm geschlossen.
11. 12. 13. Nordklappe wegen Sturm geschlossen.
Aug. 18. Kreisablesung durch die Sonne beeinflusst.
19. (14^h) Südklappe wegen Sturm geschlossen.
24. Die Bilder im Horizont schwanken fortwährend hin und her, sind jedoch scharf.
26. Wie August 24.
30. (13^h) Südklappe wegen Sonne geschlossen.
Aug. 31. Zweites Nadir wegen drohenden Gewitters bei geschlossenen Klappen.
Sept. 2. Letztes Nadir wegen Sturm bei geschlossenen Klappen.
3. Starke Schwankungen der Bilder im Nadirspiegel.
5. bis 18. Wie Sept. 3.
Oct. 13./14. Der Sprung im Nadir zeigt sich auch in der Polarisreihe und hat seinen Grund in der wechselnden Beleuchtung.
24. Beim ersten Nadir Seitenklappen wegen Sturm geschlossen.
24./25. Wiederum Schwankungen wie Sept. 3.
28. 29. 30. ebenso.
Nov. 8. Wegen Sturm Seitenklappen geschlossen.
Während des ganzen November wiederum starke Schwankungen, ebenso
1898 im Februar und März.
März 14. Plötzlich vor dem zweiten Nadir ($1^h 30^m$) helle Haufenwolke im Zenith, die die Kreisablesung wesentlich beeinflusst.
April 5. (13^h) Südseitenklappe wegen Wind geschlossen.
6. (5^h) Wegen Tageslicht alle Klappen geschlossen, da Kreis sonst gar nicht abzulesen.
7. Beim ersten Nadir Südklappe wegen Sturm geschlossen.
Mai 2. Beim ersten Nadir Südklappe wegen Tageslicht geschlossen.
3. Instrument vom Sturm bewegt, deshalb Seitenklappen zeitweilig geschlossen.

§ 10.

Die meteorologischen Ablesungen und ihre Reduction für die Berechnung der Refraction.

Für die Ableitung der wahren Zenithdistanzen sind die Radau'schen Tafeln: Essai sur les réfractions astronomiques par M. R. Radau, Annales de l'observatoire de Paris, tome XIX. benutzt worden. Denselben ist die Bessel'sche Refractionskonstante, für den Ausdehnungscoëfficienten der Luft aber der Regnault'sche Werth $\alpha = {}^1/_{273} = 0.003663$ (bei Bessel 0.003644) zu Grunde gelegt. Von den mannigfachen Hypothesen über die Temperaturverteilung in der Atmosphäre hat Radau die Jvory'sche gewählt, wonach dieselbe als einfache Function der Dichtigkeit angenommen wird; jedoch bietet er durch Einführung eines Parameters f, d. h. des Verhältnisses der Abnahme der Temperatur zu der der Dichtigkeit ein bequemes Mittel, auch anders gestaltete Temperaturverteilungen oder gar zufällige Anomalien zu berücksichtigen. Dem Feuchtigkeitsgehalt der Luft wird durch eine dem Barometerstande hinzuzufügende Correction Genüge geleistet.

Die Konstruction der Tafeln ist eine wesentlich andere und bequemere, besonders für grosse Zenithdistanzen, als die Bessel'sche, ganz abgesehen davon, dass die Bessel'schen Tafeln für grosse Zenithdistanzen unsicher werden, und dass bei der logarithmischen Form die Einführung des Parameters f unmöglich gewesen wäre.

Die erste Rechnung gestaltet sich in der Weise, dass Tafel I von 10 zu 10 Minuten bis zu 75° und von Minute zu Minute bis 91° scheinbarer Zenithdistanz die mittlere Refraction giebt, Tafel II die Correction der letzteren für 1° Celsius von 10 zu 10 Min. Zenithdistanz und für 7 verschiedene Temperaturen (von — 30° bis + 30°) und Tafel IV die Correction für 1 mm Luftdruck, d. h. den Coëfficienten β der Correction $\beta\,(B - 760)$ und zwar mit der für Temperatur verbesserten mittleren Refraction als Argument. Tafel III giebt eine bequemere Berechnung der Temperatur-Correction für Zenithdistanzen von 80°—91°.

Den Anordnungen der Tafeln entsprechend sind die meteorologischen Elemente in folgender Weise zu behandeln. Es bedeute

t die Lufttemperatur,

t_m die Temperatur des Quecksilbers,

B die Barometerablesung, reduciert auf das Normalbarometer und die Höhe des Kubus des Meridiankreises,
α den Ausdehnungscoëfficient der Luft $= 0.00366$,
π den absoluten Dampfdruck in mm,
g die Veränderung der Schwere mit der Höhe und Breite,
$= 1 - \frac{h}{3183000} - 0.0026 \cos 2\varphi$,

so ist die mittlere Refraction zu multiplicieren mit dem Factor

$$\frac{1}{1+\alpha t} \cdot \frac{Bg}{760}\left(1 - 0.00016\, t_m - \frac{1}{8}\frac{\pi}{760}\right),$$

wo der Faktor $(1 - 0.00016\, t_m)$ die Reduction der Barometerablesung auf 0° darstellt; diesen hat Radau mit $1 + \alpha t$ vereinigt, indem er setzt:

$$\frac{1 - 0.00016\, t_m}{1 + 0.00366\, t} = \frac{1 - 0.00016\,(t_m - t)}{1 + 0.00382\, t}.$$

Setzt man somit statt α den Werth 0.00382, so erhält man die Reduction des Barometers auf die Temperatur der Luft. Da in Ottakring der Barometerstand zwischen 720 und 760 mm schwankte, und da ferner $t_m - t$ nur in Ausnahmefällen bis auf 2° stieg, so kann man mit hinreichender Genauigkeit setzen:

$$0.00016 \cdot B \cdot (t_m - t) = 0.12\,(t_m - t) \text{ mm}.$$

Die Seehöhe der Sternwarte beträgt 280 m, die Breite $+ 48^\circ\!.2$, folglich wird die Correction

$$- B \cdot \left(\frac{h}{3183000} + 0.0026 \cos 2\varphi\right) = + 0.13 \text{ mm}.$$

Da die Refractionskonstante von Bessel nicht bei trockener Luft bestimmt ist, sondern bei einem mittleren Dampfdruck von 6 mm (für Königsberg), so wird die betreffende Correction:

$$- B\,\frac{1}{8}\,\frac{\pi - 6}{760} = + 0.12\,(6 - \pi) \text{ mm}.$$

An das benutzte Barometer Cappeller 1534, welches sich an der Nordwand des Meridiansaales unfern vom Spalt befand, ist nach Untersuchungen der k. k. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus in Wien die Correction -0.19 mm und zur Reduction auf die Höhe des Kubus des Meridiankreises -0.08 mm anzubringen, so dass somit die Gesammtcorrection in mm beträgt:

$$C = -0.27 - 0.12\,(t_m - t) + 0.13 + 0.12\,(6 - \pi).$$

Das Psychrometer, welches erst am 27. August 1896 zur Verwendung fertig war, befand sich an demselben Stativ mit dem

Nordthermometer, ca. 80 cm ausserhalb des Nordspalts; es bestand aus dem trocknen Thermometer Cappeller 3042 und dem feuchten, Cappeller 3043.

Zur Bestimmung der Temperatur standen eine Reihe von in 0.2 Grad geteilten Thermometern zur Verfügung, die nach den Untersuchungen der k. k. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus die nachfolgenden Correctionen erforderten:

		0°	+ 15°	+ 30°	
Cappeller Nr.	3038	0°00	+ 0°06	+ 0°13	
	3042	— 0.01	+ 0.06	+ 0.11	
	3043	— 0.04	+ 0.07	+ 0.14	
	3044	+ 0.02	+ 0.07	+ 0.13	
	3045	0.00	+ 0.06	+ 0.08	
	3048	+ 0.06	+ 0.11	+ 0.17	
	980	— 0.2	— 0.1	— 0.3	später angeschafft.
	981	— 0.2	— 0.1	— 0.3	
	984	— 0.2	0.0	— 0.2	
	989	— 0.2	0.0	— 0.2	
Häring Nr.	101	— 0.82	— 0.73	— 0.84	kein Jenenser Glas.
	105	— 0.70	— 0.64	— 0.68	

Verwandt sind nur die Zehntel Grade.

Das Thermometer 3048 befand sich frei hängend am Instrument, 3042 und 3043 bildeten das Psychrometer, ebenfalls frei hängend in der Höhe der Meridiankreisaxe; in den Spätnachmittagsstunden im Sommer mussten sie der Sonne wegen etwas hereingezogen werden. In gleicher Höhe und gleich weit ausserhalb des Spalts befand sich das Thermometer 3045 im Süden in einem mit Drahtgaze umspannten Rahmen; der Sonne wegen konnte es nur Nachts abgelesen werden. In einer Höhe von 1.20 m über dem Dache hing an einem in den Spalt ragenden Galgen in einem doppelwandigen, nur nach Norden offenen Thermometerkasten das Thermometer Nr. 3044. Der Kasten konnte an einem Drahtseil sehr rasch in den Saal gezogen werden, so dass, wie Prüfungen ergaben, während dieser Zeit eine Aenderung im Thermometerstande nicht erfolgte. Von der Verwendung der anderen Thermometer wird später die Rede sein.

Die genannten 5 Thermometer sind regelmässig abgelesen worden und die Resultate nachfolgend mitgetheilt. Ueber die Häufigkeit der Ablesung konnten bestimmte Regeln nicht aufgestellt werden, denn wenn sich auch im Allgemeinen die Temperatur sehr gleichmässig verhielt und einfache Interpolation hinreichend genaue Werthe für die Zwischenzeit lieferte, kamen manchmal Schwankungen und Sprünge von mehreren Graden innerhalb weniger Minuten vor; als charakteristische Beispiele führe ich folgende Tage an: 1896 Oct. 16, 1897 April 14, Mai 21, Aug. 24, 26, 30, Sept. 24, Oct. 1, Nov. 22, 1898 März 4 und April 6. Es zeigt sich hier, dass das Thermometer am Instrument den Schwankungen nicht in gleicher Weise folgte, wie Thermometer Nord. Interessant ist die Polarisreihe von 1897 Mai 21 U. C.; während sich anfangs die Temperatur sehr gleichmässig verhalten hatte, trat um $13^h 30^m$ plötzlich eine derartige, mir sofort empfindliche Abkühlung ein, dass ich sofort zu den Thermometern eilte und sie ablas. In der That ergab sich bei der Reduction eine weit bessere innere Uebereinstimmung, wenn ich die drei letzten Einstellungen, nach dem Temperatursturz, mit einer um 2 Grad tieferen Temperatur berechnete.

Die Zusammenstellung der meteorologischen Beobachtungen enthält neben Datum und Sternzeit der Beobachtung den verbesserten Barometerstand, gültig für die Temperatur des Quecksilbers, welche gleich der angewandten Lufttemperatur ist, für Seehöhe und 45° Breite und für den in der 8ten Columne gegebenen Dampfdruck, ferner die corrigierten Ablesungen der genannten 4 Thermometer, und den Dampfdruck in mm. Die letzte Columne enthält allgemeine Angaben über Windrichtung, Windstärke nach der Beaufortskala (1—12), Wolken, Luftzustand und Beschaffenheit der Bilder; nicht erwähnt ist windstill und völlig klar. Die Angaben sind besonders in der ersten Zeit nicht sehr sicher, denn in Ermangelung der erforderlichen meteorologischen Apparate war es ausserordentlich schwierig, Richtung und Stärke des Windes genau festzustellen; ausserdem wechselten völlige Ruhe und bis zum Sturm anwachsende Stösse häufig in kurzer Zeit mit einander ab und erschwerten das Beobachten sehr. Ebenso plötzlich erschienen und verschwanden Wolken, so dass manchmal an einem Abend die Klappen 3—4 Mal geöffnet und geschlossen wurden.

Ruhe und Schärfe der Bilder sind durch R und S mit beigefügten kleinen Ziffern bezeichnet; es bedeutet 1 vorzüglich, 2 gut, 3 hinreichend und 4 schlecht. Auch diese variierten an einem Abend sehr, zeitweise sogar während eines Durchgangs selbst. Findet sich an einem Abend hierüber keine Notiz, so gilt 3.

Bemerkt mag noch werden, dass bei ca. 200 Beobachtungsreihen 80 Mal wegen Wolken, Sturm oder allzu schlechter Bilder das Beobachten abgebrochen werden musste.

Ein Vergleich der 4 Thermometer ergiebt, dass nach Sonnenuntergang am Instrument im Durchschnitt von ca. 1200 Reihen eine um 0°.7 höhere Temperatur herrscht als am Nordthermometer, um 0°.4 höher als oberhalb des Spalts und um 0°.5 höher als am Südthermometer. Die Einzelwerthe weichen hiervon insofern ab, als bei Windstille die Unterschiede bis zu 0°.8 ansteigen, während bei stärkerem Winde naturgemäss ein grösserer Temperaturausgleich stattfindet. Bei den starken Seitenmauern müssen diese immerhin geringen Differenzen überraschen, die ohne Frage dem fast ununterbrochen herrschenden Winde zuzuschreiben sind. Für die Tagesbeobachtungen ergiebt sich während der Wintermonate völlige Temperaturgleichheit am Instrument und im Norden, während im Dachspalt das Thermometer im Mittel 0°.6 höher zeigt. Im Sommer ist die Temperatur um 0°.4 tiefer als im Norden und um 0°.6 als im Dachspalt; jedoch variieren die letzten Zahlen je nach der Höhe der Sonne und der Stärke des Windes bis zu 2°.

Das Resultat kann dahin zusammengefasst werden, dass die den Spalt ringsum zunächst umgebende Temperatur für die Nachtbeobachtungen als annähernd gleich angesehen werden kann und zwar beträgt sie 0°.6 weniger als jene am Instrument.

Zur Prüfung der Temperatur im Beobachtungsraum sind eine grosse Anzahl von Ablesungen von Thermometern gemacht, die sich an einem Gerüst zwischen Instrumentthermometer und Nordthermometer einerseits und Thermometer im Nordspalt andrerseits befanden, deren Resultate ich nur im Mittel mitteilen will. Aus ca. 300 Reihen ergeben sich für die Temperaturabnahme in horizontaler Richtung nach Norden folgende Werte:

Thermom.	I	II	III	IV	V	N. Th.	VI
	(180)	(120)	(100)	(60)	(10)	(80)	(120)
	—0°.15	—0°.19	—0°.30	—0°.46	—0°.53	—0°.78	—0°.89.

Die eingeklammerten Zahlen bedeuten die Entfernung in cm des Thermometers von der äusseren Mauerkante, die sich zwischen Thermometer V und Nordthermometer befindet; Thermometer I ist vom Instrument-Thermometer ca. 170 cm entfernt und die Differenzen beziehen sich auf das letztere. Ein Sprung im Spalt tritt hier nicht hervor, so dass nach dieser Richtung die Abnahme der Temperatur als gleichmässig betrachtet werden kann.

In der Richtung des Zeniths befand sich ein Thermometer (A) im Spalt an der unteren Saaldecke, ca. 180 cm über dem Instrument-Thermometer, und ein zweites (B) etwas oberhalb der Mitte des hier fast 2 m breiten Spalts. Aus 177 Vergleichungen mit dem Instrument-Thermometer ergeben diese und das Thermometer oberhalb des Dachspalts folgende Differenzen:

Thermometer	A	B	Spalt Th.
	0°.00	— 0°.11	— 0°.36.

Die Abnahme der Temperatur in vertikaler Richtung erfolgt somit erst im Spalt selbst und zwar besonders im oberen Teile, wo bereits eine Vermengung der aus dem Saale ausströmenden warmen Luftmassen mit der kühleren äusseren Luft stattgefunden hat. Es ist wahrscheinlich, dass in Folge der Abnahme der Spaltbreite nach beiden Seiten sich hier der Abkühlungsprocess stetiger entwickelt, worin die sonst merkwürdige Erscheinung ihre Erklärung finden mag, dass manchmal die Sterne im Zenith weit unruhiger waren, als die in den Zenithdistanzen von ca. 10°—40°.

Die mitgetheilten Zahlen ergeben, dass im Allgemeinen die Temperaturvertheilung eine befriedigende genannt werden kann; die Abweichungen der äusseren Thermometer gegen das innere sind nur gering und erreichen nicht einen Grad. Die Temperatur im Beobachtungsraume ist bis zu einer Entfernung von fast 2 m vom Instrumentmittelpunkt gleich, sie nimmt alsdann in horizontaler Richtung rascher ab als in zenithaler. Eine einseitige Neigung der Isothermenschichten ist im Mittel nicht angedeutet, wohl aber ist eine solche von der Zenithrichtung nach beiden Seiten nicht ausgeschlossen. Wir werden hierauf bei der Discussion der Beobachtungen zurückzukommen haben.

Für die erste Reduction der Beobachtungen ist das Mittel aus der Temperatur am Instrument und der am Nordthermometer benutzt worden.

Die meteorologischen Beobachtungen.

Datum	Sternzeit	Corr.-Brm.	Thermometer				Dampfdruck	Bem.
			Instr.	Spalt	Süd	Nord		
1896		700+					mm	
Aug. 16	$18^h 30^m$	37.65	+15°.1	+14°.3	+14°.9	+14°.6		$R_3 S_3$
	19 20	38.17	15.4	14.8	15.1	14.9		Im Süden dicke
	20 15	38.08	14.3	13.7	14.1	13.6		Wolkenbank.
	20 46		13.8	13.9	13.2	13.2		
	21 6	38.14						
	21 40		13.2	13.5	12.5	12.8		
18	4 50		+12.6	+12.3	+12.4	+12.2		$R_2 S_3$
	5 13	38.99	+13.1	13.0	13.3	12.8		Starker Dunst.
	5 35		13.8	13.9	—	13.8		
	6 0	38.94	13.8	13.7	—	13.4		
20	20 0	34.97	+17.3	+16.9	+17.0	+17.0		$R_3 S_3$
	21 0	35.14	16.6	16.3	16.3	16.4		Wolken aus Süd.
25	19 25	36.49	+18.5	+18.0	+18.2	+18.3		Anfangs klar, von
	20 5	36.50	18.2	17.6	17.6	17.8		$21^h 40^m$ an viel
	21 0	35.95	17.3	16.6	16.9	16.5		Wolken aus SW,
	21 40	35.77	17.2	16.3	16.4	16.6		Bilder daher var.
	22 30	35.41	16.8	16.3	16.1	16.3		
	23 10	35.17	15.6	15.1	14.8	15.1		
	23 35		15.7	15.1	14.7	15.1		
Sept. 1	20 0	37.04	+16.5	+15.9	+16.1	+15.5	11.5	$R_2 S_3$
	20 50	36.76	16.3	15.7	15.9	15.9	11.6	Stets durch Wol-
	21 30	36 56	16.0	15.5	15.6	15.3	11.4	ken.
	22 0		16.0	15.5	15.4	15.3	11.5	
4	16 50	38.47	+19.7	+20.0	—	+19.4	11.5	$R_2 S_2$
	17 15		19.0	19.1	+19.3	18.4	11.1	Viel Cirren
	17 48		18.7	18.2	18.7	17.9	10.8	
	18 5	38.51	18.7	18.2	18.5	18.0	10.8	
	20 25	38.03	18.3	17.7	17.6	18.0	10.1	$R_2 S_2$
	20 45		18.3	17.1	17.4	17.4	10.0	
	21 30		18.1	17.1	17.0	16.9	10.5	
	22 5	37.37	17.6	16.6	16.9	16.9	10.2	
	22 30		17.8	16.5	16.9	16.8	10.1	
	23 10	36.89	16.2	15.4	14.9	14.6	10.0	
	23 40		14.9	13.8	13.7	13.8	10.1	
5	17 0	37.71	+20.5	+20.7	+20.9	+20.1	12.9	$R_4 S_3$. Viel Dunst,
	17 30		19.8	19.8	20.1	19.2	12.9	dann Wolken aus
	17 45		19.8	19.6	19.8	19.3	13.0	W.
	18 5	37.42	19.5	19.3		19.2	13.1	
6	16 55	34.55	+17.5	+17.7		+17.4	10.3	$R_{3-4} S_{3-4}$
	17 45		16.6	16.3	+16.8	16.6	10.0	Wolken
	18 20	35.52	16.5	16.2	16.6	16.3	9.9	W 6

Datum	Stern-zeit	Corr.-Brm.	Thermometer Instr.	Spalt	Süd	Nord	Dampf-druck	Bem.
1896		700+					mm	
Sept. 9	21h 40m	36.93	+16°9	+16°4	+16°3	+16°1	12.7	$R_{3-4}S_{3-4}$
	22 25		16.5	15.8	15.8	15.7	12.5	Viel Wolken.
	23 0	36.66	16.2	15.7	15.4	15.6	12.4	
	23 25		16.1	15.8	15.3	15.7	12.5	Völlig trüb.
10	18 50	33.77	+17.0	+16.8	+16.8	+16.5	12.5	$R_{3-4}S_{3-4}$
	19 40		17.0	16.7	16.6	16.8	12.3	
	20 15	33.51	17.2	16.8	16.8	16.8	12.5	Viel Wolken.
	20 40		16.8	16.5	16.7	16.5	12.8	
13	20 35	32.66	+16.3	+15.9	+16.1	+15.5	11.7	Nur kurze Zeit [klar.
15	18 20	41.54	+18.5	+18.1	+18.5	+18.2	11.3	Anfangs klar und
	19 5		18.3	17.9	18.2	17.9	11.1	gut, dann Wol-
	19 35	42.07	18.3	18.0	17.9	18.0	10.9	ken und Sturm.
	21 20		18.0	17.8	17.9	17.7	10.9	
	21 40	42.00	18.2	18.0	18.0	18.0	10.9	
	22 23		17.4	17.1	17.5	17.2	11.1	
	22 50	42.03						
	23 10	42.07	18.4	18.4	18.5	18.4	11.0	
	23 35		18.3	18.2	18.4	18.3	10.9	
17	19 50		+17.7	+17.4	+17.7	+17.4	11.0	$R_{3-4}S_{3-4}$. An-
	20 15	42.85	17.6	17.3	17.7	17.5	10.7	fangs stürmisch,
	20 50		17.7	17.4	17.7	17.4	10.7	dann stiller.
	21 30	42.72	17.3	16.8	17.2	16.8	10.9	Viel Cirren.
	22 8		16.4	15.4	16.2	15.3	11.1	
	22 40	42.50	15.7	14.8	15.7	15.2	11.0	
	23 55	41.95	16.3	15.6	15.9	15.8	10.7	
	0 40	41.70	16.5	15.7	15.6	15.4	10.2	Völlig trüb.
18	18 45	37.94	+22.0	21.8	+21.9	+21.7	10.9	$R_{3-4}S_{3-4}$
	19 10		22.0	21.6	22.0	21.7	9.8	Klar. W 3.
	20 10	38.15	21.4	21.4	21.4	21.1	8.4	
	20 55		21.3	21.2	21.2	20.9	8.3	
	21 20	37.83	21.4	21.2	21.2	20.6	8.2	
	22 0		21.4	21.2	21.2	21.0	9.3	
	22 40	37.13	21.5	21.4	21.5	21.2	9.9	
	0 0	36.37	20.5	20.3	20.1	20.0	10.0	
	0 40	35.88	17.1	16.3	16.1	15.8	10.5	Wind stärker.
	0 55		17.8	17.1	16.5	16.9	10.7	
	1 50	35.09	16.7	15.8	15.3	15.4	10.8	
19	17 50		+21.8	+22.0	+21.5	+21.6	13.8	R_3S_{2-3}. Nebel.
	18 15	31.79	21.2	21.0	20.8	21.0	13.4	
	18 40		20.9	20.6	20.6	20.6	13.3	
	19 10	31.52	20.7	20.4	20.4	20.4	13.3	
	20 5	31.12	20.1	19.4	19.6	19.4	13.7	
	22 0	29.70	18.5	18.0	17.7	17.9	13.7	
	22 30		17.6	17.1	17.0	16.4	13.4	
	23 0	29.52	17.2	16.4	16.4	16.2	13.4	
	23 30		17.7	16.6	16.9	16.8	13.2	Plötzl. Sturm aus
	0 0	30.38						W. u. Wolken.

Datum	Stern-zeit	Corr.-Brm.	Thermometer Instr.	Spalt	Süd	Nord	Dampf-druck	Bem.
1896		700+					mm	
Sept. 22	23ʰ 35ᵐ	33.86	+ 9°.5	+ 8°.5	+ 8°.5	+ 9°.2	7.1	R_{3-4} S_{3-4}
	23 55	33.57	9.9	8.5	8.7	9.0	8.3	Fortwährend Wol-
	0 20		9.1	8.3	7.8	7.9	7.2	ken. Wind zeit-
	0 45	33.28	8.4	8.0	8.3	8.9	6.9	weise stärker.
	1 50	33.07	9.6	9.6	8.9	9.0	6.8	
24	18 55	34.66	+10.3	+ 9.8	+10.2	+10.0	6.4	R_3 S_{3-4}
	19 35		10.1	9.6	10.1	9.8	6.1	Stürmisch, desh.
	20 5	34.94	9.8	9.3	9.9	9.8	6.1	Beob.unmöglich.
27	12 0	36.23	+15.4	+17.3	—	+15.8	7.0	R_{3-4} S_{3-4}
28	12 40		15.8	17.5		16.2	7.2	Dunst.
	13 35	36.04	16.8	18.9		17.2	7.5	
Okt. 2	18 25	38.59	+15.3	+15.8	+15.7	+15.5	10.6	Bilder var.
	18 55		15.5	15.3	15.5	15.3	10.6	
	19 17		15.5		15.5	15.0		
	19 30	38.75	15.5	15.4	15.5	15.2	11.0	Plötzlich trüb.
	22 5	38.25	14.3	13.5	13.8	14.0	10.7	Wieder klar.
	22 22		14.2	13.4	13.9	13.6		Bilder var.
	22 50		13.5		13.1	12.8		
	23 0	37.98	13.4	13.1	13.2	12.6	10.3	
	23 15		13.6		13.6	12.9		
	23 30		13.4		13.2	12.5	9.9	
	23 57	37.75	13.1	12.6	12.7	12.4	9.7	
	0 20		13.2	12.9	13.0	12.5	9.7	
	0 45	37.37	13.1	12.7	12.8	12.3	9.5	
	0 57		13.0	12.6	12.7	12.4	9.6	
	1 35		12.7		12.3	12.0	9.4	
	1 48	37.05	12.8	12.2	12.6	12.1	9.3	Wolken. Trüb.
3	18 20	37.27	+15.6	+15.6	+15.7	+15.7	10.0	
	18 35		15.5	15.6	15.6	15.5		Völlig trüb.
6	20 10	42.61	+11.6	+10.9	+11.1	+10.6	6.7	R_{3-4} S_4
	20 35		11.3		10.7	10.7		
	21 28	42.31	10.7	9.6	9.9	9.8	7.1	
	23 0	42.21	10.5	9.3	9.7	10.0	7.1	
	23 15		10.1	9.5	9.4	9.9	7.1	
	23 55	41.73	10.4	9.4	9.7	9.1	7.3	
	0 20		10.1	9.5	9.6	8.9	7.0	
	0 43		10.2	9.6	9.7	9.2	7.3	
	0 57	41.28	10.1	9.6				
	1 47	40.88	9.9	8.8	9.1	8.7	7.1	
7	21 0	42.17	+14.0	+13.2	+13.5	+13.2	9.1	R_2 S_2
	21 30		14.1	13.3	13.9	13.3	9.0	
	21 58	42.22	13.8	13.1	13.3	12.8	9.1	
	22 58	42.17	13.3	12.8	12.6	12.5	9.1	
	23 30		12.7	12.2	11.9	12.1	9.1	
	0 0	42.17	12.9	12.3	11.9	12.0	9.2	
	0 20		11.0	10.5	9.7	10.2	9.7	
	0 45	42.07	10.6	9.8	9.8	9.9	8.6	

Datum	Stern-zeit	Corr.-Brm.	Thermometer Instr.	Spalt	Süd	Nord	Dampf-druck	Bem.
1896		700+					mm	
Okt. 7	0h 58m		+11°6	+11°2	+11°1	+10°8	8.6	
Forts.	1 8		11.8	11.2	11.2	11.0		
	1 30		12.2	11.8	11.5	11.5		
	1 48	42.11	12.2	11.5	11.3	11.2	8.4	
	2 5		12.2	11.3	11.3	10.8		
	2 30	42.15	11.7	11.0	10.9	10.8	9.3	
	3 10	42.18	11.7	10.9	10.8	10.6	8.5	
	3 33	42.16	11.3	10.5	10.2	10.1	8.5	
8	19 35	40.14	+16.2	+15.9	+16.0	+15.4	9.8	Sehr stürmisch.
	20 3		15.9	15.7		15.4		Bilder ruhig aber
	20 25		15.9	15.8	15.9	15.3	9.6	nicht scharf.
	20 58	40.14	15.5	15.4	15.5	15.1	9.5	
	21 44	40.09	15.7	15.6	15.7	15.1	9.5	
9	19 0	40.27	+16.8	+16.6	+16.8	+16.1	10.5	Sturm. $R_{3-4}S_3$
	19 23		16.4	16.2	16.3	15.6		
	19 48		16.1	15.8	15.9	15.3	10.1	
	20 15	39.90	15.7	15.4	15.5	15.0	10.2	
	20 40		15.3	15.0	15.1	14.5	10.1	
	21 0	39.96	15.0			14.4		
	21 8		14.9	14.6	14.7	14.3	10.1	
	22 43	39.78	13.4	12.1	13.1	12.7	9.8	Wind schwächer.
	23 15		13.2	12.8	12.7	12.2	9.8	Bilder anfangs
	23 28	39.63	13.1			12.5		gut, später
	23 58	39.52	13.2	12.8	12.8	12.2	9.8	schlechter.
	0 20		13.0	12.2	12.6	12.2	9.8	
	0 30	39.28						
	1 10	38.89	12.9	12.4	12.7	11.9		
	1 35		13.0	12.4	12.6	12.3	9.8	
	2 0	39.12	12.4	11.9	12.0	11.3	9.5	
	2 25	38.93	12.5	12.6	12.0	11.5	9.5	
10	22 30	34.81	+14.6	+14.2	+14.3	+13.8	10.4	Bilder var.
	23 0		14.4	14.0	14.2	13.6	10.4	
	23 15	34.57	14.7	14.4	14.5	13.9	10.4	Sturm nimmt zu.
	23 38		14.8	14.5	14.5	14.0		
	23 58	34.28	14.5	14.3	14.5	14.0	10.3	
	0 13	34.26	14.1	13.8	13.8	13.6	10.4	Schluss w. Sturm.
15	12 13	38.93	+13.1	+13.0	—	+12.4	7.9	SE. 2.
16	12 53	39.09	13.7	14.1	—	13.4	7.7	Anfangs Wolken.
	13 27	39.03	14.0	14.3	—			
	13 35		14.3	14.4	—	13.7	8.0	
	13 45		14.4	15.0	—	14.4	7.6	
16	20 53	37.74	+ 9.2	+ 8.6	+ 8.6	+ 8.3	6.5	SSE. 2.
	21 7		9.1	8.4	8.5	7.8		R_3S_{3-4}
	21 30	37.65	9.0	8.2	8.4	8.4	6.6	
	21 43	37.74	8.6	7.9	8.1	8.3		Starke Temper.-
	23 48	38.05	8.6	7.5	7.6	7.1	6.1	schwankungen.
	0 20	38.16	8.3	7.0	7.3	6.9		Bilder besser.
	0 45		7.7	7.2	6.7	6.5	6.2	

Datum	Sternzeit	Corr.-Brm.	Thermometer Instr.	Spalt	Süd	Nord	Dampfdruck	Bem.
1896		700+					mm	
Okt. 16	$0^h 58^m$	38.05	+ 8°3	+ 7°1	+ 7°0	+ 7°5	6.2	
Forts.	1 35	38.39	9.3	8.3	8.6	8.8		
	1 58		10.0	9.3	9.8	9.4	5.3	
	2 15		7.6	7.0	7.0	6.2		
	2 35	38.39	7.8	6.4	6.6	6.5	5.7	
	2 55		9.6	7.6	7.8	8.3		
	3 13	38.06	7.7	6.7	6.6	6.2	5.2	
	3 25	38.06	7.8	6.8	6.5	6.3	5.7	
17	20 20	31.78	+10.6	+ 9.7	+10.0	+ 9.3	5.9	SW. 1
	20 50		10.3	9.3	9.7	9.2		Starker Dunst.
	21 10		10.3	9.1	9.7	9.3	6.0	R_2 S_2
	21 30	31.32	10.1	9.0	9.6	9.5		
	21 43	31.43	10.1	8.7	9.3	8.9	6.0	
	0 45	30.26	9.0	7.5	7.8	7.4		
	1 10		8.8	7.7	7.6	7.2	5.0	
	1 35	29.94	7.7	6.7	6.4	6.4		Wolken.
	1 58		8.3	8.4	8.0	7.5	4.4	☾ gr Hof.
	2 15		8.5	7.7	7.5	7.4		
	2 25	30.05	8.0	7.0	6.6	6.8	5.0	Völlig trüb.
18	0 50	29.77	+ 7.2	+ 6.2	+ 5.7	+ 6.1	6.5	Plötzlich klar.
	1 10		6.7	5.7	5.6	5.7	6.4	S_{1-2} S_{1-2}
	1 30	29.67	7.0	5.7	5.8	5.8	6.5	Luft und Instr.
	2 0		7.1	5.8	6.3	5.9		sehr feucht.
	2 18	29.35	7.5	6.0	6.4	6.5	6.6	In den Thälern
	2 40	29.56	7.4	6.1	6.5	6.5	6.3	Nebel.
	2 55		7.6	6.2	6.7	6.4	6.3	
	3 13	29.34	7.7	6.3	6.8	6.7	6.4	
	3 30		7.5	6.5	6.2	6.4		
	3 50		6.9	6.0	5.4	5.5	6.4	
	4 20		6.7	5.9	5.5	5.5		[Nebel
	4 35	29.16	5.7	5.3	4.5	4.3	6.4	Plötzlich starker
21	1 5	30.14	+ 8.3	+ 7.3	+ 7.4	+ 6.8	6.3	SW. 1
	1 35	30.15	8.3	7.6	7.6	7.0	6.1	R_2 S_2
	2 5	30.31	7.7	6.8	6.9	6.5	6.0	
	2 40	30.32	7.6	6.6	6.4	6.5	6.0	Cirren.
	2 55		7.5	6.5	6.7	6.3	5.8	
	3 13	29.83	7.6	6.8	6.8	6.5	6.0	Bedeckt.
22	19 35	33.63	+11.0	+10.3	+10.2	+10.4	6.8	SW. 1
	20 5		10.8	10.0	9.7	9.9	6.9	R_2 S_2
	20 25	33.63	10.8	10.1	9.6	10.1	6.9	
	20 40		10.7	10.2	9.8	10.1	6.8	SW. 3
	21 0	32.92	10.8	10.3	9.9	10.2	6.9	
	21 28	32.83	10.6	9.9	9.6	9.7	6.8	Bedeckt.
24	23 0	38.26	+ 6.0	+ 5.4	+ 5.8	+ 5.5	5.4	NW. 4
	23 15		5.8	5.1	5.7	5.3	5.4	R_2 S_{2-3}
	23 30		5.8	5.1	5.5	5.2	5.4	
	23 58	38.42	5.6	5.1	5.5	5.3	5.3	NW. 6
	0 20		5.5	4.9	5.3	5.0	5.4	

Datum	Sternzeit	Corr.-Brm.	Thermometer Instr.	Spalt	Süd	Nord	Dampfdruck	Bem.
1896		700+					mm	
Okt. 24	$0^h 45^m$	38.51	+ 5°.4	+ 4°.8	+ 5°.2	+ 5°.0	5.3	
Forts.	1 0		5.4	4.8	5.2	4.9	5.3	
	1 45	38.70	5.3	4.7	5.1	4.8	5.3	Vielfach Cumuli.
25	22 35	36.04	+ 6.6	+ 5.7	+ 5.7	+ 5.6	5.7	R_2S_2
	23 15	36.01	6.4	5.6	5.6	5.4	5.8	
	23 38		6.3	5.5	5.5	5.3	5.8	
	23 52	35.99	6.3	5.5	5.5	5.3	5.7	
	0 20	36.11	6.3	5.3	5.1	5.3		
	0 58	35.91	5.8	4.9	4.5	4.9	5.8	
	1 10		5.6	4.7	4.2	4.6		
	1 35		5.4	4.6	4.1	4.4	5.8	
	1 50	35.84	4.8	3.9	3.5	3.8	5.9	Starker Nebel.
26	19 30	35.71	+ 5.7	+ 5.1	+ 5.5	+ 5.1	5.5	W. 5.
	19 50		5.6	5.0	5.4	5.0		R_4S_4
	20 15	35.95	5.1	4.5	5.0	4.6	5.4	
	20 35		4.7	4.0	4.5	4.1		
	21 0	36.21	4.4	3.6	4.1	3.8	5.2	
	21 30	36.13	4.2	3.4	3.7	4.0	5.1	Völlig trüb!
	0 0	36.20	5.0	4.2	4.2	4.3		W. 1.
	0 20		3.6	2.7	2.7	3.2	4.9	Bilder var.
	0 58	35.95	4.0	3.0	3.2	3.5		
	1 12		4.3	2.7	3.2	3.1	5.0	
	1 35	35.56	3.5	2.5	2.2	2.2		
	1 58		3.9	2.9	2.7	2.8		
	2 28	36.09	3.1	1.8	2.1	2.2	5.0	Aus SE. Wolken.
28	3 5	31.04	+12.9	+12.6	+12.8	+12.1	7.5	SW. 5 (i. Stössen).
	3 33	30.91	12.8	12.5	12.7	12.1	7.5	R_4S_{3-4}
	3 58		12.5	12.2	12.5	11.6	7.7	
	4 25	30.36	12.5	12.2	12.4	11.6	7.6	Schl. weg. Sturm.
Nov. 4	12 28	49.11	+ 2.7	+ 2.5	—	+ 2.1	4.2	SW. 2.
	12 58	49.17	3.4	3.2	—	2.5		Bilder var.
	13 25		4.3	3.6	—	3.1	4.2	
	13 48	49.42	4.7	4.0	—	3.6		
	14 10		5.1	4.3	—	3.9	4.2	Wolken.
5	20 0	50.08	+ 4.4	+ 3.5	+ 4.2	+ 3.1	4.1	E. 2.
	20 25		4.5	3.7	4.5	3.7	4.2	R_2S_2
	20 48	50.50	4.4	3.7	4.0	3.2	4.3	Starker Dunst.
	21 8		4.2	3.6	3.8	3.1	4.4	
	21 30	50.48	3.9	3.1	3.4	2.7	4.4	
	22 0		3.7	3.1	3.2	2.3	4.3	
	22 20	50.37	2.6	1.8	1.8	1.7	4.3	
	0 30	50.43	2.1	1.3	1.5	0.5	4.3	
	0 55	50.53	2.2	1.6	1.6	1.1	4.3	
	1 15		2.4	1.8	2.0	1.5	4.3	
	1 30	50.52	2.5	2.1	2.2	1.9	4.4	Plötzlich trüb!
	10 20	48.36	0.9	0.5	0.9	0.0	3.4	SE. 5 (stossweise).
	10 50		1.4	1.2	—	0.3	3.5	
	11 8	48.22	2.3	2.0	—	1.3	3.8	

Datum	Sternzeit	Corr.-Brm.	Thermometer				Dampfdruck	Bem.
			Instr.	Spalt	Süd	Nord		
1896		700+					mm	
Nov. 5	11ʰ 43ᵐ		+ 3°6	+ 3°4	—	+ 3°2	3.5	Einstellungen we-
Forts.	12 13		4.1	4.1	—	4.1	3.4	gen Sturm und
	12 30	48.13	4.9	4.9	—	4.5	3.4	Tageslicht un-
	12 55		5.1	5.3	—	5.1	3.3	sicher.
	13 5		5.7	5.7	—	5.3		
	13 10		5.5	5.5	—	5.9		
	13 20		5.6	5.8	—	5.7		
	13 37		5.7	5.9	—	5.8		
	13 45	47.76	5.9	6.2	—	6.0	3.2	
6	21 5	43.67	+ 4.4	+ 4.0	+ 4°2	+ 3.8	3.5	SE 5 (stossweise).
	21 30		4.2	3.9	4.1	3.8	3.5	R_4 S_4
	21 55	43.23	4.0	3.7	3.8	3.4	3.6	Wolken.
10	20 45	43.73	+ 2.8	+ 1.9	+ 2.6	+ 2.1	4.0	R_2 S_2
	21 0		2.6	1.8	2.4	2.0	4.0	
	21 30	43.85	2.3	1.4	2.0	1.5	4.0	
	21 47		2.0	1.1	1.8	1.4	4.0	
	22 5		2.1	1.4	1.9	1.4	3.8	
	22 25	44.01	2.0	1.2	1.7	1.6	3.9	Dann Zonen!
13	20 45	38.95	— 0.4	— 1.3	— 0.9	— 2.0	—	E. 1.
	21 0		0.5	1.3	0.9	1.9		R_2 S_2
	21 30	38.94	0.9	1.6	1.3	2.2		
	22 0		1.5	1.9	1.9	2.4		
	22 20	38.94	1.8	2.2	2.3	2.8		
	22 45	38.88	2.0	2.5	2.4	3.0		
	0 50	39.00	2.2	3.0	2.7	3.3		R_{3-4} S_3
	1 8		2.3	3.0	2.8	3.4		
	1 40	38.81	2.3	2.9	2.7	3.2		Wolken.
14	20 10	38.54	— 0.8	— 1.2	— 1.2	— 1.7	—	R_2 S_2
	20 35		1.1	1.6	1.4	1.8		
	20 55	38.50	1.4	1.8	1.8	2.1		
	21 30	38.37	1.7	2.2	1.9	2.4		Zonen!
1897								
Febr. 18	0 50	48.49	+ 7.9	+ 8.4	—	+ 7.3	—	E. 1.
	1 10		7.7	8.2	—	7.0		R_{3-4} S_{2-3}
	1 27	48.25	7.5	8.2	—	6.9		
	1 37	48.23	7.1	7.8	—	6.8		
19	1 0	48.68	+ 3.6	+ 3.7	—	+ 2.3	5.1	SE. 1.
	1 30	48.65	2.8	3.0	—	2.0	5.0	Viel Dunst.
25	0 35	49.06	+ 11.9	+ 12.6	—	+ 11.9	4.9	S_2 R_3
	1 15		12.3		—	12.2		Cirren!
	1 35	49.12	12.4	13.1	—	12.3	4.5	
März 4	11 40	31.38	+ 1.9	+ 1.2	+ 1.4	+ 1.4	4.5	WNW 5 (stossw.).
	11 55		1.7	0.9		1.2	4.0	R_3 S_3
	12 20	31.39	1.5	0.8	1.3	1.1	3.9	
	12 45	31.31	1.4	0.7	1.1	0.8	3.9	
	12 55		1.4	0.7			3.7	

Datum	Sternzeit	Corr.-Brm.	Thermometer Instr.	Spalt	Süd	Nord	Dampfdruck	Bem.
1897		700+					mm	
März 4	13h 10m	31.28	+ 1°5	+ 0°8	+ 1°3	+ 1°0	3.7	
Forts.	13 50	31.02	1.3	0.8	1.2	1.0	3.7	
5	0 50	29.28	+ 7.0	+ 7.9	—	+ 6.9	3.6	E. 1.
	1 12		7.2	8.2	—	7.3		R_{3-4} S_3
	1 27		7.3	8.2	—	7.2		Viel Dunst.
	1 37	29.21	7.4	8.5	—	7.5	3.8	
10	10 33	38.50	+ 2.5	+ 1.7	+ 2.3	+ 1.8	3.5	NW. 2.
	10 50		2.6	+ 1.8	+ 2.2	+ 1.8	3.7	Bilder var.
	11 10	38.46	2.3			+ 1.5	3.4	Viel Dunst.
	11 45		0.7	− 0.3	+ 0.3	+ 0.2		
	12 45	38.20	1.1	+ 0.1	+ 0.4	+ 0.2		Cirren.
	13 8	38.14	0.9	− 0.4	− 0.1	− 0.2	3.4	
	13 50	38.06	1.1	0.0	− 0.1	+ 0.1	3.0	
18	1 5	35.26	+14.8	+16.6	—	+16.0	5.7	W. 3 (stossw. 5).
	1 22		15.2		—	15.4		S_3 R_{3-4}
	1 33	35.25	15.4	16.5	—	15.9	5.7	
26	8 50	38.00	+ 9.9	+ 9.5	+ 9.7	+ 9.5	5.6	NW. 1.
	9 32	37.55	9.6	8.9	9.4	9.1	6.4	R_{2-3} S_{2-3}
	9 58	37.22	9.6	8.6	9.0	8.8	6.6	Vielfach Wolken.
	10 15	37.39	9.5	8.7	9.0	9.0	6.5	
	10 30	37.01	9.5	8.9	9.4	9.1	6.8	Völlig trüb.
31	0 55	28.53	+11.9	+12.5	—	+12.1	5.8	S. 2 (stossw. 4).
	1 10	28.53	11.8	12.8	—	12.5	5.9	R_{3-4} S_{3-4}
	1 28		12.1	13.1	—	12.8		
	1 38	28.35	12.3	13.3	—	12.9	6.1	
April 1	0 55	20.63	+14.8	+15.3	—	+15.6	7.3	S. 5.
	1 10	20.40	14.9	15.7	—	15.8	7.4	R_4 S_3
	1 28	20.04	15.4	16.3	—	16.5	6.9	Cirren.
	1 35	20.02	15.5	—	—	16.9	6.9	
3	9 10	27.90	+ 4.1	+ 3.3	+ 3.8	+ 3.6	3.5	W. 2.
	9 58	27.85	3.5	2.6	3.2	2.7	3.7	R_2 S_2
	10 30	27.59	3.3	2.3	3.0	2.3	3.6	Anfangs viel Wol-
	10 50		3.2	1.9	2.8	2.1		ken, dann klar.
	11 45	27.31	2.7	1.9	2.4	1.9	3.7	
	12 20	26.89	2.7	1.9	2.5	2.0	3.6	
	12 43		2.6	1.7	2.2	1.8		
	13 0		2.6			1.8		
	13 45	26.90	3.3	2.7	3.0	2.7	3.2	Völlig trüb.
5	12 28	34.50	+ 3.6	+ 2.9	+ 3.4	+ 3.0	4.4	NW. 2.
	12 45		3.4	2.6	3.2	2.6	4.2	Bilder var.
	13 0	34.52	3.2			2.6		
	13 32	34.52	2.6	1.7	2.3	1.8	4.2	Wolken.
	14 15	34.32	2.4	1.6	2.0	1.6	4.2	
	14 40		2.3	1.6	2.0	1.7	4.1	
	14 55	34.10	2.2			1.6		
	15 20	33.85	1.9	1.4	1.8	1.4	4.1	

Datum	Sternzeit	Corr.-Brm.	Thermometer Instr.	Spalt	Süd	Nord	Dampfdruck	Bem.
1897		700+					mm	
April 6	0h 58m	33.05	+ 7°4	+ 8°8	—	+ 8°7	3.8	N. 2, zeitweise 4.
	1 12		7.5	8.5	—	7.9		$R_{3-4}S_{3-4}$
	1 35	33.07	7.6	8.4	—	8.0	3.0	Wolken.
7	10 8	34.95	+ 6.4	+ 5.5	+ 5°2	+ 5.5	5.2	W. 1.
	10 50	34.83	6.2	5.7	5.2	5.3	5.3	$R_{1-2}S_{1-2}$
	11 10		6.1	5.6	5.4	5.4	5.2	Am Horizont viel
	11 43	34.87	6.1	5.2	4.8	5.0	5.2	Dunst.
	12 18	34.88	6.0	5.4	5.1	5.2	5.1	
	12 42	34.87	6.2	5.2	5.0	5.1	5.2	
	13 0		6.1	5.3	5.1	5.1		
	13 45	34.85	5.7	4.7	4.0	4.6	5.1	
8	0 50	35.97	+ 9.6	+ 11.2	—	+ 10.1	5.6	N. 1.
	1 8		9.5	10.4	—	10.6		Starker Dunst.
	1 33	35.96	9.7	10.6	—	10.3	5.1	
	7 28	35.86	11.0	10.8	+ 10.6	10.9	4.3	R_2S_2
	8 15	36.03	10.2	9.9	9.7	10.0	4.2	
	8 45		10.2	9.9	9.7	9.9		
	9 5		9.6	9.2	8.9	9.4		R_3S
	9 25	36.42	9.2	8.8	8.7	8.9	4.4	
	11 28	36.78	7.9	7.4	7.4	7.5	4.4	N. 3.
	11 45		7.6	7.2	7.2	7.2		
	12 18	36.85	7.5	7.2	7.1	7.1	4.4	Sehr dunstig.
	12 43		7.2	6.8	6.7	6.7		
	13 0	36.84	6.8	6.4	6.4	6.3	4.4	
	13 45	36.93	6.7	6.4	6.4	6.3	4.2	
9	1 0	38.90	+ 9.4	+ 9.7	—	+ 9.7	4.4	N. 3.
	1 10		9.5	9.8	—			$R_{3-4}S_3$
	1 35	38.97	9.8	10.1	—	10.0	3.9	
	9 30	39.36	7.2	6.7	+ 6.7	6.7	4.5	NNW. 7.
	9 57		6.9	6.3	6.5	6.4		R_3S_2
	10 15	39.33	6.7	6.3	6.4	6.3	4.2	
	10 30		6.5	6.2	6.3	6.1		
	10 50	39.34	6.5	6.3	6.3	6.2	4.2	
	11 30	39.33	6.2	5.9	6.1	5.8	4.2	
	12 18	39.43	6.0	5.5	5.7	5.4	4.3	NW. 4.
	12 40		5.5	5.1	5.4	4.9		
	12 53	39.37	5.6	5.3	5.5	5.1	4.4	
	13 35	39.37	5.3	4.9	5.1	4.8	4.6	
12	11 0	36.52	+ 7.7	+ 7.4	+ 7.5	+ 7.4	5.1	NNW 2 (stoss-
	11 43	36.53	7.2	6.6	6.8	6.5	4.3	weise 4).
	12 18	36.57	6.7	6.1	6.4	6.1	4.2	R_2S_2
	12 42	36.29	6.4	5.9	6.3	5.9	4.3	
	13 0	36.18	6.4	6.1	6.2	6.0	4.3	
	13 35	36.18	6.3	5.9	6.1	5.9	4.5	
	14 15	35.83	5.7	5.2	5.6	5.2	4.1	Bilder schlechter.
	14 32		6.0	5.5	5.7	5.4		
	15 5	35.51	6.0	5.5	5.6	5.4	4.1	

Datum	Stern-zeit	Corr.-Brm.	Thermometer Instr.	Spalt	Süd	Nord	Dampf-druck	Bem.
1897		700+					mm	
April 14	11ʰ 55ᵐ	39.29	+11°.0	+10°.8	+10°.9	+10°.7	7.3	NW. 1.
	12 18	39.26	11.2	11.1	11.1	11.1	7.2	R_2S_2
	12 43		11.8	12.0	11.8	12.0		Viel Wolken.
	13 0		11.0	11.0	10.6	10.3		
	13 8	39.19	10.9	11.0	10.9	10.7	7.0	
	13 40	39.00	10.3	10.0	10.1	9.6	7.5	
17	7 42	42.90	+12.4	+12.9	—	+12.8	3.4	W. 1.
	8 5	42.75	11.6	11.5	—	12.4	3.8	Bilder var.
	8 19		11.6	11.2	+11.5	11.2		
	8 35	42.55	11.4			11.1	4.2	
	9 0	42.65	11.2	10.8	11.1	10.9	4.2	
	9 13		10.9	10.2	10.6	10.3		
	9 32	42.46	10.1	9.6	9.7	9.8	4.3	Cirren!
	9 58	42.46	9.8	8.7	9.3	9.4	4.6	
	10 15	42.46	10.1	9.4	9.8	9.6	4.5	
	10 32	42.46	10.0	9.3	9.8	9.4	4.6	
	12 32	41.46	10.2			9.4	4.8	R_2S_{2-3}
	12 43	41.49	10.2	9.5	9.8	9.4		(besser im Nord
	13 2	41.49	10.1	9.3	9.7	9.3	4.7	als im Süden).
	13 35	41.33	9.9	9.1	9.5	9.1	4.8	
	14 15	40.94	9.5	8.8	9.2	8.7	4.7	Nebel!
	14 40	40.74	9.5	9.0	9.3	8.8	4.7	
	14 55		9.5	9.0	9.3	8.8		
	15 20	40.46	9.4	9.0	9.3	8.7	4.7	
21	21 0	36.68	+ 7.4	+ 7.0	+ 7.5	+ 7.2	5.6	W. 1.
	21 25	36.82	8.1	8.3	8.5	8.1	5.0	R var.
	22 12	36.82	8.6	8.6	—	8.6	5.2	
	23 40	36.39	9.9	10.8	—	10.1	6.3	
	0 5	36.35	10.3	11.1	—	10.5	6.5	
	0 38	36.30	11.0	12.5	—	11.7	6.4	Wolken.
27	10 40	42.61	+13.3	+13.0	+13.3	+12.4	8.1	SW. 2, stossw. 5.
	10 58		12.5			11.8		
	11 11	42.62	12.3	12.0	12.2	11.7	7.8	
	11 30		12.2			11.4		
	11 45	42.70	12.0	11.7	12.0	11.3	7.3	
	12 30	42.66	11.4	11.0	11.4	10.8	7.2	R_4S_4, kaum ein-
	12 42		11.3			10.6		zustellen.
	13 0	42.61	11.2	10.9	11.0	10.4	7.2	
	0 55	42.97	15.2	16.5	—	16.2	7.3	S. 3. R_4S_3
	1 35	42.96	15.6	17.4	—	17.2	7.1	Dunstig.
28	9 15	41.21	+17.6	+17.4	+17.8	+17.3	9.4	SE. 1.
	9 30		17.3	16.9	17.3	16.8		R_3S_{3-4}
	9 45	41.11	16.8	16.4	16.7	16.1	9.1	
	9 57		16.5			15.9		
	10 15	41.22	16.0	15.4	15.7	15.4	9.1	
	10 25		16.0			15.4		
	10 50	41.34	15.7	15.0	15.4	14.8	9.3	
	11 12		15.4			14.6		
	11 35	41.29	15.1	14.5	14.7	14.5	9.1	

Datum	Stern-zeit	Corr.-Brm.	Thermometer Instr.	Spalt	Süd	Nord	Dampf-druck	Bem.
1897		700+					mm	
April 28	12h 58m	41.19	+14°1	+13°6	+13°9	+13°0	9.0	$R_{2-3}S_3$
Forts.	13 35	41.19	13.7	—	—	13.0	9.0	
	13 58		13.6	13.1	13.2	13.0		
	14 15	41.14	13.5	12.9	12.9	13.0	8.8	
	14 55	40.92	13.0	12.6	12.6	12.5	8.9	
	15 13		13.1	12.7	12.6	12.5		
	15 40	40.83	12.9	12.3	12.2	12.3	8.8	
	16 53	40.70	12.4	11.9	11.6	12.0	8.8	
	17 18	40.72	11.4	10.9	10.9	10.9	8.6	
	17 30		11.2	10.6	10.2	10.6	8.5	
	17 45	40.72	10.8	10.2	10.1	10.3	8.5	Viel Dunst.
	18 10	40.80	10.3	9.7	9.7	9.8	8.2	
30	10 50	35.38	+16.8	+16.3	+16.5	+16.4	10.0	SE. 1. Cirren.
	11 43	35.17	16.2	15.6	15.7	15.6	9.4	$R_{3-4}S_{3-4}$
	12 18	34.89	16.2	15.3	15.5	15.0	9.2	
	13 0	34.60	16.1	15.4	15.8	15.1	9.2	$R_{3-4}S_{2-3}$
	13 40	34.20	15.9	15.3	15.5	14.7	9.3	
	15 50	32.91	15.1	14.0	14.0	14.1	9.4	S_2
	16 35	32.58	14.5	13.5	13.4	13.3	9.4	
	17 3	32.51	14.4	—	—	13.4	9.2	
	17 18	32.24	14.4	13.4	13.6	13.4	9.0	
	17 45	32.08	14.3	13.3	13.3	13.3	8.8	
	18 15	32.01	14.1	13.3	13.1	13.3	8.8	
	1 0	33.40	18.7	20.0	—	19.3	8.2	S_2
	1 12	33.31	19.1	—	—	19.6	8.8	$R_{3-4}S_{2-3}$
	1 32	33.31	19.0	21.8	—	20.3	8.8	
	1 45	33.27	19.0	20.5	—	20.1	8.4	Cumuli.
Mai 12	12 5	35.40	+ 4.2	+ 3.1	+ 3.6	+ 3.2	4.7	S. 1.
	12 17		3.8	3.1	3.6	3.2		Bilder var.
	12 43	35.55	3.6	2.8	3.2	2.9	4.7	
	13 2	35.66	3.5	2.7	3.2	2.8	4.6	
	13 40	35.65	3.2	2.6	3.1	2.6	4.6	S. 3.
	14 5		3.3	2.6	3.0	2.6		
	14 18	36.03	3.6	3.1	3.5	3.2	4.4	
	14 34		3.6	3.1	3.1	3.1		
	14 55	35.95	3.5	2.8	3.1	2.8	4.4	
	15 15		3.4	2.9	3.2	2.9		
	15 40	36.15	3.4	2.9	3.1	2.9	4.4	
	16 53	35.82	3.5	2.9	3.2	2.9	4.5	Wind sturmartig.
	17 20		3.3	2.9	3.1	3.0		
	17 40	35.88	3.2	2.7	3.1	2.7	4.5	
	17 54		3.4	—	—	2.9		Völlig trüb.
17	11 55	34.36	+12.7	+13.2	+13.2	+12.9	7.6	SE. 2.
	12 18		12.9	12.5	12.7	12.6		R_2S_2
	12 45	34.48	12.9	12.5	12.9	12.7	8.3	
	13 2	34.52	12.9	12.4	12.6	12.4	7.9	Cumuli.
	13 35	34.47	12.8	12.6	12.7	12.6	7.6	
	14 5		12.6	—	—	12.4		
	14 15	34.70	12.5	12.2	12.3	12.2	6.9	Völlig trüb.

Datum	Sternzeit	Corr.-Brm.	Thermometer Instr.	Spalt	Süd	Nord	Dampfdruck	Bem.
1897		700+					mm	
Mai 19	0h 58m	33.88	+16°3	+16°5	—	+16°7	9.0	N. 2.
	1 15		16.9	17.7	—	17.7		Bilder var.
	1 40	33.94	16.7	17.8	—	17.7	9.5	
20	0 58	32.39	+16.7	+16.7	+18°2	+17.9	11.3	NE. 1.
	1 30	32.53	16.5	17.5	20.4	18.7	11.3	$R_{3-4}S_3$
21	12 38	30.90	+17.9	+17.5	+17.7	+17.5	9.4	NE. 2, zeitweise 5.
	13 2	31.00	17.8	17.5	17.8	17.4	9.3	Temp.schwank.
	13 30	30.87	15.6	15.1	14.8	14.9	9.6	Bilder var.
	13 40		15.5	14.7	15.2	14.7		
	13 58		16.3	15.0	15.7	15.3		
	14 15	30.77	15.6	14.7	14.8	15.3	9.9	
	14 40		16.1	—	—	15.5		
	14 55	30.69	16.2	15.4	15.9	15.5	9.4	
	15 20	30.55	16.0	15.1	15.6	15.6	9.3	
	15 43		15.7	15.1	15.2	15.3		
	15 52	30.58	15.8	15.3	15.4	15.3	9.2	
	16 10	30.42	14.3	12.9	12.5	12.5	9.5	
	0 55	28.75	16.8	17.8	—	17.9	12.1	SE. 2—3.
	1 12		17.4	—	—	18.1		Wolken.
	1 40	28.76	18.0	19.1	—	18.8	11.6	
22	14 5	25.11	+16.2	+15.7	+15.4	+15.2	11.2	S. 1.
	14 30	25.18	16.4	15.9	15.9	15.4	10.7	$R_{2-3}S_{3-4}$
	15 5	25.13	15.8	15.2	15.4	15.1	10.6	
	15 43	24.92	15.4	14.7	14.8	14.7	10.5	
	16 10	24.68	15.4	14.6	14.6	14.5	10.5	
	16 33	24.60	14.7	14.2	14.2	14.1	10.8	
	16 47	25.68	14.7	13.9	14.2	13.8	10.5	Wind stärker.
	17 13	25.74	15.1	14.5	14.9	14.5	10.6	
	17 45	25.70	14.8	14.4	14.7	14.5	10.5	
	17 54		14.9			14.6		Völlig trüb.
26	14 35	27.46	+14.1	+13.6	+13.7	+13.7	9.2	E. 2, stossweise 5.
	15 15	27.43	13.8	13.4	13.4	13.5	9.1	Beob. fast stets
	15 50	27.40	13.6	13.2	13.5	13.1	9.1	durch Wolken.
	16 15	27.30	13.5	13.1	13.4	13.1	9.1	
	16 48	27.06	13.2	12.8	13.1	12.9	9.0	
	17 10	26.85	12.6	11.9	12.4	11.9	9.1	
28	1 0	37.38	+14.7	+15.0	—	+15.1	7.0	NW 6—7.
	1 43	37.57	15.3	15.9	—	15.8	7.1	
29	11 45	38.93	+17.1	+17.1	+17.1	+17.0	9.9	NW 5, zeitw. 7.
	12 18	39.38	17.2	17.4	17.3	17.3	9.5	R_4S_4
	12 30	39.44	16.8	—	—	16.8	9.5	Viel Cumuli.
	12 45		17.1	17.1	17.0	17.0		
	12 55	39.61	17.1	—	—	16.9	9.4	
	13 30	40.10	17.0	—	—	16.8	9.1	
	13 45	40.09	17.1	17.2	17.1	17.1	8.9	
	14 18	40.36	17.0	—	—	16.9	8.9	
	14 55	40.47	16.8	16.7	16.6	16.6	8.7	

Datum	Sternzelt	Corr.-Brm.	Thermometer Instr.	Spalt	Süd	Nord	Dampfdruck	Bem.
1897		700+					mm	
Mai 29	$15^h 15^m$		+16°8			+16°8		
Forts.	15 37	40.63	16.6	+16°7	+16°6	16.5	8.6	
	16 3	40.49	16.2	16.2	16.1	16.0	8.7	Völlig trüb.
30	11 30	39.51	+19.6	+19.7	+19.7	+19.9	8.2	NW. 2.
	11 45	39.45	19.3	19.4	19.3	19.3	8.1	R_2S_2
	12 0		18.9			18.8		
	12 17	39.38	18.4			18.2	8.1	
	12 30		18.2	18.2	18.1	17.9	7.9	
	13 0	39.71	18.1	18.2	17.8	18.0	7.9	
	13 30	39.82	18.1	18.1	17.9	17.9	7.9	
	13 45	39.83	18.1			18.0	7.7	Viel Cumuli!
	14 55	39.74	17.8	17.6	17.3	17.7	7.6	Klarer, doch
	15 43	39.69	17.5	17.2	17.0	17.4	7.3	Wind. 7.
	15 57		17.1	17.1	16.7	17.1		
	16 10	39.62	17.0	17.1	16.5	17.0	7.6	
	16 40	39.34	16.6	16.6	16.1	16.4	7.8	[Sturm.
	17 13	39.18	16.5	16.2	15.6	16.0	7.8	Schluss wegen
Juni 1	12 32	37.49	+20.1			+19.8	9.5	NE. 1.
	12 42	37.52	20.1	+20.1	+19.9	19.8	9.4	R_2 S var.
	13 0	37.50	20.0	20.0	19.8	19.6	9.3	
	13 30	37.73	19.5	19.5	19.4	19.2	9.2	
	14 0	37.81	19.6			19.3	8.9	
	14 15	37.91	19.6	19.6	19.4	19.3		
	14 40	37.86	19.6	19.6	19.4	19.3	8.9	
	15 5	37.98	19.7	19.8	19.5	19.3		
	15 20	37.98	19.6	19.7	19.4	19.3	8.9	
	15 40	37.99	19.4	19.6	19.3	19.1	8.8	Trüb!
	0 30	38.36	18.9	19.0	—	19.1	11.1	NE. 3.
	1 0	38.37	19.2	19.4	—	19.6	11.0	R_2S_{2-3}
	1 30	38.33	19.8	—	—	20.2	10.8	
	1 43	38.32	19.9	20.0	—	20.1	10.7	
	2 45	38.30	20.6	20.9	—	21.0	11.1	
	3 5		21.2	21.8	—	21.8		Wind stärker.
	3 33	38.37	21.5	22.1	—	22.2	10.8	Wolken.
2	12 45	38.00	+20.8	+20.8	+20.7	+20.7	9.4	Nur durch Wol-
	14 25	38.43	20.2	20.1	20.0	19.9	9.9	ken.
	14 55	38.39	20.2	—	—	19.9	10.1	Völlig trüb.
3	13 50	36.80	+19.9	—	+19.8	+19.5	13.4	R_2 S var.
	14 15	36.97	19.9		18.7	19.6	12.5	Nur durch Wol-
	14 40	36.76	19.1		18.6	18.8	12.3	ken.
	14 55	36.64	19.1		18.8	18.8	12.3	
	15 15	36.50	18.9		18.3	18.4	12.5	
	15 38	36.47	19.5		18.9	18.8	12.8	
	16 3	36.38	19.5		18.3	18.5	13.0	
	16 20	36.36	19.3		18.3	18.5	13.0	
	16 47	36.32	19.4		19.1	18.6	13.1	
	17 20	36.30	19.6		19.1	19.2	13.1	
	17 32	36.09	18.9		18.6	18.5	13.0	
	17 48	36.06	18.6		18.4	18.3	13.3	

Datum	Stern-zeit	Corr.-Brm.	Thermometer Instr.	Spalt	Süd	Nord	Dampf-druck	Bem.
1897		700+					mm	
Juni 3	18h 15m	35.86	+18°6	—	+17°8	+17°8	13.6	Völlig trüb!
Forts.	0 37	35.61	20.4	—	—	20.8	13.8	R_2S_2
	0 58	35.45	20.7	—	—	20.4	14.8	Starker Dunst.
	1 33	35.55	21.3	—	—	21.9	14.2	
5	13 50	35.18	+21.1	+20°7	+21.0	+20.7	12.5	NE. 1.
	14 15	35.37	21.7	21.4	21.7	21.5	11.0	Viel Wolken.
	14 30	35.31	21.9	21.7	21.8	21.7	10.7	
	14 55		20.3		19.6	20.0		
	15 10	35.25	20.9	20.3	20.5	20.4	11.0	
	16 10	35.36	20.8	20.3	20.6	20.2	10.4	
	16 35	35.52	20.7			20.4	9.9	
	17 12	35.36	20.9	20.6	20.8	20.4	10.0	
	17 45	35.33	20.9	20.6	20.8	20.6	9.9	
	18 25	35.25	21.3	21.1	21.2	21.2	9.8	
	18 53	35.08	21.2	21.1	21.1	21.0	10.0	Trüb!
11	15 50	45.43	+14.0	+13.8	+13.9	+13.7	6.1	NNW. 7.
	16 10	45.49	14.0			13.6	6.0	Bilder sehr var.
	16 35		13.8	13.5	13.5	13.3		
	17 20	45.42	13.2	12.9	13.1	12.8	6.0	
	17 45	45.46	13.0	12.9	12.8	12.7	6.0	
12	12 55	46.28	+17.5	+17.5	+17.3	+17.5	5.7	N. 7—8.
	13 30	46.33	17.3			17.2	5.7	R_3S_3
	14 15	46.45	16.7	16.7	15.8	16.5	5.9	[Sturm.
	14 30	46.48	16.4			16.4	5.8	Schluss wegen
13	12 45	44.70	+20.1	+20.2	+20.1	+20.4	7.7	N. 3.
	13 30	44.63	19.3	19.4	19.0	19.2	7.8	$R_{3-4}S_{3-4}$
	14 15	44.70	19.0	19.2	18.4	19.1	7.6	N. 6.
	15 5	44.71	18.6	—		18.3		
	15 43	44.69	18.7	18.6	18.3	18.6	7.4	
	16 35	44.48	18.1	17.8	17.1	17.9	7.2	
	17 7	44.43	17.9	17.7	17.6	17.7	7.4	
	17 47	44.22	17.6	17.5	16.9	17.3	7.4	N. 3.
	18 35	44.10	16.8	16.8	16.7	16.5	7.6	R_3S_3
	19 20	44.00	16.6	16.6	16.4	16.4	7.7	
	0 40	43.31	16.5	16.6	16.8	16.8	9.4	E. 1.
	1 0	43.42	16.7		—	16.8	8.4	R_2S_2
	1 30	43.42	17.1	17.2	—	17.3	8.7	Viel Dunst.
14	12 38	40.90	+22.1	+22.7	+22.1	+22.2	11.3	NW. 1.
	12 55	40.91	21.7	22.1	21.6	21.5	10.9	$R_{3-4}S_{3-4}$
	13 47	40.84	19.8			19.6	10.1	
	14 15	40.94	19.3	18.7	18.8	19.1	8.8	Viel Cirren.
	14 35		19.0	18.5	18.4	18.7		
	14 55	40.95	19.2			18.9	8.0	
	15 42	40.74	18.5	18.0	17.9	18.3	7.9	
	16 47	40.15	17.9	17.3	17.3	17.7	8.0	
	17 32	40.00	17.1	16.1	16.2	16.7	8.2	
	18 20	39.73	15.7	14.4	14.8	15.3	8.5	Völlig trüb!

Datum	Sternzeit	Corr.-Brm.	Thermometer Instr.	Spalt	Süd	Nord	Dampfdruck	Bem.
1897		700+					mm	
Juni 18	$14^h 30^m$	34.70	+13°8	+13°8	+13°2	+12°7	8.0	NW. 1.
	15 10	34.59	12.8	11.8	11.9	12.1		$R_{3-4} S_{3-4}$
	15 45	34.36	12.4	11.6	11.7	11.6		Cirren.
	16 3	34.24	12.4			11.4	8.0	
	16 20		12.3	11.8	11.1	11.1		
	16 35	34.05	12.2	11.7	11.4	11.4	8.0	Völlig trüb.
22	15 15	43.06	+15.2	+15.0	+15.1	+15.1	9.1	NE. 4.
	15 50	43.14	15.1	15.0	15.0	14.9	9.0	$R_3 S_{3-4}$
	16 8	43.21	15.0			14.9	8.8	Trüb.
23	12 45	42.89	+21.1	+21.6	+21.5	+21.8	9.2	NE. 2.
	12 55		20.9	21.3	21.1	21.5		$R_2 S_2$
	13 12	42.86	20.4			20.9	9.0	
	13 33	42.85	19.8	19.9	19.7	19.9		
	14 15	42.83	19.0	18.9	18.7	18.9	8.8	
	16 10	42.96	18.7	18.7	18.3	18.6		NE. 4.
	16 48	43.03	18.7	18.7	18.4	18.6	8.7	
	17 20	43.04	18.7	18.9	18.4	18.8		Wolken.
	17 45	43.02	18.6	18.9	18.4	18.8		[Sturm.
	18 28	43.02	18.5	18.7	18.3	18.6	8.7	Schluss wegen
	0 30	41.82	16.0	15.9	16.1	16.1	9.8	N. 2.
	1 8	41.83	16.4			16.6	10.5	Bilder var.
	1 40	41.92	17.4	17.9	18.2	17.8	10.3	Dunst.
24	12 37	39.63	+23.6	+25.9	+24.0	+25.0	10.1	$R_2 S_2$
	12 54		23.4	25.4	23.8	24.7		
	13 12	39.48	23.1			23.9	10.6	
	13 38	39.52	23.0	23.5	23.0	23.2	9.3	
	14 16	39.67	22.6	22.9	22.8	22.8	8.9	
	15 15	39.80	22.6	22.9	22.5	22.7		
	15 43	39.72	22.3	22.8	22.5	22.5		NE. 2.
	16 12	39.62	21.5	21.5	21.5	21.3	8.7	
	16 47	39.57	21.8	22.3	21.9	21.9		
	17 12	39.59	22.4			22.3		
	17 49	39.45	21.2	21.5	21.3	20.7	8.5	
	18 34	39.47	21.3	21.6	21.2	21.2	8.4	
	0 5	38.47	18.0			17.6	10.3	NE. 2, stossw. 4.
	0 32	38.51	18.3	18.4	18.3	18.2	10.2	
	0 51		18.1			18.1		Bilder var.
	1 3	38.53	18.4	18.4	18.5	18.4	9.4	
	1 19	38.58	19.0			18.8	9.6	
	1 35		19.3	19.5	19.7	19.7		
25	12 2	36.62	+27.2			+29.4	14.3	$R_2 S_2$
	12 18	36.56	27.1	+31.1	+28.3	29.3	15.2	
	12 30		27.0	30.4	27.7	29.0	13.5	
	12 36	36.88	26.9	30.0	27.2	28.6	13.5	
	12 53		26.6		27.0	28.0		
	13 2	37.01	26.6	28.4	26.6	27.4	11.9	
	13 13		26.2		26.6	27.1		
	13 28	37.10	25.9	27.4	26.1	26.4	11.4	
	13 46	37.01	25.3	25.6	25.3	25.6	10.8	

Datum	Sternzeit	Corr.-Brm.	Thermometer Instr.	Spalt	Süd	Nord	Dampfdruck	Bem.
1897		700+					mm	
Juni 25	14h 15m	37.42	+24°6	+24°9	+24°7	+24°6	9.7	
Forts.	16 12	37.37	23.6	23.7	23.8	23.4	8.3	Wind stärker, bis
	16 48	37.33	23.7			23.7	8.7	Richtung? [5.
	17 13	37.35	23.7	23.8	23.9	23.7	8.9	R_3S_{3-4}
	17 47	37.35	23.7	23.8	23.8	23.6	8.7	Im N. Wolken-
	18 37	37.25	23.4	23.4	23.5	23.3	9.2	bank.
	19 17	37.02	23.3	23.3	23.3	23.2	9.6	
26	0 53	39.50	+20.3	+20.6	+20.3	+20.3	12.7	$R_{3-4}S_{2-3}$
	1 14		19.9			20.3		Viel Dunst.
	1 34	39.55	20.6	21.0	21.2	20.8	13.0	
27	13 0	36.25	+26.1	+27.0	+26.5	+27.1	15.2	W. 3.
	13 14		25.5			25.9		R var.
	13 32	36.67	25.0	25.4	25.1	25.0	14.7	
	0 5	38.84	18.5	18.5	18.5	18.3	12.8	W. 4.
	0 30	38.98	18.5			18.4	12.5	
	1 10	39.05	18.6	18.6	18.9	18.7	12.2	
	1 29		19.0			19.2		
	1 42	39.01	19.2	19.2		19.4	12.6	Viel Wolken.
28	14 40	40.69	+19.4	+19.1	+19.2	+19.0	13.4	W. 6.
	15 15	41.04	19.4	19.4	19.2	19.2	13.1	R_4S_4
	15 42	41.04	19.2	19.2	18.9	19.0	13.0	
	16 35	41.12	19.4	19.2	19.4	19.2	12.9	
	16 50	41.17	19.3			19.1	12.8	
30	0 0	36.36	+20.6	+20.9	+20.0	+19.9	16.1	Starker Dunst.
	0 36	36.22	21.4			21.3	16.5	$R_{3-4}S_{3-4}$
	1 3	36.36	22.1	22.7	22.5	22.4	17.2	
	1 28	36.30	22.6	23.0	23.2	22.9	17.4	
Juli 2	12 45	37.21	+27.6	+28.4	—	+28.3	15.7	R_3S_4
	13 2	37.22	27.3	29.4	—	28.4	15.6	
	13 13		27.4	—	—	28.4		
	13 33	37.54	27.2	28.8	—	27.9	14.7	
	13 46	37.69	27.0	28.3	—	27.7	14.6	
Aug. 17	17 18	40.69	+20.5	+20.2	+20.1	+20.0	9.4	R_3S_{3-4}
	17 46		20.2	19.8	19.8	19.8		
	18 14	40.64	19.4	18.9	18.5	18.7	10.8	
	18 35		19.3	18.7	18.7	18.6		
	18 57	40.60	19.3	18.8	18.6	18.3	11.6	
	19 25	40.57	19.2	18.8	18.4	18.1	11.7	
	20 0	40.51	18.9	18.2	17.9	17.9	11.7	
18	12 52	37.89	+27.4	+29.8	—	+28.4	15.4	S. 4.
	13 22		28.0		—	28.6		R_3S_3
	13 46	37.81	27.7	29.6	—	28.3	15.8	
	17 20	37.04	23.9	23.4	+23.5	22.7	15.6	E. 2 (bis 4).
	17 45		23.1	22.8	22.7	22.3		R_3S_{3-4}
	18 15	37.14	22.7	22.4	22.3	22.0	15.4	
	18 37		22.0	21.7	21.5	20.9		
	18 55	37.24	22.0	21.4	21.5	21.1	15.2	

Datum	Stern-zeit	Corr.-Brm.	Thermometer Instr.	Spalt	Süd	Nord	Dampf-druck	Bem.
1897		700+					mm	
Aug. 18	$19^h 30^m$		+21°.6	+21°.1	+20°.9	+20°.6		
Forts.	20 37		21.4			20.4		
	20 34	37.04	21.0	20.5	20.3	19.9	14.8	
	23 30	35.89	19.9	19.2	19.1	19.1	14.7	
	23 57	35.79	19.6	19.1	18.8	18.8	14.7	
	0 20	35.63	19.4	19.0	18.8	18.4	14.6	
	0 40	35.37	19.6	19.1	18.9	18.4		
	0 58	35.31	19.3	19.0	18.7	18.3	14.6	
	1 30		19.0			17.9		
	1 45	34.96	18.9	18.7	18.2	17.8	14.6	
19	12 45	34.40	+28.0	+29.5	—	+29.0	12.9	SE. 6.
	13 7	34.30	28.0	29.6	—	29.0	13.1	$R_{3-4}S_3$
	13 32	34.30	28.0	29.4	—	28.9	12.2	
	17 13	33.24	25.1	24.7	+24.7	23.9	13.8	SE. 2.
	17 46	33.17	23.7	23.4	23.5	23.1	14.2	R_3S_{3-4}
	18 15	33.22	23.2	22.4	22.6	22.7	14.2	Viel Dunst.
	18 35	33.22	22.9	22.3	22.0	22.4	14.2	
	18 55		23.1	22.6	22.5	22.3		
	19 25	33.21	22.9	22.5	22.5	21.9	13.8	
	19 45		21.8	21.2	21.7	21.5		
	20 15	33.07	22.4	21.8	22.1	22.0	13.4	
	20 40	33.00	22.4	21.6	21.8	21.8	13.5	
21	13 10	36.98	+20.9	+23.4	—	+21.6	8.3	W. 1.
	13 30	36.92	21.3	24.7	—	22.4	9.0	Cirren.
22	19 0	33.79	+19.3	+18.8	+18.8	+18.9	12.6	W. 2.
	19 23		19.1	18.8	18.7	18.8		$R_{3-4}S_{3-4}$
	19 45	33.71	18.9	18.1	18.3	18.6	12.4	
	20 15	33.54	18.8	18.3	18.3	17.7	12.6	Wolken!
24	18 35	36.94	+14.9	+14.3	+14.8	+14.4	10.1	NW. 3.
	18 57	37.05	15.1	14.9	15.1	14.9	10.1	Bilder var.
	19 20		15.3			14.8		
	19 45	37.04	13.8	12.8	13.0	13.5	10.2	
	20 14	37.00	14.1	13.2	13.8	13.4	10.1	
	20 50	37.17	14.8	14.7	14.7	14.5	9.4	
	21 30	36.92	12.9	12.2	11.9	11.8	9.8	
	22 5	37.10	13.3	12.6	12.5	12.3	9.8	
	23 27	37.00	12.4	11.8	11.9	11.8	9.7	W. 2.
	23 50		12.1			11.7		R_2S_3
	0 22	36.96	12.3	11.7	11.8	11.6	9.1	
	1 8	36.85	12.4	11.4	11.4	11.3	9.0	
	1 33		12.3			11.3		
	2 15	36.82	12.7	11.2	11.2	11.5	8.9	
26	12 52	37.29	+18.6	+20.6	—	+19.4	10.4	W. 3.
	13 21		18.8	—	—	19.4		R_2S_{2-3}
	13 46	37.23	19.1	20.7	—	19.7	10.0	Cumuli.
	17 57	37.62	17.3	17.0	+17.2	16.9	9.6	W. 1.
	18 35	37.92	17.4	17.3	17.2	17.1	9.7	R_2S_2, doch bald
	18 55	37.94	16.5	15.8	15.8	15.9	10.1	bed. schlechter.

Datum	Stern-zeit	Corr.-Brm.	Thermometer Instr.	Spalt	Süd	Nord	Dampf-druck	Bem.
1897		700+					mm	
Aug. 26	19h 15m	37.82	+16°.3	+15°.6	+16°.0	+15°.7	10.3	Völlig trüb.
Forts.	20 30	37.82	16.2	15.3	15.8	15.5	10.3	Wieder klar!
	21 8	37.85	16.1	15.6	16.0	15.7	9.9	Bilder sehr var.
	21 28		16.0			15.5		
	21 57	37.77	15.8	15.4	15.6	15.2	9.8	
	22 22	37.62	14.6	13.8	14.1	13.8	9.9	
	22 48		15.8	15.6	15.8	15.6		
	23 15		15.8			15.6		
	23 40	37.74	15.8	15.6	15.8	15.6	9.4	
30	13 3	38.03	+23.3	+25.8	—	+24.4	12.7	W. 1.
	13 33	38.04	23.4	25.8	—	24.2	12.5	Durch Wolken.
	17 20	37.05	21.0	20.7	+20.7	19.6	13.6	SW. 1.
	17 47	37.13	20.6	20.4	20.4	19.2	12.9	Viel Wolken.
	18 13		20.4	19.7	20.0	19.5		
	18 37	37.19	20.3	19.8	19.9	19.2	12.9	
	18 53	37.32	20.3	19.4	19.8	19.4	12.8	
	19 31	37.43	20.2	19.2	19.7	19.4	12.8	
	20 15	37.35	20.0	19.0	19.4	19.1	13.0	
	20 58	37.44	20.1	19.3	19.6	19.6	13.2	
	21 30		20.2	19.7	20.1	19.8		
	21 58	37.46	20.1	19.7	19.9	19.7	13.1	
	22 23		20.4			19.9		
	22 50		20.2			20.0		
	23 15	37.23	18.6	18.3	17.9	17.8	13.1	Zum Schluss:
	0 25		17.5	16.8	16.7	16.4		R_4S_4
31	17 24	36.15	+22.9	+22.6	+22.8	+21.9	14.4	W. 2.
	17 41		22.6		—	21.5		
	18 15	36.35	21.8	21.1	+21.4	21.5	14.0	[witter.
	18 35	36.85	22.4	22.1	22.2	22.0	14.0	Völlig trüb, Ge-
Sept. 2	17 18	34.92	+23.8	+23.7	+23.9	+23.0	14.1	W. 5.
	17 58		22.7			21.8		Bilder var.
	18 13	34.88	22.5	21.8	22.2	21.8	14.0	
	18 37	34.86	22.4	21.9	21.9	21.6	14.1	W. 3.
	18 58	34.91	22.0	21.6	21.7	21.5	14.0	
	19 50	34.91	21.4	20.4	21.7	20.3	14.4	
	20 33	34.75	21.2	20.8	20.6	20.6	14.2	
	21 0	34.53	20.8	20.2	20.3	20.0	14.4	W. 1.
	21 30	34.45	20.4	20.0	20.1	19.6	14.2	
	21 58	34.59	20.8	20.0	20.1	20.1	14.0	
	22 30	34.59	20.6	19.4	19.6	19.5	14.2	
	22 54		20.9			20.7		
	22 58	35.03	20.7	20.1	20.2	20.2	13.7	Plötzlich heftiger
	23 5		20.0			19.7		Sturm!
3	13 5	35.55	+27.1	+28.5	—	+27.7	14.8	S. 6.
	13 23		27.3	—	—	27.8		
	13 34	35.06	27.5	28.6	—	27.9	14.7	
5	17 32	43.40	+13.9	+13.0	+13.6	+13.1	6.1	W. 1. Bild. so schl.,
	17 57		13.5			12.8		dass Beob. unm.

Datum	Stern-zeit	Corr.-Brm.	Thermometer Instr.	Spalt	Süd	Nord	Dampf-druck	Bem.
1897		700+					mm	
Sept. 5	19h 40m	43.32	+12°2	+11°3	+11°9	+11°3	6.1	W. 1.
Forts.	20 3	43.27	12.0	11.2	11.8	11.3	6.1	R_4S_4
	20 35	43.20	11.5	10.6	11.3	10.7	6.2	
	20 58	43.09	11.3	10.4	11.0	10.4	6.1	
	21 28		11.0			10.2		
	21 46	42.74	11.4	10.4	11.0	10.4	6.1	
	22 5		11.3			10.6		
	22 23	42.56	11.2	10.2	10.9	10.4	5.9	
	22 48	42.37	11.3			10.6		
	23 38	42.08	11.1	10.2	10.8	10.2	6.0	
8	21 35	38.72	+10.5			+ 9.1	7.1	W. 2.
	21 45	38.59	8.3	+ 7.6	+ 7.6	8.4	7.1	
	22 0		9.2	8.6	9.2	8.4		
	22 22	38.47	9.5	8.8	8.9	9.0	7.0	Trüb!
9	12 53	37.41	+18.5	+22.1	—	+21.4	9.0	E. 3.
	13 8	37.34	18.7	22.8	—	21.5	9.1	Dunst.
	13 33	37.00	19.2	22.9	—	20.9	9.7	
	17 18	35.52	18.3	18.3	+18.5	17.6	10.1	SW. 1, zeitw. 5.
	17 32		17.7	17.6	17.6	16.7		Bilder sehr var.
	17 45	35.46	17.5	17.2	17.3	16.3	9.7	Cirren.
	17 58		17.2	16.9	16.9	16.1		
	18 14	35.53	16.7	16.4	16.5	15.6	9.4	
	18 26		16.4	16.0	16.1	15.1		
	18 35	35.44	16.2	15.7	15.8	14.8	9.5	
	19 5		15.7	15.3	15.4	14.2		
	19 20		15.5	15.1	15.3	14.0		
	20 45	35.18	15.0	14.7	14.9	13.8	9.1	
	20 59		15.0	14.7	14.8	13.8		
	21 29	35.45	15.0	14.5	14.7	13.7	8.9	
	21 57	35.41	14.5	13.9	14.1	13.3	8.8	
	22 23	35.40	14.4	13.5	13.7	12.9	8.9	
	22 48		14.2	13.5	13.7	13.5		
	23 15	35.32	14.1	13.4	13.4	13.4	8.5	
	23 57	35.03	13.7	13.3	13.2	13.1	8.6	
	0 40	34.80	13.5	12.9	12.6	12.8	8.4	
	0 58	34.62	13.2	12.6	12.5	12.1	8.6	
	1 23		13.2			11.9		
	1 46	34.47	13.0	12.1	12.2	11.9	8.3	
13	22 4	44.23	+13.4	+13.3	+13.4	+13.2	9.5	NW. 7.
	22 22	44.20	13.3	13.2	13.3	13.1	9.3	R_3S_3
	22 50		13.3	13.1	13.3	13.1		
	23 5	44.17	13.4	13.3	13.3	13.1	9.1	Viel Wolken.
	23 58	44.53	13.0	12.8	13.0	12.8	9.3	
	0 8		13.1			13.0		
	0 30	44.40	13.0	12.9	13.0	12.9	9.3	
	0 58	44.34	13.0	12.9	13.0	12.9	9.4	
	1 25	44.40	13.2	13.1	13.2	13.1	9.4	Völlig trüb.
18	12 45	34.17	+17.3	+19.1	—	+18.1	9.3	SW. 3.
	13 7	34.17	17.8	18.8	—	18.5	9.6	Bilder var.

Datum	Sternzeit	Corr.-Brm.	Thermometer Instr.	Spalt	Süd	Nord	Dampfdruck	Bem.
1897		700+					mm	
Sept. 18	13h 30m	34.18	+17°6	+18°9	—	+18°3	9.5	Vielfach Wolken.
Forts.	17 43	32.41	16.3	16.2	+16°2	15.7	9.5	S. 5, später still.
	18 14	32.44	15.5	15.3	15.3	14.5	9.3	Bilder anfangs
	18 25		15.2	15.0	15.1	14.2		gut, nachher ver-
	18 37	32.51	15.0	14.8	14.9	14.0	9.0	waschen und un-
	18 57		14.5	14.1	14.2	13.6		ruhig.
	19 24	32.63	13.9	13.3	13.4	13.6	8.8	
	19 50		13.5	12.8	12.9	12.9		
	20 4	32.52	13.4			13.1	8.9	
	20 25		13.4	12.7	13.0	12.9		
	21 0	32.49	13.2	12.7	12.7	12.9	8.8	
	21 27	32.43	13.3	12.9	13.1	12.1	8.9	
	21 40		13.2			12.0		Wolken!
21	12 43	35.67	+14.0	+14.6	—	+14.4	4.6	W. Sturm!
	12 52		14.1	14.8	—	14.3		$R_{3-4}S_{3-4}$
	13 7	35.35	14.2	14.9	—	14.4	4.8	
	13 33	35.00	14.6	15.3	—	15.0	5.1	
	17 43	33.85	13.6	13.6	—	13.3	6.1	W. 2, zeitweise 5.
	17 57		13.3	13.0	+13.3	12.9		$R_{3-4}S_{3-4}$
	18 14	34.13	12.8	12.4	12.8	12.3	5.6	
	18 36	34.11	12.5	12.1	12.5	12.1	5.4	Vielfach Wolken.
	19 7	34.23	12.4	12.1	12.4	12.1	5.3	
	19 31		12.4	12.3	12.4	12.2		
	19 50	34.32	11.6	11.0	11.3	10.8	5.4	
	20 50	34.76	10.8			10.4	6.3	
	21 7		11.0	10.6	11.0	10.5		
	21 30	34.57	11.0	10.6	10.9	10.6	6.2	
	21 58		10.8	10.4	10.8	10.4		
	22 24	33.52	11.4	11.2	11.5	11.2	6.1	
	22 58	33.71	10.0	9.5	8.6	9.2	6.5	Schluss wegen zu
	23 1		9.1			8.6		schlecht. Bilder.
24	17 50	43.66	+19.6	+20.2	—	+19.6	10.8	Windstill und völ-
	18 14	43.58	18.8	18.8	+18.8	18.4	10.8	lig klar.
	18 36	43.74	19.4	19.6	19.5	19.3	10.5	R_2S_2
	19 9	43.83	19.1	19.0	19.5	18.7	10.7	
	19 37	43.90	19.0	18.9	18.8	18.6	10.9	
	20 3	44.00	18.8	18.3	18.7	18.4	10.8	
	20 49	44.07	18.6	17.9	18.4	18.0	10.7	
	21 28	43.97	18.3	18.4	18.1	18.1	10.3	
	21 42		18.2			17.8		
	23 0	43.80	17.5	16.9	17.4	16.8	10.4	
	23 30	43.79	17.4	16.4	16.9	16.5	10.4	
	23 58	43.67	15.8	15.4	14.7	14.3	10.9	Starke Temperat.-
	0 2		14.5			13.9		schwankungen.
	0 20		14.9	14.4	14.0	14.1		
	0 33		14.7			13.5		
	0 56	43.87	14.6	13.7	13.5	13.6	10.2	
	1 9		14.3			13.0		
	1 30		15.0	—		14.4		

Datum	Sternzeit	Corr.-Brm.	Thermometer Instr.	Spalt	Süd	Nord	Dampfdruck	Bem.
1897		700+					mm	
Sept. 24	1h 41m	43.91	+15°.2	+14°.5	+14°.6	+14°.6	10.3	
Forts.	1 57		15.4			14.9		
	2 25	43.78	14.0	13.6	13.9	13.3	10.4	
25	12 45	46.11	+19.5	+22.0	—	+20.4	12.7	R_{3-4} S_{3-4}
	13 8	46.14	19.8	23.6	—	21.1	12.8	Viel Dunst.
	13 30	46.00	20.6	23.2	—	21.7	13.2	
27	17 48	42.87	+20.1	+20.1	—	+19.9	12.7	E. 2.
	18 13	42.87	19.8	19.7	+19.7	19.4	12.3	$R_2 S_3$
	18 36		19.8	19.8	19.6	19.4		
	18 58	42.97	19.8	19.7	19.4	19.4	12.1	Viel Dunst.
	19 30		19.5	19.5	19.3	19.0		
	20 4	43.12	19.5	18.9	19.0	18.7	12.2	
	20 25		19.4	19.0	19.0	18.6		
	21 0	43.18	19.4	18.6	18.5	18.2	12.0	
	21 28	43.17	18.8	18.1	18.0	17.8	12.0	
	21 40		17.9			16.9		
	22 50		18.3			17.9		
	22 58	43.30	18.3	17.9	17.3	17.9	11.7	
	23 28		17.6	16.8	16.6	16.5		
	23 58	43.09	17.9	16.9	16.6	16.8	11.5	
28	17 56	41.41	+19.7	+19.8	+19.8	+19.4	10.9	E. 2.
	18 13	41.34	19.5			19.1	10.9	$R_2 S_{3-4}$
	18 34		19.0	18.5	18.5	17.9		Viel Dunst.
	18 58	41.35	19.5	18.7	19.1	18.9	10.9	
	19 23		19.6	18.6	18.8	18.4		
	19 38	41.50	19.4	19.1	19.0	18.7	10.9	
	19 54	41.53	19.5	19.5	19.3	19.2	11.0	Völlig trüb.
	23 56	41.04	16.2	15.7	15.1	15.1	11.2	Wieder klar, doch vielfach Wolken.
	0 20		15.7	15.2	14.9	15.0		
	0 45		15.9			15.0		E. 1.
	0 57	40.84	15.8	15.3	14.3	15.0	11.1	$R_2 S_3$
	1 34		15.4	14.7	14.1	14.5		
	1 58	40.74	14.8	14.4	13.5	14.1	11.0	
	2 26		14.6	14.1	13.1	13.7		
	2 55	40.44	14.4	14.0	13.1	13.8	10.9	
	3 11	40.29	14.4	14.1	13.4	13.6	10.9	
29	18 20	38.81	+18.9	+18.3	+18.7	+18.1	12.9	Still.
	18 35		18.6			17.9		R_2 S var., zum Teil Bilder sehr verwaschen.
	18 58	38.83	18.6	18.2	18.6	18.1	12.4	
	19 30		18.8	18.5	18.7	18.3		
	19 50	38.88	18.6	18.2	18.5	18.1	12.1	
	20 13		18.4	18.1	18.3	17.9		
	20 48	38.88	18.4	18.1	18.3	18.0	12.3	
	21 26	39.02	18.3	17.5	17.9	17.5	12.3	
	21 48		18.2			17.5		
	1 2	38.67	16.6	16.2	15.9	15.8	11.9	
	1 35	38.66	16.8	16.0	15.8	15.8	12.1	
	1 58		16.5	15.9	15.1	15.2		
	2 14	38.47	16.6	15.6	15.2	15.4	12.4	

Datum	Sternzeit	Corr.-Brm.	Thermometer Instr.	Spalt	Süd	Nord	Dampfdruck	Bem.
1897		700+					mm	
Sept. 30	18h 27m	36.37	+19°6	+19°5	+19°3	+19°3	12.2	SE. 1.
	18 57	36.38	19.2	18.8	18.6	18.7	12.0	Bilder sehr var.
	19 30		19.0	18.7	19.0	18.2		
	19 50	36.35	18.9	18.3	18.6	17.8	12.0	
	20 13		18.5	18.2	18.3	17.1		
	20 48	36.33	17.8	17.3	17.4	16.8	11.9	
	21 28	36.23	17.4	16.8	16.6	16.5	11.8	
	21 40		17.4			16.6		
	22 59	35.95	16.5	15.8	15.8	15.5	11.7	
	23 30		16.4	15.8	15.8	15.1		
	23 58	35.79	16.0	15.4	15.4	15.0	11.6	
	0 19		15.7			14.8		
	0 57	35.59	15.7	15.1	15.1	14.3	11.6	
	1 34	35.56	15.1	14.6	14.5	13.8	11.7	
	1 58		15.0	14.6	14.4	13.7		Völlig trüb!
Okt. 1	18 36	33.88	+19.8	+19.4	+19.8	+18.2	11.3	SE. 1.
	18 58		19.4	19.2	19.6	18.4		$R_2 S_{3-4}$
	19 30	34.00	19.0	18.4	18.7	18.3	11.4	
	19 50		18.9	18.3	18.4	18.6		
	20 14	33.89	18.6	18.0	18.2	17.5	11.7	
	20 35		18.4	17.7	17.6	17.5		
	21 2	33.87	18.1	17.4	17.2	17.1	11.6	
	21 26	33.89	17.8	16.8	16.7	16.8	11.5	
	22 48	33.65	16.8	15.9	16.2	15.6	12.0	SE. stossw. bis 5.
	23 6		16.8			16.6		Fortwähr. Temperaturschwankungen.
	23 15	33.64	16.7	16.3	16.6	16.3	11.9	
	23 27		16.7			16.2		
	23 57	33.56	15.6	15.2	15.1	15.0	11.5	
	0 19		16.0			14.9		$R_4 S_4$
	0 45	33.65	15.8	15.3	15.1	14.7	11.5	
	1 8	33.73	15.9	15.7	15.8	15.5	11.2	
	1 31	33.59	15.3	14.7	14.5	14.3	11.3	Schl. weg. schlechter Bilder.
2	19 10	35.65	+17.0	+16.7	+16.9	+16.6	10.9	W. 3.
	19 37	35.98	16.7	16.6	16.7	16.6	10.7	
	20 12	36.27	17.0	16.9	17.0	16.9	10.5	Völlig trüb.
10/11	12 53	41.30	+ 9.5	+10.2	—	+ 9.6	4.4	W. 1.
	13 10	41.24	9.7	11.9	—	10.5	4.3	Cumuli.
	13 25		9.8		—	10.3		Bilder var.
	13 33		9.7	11.7	—	10.9		
12/12	12 52	37.86	+11.1	+12.6	—	+11.9	6.9	W. 3. Cirren.
	13 10	37.70	11.7	12.7	—	12.5	7.2	
	13 32	37.60	12.2	13.6	—	13.2	7.0	Sturm.
13	20 50	36.07	+ 8.1			+ 7.3	6.8	SW. 1. Cirren.
	21 0		8.3	+ 7.6	+ 7.8	7.3		Bilder var.
	21 15	36.05	8.2	7.6	7.6	7.3	6.7	
	21 30		8.3			7.4		
	21 46	36.27	8.6	8.2	8.3	8.1	6.6	

Datum	Sternzeit	Corr.-Brm.	Thermometer Instr.	Spalt	Süd	Nord	Dampfdruck	Bem.
1897		700+					mm	
Okt. 13	22h 23m	36.41	+ 8°1	+ 7°2	+ 7°3	+ 7°3	6.8	
Forts.	22 50	36.51	8.0	7.2	7.1	7.1	6.5	
	23 15		8.1	7.3	7.9	7.4		
	23 30	36.62	7.8	7.3	7.2	6.9	6.8	
	23 44		7.8			7.1		Völlig trüb.
	13 8	39.32	10.4	10.6	—	10.6	7.1	E. 1.
	13 21		10.8		—	11.1		Viel Dunst.
	13 36	39.26	11.1	11.7	—	11.6	7.6	R_2S_2
14	21 10	38.50	+10.7	+10.0	+10.2	+10.0	8.5	E. 1.
	21 30		10.6	10.2	10.3	10.0		$R_{2-3}S_3$
	21 46	38.47	10.8	10.3	10.5	9.6	8.6	
	22 24	38.43	10.4	9.8	9.9	9.7	8.5	
	22 49		10.1	9.7	9.5	9.5		Nebel!
	23 16	38.27	10.1	9.8	9.5	9.6	8.5	
	23 52	38.15	9.6	9.3	9.0	9.3	8.5	R_4S_4
	0 18	38.05	9.8	9.4	9.0	9.3	8.5	Völlig trüb.
	13 10	39.29	13.4	16.8	—	15.1	9.1	SE. 2.
	13 30	39.34	13.8	18.4	—	16.7	9.4	$R_4S_{3\ 4}$
15	20 50	39.13	+13.8			+13.6	9.2	SSE. 4 (stossw. 6).
	21 10	39.14	13.8	+13.8	+14.1	13.4	9.3	R var. S_{3-4}
	21 29		13.4	13.5	13.8	13.1		
	21 58	39.13	13.4	13.2	13.4	12.8	9.2	
	22 23	39.16	13.1	12.9	13.0	12.4	9.2	
	22 49		13.0	12.8	13.0	12.3		
	23 15	39.14	12.8	12.5	12.6	12.0	9.4	
	23 38		12.6	12.4	12.5	11.8		
	23 52		12.4	12.1	12.2	11.6		
	0 13	39.16	12.3	12.1		11.9	9.1	
	0 57	38.90	12.0	11.8	12.0	11.2	9.1	
	1 8		12.3	12.1	12.2	11.3		
	1 35	38.92	11.8	11.7	12.1	11.4	9.2	
	1 57		11.8	11.5	11.9	11.3		
	2 12		12.0			11.1		R_4S_4, desh. Schl.
19	21 10	43.30	+13.3	+13.3	+13.3	+13.2	8.8	W. 4.
	21 30		13.2			13.1		R_3S_4
	21 57	43.17	13.1	13.1	13.1	12.9	8.8	
	22 22		13.0			12.8		
	22 50	43.13	12.9	12.9	12.9	12.9	8.5	Völlig trüb.
24	21 35	46.86	+ 7.5	+ 6.9	+ 7.1	+ 6.7	5.0	N. 3 (stossw. 5-6).
	21 57	46.87	7.1	6.8	7.0	6.7	4.9	$R_{3-4}S_{3-4}$
	22 22		7.2	6.6	6.2	6.4		
	22 50	47.07	7.3	6.7	6.9	6.5	4.9	
	23 28	47.34	6.9	6.7	6.7	6.5	4.8	
	23 52	47.50	6.6	6.4	6.5	6.2	5.1	
	12 53	48.54	8.0	8.2	—	7.8	5.5	N. 1.
	13 15		8.1	—	—	8.7		R_3S_3
	13 40		8.6	—	—	8.4		Cumuli
	13 53	48.40	9.2	11.0	—	8.8	6.0	

Datum	Sternzeit	Corr.-Brm.	Thermometer Instr.	Spalt	Süd	Nord	Dampfdruck	Bem.
1897		760+					mm	
Okt. 25	$20^h 50^m$	47.69	+ 7°.8	+ 6°.5	+ 6°.8	+ 6°.5	5.8	N. I.
	21 10	47.75	7.5	6.6	6.3	6.3	5.7	$R_3 S_{3-4}$
	21 41	47.76	6.9	6.2	5.6	6.0	5.8	
	22 58	48.13	6.8	6.1	6.0	6.2	5.8	
	23 38		6.4	5.5	6.0	5.5		
	23 58	48.01	6.2	5.8	6.0	5.5	5.7	
	0 20	48.02	6.2	5.8	6.0	5.8	5.7	
	0 46	47.95	6.6	6.2	6.3	6.1	5.9	Völlig trüb.
26	21 10	47.80	+ 7.1	+ 6.8	+ 7.0	+ 6.6	5.9	$R_4 S_4$
	21 32	47.82	7.6	7.3	7.5	7.2	5.9	
27	21 4	50.01	+ 5.6	+ 5.4	+ 5.3	+ 5.1	4.7	N. 2.
	21 26		5.9			5.3		$R_3 S_3$
	21 45	50.03	5.7	5.7	5.3	4.9	4.6	
	22 48	50.13	5.9	5.3	5.4	5.1	4.5	
	22 58		6.4			5.7		
	23 15	50.06	5.2	4.7	4.0	4.2	4.8	
	23 27		5.8			4.7		
	23 57	50.13	6.2	5.5	5.5	5.4	4.5	
	0 20		6.1	5.3	5.4	5.2		
	0 47	50.11	6.2			5.1	4.5	
	1 8	50.03	6.2	5.1	5.2	5.3	4.5	$R_2 S_2$
	1 35	49.97	5.8	4.9	5.0	5.0	4.6	
	2 24	49.95	5.7	4.6	5.0	5.1	4.5	
	3 40	49.78	4.9	4.0	3.1	3.4	4.7	
	4 9	49.78	4.8	3.9	2.9	3.5	4.6	
	4 19		4.1			3.2		
	4 39	49.44	3.6	2.9	2.1	2.0	4.8	
	4 58		3.8	2.8	2.0	2.6		
	5 31	49.23	3.0	2.3	1.5	2.0	4.6	
	5 56	49.16	3.0	2.2	1.3	1.9	4.6	Starker Nebel.
28	21 8	48.54	+ 6.1	+ 5.6	+ 5.8	+ 4.7	5.2	N. I.
	21 30		6.0			4.6		R_2 S var.
	21 58	48.42	5.8	4.8	5.1	4.3	5.2	Nebel.
	22 10	48.38	5.8			4.5	5.1	
	1 8	48.29	4.1	3.3	3.4	2.7	5.1	
	1 32	48.34	4.0	3.3	3.3	2.6	4.9	
	1 58		3.9	3.0	3.1	2.6		
	2 32	48.20	4.0			2.5	4.9	
	2 55		3.9	3.0	2.7	2.5		
	3 12	48.09	3.9	2.9	2.6	2.3	4.9	
	3 32		3.7			2.3		
	4 10	48.14	3.4	2.5	2.3	2.2	4.7	
	4 27		3.6			2.1		
	5 2	48.05	3.0	2.2	1.9	1.9	4.9	
29	21 14	47.16	+ 5.7	+ 5.0	+ 4.7	+ 5.1	5.9	Viel Nebel.
	21 27		5.4			4.7		$R_{3-4} S_{3-4}$
	21 46	47.04	5.2	4.5	4.0	4.3	5.9	
	1 8	46.78	3.6	3.0	2.4	2.7	5.4	

Datum	Sternzeit	Corr.-Brm.	Thermometer Instr.	Spalt	Süd	Nord	Dampfdruck	Bem.
1897		700+					mm	
Okt. 29	1h 36m	46.70	+ 3°4	+ 2°9	+ 2°3	+ 2°7	5.3	
Forts.	1 58		3.1			2.4		
	2 16	46.58	3.0	2.4	1.7	2.4	5.1	E. 2.
	2 40		2.7			2.1		R_3S_{3-4}
	3 11	46.40	2.5	1.9	1.4	1.8	5.0	
	3 30		2.5			1.8		
	3 57	46.40	2.2	1.7	1.4	1.6	5.0	Sehr feuchte Luft.
30	21 15	46.43	+ 5.9	+ 5.6	+ 5.9	+ 4.9	5.5	E. 1. Nebel.
	21 45	46.41	5.7	5.1	5.1	4.6	5.5	Bilder sehr var.
	0 0	46.33	4.7	3.9	4.0	3.4	5.2	
	0 46	46.31	4.5	3.6	3.5	3.5	5.1	
	1 7	46.19	4.4	3.6	3.0	3.3	5.5	R_2S_{2-3}
	1 30	46.19	3.7	3.0	2.3	2.8	5.3	
	1 58	46.21	3.5	2.8	2.3	2.6	5.2	
	2 17		2.8			1.9		
	2 32	46.18	3.0	2.3	1.4	2.1	5.0	
	2 53		3.0			2.0		
	3 20	46.01	2.4	1.7	2.1	1.6	5.0	
	4 8		2.0			1.1		
	4 19	45.85	2.0	1.3	0.7	1.1	4.8	
Nov. 8	1 8	48.57	− 0.8	− 1.2	− 1.1	− 1.3		NW. 8.
	1 35	48.53	1.0	1.3	1.2	1.7	3.7	R_4S_4
	2 2	48.54	0.9	1.3	1.3	1.5	3.8	
	2 22		1.1			1.4		
	2 55	48.33	1.1	1.4	1.3	1.4		[Sturm.
	3 4		1.1			1.4		Schluss wegen
9	20 48	49.02	+ 2.9	+ 2.7	+ 2.6	+ 2.5	3.5	NW. 3, stossw. 5.
	21 0		2.2			2.0		Bilder var.
	21 14	49.21	2.7	2.6	2.5	2.5	3.7	
	21 46	49.48	2.9	2.8	2.6	2.6		
	22 23	49.50	2.8	2.6	2.4	2.4	3.6	
	22 48		2.8			2.5		
	23 0	49.43	2.8	2.8	2.6	2.8	3.5	Völlig trüb.
	13 8	51.69	− 0.3	− 0.8	—	− 1.4	3.6	N. 1.
	13 33	51.86	0.3	0.6	—	1.3	3.4	Bilder sehr var.
11	20 47	49.57	− 3.5	− 4.3	− 4.2	− 4.5	2.8	SE. 6 (stossw. 8).
	21 14	49.54	4.0	4.5	4.5	4.8		
	21 45	49.60	4.2	5.0	4.8	5.1		
	2 7	48.65	5.8	6.4	6.4	6.6	2.1	ESE. 4.
	2 40	48.60	6.0	6.6	6.5	6.8		$R_{3-4}S_4$
	3 10		6.1			6.9		
	3 32	48.36	6.2	6.7	6.8	7.0	.	
	3 55		6.2			7.1		
	4 10	48.18	6.0	7.0	6.8	7.1	1.9	
	4 27	48.06	6.5		6.9	7.2		
19	0 44	47.53	+ 8.7	—	+ 8.3	+ 8.2	7.0	NW. 1.
	0 57		9.4	—		9.2		R_2S_3

Datum	Sternzeit	Corr.-Brm.	Thermometer Instr.	Spalt	Süd	Nord	Dampfdruck	Bem.
1897		700+					mm	
Nov. 19	1h 8m	47.68	+ 9°8	—	+ 9°9	+ 9°9	7.2	
Forts.	1 34	47.70	9.9		9.9	10.0	7.4	
	2 20	47.66	10.0		10.0	10.1	7.3	
	2 40		9.3			9.2		
	3 10	47.61	9.2		9.2	9.0	7.1	
	3 44	47.46	9.2		9.4	9.3	7.2	Plötzlich trüb.
22	2 20	52.17	+ 7.6	—	+ 6.8	+ 6.6	5.6	R_2S_3
	2 53	52.30	7.5		6.9	6.7	5.6	
	3 20		7.4		6.2	7.0		
	3 42	52.13	6.4		5.6	5.6	5.5	
	4 25	52.06	6.3		5.1	5.4	5.4	
	4 47		6.5		6.0	5.8		
	5 5		6.7			5.9		
	5 32	51.67	6.6		6.2	5.9	5.4	
	5 56	51.50	6.6		6.3	6.0	5.3	
	6 36	51.23	6.8			6.1	5.4	
	6 58		6.8			6.1		
	7 24	50.79	6.6		5.9	5.6	5.2	
	7 45		4.6			3.5		
	8 5		5.6			4.1		
	8 15	50.21	5.2		3.8	4.0		
	8 45	49.85	4.8		3.2	3.2	5.1	
25	21 10	41.39	— 2.2	—	— 2.7	— 3.0	4.4	Sturm.
	21 30		2.7			3.3		$R_{3-4}S_{3-4}$
	21 46	41.54	2.1		3.2	3.4	4.4	
26	21 14	47.63	— 2.3	—	— 2.8	— 3.3	3.0	R_2S_3
	21 45	47.62	3.0		3.4	3.9	3.1	
	22 10	47.61	3.5		3.7	4.3	2.4	
	2 30	47.39	4.5		5.1	5.4	2.5	
	3 11	46.96	4.8		5.1	5.6	2.7	SW. 2.
	3 55	46.72	4.8		5.0	5.6		
	5 48	46.16	4.8		5.6	5.8	2.6	
	6 14		5.0			5.7		
	6 29	45.57	5.9		7.0	7.4	2.4	Völlig trüb.
30	13 7	31.85	— 1.5	— 1°7	—	— 1.9	3.2	Bilder sehr var.
	13 21		1.1		—	1.6		Cirren.
	13 35	31.71	0.9	1.0	—	1.4	3.3	
	13 48		0.8		—	1.3		
Dec. 6	1 8	41.30	+ 0.6	+ 0.0	+ 0.6	— 0.4	4.3	R_3 S var.
	1 34	41.30	0.8	0.3	0.4	0.3		
	1 51		0.7			0.3		
	2 15	41.30	0.8	0.3	0.1	+ 0.2	4.2	
	4 0	41.48	0.0	— 0.3	— 0.1	— 1.0		
	4 40	41.48	0.0			1.0		
	5 5	41.47	6.3	1.0	0.7	0.7	3.9	
	5 47	41.57	0.0			0.9		
	6 14		— 0.5	1.0	1.0	1.3		
	6 25	41.72	0.5			1.3	3.8	

Datum	Sternzeit	Corr.-Brm.	Thermometer Instr.	Spalt	Süd	Nord	Dampfdruck	Bem.
1897		700+					mm	
Dec. 6	$6^h 58^m$	41.97	− 0°.4	− 1°.0	− 1°.2	− 1°.3		
Forts.	7 30	42.07	0.5	1.1	1.3	1.4		Völlig trüb.
	8 3	42.06	0.4	1.3	1.1	1.2	3.8	
10	0 37	31.73	+ 1.7	+ 1.3	+ 1.3	+ 1.3	4.3	W. 6.
	0 57	31.66	1.6	1.1	1.3	1.1		R_3S_{3-4}
	1 15		1.6			1.2		
	1 40	31.68	1.4	0.6	0.7	0.8		
	1 57	31.64	1.3			0.8	4.1	
	4 48	30.64	0.8	0.0	0.2	0.1	3.9	W. 1.
	5 7		0.4	− 0.7	− 0.3	− 0.7		Bilder sehr var.
	5 32	30.18	− 0.2	1.6	1.3	1.5	3.7	
	5 56	29.65	0.4			1.2	3.7	
	6 13		0.5	1.3	1.2	1.7		
	6 40	28.81	1.1	1.9	1.7	2.4	3.6	
	7 17	28.31	2.5			3.1	3.3	
	7 30		2.3			3.8		
	7 45		2.1			3.3		
	8 3	27.49	2.1	2.9	2.9	3.5		
	8 40	27.27	2.2			3.3	3.4	
	9 0	27.21	2.4	3.0	3.0	3.0		Völlig trüb.
31	2 57	33.00	+ 1.5	+ 1.3	+ 1.7	+ 1.2	4.6	SE. 5, stossw. 8.
	3 20		1.4			1.0		
	3 32	33.08	1.6	1.2	1.4	0.8	4.4	R_4S_4
	3 55	33.08	1.6	1.2	1.4	0.9	4.3	
	4 18	33.06	1.1	0.7	1.0	0.5	4.3	
1898								
Jan. 8	3 57		+ 1.8			+ 0.8		NE. 1 (stossw. 5).
	4 8	41.58	1.8	+ 0.8	+ 0.8	0.8	3.7	Bilder sehr var.
	4 48	42.03	1.4	0.8	0.4	0.5	3.7	
	5 5		1.3			0.7		
	5 32	41.68	1.3	1.0	1.2	0.8	3.8	
	6 8	41.68	1.3	0.9	1.0	0.8	3.8	
	7 25	41.43	1.2	0.7	0.7	0.5	3.7	NE. 3 (bis 8).
	8 13	41.30	0.8	0.4	0.5	0.2	3.7	R_3S_2
	8 59	41.33	0.7	0.0	0.2	− 0.1	3.5	
Febr. 5	6 8	26.49	− 0.8	− 2.0	− 1.6	− 1.8	3.0	W. 4.
	6 42	26.98	1.3	2.3	1.7	1.9	3.0	
	6 58	27.26	1.4	2.2	1.8	2.0	3.0	Völlig trüb.
6	8 5	37.87	− 2.5	− 4.0	− 3.7	− 3.7	1.2	Bilder sehr var.
	8 40	37.59	3.2	4.3	4.7	4.6	1.2	
	9 28	37.04	3.6	4.8	4.7	4.6	1.2	
9	6 58	37.32	+ 0.6	+ 0.4	+ 0.5	+ 0.3	3.9	NW. 5.
	7 30	37.60	0.3	0.0	0.1	− 0.1	4.0	R_2S_2, wegen des
	8 3	37.70	0.3	0.1	0.1	0.0	4.0	Sturmes Ein-
	8 42	38.00	0.0	− 0.2	− 0.2	0.4	3.9	stellen jedoch
	9 12	38.20	− 0.3	0.6	0.5	0.5	3.8	unsicher.
	9 46	38.40	0.4	0.6	0.9	0.8	3.8	
	10 7	38.55	0.6	0.8	1.2	0.9	3.8	Schl. weg. Sturm.

Datum	Stern-zeit	Corr.-Brm.	Thermometer Instr.	Spalt	Süd	Nord	Dampf-druck	Bem.
1898		700+					mm	
Febr. 18	$7^h 36^m$	27.53	+ 0°8	—	+ 0°5	+ 0°1	3.9	W. 3.
	7 55		0.8			0.4		$R_{3-4}S_{3-4}$
	8 13	27.43	0.7		0.4	0.1		Viel Dunst.
	8 46	27.53	0.5		0.2	0.0	3.9	
	9 12	27.53	0.5		0.2	0.1		
	9 58	27.53	0.4		0.2	− 0.1		
	10 17	27.53	0.5		0.3	0.0	3.9	Völlig trüb.
20	6 20	27.90	+ 0.9	− 0°3	+ 0.1	+ 0.1	3.4	SW. 1.
	6 40		0.8	0.0	0.3	− 0.7		$R_{3-4}S_{3-4}$
	6 58	27.90	0.7	0.2	0.0	0.7	3.4	
	7 23		0.4			1.0		
	7 38	27.80	0.4			0.8	3.4	Viel Wolken.
	8 45	27.65	0.1	0.3	− 0.2	0.7	3.4	SW. 2.
	9 30	27.70	− 0.2	0.5	0.5	1.0	3.4	R_3S_3
	9 57		0.3			1.7		
	10 15	27.60	0.7	1.4	1.4	2.0	3.3	Wolken.
	10 50	27.40	1.2	1.3	1.7	2.3	3.3	
	11 38	27.30	1.8	2.2	2.2	2.7	3.3	
22	10 5	26.43	+ 2.6	—	+ 2.3	+ 1.7	4.9	SE. 1.
	10 30		2.3		2.1	1.7		R_4S_4
	10 50	26.32	2.3		2.2	1.5	4.9	
	11 10		2.3		2.0	1.4		
	11 40	26.46	2.1		1.9	1.5	4.9	
25	9 0	42.94	+ 5.3	—	+ 5.1	+ 4.4	6.0	SSW. 1.
	9 30	42.83	5.1		4.8	4.0	6.0	
	9 52	42.71	4.8		4.6	3.8	5.9	
	10 7		4.9			3.9		Völlig trüb.
März 1	4 15	35.75	+ 4.6	+ 4.0	+ 4.4	+ 4.0	3.9	Anfangs Wolken
	4 47	35.67	4.0	3.3	3.4	3.2	3.9	$R_{2-3}S_3$ [aus W.
	5 5	35.61	3.8	3.0	3.3	3.2	3.6	
	5 33		3.4			2.6		
	5 45	35.52	3.6	2.8	3.3	2.8	3.6	
	6 20	35.24	2.9	1.9	2.3	2.2	3.7	
	6 40	35.15	2.3	1.1	1.5	1.2	3.7	
	7 8	35.06	2.8	1.5	2.1	1.8	3.6	
	7 38	34.95	2.9	1.8	2.3	2.0	3.7	
	8 27	34.73	2.9	2.2	2.6	2.4	3.2	
	8 46		2.6			1.8		
	9 12	34.42	2.6	2.0	1.8	1.8	3.6	
	9 57	34.20	3.1	2.3	2.8	2.5	3.0	
	10 15		3.0			2.3		
	10 30	33.93	2.8	2.0	2.2	2.0	3.0	
	10 48		2.3			1.4		
	11 7	33.72	2.1	1.6	1.5	1.7	2.9	
	11 30	33.68	2.3	2.2	1.8	2.2	2.9	Völlig trüb.
3	7 57	32.12	+ 2.1	+ 1.4	+ 1.4	+ 1.7	3.2	W. 2.
	8 38	32.29	1.7	1.3	1.5	1.4	3.1	Bilder sehr var.

Datum	Sternzeit	Corr.-Brm.	Thermometer				Dampfdruck	Bem.
			Instr.	Spalt	Süd	Nord		
1898		700+					mm	
März 3	9h 0m		+ 2°0			+ 1°8		
Forts.	9 32	32.55	1.8	+ 1°3	+ 1°2	1.4	2.8	
	9 58		1.9			1.7		
	10 15	32.65	1.6	1.3	1.3	1.3	2.9	
	10 50	32.61	1.3	0.9	0.9	1.0	2.8	Bilder besser.
	11 10		1.3			1.0		
	11 45	32.74	1.6	1.0	1.2	1.2	2.7	
4	4 15	32.15	+ 4.8	+ 4.5		+ 4.2	4.8	SW., anf. stossw.,
	4 38		4.0	3.5	+ 3.3	3.1		b.6, spät. ruhiger.
	5 5	32.54	2.9	2.4	2.4	1.8	4.0	R_3S_{3-4}
	5 45	32.55	2.2	1.7	1.8	1.1	3.9	
	9 52	52.55	− 0.6	− 1.3	− 1.4	− 2.2	3.6	R_3S_3
	10 15	32.48	0.8	1.4	1.6	2.1	3.6	
	10 48		0.5	1.3	1.2	1.9		
	11 12	32.22	0.5	1.5	1.4	1.9	3.6	Cirren.
	11 45	32.06	0.7	1.4	1.3	2.2	3.6	
	12 18	31.98	0.6	1.2	1.2	1.5	3.6	Trüb.
5	8 3	29.27	+ 5.5	+ 5.1	+ 5.6	+ 4.9	5.5	SW. 5, stossw. 8.
	8 45	29.37	5.7	5.2	5.4	4.7	5.5	Cirren.
	9 14	29.41	5.5	5.1	5.2	4.6	5.3	
	9 45	29.41	5.6	5.1	5.3	4.7	5.3	Völlig trüb.
11	1 5	39.52	+ 4.6	+ 4.9		+ 4.8	1.7	S. 5.
	1 30	39.43	4.6	5.1		5.1	1.8	
	4 15	38.60	4.5	4.5		4.0	2.8	SE. 2.
	4 33		4.3			3.6		R_3 S var.
	5 2	38.75	3.8	3.3	+ 3.6	2.8	2.4	
	5 32	38.70	3.3	2.6	3.0	2.2	2.0	
	5 58		2.9	2.1	2.5	1.6		
	6 20	38.75	2.8	2.1	2.4	1.6	2.2	
	6 32		2.6			1.2		
	8 3	38.60	1.3	0.7	0.7	− 0.3	2.3	
	8 45	38.55	0.6	0.0	0.0	0.8	2.5	
	9 12		0.3	− 0.4	− 0.4	1.3		
	9 30	38.30	0.1	0.7	0.8	1.6	2.3	
	9 53		− 0.2	1.1	1.0	1.5		$R_{3-4}S_{3-4}$
	10 15	38.30	0.3	1.3	1.3	1.5	2.3	
	10 42	38.20	1.1	2.0	2.0	2.3	2.4	
	11 10	38.10	1.4	2.2	2.3	2.3	2.4	
	11 43	37.95	1.1	2.0	2.2	2.2	2.4	
	12 42	37.95	0.9	1.9	2.2	2.0	2.5	
	13 8	37.95	0.7	1.6	1.9	1.8	2.4	
	13 33	37.95	1.3	2.2	2.5	2.4	2.5	
	14 15	37.85	1.9	2.5	2.5	2.6	2.5	
12	6 21	36.07	+ 4.8	+ 4.3	+ 4.7	+ 3.8	2.9	E. 1, stossw. bis 5.
	6 40		4.6			3.5		R_3S_3
	8 18	35.92	3.2	2.5	2.6	1.8	3.2	
	9 0	35.91	2.4	1.7	2.0	1.0	3.0	
	9 30	35.99	2.9	2.2	2.4	1.5	3.0	

Datum	Sternzeit	Corr.-Brm.	Thermometer Instr.	Spalt	Süd	Nord	Dampfdruck	Bem.
1898		700+					mm	
März 12	9h 57m		+ 2°.4	+ 1°.5	+ 1°.8	+ 1°.0		
Forts.	10 15	35.89	1.9	1.1	1.3	0.6	3.0	
	10 35		1.9			0.5		
	11 10	35.84	1.8	1.0	0.7	0.8	3.1	
13	8 8		+ 5.8			+ 6.0		SE. 1.
	8 25	36.27	6.8		+ 6.5	6.2	3.3	R_2S_2
	8 42		6.9	+ 6.7	6.9	6.4		
	9 0	36.22	7.0	6.7	6.6	6.2	3.4	
	9 30	36.18	6.8	6.5	6.7	6.4	3.6	
	9 58		7.1	6.8	7.0	6.8		SE. 1.
	10 15	36.24	6.9	6.9	6.9	7.0	3.4	
	10 30		6.8			6.9		
	10 50	36.24	6.7	6.5	6.6	6.4	3.2	
14	1 5	37.10	+10.8	+12.9	—	+11.8	3.2	SW. 1 (stossw. b. 5).
	1 18		11.6			12.3		Bilder sehr var.
	1 30	37.19	11.6	12.7		12.7	3.1	
	4 37	36.93	11.7	12.1		11.5	3.2	SE. 1.
	4 48		11.7			11.3		R_3S_3
	5 7	36.98	11.3	11.1		10.8	3.2	
	5 25		10.8	10.4	+10.6	10.0		
	5 40		10.4			9.7		
	6 0	37.03	10.3	9.8	10.0	9.3	3.2	
	6 20	37.24	9.9	9.5	9.9	9.6	3.2	
	10 50	37.59	8.3	8.0	7.7	7.7	3.4	
	11 30		8.1			7.6		R_2S_2
	11 43	37.46	8.1	7.7	8.0	7.5	3.5	
	12 17	37.48	7.7	7.9	7.8	7.4	3.5	
	12 53	37.52	7.9	7.6	7.6	7.3	3.6	
	13 35	37.59	7.8	7.6	7.7	7.5	3.5	Plötzl. NE. Sturm,
	13 57	37.59	7.5	7.1	7.2	7.0	3.6	dessh. Schluss.
15	8 5	38.35	+ 7.9	+ 7.2	+ 7.0	+ 7.1	3.6	NW. 1.
	8 25		6.9	6.4	6.8	5.5		R_2S_2
	8 45	38.54	7.4	7.0	7.2	6.9	3.9	
	9 0		7.4			6.8		
	9 30	38.62	6.9	6.4	6.5	5.8	4.1	Viel Wolken.
	9 58	38.64	7.1	6.7	6.9	6.6	3.9	
19	6 35	35.00	+11.4	+11.2	+11.3	+11.1	6.7	WSW. 8.
	6 58	34.92	11.2	11.0	11.1	11.0	6.9	$R_{3-4}S_{3-4}$
	7 38	34.91	11.2	11.0	11.1	10.9	6.7	
	8 25	34.92	11.0	10.8	10.7	10.6	7.0	
	8 45	34.96	10.8	10.7	10.6	10.6	7.0	Schl. weg. Sturm.
21	5 48	37.15	+ 5.8	+ 4.8		+ 5.0	3.8	W., anf. 0, später
	6 20		4.8	3.9	+ 4.4	3.9		5, stossw. bis 8.
	6 35	37.14	4.7	3.6	4.3	3.7	3.9	Cirren.
	6 58	37.10	4.4	3.5	4.1	3.4	3.5	R_{2-3} S var.
	7 17		4.0			2.9		
	7 37	37.13	3.9	3.2	3.6	3.0	3.5	
	8 4	37.28	3.6	2.9	3.4	2.8	3.5	

Datum	Sternzeit	Corr.-Brm.	Thermometer				Dampfdruck	Bem.
			Instr.	Spalt	Süd	Nord		
1898		700+					mm	
März 21	$8^h 46^m$	37.26	+ 3.°2	+ 2.°4	+ 3.°0	+ 2.°5	3.8	
Forts.	9 11		3.3			2.7		
	9 45	37.30	3.2	2.5	2.9	2.7	3.9	
	10 33	37.27	3.0	2.4	2.8	2.4	4.1	
	10 42		3.0			2.3		
23	5 7	30.02	+ 6.3	+ 6.1		+ 5.7	3.6	Viel Wolken.
	5 46	29.94	5.8	5.4		5.1	3.0	$R_{3-4}S_3$
	6 12		5.2	4.5	+ 4.7	4.2		
	6 35	29.84	4.9	4.1	4.3	3.4	2.3	
	7 2		4.4	3.7	4.0	2.9		
	7 25	29.61	4.2	3.6	3.7	2.9	2.5	
	7 50	29.28	4.2	3.5	3.6	2.9	2.7	Starker Dunst.
31	7 58	30.86	+11.0	+10.7	+10.6	+10.5	6.1	Cirren im Süden.
	8 35	31.00	10.6	10.0	10.1	9.1	6.2	R_3S_3, zeitw. var.
	9 0		10.2			8.8		
	9 33	31.08	10.1	9.3	10.0	9.6	6.2	
	9 53		9.8			9.0		
	10 15		11.0			10.3		
	11 28	31.06	10.5	10.1	10.3	9.9	5.8	
	12 45	30.74	6.8	5.9	5.7	5.7	5.8	
	13 5	30.78	7.0			6.2	5.7	
	13 20		6.8			5.2		
	13 52	30.73	7.0	6.1	5.7	5.9	5.7	
	14 15		7.1			6.2		
	14 40	30.70	7.3	6.4	5.8	6.1	5.6	
	15 20	30.18	5.1	4.4	3.8	4.1	5.8	
	15 54	30.39	6.3	5.7	5.3	5.3	5.8	
April 5	10 42	39.37	+ 3.3	+ 2.3	+ 2.7	+ 2.4	4.3	W. 5, stossw. bis 7.
	11 24	39.60	2.4	1.6	2.0	1.7	3.5	R_{2-3} S var.
	11 53	39.80	2.6	1.9	2.3	2.1	3.4	
	12 18		2.4			1.6		Vielfach Wolken.
	12 42	40.03	2.4	1.7	2.1	1.8	3.5	
	13 5		2.5			1.9		
	13 46	40.27	2.5	1.6	1.6	1.7	3.9	
6	1 8	44.18	+ 6.1	+ 6.6	—	+ 6.4	2.6	SE. 2. Cirren.
	1 20		6.3			6.4		$R_{3-4}S_{3-4}$
	1 37	44.04	6.6	7.3		6.9	2.8	
	5 7	43.55	9.2	11.7		10.7	1.8	$R_{3-4}S_{3-4}$
	5 32		9.0			9.1		
	5 55	42.99	9.1	10.4		8.9	2.7	
	6 27		8.7			8.5		
	6 42	42.99	8.3	9.1		8.1	2.4	R_3S_3
	6 57		8.1			7.4		
	7 24	42.58	7.1	6.6	+ 6.8	6.1	3.4	
	8 4	42.70	6.4	5.7	6.0	4.7	2.9	
	8 46	42.81	5.6	4.8	5.0	4.1	2.8	
	9 28	42.81	5.4	4.2	4.7	4.5	2.6	Starker Dunst.
	10 35	42.88	5.2	3.6	4.1	3.2	3.0	

Datum	Stern-zeit	Corr.-Brm.	Thermometer Instr.	Spalt	Süd	Nord	Dampf-druck	Bem.
1898		700+					mm	
April 6	11h 12m	42.70	+ 4°6	+ 3°5	+ 3°9	+ 2°7	3.0	
Forts.	11 44	42.60	4.3	3.3	3.3	3.0	2.9	
	12 13		4.4			2.7		
	12 37	42.52	4.1	2.7	2.3	2.2	3.1	
	13 8	42.38	4.2	2.2	2.9	2.8	2.9	
	13 29		4.1			2.6		
	13 46	42.41	4.1	2.0	2.8	3.0	2.5	
7	8 3	43.61	+12.2	+12.2	+12.3	+11.9	2.8	W. 4, stossw. bis 8.
	8 26		12.2			11.9		R_2S_2, zeitw. var.
	8 46	43.60	11.6	11.6	11.6	11.3	3.1	
	9 32	43.68	10.9	10.6	10.6	10.5	3.2	
	10 14	43.77	10.3	10.2	10.1	10.0	3.3	Cumuli.
	10 51	43.75	10.1	10.1	10.1	10.0	3.2	
	11 30		10.7			10.5		
	11 45	43.85	11.0	11.1	11.1	10.9	3.2	
	12 17	43.78	11.4	11.4	11.5	11.3	3.2	
	13 0	43.72	11.4	11.6	11.5	11.3	3.3	
	13 29	43.66	11.4	11.6	11.5	11.4	3.3	Trüb.
8	8 24	43.38	+12.1	+11.8	+11.8	+11.2	6.4	NW. 1.
	8 46		12.1			10.8		$R_{3-4}S_3$
	9 0	43.50	11.9	11.6	11.8	11.5	6.4	
	9 32		11.9			11.7		
	9 58	43.61	11.7	11.5	11.6	11.3	6.4	Völlig trüb.
9	1 3	42.42	+15.9	+17.4	—	+17.4	7.0	W. 1.
	1 22		16.6		—	17.5	7.0	
	1 33	42.31	16.8	18.6	—	18.0	7.0	Viel Wolken.
	7 55	39.83	17.1	17.1	—	17.2	5.0	W. 1.
	8 13	39.72	17.0	16.9	—	16.5	5.4	$R_{2-3}S_3$
	8 35		16.8			16.5		
	9 1	39.68	16.3	16.0	+16.3	16.2	5.2	
	9 31		16.1			15.6		
	9 58	39.12	15.5	15.1	15.3	14.8	5.8	
	10 28		15.4			14.3		
	10 49	38.82	15.2	14.8	15.0	14.5	5.8	
	11 10		14.9			14.1		Starker Nebel.
	11 43	38.53	15.3	15.1	15.2	14.7	5.8	
	12 18	38.37	14.9	14.6	14.8	14.1	5.8	Völlig trüb.
11	8 4	32.74	+14.2	+13.6	+13.8	+13.2	4.9	NW. 2.
	8 46	32.80	13.7	13.4	13.2	13.1	4.7	R_2S_2
	9 12		13.0			11.9		Viel Wolken.
	9 32	32.91	12.9	12.1	12.7	12.4	5.6	
	9 57		12.9			12.4		
	10 30	32.93	12.5	12.0	11.9	11.7	6.0	
	11 18	33.02	12.3	11.7	12.0	11.9	5.4	
	11 43		11.8			10.8		
	12 18	32.89	11.6	11.2	11.2	11.0	5.1	
	13 8	32.63	11.4	11.0	11.2	11.0	4.8	

Datum	Stern-zeit	Corr.-Brm.	Thermometer Instr.	Spalt	Süd	Nord	Dampf-druck	Bem.
1898		700+					mm	
April 11	$13^h 52^m$	32.56	+11°.0	+10°.4	+10°.8	+10°.4	5.0	
Forts.	14 30	32.33	10.9	10.4	10.7	10.6	4.7	Völlig trüb.
14	0 38	41.88	+ 8.0		—	+ 8.0	4.9	S. 3. Cirren.
	1 5	41.51	8.5	+ 9.2	—	8.8	5.5	R_4S_4
	1 31	41.16	8.8	9.6	—	9.5	5.7	
15	9 58	39.91	+ 7.9			+ 7.1	5.3	SE 3 (stossw. b. 8).
	10 25		7.4			6.6	5.6	R_3S_{3-4}
	10 44	39.77	7.3	+ 6.8	+ 6.9	6.2	5.6	Viel Wolken.
	11 11		7.1			6.2		
	11 45	39.59	6.6	5.7	6.0	5.5	5.7	
	12 17		5.9			4.9		
	12 43	39.46	5.9	5.0	5.2	4.7	5.6	
	13 8	39.33	5.5	4.9	5.0	4.5	5.4	
	13 32	39.08	5.6	4.5	4.8	4.3	5.4	
16	9 52	35.81	+10.8	+10.2	+10.4	+ 9.7	6.1	SW. 2, stossw. b. 5.
	10 25	35.51	10.5	10.2	10.4	9.5	6.1	Bilder sehr var.
	10 50		9.8	9.3	9.5	8.7		Vielfach Wolken.
	11 10	35.24	9.7	9.1	9.4	8.6	6.0	
	11 45	35.12	9.1	8.5	8.3	8.2	6.1	
	12 17		8.8	8.3	8.1	8.0		
	12 37	35.00	8.4	8.0	8.0	7.8	6.1	
	13 7	34.87	8.4			7.8	6.1	
	13 28	34.78	8.2			7.6	6.0	
18	9 15	27.43	+12.2	+12.2	+12.7	+12.0	6.0	SE. 3.
	9 45	27.63	11.1	10.5	10.6	10.6	6.2	R_4S_4
	10 15		10.9			10.6		
	10 35	28.06	11.3	10.5	10.8	10.6	6.2	
	11 2		10.9			10.2		R_3S_3
	11 22	28.28	10.7	9.8	10.0	10.2	6.2	
	11 31	28.37	10.4			10.1	5.8	Völlig trüb.
26	11 0	32.12	+12.3	+11.9	+11.8	+11.9	9.1	N. 1, stossw. 4.
	11 44	32.14	11.8	11.2	10.7	11.1	8.8	R_3S_4
	12 6		11.6			10.9		
	12 39	31.91	11.1	10.7	10.2	10.2	8.8	
	13 0	31.64	10.9			10.3	8.5	R_3S_3
	13 28	31.48	10.9	10.5	10.0	10.2	8.4	
	13 57		11.0			10.4		Stets durch Wol-
	14 25	31.22	10.9			10.2	8.2	ken.
	14 54		10.7			10.0		
	15 25	30.89	10.3	9.8	9.4	9.7	8.2	
	15 56	30.64	10.1			9.7	8.2	
	16 28	30.53	9.9	9.6	9.3	9.6	8.2	
	16 44		9.7			9.5		
27	10 35	29.14	+14.6	+14.7	+14.3	+14.8	9.3	R_2S_2
	11 12	29.24	14.5	14.1	13.9	14.1	9.4	

Datum	Stern-zeit	Corr.-Brm.	Thermometer Instr.	Spalt	Süd	Nord	Dampf-druck	Bem.
1898		700+					mm	
April 27	$11^h 43^m$	29.22	+13.°8	+13.°6	+13.°2	+13.°5	9.5	
Forts.	12 17		13.5			13.1		
	12 37	28.98	13.2			12.7	9.5	S_3
	13 2	28.99	13.2	12.8	12.4	12.7	9.5	
	13 28	29.07	12.9	12.4	12.1	12.3	9.4	
	14 30	28.94	12.7	12.2	11.9	12.2	9.5	R_3S_4
	14 53		12.7			12.1		
	15 20	28.82	11.9	12.4	11.8	12.1	9.4	
	15 56		11.7			10.4		
	16 10	28.63	11.1	10.6	9.9	9.8	9.0	
	16 40		11.5			10.5		Sehr feucht, alles
	17 12	28.68	11.3	10.5	9.8	9.9	9.0	beschlagen.
Mai 1	1 5	38.06	+16.6	+18.3	—	+17.6	9.4	E. 3.
	1 30	38.02	17.1	18.6	—	18.2	9.4	Bilder var.
2	10 4	35.46	+18.3			+18.0	10.5	SE. 5, stossw. 8.
	10 25		18.4	+17.9	+18.0	17.4		$R_{3-4}S_{3-4}$
	10 50	35.47	17.5	17.1	17.5	16.7	10.4	
	11 12		16.9	16.8	17.1	15.9		
	11 53	35.39	16.5	16.1	16.4	15.7	11.6	
	12 13		16.3			15.5		
	12 43	35.50	15.8	15.4	15.8	15.1	10.2	
	13 0		15.7			14.7		
	13 30	35.56	15.3	14.7	15.1	14.6	9.2	
	13 52		15.0			14.1		
	14 16	35.40	14.7	14.0	14.4	13.8	9.1	
	14 55		14.3			13.5		
	15 14	35.21	14.1	13.7	13.7	13.2	9.1	
	1 5	35.03	18.1	—	—	19.2	9.7	$R_{3-4}S_{3-4}$
	1 18		18.4	—	—	19.6		
	1 28	35.10	18.8	—	—	19.8	9.5	
3	9 57	32.71	+19.5			+19.3	8.5	SSE. 6.
	10 13		19.1	+19.2	+19.9	19.1		$R_{3-4}S_{3-4}$
	10 48	32.70	18.4	18.1	18.6	17.6	9.0	
	11 10		18.4			17.8		
	11 43	32.54	17.7	17.3	17.7	17.1	10.2	
	12 12		17.2			16.6		
	12 32	32.46	17.0	16.7	17.0	16.4	9.9	
	13 0	32.57	16.8	16.4	16.5	15.7	9.9	
	13 33	32.49	16.0	15.2	15.7	15.0	10.1	Wolken.
	14 3		16.0			14.6		
	14 25	32.41	15.3	14.3	14.5	14.0	9.4	

§ 11.

Zusammenstellung der beobachteten Zenithdistanzen.

Die in der folgenden Zusammenstellung gegebenen Zenithdistanzen enthalten sämmtliche Correctionen, die bislang discutiert worden sind; in dieser Form sind sie für die Bestimmung der Genauigkeit, für die Ableitung der Polhöhe und für die Untersuchung der Refraction anzuwenden.

Einzelne der angeführten Zenithdistanzen sind eingeklammert; diese sind derartig unsicher, dass sie für die weitere Untersuchung auszuschliessen sind. Luftdruck und Temperatur sind gleich den nach § 10 verbesserten Barometer- und Thermometerangaben, wie sie der ersten Reduction zu Grunde gelegt worden sind.

Bei den polnahen Sternen ist neben der Kreislage die jeweilige Anzahl der Einstellungen während eines Durchgangs gegeben; bei den übrigen Sternen ist diese Anzahl fortgelassen, da eine Erhöhung des Gewichts durch eine zwei- oder dreifache Einstellung kaum erzielt wird, wie sich im nächsten Paragraphen ergeben wird.

Die am Ende jedes Sternes gegebene Zahl ist gleich dem arithmetischen Mittel aus allen beobachteten Zenithdistanzen, die alle gleiches Gewicht erhalten haben und ohne Rücksicht auf Unterschiede zwischen den beiden Kreislagen, die, wie sich ergeben hat, keinen systematischen Charakter mehr aufweisen und ihrer Grösse nach innerhalb des zulässigen Beobachtungsfehlers liegen, gebildet sind.

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 — Brm.	Th.
β Cassiop. O. C.				
$0^h 3^m 41^s$				
		$+10°22'$		
96 Sept. 17	W	6″42	18.1	+16°1
18		6.19	23.7	19.8
22		5.71	26.5	9.1
Okt. 2		6.56	22.3	12.8
6		6.52	18.3	9.7
7		6.53	17.9	12.0
9		6.54	20.5	12.7
10		6.68	25.7	14.2
16		6.20	21.9	7.7
24	O	6.84	21.6	5.5
25		5.95	24.0	5.8
26		6.43	23.8	4.4
97 April 21	W	5″85	23.6	+10°4
Juni 24	O	6.35	21.5	17.8
27		5.84	21.2	18.4
30	W	6.61	23.6	20.3
Aug. 18		5.96	24.2	19.2
24		6.18	23.0	11.9
Sept. 24	O	7.45	16.2	14.2
28		6.54	19.0	15.5
30		6.19	24.2	15.5
Okt. 1		6.19	26.4	15.3
14		6.67	21.9	9.5
15		6.39	20.9	12.9
25		6.07	12.0	5.9
27		6.63	9.9	5.8
		6.35		

β Cassiop. U. C.

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 — Brm.	Th.
		+73° 12′		
96 Sept. 27	W	19″.80	23.8	+15°.6
97 März 4		18.06	28.6	1.4
10		20.02	21.7	0.5
April 7		20.55	25.1	5.6
8		18.82	23.2	7.3
10		17.67	23.5	6.6
14		19.26	20.7	10.9
30		19.33	25.0	15.8
Mai 17		19.95	25.6	12.8
29	O	19.19	20.8	17.2
30		18.68	20.6	18.8
Juni 25		19.32	23.4	27.2
98 März 4	W	20.02	28.0	− 1.2
14		19.76	22.5	+ 7.7
April 5	O	17.85	20.2	2.2
6		18.67	17.4	3.6
7		18.76	16.2	11.1
9		19.69	21.6	14.7
11		17.75	27.1	11.3
15		18.69	20.5	5.7
16		17.01	24.9	8.5
26	W	19.20	27.9	11.3
27		18.63	30.9	13.5
Mai 2		18.72	24.6	16.0
		18.99		

κ² Sculptoris.
$0^h\ 6^m\ 21^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 — Brm.	Th.
		−76° 35′		
96 Sept. 18	W	12″.06	23.7	+19°.6
22		10.02	26.5	9.1
Okt. 2		10.29	22.3	12.8
6		11.62	18.4	9.7
7		10.24	17.9	11.8
9		12.32	20.5	12.7
10		10.07	25.7	14.1
16		11.80	21.9	7.7
24	O	8.90	21.6	5.4
25		12.17	24.0	5.8
26		11.07	23.8	4.3
97 Sept. 13	W	11.47	15.5	13.0
24	O	9.87	16.2	14.2
28		12.53	19.0	15.5
30		13.13	24.2	15.4
Okt. 1		12.52	26.4	15.3
14		10.45	21.9	9.5
17		13.35	9.9	5.8
30		11.87	13.7	4.0
		11.31		

ι Ceti.
$0^h\ 14^m\ 11^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 — Brm.	Th.
		−57° 36′		
96 Sept. 17	W	29″.04	18.1	+16°.1
18		28.58	23.8	18.8
22		26.90	26.5	8.7
Okt. 2		28.54	22.4	12.8
6		27.69	18.4	9.6
7		28.30	17.9	11.0
9		29.07	20.6	12.6
16		27.83	21.9	7.6
24	O	29.40	21.6	5.3
25		29.76	24.0	5.8
26		28.52	23.8	3.9
97 Aug. 18	W	29.11	24.3	19.0
24		28.74	23.0	11.9
Sept. 24	O	27.90	16.2	14.4
28		29.22	19.0	15.4
30		28.85	24.2	15.3
Okt. 1		29.63	26.4	15.4
14		28.93	21.9	9.5
25		28.60	12.0	6.0
27		29.30	9.9	5.7
30		28.83	13.7	4.0
		28.80		

ι Sculptoris.
$0^h\ 16^m\ 21^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 — Brm.	Th.
		−77° 45′		
96 Sept. 18	W	52″.15	23.8	+18°.6
22		48.92	26.5	8.7
Okt. 2		51.83	22.4	12.8
6		49.89	18.4	9.5
7		49.21	17.9	10.8
9		52.20	20.6	12.6
16		53.30	21.9	7.6
24	O	49.88	21.6	5.3
25		49.35	24.0	5.8
26		49.29	23.8	3.7
97 Aug. 12	W	52.40	24.4	18.9
24		51.72	23.0	11.9
Sept. 24	O	49.10	16.2	14.4
28		51.98	19.0	15.4
30		52.45	24.2	15.3
Okt. 1		51.60	26.4	15.4
14		49.09	21.9	9.5
25		51.76	12.0	6.0
27		50.36	9.9	5.7
30		51.73	13.7	4.0
		51.05		

κ Cassiop. O. C.

$0^h\,27^m\,9^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 — Brm.	Th.
		+14°8′		
96 Sept. 17	W	60″.72	18.2	+16°.0
18		60.91	24.0	17.7
22		61.40	26.4	8.5
Okt. 2		60.82	22.5	12.8
6		61.06	18.5	9.5
7		61.57	17.9	10.5
9		61.84	20.7	12.5
16		61.30	21.9	7.5
24	O	60.91	21.5	5.3
25		60.26	24.0	5.8
26		60.49	23.9	3.6
97 Juni 23		60.01	18.2	16.1
24		60.46	21.5	18.2
27		60.59	21.0	18.4
Aug. 18	W	60.23	24.4	18.9
24		60.75	23.0	11.9
Sept. 13		60.22	15.6	13.0
24	O	60.10	16.2	14.3
28		59.76	19.1	15.4
30		59.77	24.3	15.2
Okt. 1		60.68	26.4	15.4
25		60.15	12.0	6.1
27		60.16	9.9	5.7
30		60.87	13.7	4.0
		60.46		

κ Cassiop. U. C.

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 — Brm.	Th.
		+69°25′		
97 März 4	W	24″.85	28.6	+ 1°.3
10		24.46	21.8	0.6
April 3		25.45	33.1	2.3
7		25.60	25.1	5.6
8		24.70	23.2	7.2
9		24.16	20.6	5.6
10		24.67	23.6	6.3
14		25.29	20.8	11.0
30		25.10	25.2	15.7
Mai 12		24.36	24.5	3.4
17		25.37	25.6	12.8
29	O	25.53	20.6	16.9
30		25.63	20.6	18.1
98 April 5		24.68	20.0	2.0
6		25.91	17.5	3.4
11		25.40	27.2	11.3
15		24.98	20.5	5.4
16		24.21	25.0	8.2
98 April 26	W	24″.47	28.1	+10°.9
27		25.05	31.0	13.1
Mai 3		24.46	27.5	16.8
		25.02		

α Cassiop. O. C.

$0^h\,34^m\,40^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 — Brm.	Th.
		+ 7°45′		
96 Okt. 2	W	33″.97	22.6	+12°.7
6		34.37	18.6	9.6
7		33.83	17.9	10.4
16		32.85	21.9	7.3
24	O	34.00	21.5	5.2
25		33.19	24.0	5.7
26		33.59	23.9	3.6
Nov. 5		32.88	9.5	1.4
97 April 21	W	33.37	23.7	11.3
Juni 1	O	33.31	21.6	19.0
3		32.81	24.4	20.6
13		32.55	16.7	16.7
23		33.31	18.2	16.1
24		33.06	21.5	18.2
27		33.09	21.0	18.4
30	W	33.64	23.8	21.3
Aug. 18		34.03	24.5	19.0
24		33.82	23.0	12.0
Sept. 13		34.19	15.6	13.0
24	O	33.46	16.2	14.1
28		32.82	19.1	15.4
30		33.12	24.3	15.2
Okt. 1		33.40	26.4	15.3
25		33.38	12.0	6.2
27		33.16	9.9	5.7
30		33.36	13.7	4.0
Dec. 10		33.15	28.3	1.5
		33.40		

α Cassiop. U. C.

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 — Brm.	Th.
		+75°48′		
96 Nov. 4	O	52″.04	10.9	+ 2°.5
5		51.80	11.9	4.8
97 März 4	W	53.64	28.7	1.2
10		52.64	21.8	0.6
April 3		51.32	33.1	2.2
5		51.13	25.5	3.1
7		52.75	25.1	5.6
8		52.54	23.2	7.1
9		51.20	20.6	5.4
10		51.02	23.7	6.2
14		53.86	20.8	11.0

α Cassiop. Forts.

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 − Brm.	Th.
97 April 17	W	51″.83	18.5	+ 9°.8
27		51.51	17.4	11.0
30		51.55	25.2	15.6
Mai 12		51.79	24.5	3.4
17		52.24	25.6	12.8
21	O	53.68	29.1	17.7
29		52.22	20.5	16.8
30		51.72	20.5	18.1
Juni 1		51.74	22.5	19.9
14		51.45	19.1	22.1
24		51.65	20.4	24.3
25		52.68	23.1	27.0
98 April 5		51.38	20.0	2.1
6		52.03	17.5	3.2
11		51.54	27.2	11.3
15		52.36	20.5	5.3
16		51.95	25.0	8.1
26	W	52.32	28.1	10.7
27		53.02	31.0	13.0
Mai 3		50.00	27.5	16.7
		52.05		

o Cassiop. O. C.

$0^h 38^m 59^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 − Brm.	Th.
		− 0°29′		
96 Sept. 17	W	33″.42	18.3	+16°.0
22		31.41	26.7	8.6
Okt. 2		33.09	22.6	12.7
6		33.00	18.6	9.7
7		33.35	17.9	10.4
16		34.21	21.9	7.2
24	O	33.26	21.5	5.2
25		33.03	24.0	5.6
26		32.52	24.0	3.7
Nov. 5		32.28	9.5	1.5
97 Juni 24		33.03	21.5	18.1
Aug. 18	W	32.92	24.5	19.0
24		33.54	23.0	12.0
Sept. 13		32.96	15.6	13.0
24	O	32.81	16.2	14.1
28		33.07	19.1	15.4
30		33.23	24.3	15.1
Okt. 1		32.95	26.4	15.3
25		32.84	12.0	6.2
27		32.87	9.9	5.7
30		33.00	13.7	4.0
Dec. 10		33.05	28.3	1.5
		33.01		

o Cassiop. U. C.

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 − Brm.	Th.
		+84°3′		
97 März 4	W	60″.49	28.7	+ 1°.1
10		60.49	21.8	0.7
April 3		62.46	33.1	2.2
5		59.74	25.5	3.1
7		61.76	25.1	5.6
8		60.07	23.2	7.0
14		62.00	20.8	11.0
17		62.42	18.5	9.8
27		58.05	17.4	11.0
Mai 12		61.55	24.5	3.3
17		60.44	25.6	12.8
98 März 11		59.46	22.0	− 1.5
April 5	O	62.06	20.0	+ 2.1
6		59.59	17.5	3.2
11		57.83	27.2	11.3
15		62.18	20.6	5.3
16		57.88	25.0	8.1
27	W	57.29	31.0	13.0
Mai 2		60.18	24.5	15.4
		60.49		

δ Piscium.

$0^h 43^m 20^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 − Brm.	Th.
		−41°11′		
96 Okt. 16	W	17″.74	21.9	+ 7°.1
17		18.50	29.7	8.2
24	O	17.86	21.5	5.2
25		19.29	24.0	5.6
26		18.44	24.0	3.7
Nov. 5		19.08	9.5	1.5
97 Aug. 18	W	18.47	24.6	19.0
24		19.38	23.0	12.0
Sept. 9		18.91	25.2	13.2
13		18.58	15.6	13.0
24	O	17.98	16.2	14.1
28		18.13	19.1	15.4
30		18.70	24.3	15.1
Okt. 1		18.45	26.4	15.3
25		18.35	12.0	6.3
27		18.67	9.9	5.7
30		18.37	13.7	4.0
Dec. 10		17.04	28.3	1.5
		18.59		

α Sculptoris.

$0^h 53^m 39^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 − Brm.	Th.
		−78°7′		
96 Sept. 18	W	38″.06	24.3	+17°.3
22		38.22	26.7	8.7

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 — Brm.	Th.
		α Sculptoris. Forts.		
96 Okt. 2	W	37″94	22.7	+12°7
6		36.28	18.7	9.7
7		37.73	17.9	10.9
9		37.36	20.9	12.3
16		37.97	21.9	7.7
17		40.13	29.8	8.1
18		38.30	30.3	6.6
24	O	38.38	21.5	5.2
25		40.13	24.0	5.5
26		36.13	24.0	3.8
97 Aug. 18	W	38.50	24.7	18.9
24		37.09	23.0	12.0
Sept. 9		39.10	25.3	12.8
13		37.23	15.6	13.0
24	O	36.57	16.2	14.1
28		38.14	19.2	15.4
30		39.45	24.4	15.0
Okt. 1		38.45	26.4	15.4
15		37.45	21.1	11.6
27		38.70	9.9	5.7
30		39.12	13.7	4.0
Nov. 19		38.68	12.4	9.1
Dec. 10		38.68	28.3	1.4
		38.15		
		η Ceti.		
		$1^h 3^m 24^s$		
		−58°56′		
96 Sept. 18	W	28″90	24.4	+17°1
22		27.96	26.7	8.8
Okt. 2		28.65	22.7	12.7
6		28.38	18.8	9.6
7		29.30	17.9	11.3
9		29.18	21.0	12.4
16		28.36	21.9	8.1
17		28.55	29.9	8.0
18		29.19	30.3	6.4
24	O	28.98	21.5	5.2
25		29.38	24.1	5.2
26		28.76	24.1	3.8
Nov. 13		28.71	21.1	− 2.8
97 Juni 23		29.27	18.2	+16.3
27		29.38	21.0	18.5
Aug. 18	W	28.63	24.7	18.8
Sept. 9		28.48	25.4	12.7
13		28.26	15.6	13.0
24	O	28.24	16.2	13.9
28		29.37	19.2	15.3
30		29.75	24.4	15.0
Okt. 1		29.52	26.4	15.6

Datum	Kr.		Z. D. 1897.0	760 — Brm.	Th.
97 Okt. 15	O		29″62	21.1	+11°7
Nov. 19			29.76	12.3	9.6
Dec. 10			29.47	28.3	1.4
			28.95		
			τ Piscium.		
			$1^h 5^m 59^s$		
			−18°40′		
96 Sept. 22	W		11″24	26.8	+ 8°9
Okt. 2			12.67	22.7	12.6
6			11.72	18.8	9.6
7			12.94	17.9	11.4
9			13.33	21.1	12.4
16			12.11	21.9	8.2
17			12.75	29.9	8.0
18			13.06	30.3	6.2
24	O		12.74	21.4	5.2
25			13.13	24.1	5.1
26			12.90	24.1	3.7
Nov. 13			12.86	21.1	− 2.9
97 Juni 27			13.26	21.0	+18.5
Aug. 18	W		11.98	24.7	18.7
Sept. 9			12.55	25.4	12.7
24	O		12.38	16.2	13.7
28			12.68	19.2	15.2
29			13.01	21.3	16.2
30			12.81	24.4	14.9
Okt. 1			12.70	26.4	15.7
15			12.49	21.1	11.8
Nov. 19			12.72	12.3	9.8
Dec. 10			12.62	28.3	1.4
			12.69		
			α Urs. min. O. C.		
			$1^h 21^m 19^s$		
			+40°32′		
96 Sept. 18	W	6	43″03	24.6	+16°8
22		7	42.47	33.2	8.9
Okt. 2		6	42.72	22.8	12.5
6		8	43.44	18.9	9.5
7		7	42.14	17.9	11.6
9		6	42.58	21.1	12.6
16		8	42.37	21.8	8.6
17		9	41.92	30.0	7.6
18		10	41.68	30.3	6.3
21	O	8	43.24	29.9	7.7
24		9	43.48	21.4	5.2
25		10	42.03	24.1	5.0
26		9	42.80	24.3	3.4
Nov. 5		5	43.02	9.5	2.1
13		5	42.96	21.2	− 2.9

α Urs. min. O. C. Forts.

Datum	Kr.		Z. D. 1897.0	760 — Brm.	Th.
97 Febr. 18	W	10	41″.96	11.6	+ 7°.3
19		7	41.75	11.3	2.7
25		10	42.16	10.9	12.3
März 5		11	42.48	30.8	7.3
18		8	42.28	24.7	15.5
31		11	42.29	31.5	12.3
April 1		10	42.25	39.7	15.6
6		10	42.31	26.9	7.7
8		10	42.85	24.0	10.0
9		9	42.44	21.1	9.7
27		10	42.30	17.0	15.8
30		10	42.02	26.7	19.4
Mai 19		11	42.29	26.1	17.0
20	O	7	42.94	27.5	17.8
21		9	42.62	31.2	18.0
28		10	42.83	22.5	15.2
Juni 1		8	42.88	21.6	19.7
3		10	43.55	24.5	21.1
13		9	42.74	16.6	17.0
23		8	43.27	18.2	16.5
24		8	42.73	21.5	18.8
26		8	43.27	20.5	20.3
27		6	43.13	21.0	18.8
30	W	7	42.36	23.7	22.5
Aug. 18		7	42.67	24.9	18.6
24		8	42.46	23.1	11.9
Sept. 9		10	42.32	25.5	12.6
13		3	42.69	15.6	13.1
24	O	8	42.87	16.2	14.3
28		9	42.58	19.2	15.2
29		9	43.11	21.3	16.3
30		9	42.81	24.4	14.7
Okt. 1		7	43.00	26.4	15.3
15		9	43.05	21.1	11.6
27		8	43.25	10.0	5.6
28		8	42.83	11.7	3.3
29		10	43.04	13.3	3.1
30		8	42.99	13.8	3.5
Nov. 8		8	43.12	11.5	− 1.2
19		10	42.66	12.3	+ 9.9
Dec. 6		8	42.93	18.7	0.2
10		9	43.29	28.3	1.3
98 März 11	W	8	41.82	20.5	4.7
14		10	42.02	22.9	11.8
April 6	O	8	43.16	15.9	6.4
9		6	42.33	17.6	17.0
14		9	42.45	18.7	8.9
Mai 1	W	10	42.28	22.0	17.4
2		10	41.36	24.9	19.0
Mittel			42.65		

α Urs. min. U. C.

Datum	Kr.		Z. D. 1897.0	760 — Brm.	Th.
			+43° 1′		
96 Sept. 27	W	8	42″.86	23.9	+ 16°.6
Okt. 15		4	42.81	21.0	13.8
Nov. 4	O	5	42.30	10.7	3.6
5		6	42.44	12.1	5.6
97 März 4	W	5	42.82	28.8	1.3
10		6	42.39	21.9	0.6
April 3		8	42.75	33.1	2.3
5		6	42.95	25.5	2.5
7		8	43.07	25.1	5.4
8		8	42.43	23.1	6.6
9		9	42.69	20.6	5.2
10		10	43.09	23.8	6.2
14		7	42.29	20.9	10.4
17		9	42.72	18.6	9.6
28		8	42.65	18.8	13.4
30		8	42.58	25.6	15.5
Mai 12		7	42.70	24.3	3.1
17		9	42.99	25.5	12.7
21	O	6 2	42.97	29.1	17.6 15.2
29		8	42.92	20.1	16.9
30		9	43.21	20.2	18.0
Juni 1		8	43.05	22.4	19.6
12		8	42.75	13.7	17.4
13		9	42.84	15.3	19.7
14		8	42.60	19.1	20.8
23		9	43.37	17.1	20.4
24		11	42.84	20.4	23.4
25		8	43.33	23.0	26.2
27		8	42.98	23.5	25.3
Juli 2	W	10	42.38	22.6	27.8
Aug. 18		11	42.81	22.2	28.2
19		8	42.34	25.7	28.5
21		10	42.33	23.0	21.6
26		10	42.31	22.8	19.0
30		9	42.18	22.0	23.8
Sept. 3		10	42.10	24.7	27.6
9		9	42.22	22.8	20.1
18	O	8	42.58	25.9	18.1
21		10	42.98	24.9	14.6
25		8	42.51	13.9	20.8
Okt. 11		10	42.75	18.8	10.1
12		10	42.37	22.4	12.4
13		10	42.86	20.7	10.9
14		7	42.45	20.7	14.8
24		14	42.36	11.5	8.4
Nov. 9		9	42.47	8.3	− 0.8
30		9	42.71	28.2	1.3
98 März 11	W	8	42.94	22.0	1.6

α Urs. min. U. C. Forts.

Datum	Kr.		Z. D. 1897.0	760—Brm.	Th.
98 März 14	W	10	42″66	22.4	+ 7°6
31		8	42.67	29.3	6.3
April 5	O	8	42.86	19.9	2.3
6		9	42.52	17.6	3.5
7		10	42.94	16.3	11.3
11		10	42.91	27.4	11.2
15		10	42.96	20.8	5.0
16		10	42.09	25.2	8.0
26	W	10	42.25	28.5	10.6
27		10	42.35	31.0	12.8
Mai 2		9	42.04	24.5	15.1
3		10	41.68	27.5	15.8
			42.69		

υ Persei. O. C.
$1^h 31^m 40^s$
$-0°6'$

Datum	Kr.		Z. D. 1897.0	760—Brm.	Th.
96 Sept. 18	W		24″91	24.7	+16°4
22			24.61	26.9	9.1
Okt. 2			25.02	22.9	12.4
6			24.62	19.0	9.3
7			24.90	17.9	11.9
9			24.56	21.0	12.7
16			25.23	21.6	9.0
17			24.96	30.0	7.1
18			25.53	30.3	6.4
21	O		24.43	29.9	7.7
24			23.95	21.3	5.1
25			24.70	24.1	4.9
26			24.52	24.4	3.0
Nov. 13			24.53	21.2	— 2.7
97 Juni 1			24.13	21.6	+20.0
23			24.20	18.1	17.6
24			24.27	21.5	19.4
27			24.54	21.0	19.1
Aug. 18	W		23.97	24.9	18.5
24			24.88	23.2	11.8
Sept. 9			24.49	25.5	12.5
24	O		24.50	16.2	14.7
28			24.11	19.2	15.1
29			24.35	21.3	16.3
30			24.33	24.4	14.5
Okt. 15			24.39	21.1	11.6
27			24.09	10.0	5.4
Dec. 10			24.48	28.3	1.2
			24.55		

υ Persei. U. C.
$+83°40'$

Datum	Kr.		Z. D. 1897.0	760—Brm.	Th.
97 April 3	W		49″32	33.1	+ 2°4
7			50.95	25.1	5.3
97 April 8	W		48″30	23.2	+ 6°5
10			49.79	23.8	6.1
14			53.14	21.0	10.3
17			52.80	18.7	9.5
28			51.52	18.8	13.3
Mai 12			48.05	24.3	2.9
29	O		49.31	19.9	16.9
Juni 1			50.35	22.3	19.4
98 März 11	W		49.21	22.0	— 1.9
14			49.56	22.4	+ 7.6
31			52.29	29.3	6.0
April 5	O		48.66	19.8	2.3
6			50.98	17.6	3.4
11			50.38	27.4	11.1
27	W		53.81	31.0	12.6
Mai 2			52.94	24.4	15.0
3			50.74	27.5	15.5
			50.29		

φ Persei. O. C.
$1^h 37^m 12^s$
$+1°57'$

Datum	Kr.		Z. D. 1897.0	760—Brm.	Th.
96 Sept. 18	W		23″68	24.8	+16°3
22			24.10	26.9	9.1
Okt. 2			23.13	22.9	12.4
6			24.29	19.0	9.3
7			23.41	17.9	11.8
9			23.53	21.0	12.6
16			22.98	21.6	9.1
17			23.11	30.0	7.0
18			23.81	30.4	6.4
21	O		23.57	29.8	7.7
24			24.49	21.3	5.1
25			24.07	24.2	4.8
26			23.23	24.4	3.0
Nov. 13			23.67	21.2	— 2.7
97 Juni 1			23.33	21.6	+20.0
23			23.43	18.1	17.6
24			24.01	21.5	19.5
Aug. 18	W		23.91	25.0	18.5
24			23.69	23.2	11.8
Sept. 9			23.56	25.5	12.5
24	O		23.75	16.2	14.8
28			23.43	19.2	14.9
29			23.96	21.3	16.3
30			23.88	24.4	14.5
Okt. 15			23.89	21.1	11.6
27			24.07	10.0	5.4
Dec. 6			23.50	18.7	0.2
10			23.47	28.3	1.1
			23.68		

φ Persei. U. C.

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		+81° 36′		
97 März 4	W	63″.00	28.9	+ 1°.3
10		55.31	21.9	0.6
April 3		63.21	33.1	2.5
7		62.93	25.1	5.2
8		62.69	23.2	6.5
10		61.54	23.8	6.1
14		60.71	21.0	10.1
17		63.56	18.7	9.4
28		64.87	18.8	13.3
30		61.49	25.8	15.4
Mai 12		59.96	24.3	2.9
29	O	62.41	19.9	17.0
Juni 1		61.84	22.3	19.4
12		61.65	13.7	17.3
13		59.82	15.3	19.1
14		63.69	19.1	20.0
98 März 11	W	58.76	22.1	— 1.9
14		60.32	22.4	+ 7.6
31		60.82	29.3	6.1
April 5	O	62.71	19.8	2.2
6		63.28	17.6	3.5
11		63.26	27.4	11.0
27	W	60.35	31.0	12.6
Mai 2		59.55	24.4	14.9
3		64.08	27.5	15.5
		61.74		

50 Cassiop. O. C.

$1^h\,54^m\,38^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		+23° 42′		
96 Sept. 22	W	35″.05	26.9	+ 9°.3
Okt. 9		34.92	20.9	12.2
16		34.82	21.6	9.6
17		34.60	30.0	7.8
18		35.23	30.5	6.5
21	O	34.14	29.8	7.3
26		33.43	24.2	3.3
97 Aug. 24	W	34.42	23.2	11.9
Sept. 24	O	34.90	16.2	15.1
28		34.06	19.3	14.6
29		34.55	21.4	16.0
30		34.53	24.4	14.4
Okt. 15		34.08	21.1	11.6
27		35.00	10.0	5.4
28		34.73	11.7	3.3
29		34.76	13.3	2.8
30		34.07	13.8	3.0
97 Dec. 6	O	34″.58	18.7	+ 0°.3
10		34.69	28.3	1.0
		34.56		

50 Cassiop. U. C.

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		+59° 51′		
97 April 5	W	50″.91	25.6	+ 2°.2
10		50.94	24.0	5.8
17		51.02	18.9	9.2
28		50.70	18.9	13.3
Mai 12		51.26	24.2	2.9
17		51.32	25.4	12.6
21	O	50.89	29.2	15.7
Juni 1		51.55	22.2	19.4
3		51.75	23.1	19.7
5		51.19	24.8	21.0
12		51.88	13.6	16.9
13		50.89	15.3	18.7
14		51.10	19.1	19.7
23		51.56	17.1	19.4
24		50.77	20.4	23.0
25		51.35	22.9	24.8
98 März 11	W	50.52	22.1	— 2.0
14		50.89	22.4	+ 7.3
31		50.62	29.3	6.4
April 11	O	50.90	27.5	10.7
26	W	50.09	28.7	10.7
Mai 2		50.05	24.5	14.6
3		49.53	27.5	15.4
		51.11		

Lac. μ Forn.

$2^h\,8^m\,22^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		−79° 25′		
96 Okt. 7	W	12″.45	17.9	+ 11°.5
9		10.99	20.9	11.9
16		12.14	21.6	8.0
18		11.77	30.6	6.7
21	O	13.45	29.7	7.1
26		13.91	24.1	3.2
97 Aug. 24	W	11.37	23.2	12.0
Sept. 24	O	10.90	16.2	14.6
28		12.47	19.3	14.4
29		11.91	21.5	16.0
Okt. 15		10.43	21.1	11.6
27		13.35	10.0	5.4
28		13.35	11.7	3.2
29		12.80	13.4	2.7
30		12.91	13.8	2.7
Nov. 8		14.67	11.5	— 1.2
Dec. 6		13.76	18.7	+ 0.4
		12.52		

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 — Brm.	Th.
		κ Fornacis.		
		$2^h\,17^m\,50^s$		
		−72°29′		
96 Okt. 7	W	51″48	17.9	+11°4
9		51.57	21.0	12.0
16		51.39	21.6	7.0
17		50.79	30.0	7.8
18		50.04	30.6	6.9
21	O	49.84	29.7	7.1
26		52.55	24.0	2.9
97 Sept. 24		50.06	16.2	14.1
28		50.67	19.4	14.3
Okt. 27		50.16	10.0	5.4
28		50.18	11.8	3.1
29		49.74	13.4	2.7
30		49.91	13.8	2.4
Nov. 8		50.85	11.5	− 1.2
11		49.55	11.4	6.3
19		50.29	12.3	+10.0
		50.56		
		δ Ceti.		
		$2^h\,34^m\,12^s$		
		−48°19′		
96 Okt. 16	W	44″26	21.6	+ 7°5
18		43.51	30.5	7.0
21	O	43.71	29.7	7.1
97 Sept. 28		43.50	19.5	14.2
Okt. 28		43.66	11.8	3.2
29		43.42	13.5	2.5
30		43.55	13.8	2.5
Nov. 8		43.92	11.6	− 1.2
11		42.94	11.4	6.4
19		43.52	12.4	+ 9.5
22		44.44	7.8	7.1
26		43.78	12.6	− 5.0
		43.68		
		ϑ Persei. O. C.		
		$2^h\,37^m\,10^s$		
		+ 0°34′		
96 Okt. 7	W	45″50	17.9	+11°3
16		45.59	21.6	7.6
18		46.05	30.5	7.0
21	O	46.42	29.7	7.1
97 Sept. 28		46.14	19.5	14.2
Okt. 28		46.46	11.8	3.2
29		46.06	13.5	2.4
30		46.26	13.8	2.5
Nov. 8		46.10	11.6	− 1.2
97 Nov. 11	O	46″82	11.4	− 6°4
19		46.19	12.4	+ 9.4
22		46.52	7.8	7.1
26		46.76	12.7	− 5.1
		46.23		
		ϑ Persei. U. C.		
		+82°59′		
97 April 5	W	40″35	25.8	+ 2°0
10		40.92	24.3	5.7
17		41.68	19.3	9.1
Mai 12		37.02	24.0	3.4
21	O	39.40	29.3	15.8
22		38.27	34.9	15.7
26		39.83	32.5	13.9
29		39.59	19.5	16.8
Juni 1		40.42	22.1	19.4
2		39.26	21.6	20.1
3		40.90	23.2	19.0
13		41.51	15.3	18.7
14		40.04	19.1	18.9
18		42.68	25.3	13.2
98 März 31	W	36.56	29.3	6.7
April 26		41.09	28.8	10.5
27		39.01	31.1	12.5
Mai 2		42.33	24.7	14.1
		39.89		
		η Persei. O. C.		
		$2^h\,43^m\,11^s$		
		+ 7°15′		
96 Okt. 7	W	17″23	17.9	+11°2
16		16.21	21.6	8.1
18		16.66	30.5	7.0
21	O	16.55	29.7	7.1
97 Juni 1		16.59	21.7	20.8
Sept. 28		16.34	19.5	14.1
Okt. 28		16.10	11.8	3.2
29		16.41	13.5	2.4
30		16.46	13.9	2.5
Nov. 8		16.78	11.6	− 1.2
11		16.95	11.4	6.4
19		16.68	12.4	+ 9.3
22		16.83	7.8	7.1
26		16.87	12.8	− 5.2
		16.62		
		η Persei. U. C.		
		+76°19′		
97 April 5	W	8″97	25.8	+ 2°0
10		7.65	24.4	5.7

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 − Brm.	Th.
		η Persei. U. C. Forts.		
97 April 17	W	11″15	19.3	+ 9°1
28		6.85	19.0	13.0
Mai 12		9.53	24.0	3.4
21	O	10.04	29.3	15.8
22		9.22	34.9	15.7
26		6.97	32.5	13.9
29		8.96	19.5	16.8
Juni 1		9.13	22.1	19.4
2		7.00	21.6	20.1
3		8.06	23.3	19.0
5		9.59	24.7	21.0
13		6.48	15.3	18.7
14		8.87	19.1	18.9
18		5.95	25.3	13.1
28	W	7.23	19.3	19.2
98 März 31		8.58	29.3	6.4
April 26		9.17	28.9	10.5
27		9.23	31.1	12.4
Mai 2		6.98	24.7	14.0
		8.35		
		β Fornacis. $2^h 44^m 47^s$		
		−81° 3′		
96 Okt. 7	W	7″68	17.9	+11°2
16		8.05	21.7	8.3
18		6.91	30.5	7.0
21	O	8.58	29.7	7.1
97 Sept. 28		6.35	19.5	14.1
Okt. 28		9.14	11.8	3.2
29		7.38	13.5	2.4
30		6.79	13.9	2.5
Nov. 8		8.80	11.6	− 1.2
11		6.28	11.4	6.4
19		6.64	12.4	+ 9.3
22		7.03	7.7	7.1
26		5.89	12.8	− 5.2
		7.35		
		τ Persei. O. C. $2^h 46^m 57^s$		
		+ 4° 7′		
96 Okt. 7	W	38″76	17.9	+11°1
16		38.79	21.7	8.4
18		40.19	30.5	7.0
21	O	39.22	29.8	7.0
97 Juni 1		39.60	21.7	20.8
Sept. 28		38.95	19.5	14.1
97 Okt. 28	O	39″33	11.8	+ 3°2
29		39.11	13.5	2.3
30		39.03	13.9	2.5
Nov. 8		39.70	11.6	− 1.2
19		39.29	12.4	+ 9.3
22		39.40	7.7	7.1
26		39.23	12.8	− 5.2
		39.28		
		τ Persei. U. C.		
		+79° 26′		
97 April 5	W	46″27	25.9	+ 2°0
10		46.09	24.4	5.7
17		47.74	19.3	9.1
28		46.54	19.0	12.9
Mai 12		46.72	24.0	3.4
22	O	45.41	34.9	15.6
29		45.33	19.5	16.7
Juni 1		46.39	22.1	19.4
3		43.85	23.3	19.0
5		49.02	24.7	20.7
13		47.68	15.3	18.6
14		46.78	19.1	19.0
18		47.38	25.3	13.1
28	W	45.60	19.3	19.2
98 März 31		44.34	29.4	5.9
April 26		46.19	28.9	10.4
27		45.69	31.1	12.4
Mai 2		42.67	24.7	14.0
		46.34		
		γ Persei. O. C. $2^h 57^m 20^s$		
		+ 4° 53′		
96 Okt. 7	W	23″21	17.9	+11°1
16		22.87	21.8	8.8
18		23.77	30.6	7.0
21	O	22.92	30.0	6.9
97 Juni 1		22.99	21.7	21.3
Sept. 28		22.80	19.6	14.0
Okt. 28		23.01	11.9	3.2
29		22.67	13.6	2.3
30		22.76	13.9	2.4
Nov. 8		23.34	11.7	− 1.2
11		22.70	11.5	6.5
19		22.88	12.4	+ 9.3
22		23.00	7.7	7.1
26		22.52	12.9	− 5.2
		22.97		

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 — Brm.	Th.
γ Persei. U. C.				
		+78°41′		
97 April 5	W	0″.87	25.9	+ 1°.9
10		1.72	24.5	5.7
17		4.79	19.4	9.1
28		2.83	19.1	12.8
Mai 12		2.27	24.0	3.3
21	O	3.36	29.3	15.8
22		4.01	34.9	15.5
29		2.57	19.5	16.7
30		1.96	20.3	17.7
Juni 1		2.26	22.0	19.4
3		2.83	23.4	19.0
5		3.11	24.7	20.2
13		2.88	15.3	18.5
14		2.84	19.1	19.0
18	W	2.98	25.4	12.9
28		2.41	19.2	19.2
98 März 31		4.10	29.5	4.6
April 26		1.78	28.9	10.4
27		2.95	31.1	12.4
Mai 2		1.29	24.7	13.9
		2.81		
ι Persei. O. C.				
3ʰ 1ᵐ 38ˢ		+ 1°0′		
96 Okt. 7	W	22″.76	17.9	+11°.2
16		22.77	21.8	8.3
18		23.68	30.6	7.1
21	O	23.05	30.0	7.0
97 Sept. 28		22.75	19.6	14.0
Okt. 28		23.51	11.9	3.2
29		23.05	13.6	2.2
30		23.44	13.9	2.3
Nov. 8		23.29	11.7	− 1.2
11		23.08	11.5	6.5
19		23.50	12.4	+ 9.2
22		23.78	7.7	7.1
26		23.13	12.9	− 5.2
Dec. 31	W	23.20	27.0	+ 1.3
		23.22		
ι Persei. U. C.				
		+82°33′		
97 April 5	W	57″.33	26.0	+ 1°.8
10		64.15	24.5	5.7
17		63.71	19.4	9.1
28		62.93	19.1	12.8
Mai 12		64.49	24.0	3.3
21	O	64.47	29.4	15.8
97 Mai 22	O	64″.91	34.9	+15°.5
26		61.93	32.6	13.8
29		61.84	19.5	16.7
30		61.94	20.3	17.7
Juni 1		62.50	22.0	19.5
2		61.60	21.6	20.1
3		67.65	23.4	19.0
5		61.65	24.7	20.4
13		58.39	15.3	18.5
14		61.98	19.1	18.9
18		64.52	25.4	12.7
98 März 31	W	61.16	29.6	4.3
April 26		64.82	29.0	10.3
27		63.88	31.1	12.4
Mai 2		61.84	24.7	13.8
		62.61		
12 Eridani.				
3ʰ 7ᵐ 42ˢ		−77°36′		
96 Okt. 7	W	22″.70	17.9	+11°.2
16		21.47	21.9	7.5
18		24.11	30.6	7.1
21	O	22.10	30.1	7.1
97 Sept. 28		23.40	19.7	14.0
Okt. 28		23.69	11.9	3.1
29		22.26	13.6	2.2
30		23.69	14.0	2.2
Nov. 11		22.23	11.5	− 6.5
19		21.85	12.4	+ 9.1
22		23.04	7.8	7.2
26		23.24	13.0	− 5.2
Dec. 31	W	22.28	27.0	+ 1.3
		22.77		
α Persei. O. C.				
3ʰ 16ᵐ 58ˢ		+ 1°16′		
96 Okt. 7	W	51″.62	17.9	+11°.1
16		51.46	21.9	7.0
18		53.10	30.7	7.2
28	O	52.66	29.0	12.5
97 Juni 1		52.83	21.7	21.8
Okt. 28		52.63	11.9	3.1
29		52.18	13.6	2.2
30		52.13	14.0	2.0
Nov. 11		52.23	11.6	− 6.5
19		52.78	12.4	+ 9.1
22		52.83	7.8	7.2
26		52.50	13.1	− 5.3
Dec. 31	W	52.45	27.0	+ 1.2
		52.41		

α Persei. U. C.

Datum			Kr.	Z. D. 1897.0	760− Brm.	Th.
				+82°17′		
97	April	5	W	29″.76	26.1	+ 1°.7
		17		35.70	19.5	9.1
		28		33.22	19.1	12.8
	Mai	12		33.40	23.9	3.2
		21	O	35.00	29.4	15.8
		22		35.12	34.9	15.4
		29		29.80	19.4	16.8
		30		32.10	20.3	17.6
	Juni	1		30.37	22.0	19.4
		3		33.16	23.5	18.7
		5		31.89	24.7	20.5
		13		29.11	15.3	18.5
		14		32.15	19.1	18.6
		18		33.30	25.4	12.5
		22		32.08	16.9	15.1
		24		34.95	20.2	22.6
		28	W	31.08	19.0	19.2
98	März	31		35.11	29.8	4.6
	April	26		31.48	29.1	10.1
		27		33.99	31.2	12.5
	Mai	2		34.35	24.8	13.7
				32.63		

ε Eridani.
$3^h 28^m 5^s$

Datum			Kr.	Z. D. 1897.0	760− Brm.	Th.
				−58°1′		
96	Okt.	7	W	11″.98	17.9	+10°.8
		18		11.12	30.7	7.0
		28	O	12.38	29.1	12.5
97	Okt.	28		12.12	11.9	3.0
		29		12.99	13.6	2.2
		30		12.19	14.0	2.0
	Nov.	11		11.98	11.6	− 6.6
		19		12.79	12.5	+ 9.2
		22		12.58	7.8	6.8
		26		12.37	13.1	− 5.3
	Dec.	31	W	12.45	26.9	+ 1.2
				12.26		

δ Persei. O. C.
$3^h 35^m 35^s$

Datum			Kr.	Z. D. 1897.0	760− Brm.	Th.
				− 0°45′		
96	Okt.	7	W	18″.41	17.9	+10°.7
		18		18.53	30.7	6.8
		28	O	17.59	29.1	12.5
97	Juni	1		17.97	21.7	21.9
	Okt.	28		17.98	11.9	3.0
		29		18.64	13.6	2.2
		30		18.55	14.0	2.0
97	Nov.	11	O	18″.39	11.7	− 6°.6
		19		18.20	12.5	+ 9.2
		22		17.83	7.9	6.3
		26		18.25	12.3	− 5.3
	Dec.	31	W	18.61	26.9	+ 1.2
				18.24		

δ Persei. U. C.

Datum			Kr.	Z. D. 1897.0	760− Brm.	Th.
				+84°19′		
97	April	28	W	46″.13	19.2	+12°.6
	Mai	12		43.54	23.9	3.2
		21	O	47.56	29.4	15.6
		22		46.89	35.1	15.1
		30		44.65	20.3	17.5
	Juni	1		44.51	22.0	19.3
		3		44.96	23.5	19.1
		13		37.96	15.3	18.6
		14		42.99	19.3	18.4
		18		45.59	25.5	12.2
		24		46.72	20.3	22.4
		28	W	41.67	19.0	19.1
98	März	31		45.86	29.7	5.3
	April	26		47.56	29.2	10.0
		27		46.51	31.2	12.0
				44.54		

5 H. Cam. O. C.
$3^h 39^m 29^s$

Datum			Kr.	Z. D. 1897.0	760− Brm.	Th.
				+22°48′		
96	Okt.	18	W	5″.59	30.7	+ 6°.6
		28	O	4.87	29.2	12.4
97	Okt.	28		5.72	11.9	3.0
		29		5.22	13.6	2.1
		30		5.44	14.0	2.0
	Nov.	11		5.98	11.7	− 6.6
		19		6.17	12.5	+ 9.2
		22		5.65	7.9	6.0
		26		5.78	13.2	− 5.3
	Dec.	31	W	4.75	26.9	+ 1.2
				5.52		

5 H. Cam. U. C.

Datum			Kr.	Z. D. 1897.0	760− Brm.	Th.
				+60°46′		
97	Mai	21	O	21″.26	29.4	+15°.5
		22		20.13	35.1	15.1
		26		20.49	32.6	13.5
		29		19.49	19.4	16.6
		30		20.59	20.3	17.5
	Juni	5		20.09	24.7	20.5
		13		19.47	15.3	18.6
		14		19.15	19.3	18.4

5 H. Cam. U. C. Forts.

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 — Brm.	Th.
97 Juni 18	O	20″12	25.6	+12°1
22		21.01	16.9	15.0
24		20.86	20.3	22.4
28	W	20.05	19.0	19.1
98 März 31		19.56	29.7	5.4
April 26		19.39	29.2	10.0
27		19.81	31.3	12.0
		20.18		

γ Eridani.
$3^h 53^m 13^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 — Brm.	Th.
		−62°0′		
96 Okt. 18	W	52″77	30.7	+ 6°2
28	O	52.17	29.3	12.2
97 Okt. 27		53.03	10.2	4.1
28		52.85	11.9	2.9
29		53.60	13.6	1.9
30		53.35	14.1	1.8
Nov. 11		52.72	11.7	— 6,6
22		53.11	7.9	+ 5.9
Dec. 31	W	52.81	26.9	1.2
		52.94		

X Eridani.
$4^h 14^m 0^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 — Brm.	Th.
		−82°15′		
96 Okt. 18	W	46″63	30.8	+ 6°1
97 Okt. 27	O	46.94	16.3	3.9
28		47.18	11.9	2.8
30		48.98	14.1	1.6
Nov. 11		48.42	11.8	— 6.6
22		49.10	7.9	+ 5.9
Dec. 6		51.08	18.5	— 0.5
31	W	56.12	26.9	+ 0.9
98 Jan. 8		45.02	18.4	1.2
		48.77		

υ′ Eridani.
$4^h 29^m 28^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 — Brm.	Th.
		−78°11′		
96 Okt. 18	W	14″52	30.8	+ 5°3
28	O	11.98	29.7	12.1
97 Okt. 27		18.27	10.4	3.2
28		16.78	11.0	2.8
Nov. 11		14.81	11.9	— 6.8
Dec. 6		19.26	18.5	— 0.5
98 Jan. 8	W	18.55	18.2	+ 0.8
		16.31		

ν Eridani.
$4^h 31^m 10^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 — Brm.	Th.
		−51°46′		
97 Okt. 27	O	33″25	10.4	+ 3°2
28		34.30	11.9	2.8
Nov. 22		33.77	8.0	5.9
Dec. 6		34.52	18.5	— 0.5
98 Jan. 8	W	34.73	18.2	+ 0.8
März 1	O	33.68	24.3	4.0
4	W	34.83	27.7	3.9
11		34.18	21.3	4.0
		34.15		

54 Eridani.
$4^h 35^m 56^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 — Brm.	Th.
		−68°4′		
97 Okt. 27	O	56″39	10.5	+ 2°9
28		56.55	11.9	2.7
Nov. 22		57.03	8.0	6.0
Dec. 6		56.29	18.5	— 0.5
98 Jan. 8	W	56.34	18.1	+ 0.9
März 1	O	55.68	24.3	3.9
4	W	56.15	27.7	3.7
		56.35		

9 Camelop. O. C.
$4^h 43^m 48^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 — Brm.	Th.
		+17°57′		
97 Okt. 27	O	15″34	10.6	+ 2°9
28		14.83	11.9	2.7
Nov. 22		15.31	8.0	6.1
Dec. 6		15.07	18.5	— 0.4
98 Jan. 8	W	15.45	18.1	+ 0.9
März 1	O	15.33	24.3	3.7
4	W	15.32	27.6	3.3
11		15.05	21.3	3.7
14		15.34	23.6	11.6
		15.23		

9 Camelop. U. C.

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 — Brm.	Th.
		+65°37′		
97 April 30	W	9″64	27.5	+13°9
Mai 22	O	9.83	35.3	14.3
26		10.09	32.9	13.1
Juni 3		10.35	23.7	19.0
11		9.36	14.5	13.5
13		9.26	15.5	17.9
23		10.14	17.0	18.7
24		10.45	20.4	21.9

9 Camelop. U. C. Forts.

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
97 Juni 25	O	10".58	22.6	+23°7
28	W	9.89	18.9	19.2
98 April 27		8.68	31.3	11.0
		9.96		

β Eridani.
$5^h\ 2^m\ 47^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		−53°25′		
97 Okt. 27	O	57".90	10.7	+ 3°1
Nov. 22		58.09	8.2	6.3
Dec. 10		58.07	29.5	0.2
98 Jan. 8	W	58.16	18.1	1.0
März 1	O	57.74	24.4	3.5
4	W	57.21	27.5	2.4
11		57.68	21.3	3.3
14		57.96	23.0	11.1
April 6	O	56.45	16.4	9.9
		57.69		

α Aurigae. O. C.
$5^h\ 9^m\ 5^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		− 2°19′		
96 Aug. 18	O	12".33	21.0	+12°9
97 Okt. 27		12.55	10.7	3.0
Nov. 22		12.55	8.2	6.3
Dec. 10		12.62	29.5	− 0.1
98 Jan. 8	W	12.68	18.1	+ 1.0
März 1	O	12.36	24.4	3.5
4	W	12.29	27.5	2.3
11		12.07	21.3	3.1
14		12.39	23.0	11.0
23		12.18	30.0	6.0
April 6	O	13.04	16.5	9.8
		12.31		

α Aurigae. U. C.

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		+85°53′		
96 Sept. 6	O	34".55	25.3	+17°3
97 April 28	W	37.57	19.3	11.5
30		45.04	27.6	13.9
Mai 12		35.07	24.2	3.1
22	O	41.79	35.3	14.8
30		38.42	20.8	16.3
Juni 5		38.26	24.6	20.7
11		33.68	14.5	13.2
13		40.55	15.6	17.8
14		38.10	20.0	17.6
23		45.67	17.0	18.7
24		39.71	20.4	22.2
97 Juni 25	O	34".12	22.6	+23°7
Aug. 19	W	42.58	26.8	24.5
98 April 27		38.35	31.3	10.6
		39.05		

τ Orionis.
$5^h\ 12^m\ 36^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		−55°10′		
97 Okt. 27	O	7".90	10.7	+ 2°9
Nov. 22		8.16	8.2	6.3
Dec. 10		7.81	29.6	− 0.3
98 Jan. 8	W	7.68	18.1	+ 1.0
März 4		7.04	27.5	2.2
11		7.02	21.3	3.0
14		7.46	23.0	10.9
		7.58		

γ Orionis.
$5^h\ 19^m\ 36^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		−41°57′		
96 Aug. 18	O	25".22	21.0	+13°3
97 Okt. 27		24.48	10.7	2.8
Nov. 22		24.12	8.3	6.3
Dec. 10		23.59	29.7	− 0.5
98 Jan. 8	W	23.97	18.2	+ 1.0
März 4		23.31	27.5	2.0
11		24.35	21.3	3.0
14		23.34	23.0	10.6
23		23.82	30.0	5.7
April 6	O	23.52	16.6	9.5
		23.98		

β Leporis.
$5^h\ 23^m\ 50^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		−69°3′		
97 Okt. 27	O	16".99	10.7	+ 2°6
Nov. 22		17.17	8.3	6.3
Dec. 10		16.61	29.7	− 0.6
98 Jan. 8	W	16.41	18.2	+ 1.0
März 1	O	17.56	24.4	3.2
4	W	16.41	27.5	1.9
11		17.10	21.3	2.9
14		17.26	23.0	10.4
		16.94		

α Columbae.
$5^h\ 35^m\ 55^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		−82°20′		
97 Okt. 27	O	30".86	10.8	+ 2°4
Nov. 22		30.84	8.4	6.3
Dec. 10		33.04	29.9	− 0.8

α Columbae. Forts.

Datum			Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
98	Jan.	8	W	33″94	18.3	+ 1°0
	März	1	O	32.83	24.5	3.0
		4	W	33.41	27.5	1.8
		11		28.94	21.3	2.7
		14		32.81	23.0	10.2
				32.08		

κ Orionis.
$5^h 42^m 52^s$

Datum			Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
				−57°55′		
96	Aug.	18	O	10″16	21.0	+13°8
97	Nov.	22		10.07	8.4	6.4
98	März	1		10.49	24.5	3.2
		4	W	8.30	27.5	1.7
		11		9.56	21.3	2.6
		14		8.59	23.0	10.1
		23		9.54	30.1	5.5
	April	6	O	8.25	16.9	9.0
				9.37		

β Aurigae. O. C.
$5^h 51^m 58^s$

Datum			Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
				— 3°16′		
96	Aug.	18	O	34″86	21.0	+13°6
97	Okt.	27		35.33	10.8	2.5
	Nov.	22		34.65	8.5	6.3
		26		35.21	13.8	— 5.3
	Dec.	6		35.02	18.4	0.5
		10		34.68	30.3	0.8
98	Jan.	8	W	34.76	18.3	+ 1.0
	März	1	O	34.52	24.5	3.1
		11	W	34.95	21.3	2.4
		14		34.99	23.0	9.9
		21		34.81	22.9	5.3
		23		34.78	30.1	5.2
	April	6	O	34.14	17.0	9.0
				34.82		

β Aurigae. U. C.

Datum			Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
				+86°50′		
96	Sept.	6	O	54″02	24.8	+16°7
97	April	28	W	63.00	19.3	10.5
		30		61.39	27.0	13.8
	Mai	12		64.49	24.1	3.1
		22	O	69.13	35.3	14.7
	Juni	3		64.18	24.0	18.5
		5		67.82	24.7	20.8
		11		59.41	14.5	12.9
		13		58.45	15.8	17.4
97	Juni	14	O	61″16	20.1	+16°5
		23		56.40	17.0	18.7
		24		59.76	20.5	20.9
		25		56.71	22.6	23.7
	Aug.	17	W	67.37	19.3	19.8
		18		53.74	22.9	22.6
		19		57.00	26.8	23.4
		30		63.06	22.9	19.9
	Sept.	2		65.95	25.1	22.6
		5		64.04	16.4	13.2
		9		71.76	24.5	16.8
				61.95		

ν Orionis.
$6^h 1^m 41^s$

Datum			Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
				−33°25′		
97	Nov.	26	O	56″95	14.0	— 5°3
	Dec.	6		56.51	18.4	0.7
		10		56.00	30.5	0.9
98	Jan.	8	W	56.54	18.3	+ 1.0
	März	1	O	56.68	24.6	2.9
		11	W	56.84	21.3	2.3
		14		56.28	23.0	9.8
				56.54		

2 Lyncis. O. C.
$6^h 10^m 32^s$

Datum			Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
				+10°50′		
97	Nov.	26	O	4″60	14.2	— 5°4
	Dec.	6		4.87	18.4	0.8
		10		4.91	30.6	1.1
98	Jan.	8	W	4.97	18.3	+ 1.0
	Febr.	5		4.53	33.5	— 1.3
	März	1	O	5.13	24.7	+ 2.7
		11	W	4.88	21.3	2.2
		14		5.17	22.9	9.8
		21		4.46	22.9	4.7
		23		4.77	30.1	4.7
	April	6	O	5.53	17.0	8.8
				4.90		

2 Lyncis. U. C.

Datum			Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
				+72°44′		
96	Sept.	6	O	21″68	24.6	+16°5
97	April	30	W	20.81	28.0	13.7
	Juni	3	O	20.94	24.1	18.3
		5		21.28	24.7	21.1
		13		19.49	15.8	17.2
		14		20.86	20.2	15.8
		23		20.29	17.0	18.7

Datum			Kr.	Z. D. 1897.0	760—Brm.	Th.
				2 Lyncis. U. C. Forts.		
97	Juni	24	O	19″54	20.5	+20°4
		25		21.01	22.7	23.5
	Aug.	17	W	19.90	19.4	19.2
		18		19.97	22.9	22.3
		19		19.70	26.8	23.1
		26		20.27	22.2	17.3
		30		19.72	22.8	19.9
	Sept.	2		20.88	25.1	22.2
		9		19.31	24.5	16.3
		18	O	20.94	27.6	15.1
		21		19.94	25.9	12.7
		24		20.77	16.4	18.8
				20.39		
				ζ Can. maj. 6h 16m 22s		
				−78° 13′		
97	Nov.	26	O	49″02	14.2	− 5°4
	Dec.	6		53.09	18.3	0.9
		10		51.89	30.7	1.2
98	Febr.	5	W	51.85	33.4	1.4
	März	1	O	49.14	24.7	+ 2.6
		11	W	52.14	21.3	2.2
		14		49.43	22.8	9.8
		21		50.27	22.9	4.5
		23		51.90	30.1	4.6
				50.97		
				ψ′ Aurigae. O. C. 6h 16m 58s		
				+ 1° 7′		
97	Nov.	26	O	37″06	14.3	− 5°4
	Dec.	6		37.47	18.3	0.9
		10		37.65	30.8	1.2
98	Febr.	5	W	37.29	33.4	1.4
		20	O	37.64	32.1	+ 0.5
	März	1		37.67	24.7	2.6
		11	W	37.17	21.3	2.2
		12		36.89	23.9	4.3
		14		37.37	23.8	9.8
		21		36.93	22.9	4.5
		23		37.31	30.1	4.6
				37.31		
				ψ′ Aurigae. U. C.		
				+82° 26′		
96	Sept.	6	O	46″27	24.5	+16°4
		19	W	51.46	28.2	21.1
97	April	30		47.52	28.0	13.7
97	Juni	3	O	48″09	24.1	+18°2
		5		49.94	24.7	21.2
		13		48.52	15.9	17.1
		14		54.71	20.3	15.7
		23		46.36	17.0	18.7
		24		45.75	20.5	20.5
		25		50.09	22.7	23.5
	Aug.	17	W	48.92	19.4	19.1
		18		48.26	22.9	22.2
		19		48.73	26.8	23.0
		30		50.21	22.8	19.9
	Sept.	2		46.86	25.1	22.2
		9		52.05	24.5	16.1
		18	O	49.80	27.6	14.9
		21		49.07	25.9	12.6
				49.03		
				γ Geminorum. 6h 31m 46s		
				−31° 43′		
97	Nov.	26	O	33″09	14.5	− 6°6
	Dec.	6		33.37	18.2	0.9
		10		32.51	31.0	1.5
98	Febr.	5	W	32.36	33.2	1.6
		20	O	33.14	32.1	+ 0.3
	März	1		32.81	24.8	2.0
		11	W	32.94	21.3	1.9
		12		32.87	23.9	4.3
		19		33.46	25.0	11.2
		21		32.74	22.9	3.9
		23		32.91	30.2	4.4
	April	6	O	32.45	17.0	8.5
				32.89		
				ε Geminorum. 6h 37m 36s		
				−22° 58′		
97	Nov.	22	O	48″39	8.8	+ 6°4
	Dec.	6		48.16	18.2	− 0.9
		10		47.56	31.2	1.7
98	Febr.	5	W	48.58	33.1	1.6
		20	O	47.89	32.1	+ 0.1
	März	1		47.80	24.8	1.8
		12	W	48.16	23.9	4.2
		19		47.99	25.0	11.2
		21		48.21	22.9	3.9
		23		48.02	30.2	4.3
	April	6	O	47.33	17.0	8.3
				48.00		

24 H. Cam. O. C.
$6^h\,45^m\,3^s$

Datum			Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
				+28°53′		
97	Nov.	22	O	41″67	8.8	+ 6°4
	Dec.	6		41.60	18.1	— 0.9
		10		41.38	31.3	1.9
98	Febr.	5	W	42.04	33.0	1.6
		20	O	41.36	32.1	+ 0.1
	März	1		40.94	24.9	1.9
		19	W	42.01	25.9	11.1
		21		41.86	22.9	4.1
		23		41.81	30.2	4.0
	April	6	O	41.49	17.0	8.1
				41.62		

24 H. Cam. U. C.

Datum			Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
				+54°40′		
96	Aug.	16	O	43″87	22.2	+15°0
	Sept.	19	W	43.88	28.4	20.7
	Okt.	2		44.11	21.4	15.5
		3		42.94	22.7	15.5
97	Juni	5	O	43.61	24.9	20.9
		13		42.89	15.9	16.7
		25		43.86	22.8	23.4
	Aug.	17	W	43.07	19.4	18.9
		18		43.78	22.8	21.5
		19		44.24	26.8	22.7
		24		43.62	23.0	14.8
		30		43.24	22.8	19.8
	Sept.	2		43.60	25.1	21.9
		9		43.18	24.5	15.3
		18	O	43.03	27.5	14.3
		21		42.97	25.9	12.3
		24		43.60	16.2	19.3
		27		43.63	17.0	19.6
		28		43.38	18.6	18.8
		29		43.58	21.2	18.3
		30		43.53	23.6	19.2
	Okt.	1		43.29	26.1	19.0
				43.51		

15 Lyncis. O. C.
$6^h\,48^m\,22^s$

Datum			Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
				+10°20′		
97	Nov.	22	O	39″06	8.8	+ 6°4
	Dec.	6		39.17	18.1	— 0.9
		10		39.39	31.3	2.0
98	Febr.	5	W	38.93	32.9	1.6
		20	O	39.26	32.1	+ 0.1
	März	1		38.92	24.9	1.9
98	März	19	W	39″40	25.0	+11°1
		21		39.51	22.9	4.0
		23		39.52	30.2	4.0
	April	6	O	40.18	17.1	8.0
				39.33		

15 Lyncis. U. C.

Datum			Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
				+73°13′		
96	Sept.	19	W	46″82	28.4	+20°7
	Okt.	2		46.73	21.4	15.4
97	Juni	5	O	46.97	24.9	21.0
		13		45.05	16.0	16.6
		25		44.69	22.8	23.4
	Aug.	17	W	46.92	19.4	18.9
		18		45.78	22.8	21.5
		19		45.94	26.9	22.7
		24		44.89	23.0	14.8
		30		46.50	22.7	19.8
	Sept.	2		46.54	21.1	21.9
		9		45.75	24.5	15.3
		18	O	44.68	27.5	14.2
		21		44.19	25.9	12.3
		24		47.51	16.2	19.3
		27		45.91	17.0	19.6
		28		45.24	18.6	18.9
		29		46.07	21.2	18.4
		30		46.15	23.6	19.2
	Okt.	1		46.71	26.1	19.0
				45.95		

51 H. Cephei. O. C.
$6^h\,52^m\,16^s$

Datum			Kr.		Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
					+38°59′		
97	Nov.	22	O	3	47″30	8.9	+ 6°4
	Dec.	6		1	47.11	18.1	— 0.9
		10		1	46.83	31.3	2.2
98	Febr.	5	W	2	47.05	32.8	1.7
		20	O	2	46.63	32.1	0.0
	März	1		3	46.68	24.9	+ 2.0
		19	W	2	47.04	25.0	11.1
		21		2	46.48	22.9	4.0
		23		3	46.86	30.2	3.9
	April	6	O	2	47.44	17.1	7.9
					46.94		

51 H. Cephei. U. C.

Datum			Kr.		Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
					+44°34′		
96	Sept.	18	W	1	39″32	22.0	+21°9
		19		1	38.66	28.4	20.6
	Okt.	2		1	38.81	21.4	15.4

51 H. Cephei. U. C. Forts.

Datum			Kr.		Z. D. 1897.0	760 — Brm.	Th.
97	Juni	13	O	2	38″98	16.0	+16°6
		25		2	38.49	22.8	23.4
	Aug.	17	W	1	38.60	19.4	18.8
		18		1	38.96	22.8	21.5
		19		1	38.85	26.9	22.7
		24		2	39.08	23.0	14.9
		30		1	39.01	22.7	19.8
	Sept.	2		2	39.39	25.1	21.8
		9		2	38.71	24.5	15.2
		18	O	1	38.55	27.4	14.1
		21		2	38.38	25.9	12.3
		24		3	38.82	16.2	19.3
		27		3	38.71	17.0	19.6
		28		2	38.79	18.6	19.0
		29		3	38.43	21.2	18.4
		30		3	38.92	23.6	19.1
	Okt.	1		3	38.69	26.1	18.9
					38.81		

ε Can. maj.
$6^h\ 54^m\ 35^s$

Datum			Kr.	Z. D. 1897.0	760 — Brm.	Th.
				−77°2′		
97	Dec.	6	O	41″62	18.0	− 0°9
		10		42.75	31.4	2.3
98	Febr.	5	W	44.05	32.8	1.7
	März	1	O	41.90	24.9	+ 2.1
		19	W	40.34	25.1	11.1
		21		41.85	22.9	3.9
		23		42.00	30.3	3.8
	April	6	O	41.85	17.1	7.8
				42.05		

δ Can. maj.
$7^h\ 4^m\ 12^s$

Datum			Kr.	Z. D. 1897.0	760 — Brm.	Th.
				−74°26′		
96	Sept.	14	O	33″44	20.1	+15°4
97	Nov.	22		35.50	9.0	6.3
	Dec.	6		33.28	18.0	− 0.9
		10		35.33	31.5	2.5
98	Febr.	5	W	35.03	32.7	1.7
		9	O	34.13	22.6	+ 0.4
	März	1		34.13	24.9	2.2
		19	W	34.69	25.1	11.1
		21		35.31	22.9	3.8
		23		35.83	30.3	3.7
	April	6	O	32.38	17.2	7.5
				34.47		

ι Geminorum.
$7^h\ 19^m\ 20^s$

Datum			Kr.	Z. D. 1897.0	760 — Brm.	Th.
				−20°12′		
97	Nov.	22	O	37″38	9.1	+ 6°1
	Dec.	6		36.89	18.0	− 0.9
		10		36.93	31.7	2.8
98	Febr.	9		37.16	22.5	+ 0.3
		20		36.65	32.2	− 0.3
	März	1		37.59	25.0	+ 2.3
		19	W	37.56	25.1	11.1
		21		37.37	22.9	3.5
		23		37.74	30.4	3.6
	April	6	O	36.60	17.4	6.9
				37.18		

Gr. 1308. O. C.
$7^h\ 20^m\ 10^s$

Datum			Kr.	Z. D. 1897.0	760 — Brm.	Th.
				+20°27′		
97	Nov.	22	O	45″41	9.2	+ 6°1
	Dec.	6		45.77	18.0	− 0.9
		10		46.11	31.8	2.8
98	Febr.	9		45.66	22.5	+ 0.3
		20		45.68	32.2	− 0.3
	März	1		45.67	25.0	+ 2.3
		19	W	45.48	25.1	11.1
		21		45.57	22.9	3.5
		23		45.19	30.4	3.6
				45.62		

Gr. 1308 U. C.

Datum			Kr.	Z. D. 1897.0	760 — Brm.	Th.
				+63°6′		
96	Sept.	10	O	40″98	26.3	+16°9
		18	W	38.74	21.9	21.8
		19		39.44	28.5	20.4
		24		40.04	25.2	10.1
	Okt.	2		39.44	21.3	15.3
		9		39.82	19.8	16.1
97	Aug.	17		40.34	19.4	18.7
		18		39.71	22.9	21.2
		19		39.49	26.9	22.4
		22		40.05	26.2	19.0
		24		39.60	23.0	15.0
	Sept.	18	O	39.57	27.4	13.8
		21		39.93	25.7	12.3
		24		40.25	16.1	18.8
		27		40.04	17.0	19.4
		28		40.09	18.5	19.0
		29		41.04	21.1	18.5
		30		39.55	23.6	18.7
	Okt.	1		39.56	26.0	18.8
		2		40.14	24.3	16.7
				39.88		

f Puppis.
$7^h 33^m 33^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 − Brm.	Th.
		−82°56′		
97 Nov. 22	O	59″11	9.3	+ 5°1
Dec. 6		62.58	17.9	− 0.9
10		65.98	32.0	2.9
98 Jan. 8	W	59.87	18.6	+ 0.7
Febr. 18	O	60.95	32.5	0.5
März 1		61.14	25.0	2.4
19	W	59.32	25.1	11.1
21		61.65	22.9	3.5
23		62.13	30.5	3.6
		61.41		

τ Navis.
$7^h 39^m 40^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 − Brm.	Th.
		−76°55′		
97 Nov. 22	O	18″23	9.4	+ 4°6
Dec. 6		20.32	17.9	− 0.9
10		18.56	32.1	2.8
98 Jan. 8	W	17.42	18.6	+ 0.7
Febr. 9	O	18.84	22.4	0.2
18		19.51	32.5	0.5
März 1		19.74	25.1	2.4
19	W	16.31	25.1	11.1
21		18.34	22.9	3.5
23		19.15	30.6	3.6
April 6	O	19.07	17.4	5.8
		18.68		

26 Lyncis. O. C.
$7^h 47^m 13^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 − Brm.	Th.
		− 0°22′		
97 April 8	W	53″64	24.1	+ 10°5
Nov. 22	O	54.11	9.5	4.2
Dec. 6		53.45	17.9	− 0.8
10		53.75	32.2	2.7
98 Jan. 8	W	54.28	18.6	+ 0.6
Febr. 9	O	53.59	22.4	0.3
18		53.97	32.5	0.6
März 19	W	54.11	25.1	11.1
21		54.05	22.9	3.4
23		54.32	30.7	3.6
April 6	O	53.82	17.4	5.7
		53.92		

26 Lyncis. U. C.

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 − Brm.	Th.
		+83°57′		
96 Aug. 16	O	19″35	21.9	+ 14°6
20		21.05	25.0	17.2
96 Aug. 25	O	20″59	23.5	+ 18°2
Sept. 18	W	24.29	21.9	21.5
19		22.01	28.7	20.0
24		19.56	25.1	9.9
Okt. 9		20.02	20.0	15.7
97 Aug. 17		19.32	19.5	18.6
18		24.44	22.9	21.0
19		24.66	26.9	21.7
22		25.06	26.3	18.8
24		19.74	23.0	13.7
Sept. 2		25.04	25.1	20.9
5		24.61	16.7	11.7
18	O	17.18	27.4	13.2
21		21.33	25.7	11.2
24		26.35	16.1	18.7
27		20.95	16.9	19.2
28		21.99	18.5	19.2
Okt. 1		21.42	26.0	18.5
		21.94		

χ Geminorum.
$7^h 57^m 12^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 − Brm.	Th.
		−20°7′		
97 April 8	W	47″95	24.0	+ 10°2
Nov. 22	O	47.96	9.6	4.5
Dec. 6		47.48	17.9	− 0.8
10		47.53	32.4	2.8
98 Jan. 8	W	47.93	18.7	+ 0.6
Febr. 9	O	47.32	22.3	0.2
18		47.81	32.5	0.6
März 19	W	47.57	25.1	11.0
21		47.35	22.8	3.2
April 6	O	47.97	17.3	5.6
9		47.11	20.2	17.1
11		47.72	27.3	13.7
		47.65		

27 Lyncis. O. C.
$8^h 0^m 43^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 − Brm.	Th.
		+ 3°35′		
97 April 8	W	24″65	24.0	+ 10°1
17		24.47	17.2	12.0
Nov. 22	O	24.21	9.6	4.7
Dec. 6		25.02	17.9	− 0.8
10		24.63	32.5	2.8
98 Jan. 8	W	24.80	18.7	+ 0.5
Febr. 9	O	24.41	22.3	0.2
18		25.17	32.5	0.6
März 3		24.67	27.9	1.8
5	W	24.86	30.7	5.2

27 Lyncis. O. C. Forts.

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
98 März 19	W	25″.09	25.1	+11°.0
21		24.67	22.7	3.2
31		24.88	29.1	10.7
April 6	O	24.59	17.3	5.5
7		24.79	16.4	12.0
9		24.81	20.2	17.0
11		24.91	27.2	13.7
		24.75		

27 Lyncis. U. C.

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		+79°58′		
96 Aug. 16	O	0″.78	21.9	+14°.3
20		2.82	25.0	17.1
25		1.52	23.5	18.0
Sept. 18	W	0.97	21.9	21.3
19		2.09	28.9	19.7
24		1.01	25.1	9.8
Okt. 8		3.37	19.9	15.6
9		5.83	20.0	15.6
22	O	2.21	26.4	10.4
26		1.96	24.1	5.1
97 Aug. 18	W	2.67	22.9	20.9
19		1.11	26.9	22.2
24		3.77	23.0	13.7
30		1.44	22.6	19.7
Sept. 2		2.06	25.1	21.0
5		1.85	16.7	11.7
18	O	0.07	27.5	13.2
24		1.64	16.0	18.6
27		1.29	16.9	19.1
29		2.66	21.1	18.3
30		3.46	23.7	18.0
Okt. 1		0.07	26.1	18.3
		2.04		

Br 1147. O. C.
$8^h 6^m 36^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		+27°51′		
97 April 8	W	28″.56	24.0	+10°.1
17		28.20	17.3	12.0
Nov. 22	O	27.75	9.7	4.8
Dec. 6		28.29	17.9	— 0.8
10		27.98	32.5	— 2.8
98 Jan. 8	W	28.25	18.7	+ 0.5
Febr. 6		28.32	22.1	— 3.2
9	O	28.19	22.3	+ 0.2
18		27.91	32.5	0.5
März 3		28.19	27.8	1.7
5	W	28.43	30.7	5.2
11	W	28″.12	21.4	+ 0°.4
13		28.37	23.7	5.9
15		27.85	21.6	7.5
19		28.12	25.1	11.0
21		28.30	22.7	3.2
31		28.60	29.6	10.6
April 6	O	28.05	17.3	5.4
7		27.99	16.4	12.0
9		28.59	20.2	16.9
11		28.35	27.2	13.7
		28.21		

Br. 1147. U. C.

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		+55°42′		
96 Aug. 16	O	56″.74	21.9	+14°.2
20		56.35	25.0	17.0
Sept. 10		57.89	26.5	17.0
24	W	58.88	25.1	9.8
Okt. 8		57.51	19.9	15.6
9		57.54	20.1	15.5
22	O	57.18	26.4	10.4
26		56.51	24.1	4.9
Nov. 5		57.31	9.8	3.9
97 Aug. 18	W	57.25	23.0	20.8
19		57.10	26.9	22.2
22		57.32	26.4	18.4
24		58.53	23.0	13.7
30		57.31	22.6	19.6
Sept. 2		57.86	25.1	21.0
5		57.21	16.7	11.7
18	O	56.92	27.5	13.2
24		57.45	16.0	18.6
27		57.44	16.9	19.1
29		57.61	21.1	18.3
30		57.03	23.7	17.8
Okt. 1		57.38	26.1	18.2
2		57.59	23.8	16.9
		57.38		

o Urs. maj. O. C.
$8^h 21^m 42^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		+12°50′		
97 April 8	W	57″.85	23.9	+10°.1
17		56.97	17.4	11.4
Nov. 22	O	56.86	9.9	4.5
Dec. 10		56.77	32.6	— 2.9
98 Jan. 8	W	57.71	18.7	+ 0.4
Febr. 6		57.34	22.3	— 3.6
9	O	57.23	22.1	0.0
18		56.95	32.5	+ 0.4

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 − Brm.	Th.
o Urs. maj.		O. C.	Forts.	
98 März 3	O	56"68	27.8	+ 1°6
5	W	57.57	30.7	5.2
11		57.69	21.4	0.1
12		57.98	24.1	2.5
13		57.50	23.7	6.5
15		57.21	21.5	6.2
19		57.61	25.1	10.8
21		57.47	22.7	3.0
31		57.28	29.0	10.1
April 6	O	56.57	17.3	5.0
7		56.89	16.4	12.0
8		56.69	16.4	11.6
9		56.70	20.3	16.8
11		56.64	27.2	13.7
		57.19		
o Urs. maj. U. C.				
		+ 70° 43′		
96 Aug. 16	O	27"87	21.9	+ 13°8
20		28.84	25.0	16.9
25		29.97	23.7	17.7
Sept. 1		28.96	23.1	16.0
17	W	28.55	17.2	17.6
Okt. 6		26.45	17.4	11.1
8		29.56	19.9	15.6
9		29.26	20.1	15.3
22	O	29.01	26.5	10.5
26		27.64	24.1	4.7
Nov. 5		28.77	9.7	4.1
14		28.03	21.5	− 1.3
97 Aug. 18	W	29.39	23.0	+ 20.6
19		29.80	27.0	22.2
24		29.04	23.0	13.9
30		28.71	22.6	19.6
Sept. 2		30.88	25.2	20.9
5		28.67	16.8	11.4
18	O	27.97	27.5	13.2
24		28.86	16.0	18.3
27		29.05	16.9	19.0
29		29.47	21.1	18.2
30		28.19	23.7	17.7
Okt. 1		28.27	26.1	18.1
		28.80		
Gr. 1460. O. C.				
$8^h\,31^m\,40^s$				
		+ 4° 51′		
97 April 8	W	33"60	23.8	+ 10°1
17		33.32	17.4	11.3

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 − Brm.	Th.
97 Nov. 22	O	33"14	10.0	+ 4°3
Dec. 10		33.25	32.7	− 2.9
98 Jan. 8	W	33.52	18.7	+ 0.3
Febr. 6		32.82	22.3	− 3.8
9	O	33.28	22.1	− 0.1
18		32.90	32.5	+ 0.3
März 1		33.30	25.3	2.5
3		32.74	27.7	1.6
5	W	33.37	30.7	5.2
11		33.49	21.4	0.0
12		33.05	24.1	2.3
13		33.05	23.7	6.5
15		33.38	21.5	6.5
19		33.33	25.1	10.8
21		33.50	22.7	3.0
31		33.09	29.0	9.9
April 6	O	33.36	17.2	4.9
7		33.03	16.4	11.9
8		32.98	16.4	11.6
9		32.79	20.3	16.7
11		33.45	27.2	13.6
		33.18		
Gr. 1460. U. C.				
		+ 78° 42′		
96 Aug. 16	O	52"17	21.9	+ 13°7
20		52.60	25.0	16.8
25		52.45	23.8	17.5
Sept. 1		53.50	23.1	16.1
Okt. 6	W	52.32	17.5	11.0
8		54.68	19.9	15.5
9		56.66	20.1	15.0
22	O	52.68	26.6	10.5
26		55.85	23.9	4.5
Nov. 5		53.82	9.6	4.0
14		52.79	21.5	− 1.4
97 Aug. 18	W	54.07	23.0	+ 20.5
19		51.91	27.0	22.1
24		52.25	23.0	14.2
26		52.22	22.2	15.8
30		52.88	22.6	19.7
Sept. 2		54.64	25.3	20.9
5		52.92	16.8	11.1
18	O	54.78	27.5	13.2
24		53.73	16.0	18.3
27		53.89	16.9	19.0
29		54.42	21.1	18.2
30		52.54	23.7	17.5
Okt. 1		52.54	26.1	18.0
		53.43		

Datum			Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
				ζ Hydrae. 8h 49m 57s		
				−41°52′		
97	April	8	W	31″.39	23.7	+10°.0
		17		31.51	17.4	11.2
	Dec.	10	O	32.07	32.8	− 2.8
98	Jan.	8	W	32.02	18.7	+ 0.3
	Febr.	6		30.73	22.5	− 3.9
		9	O	32.52	21.9	− 0.2
		18		32.23	32.5	+ 0.3
		20		31.69	32.3	− 0.3
	März	1		31.75	25.4	+ 2.2
		3		31.84	27.6	1.8
		5	W	31.48	30.6	5.2
		11		31.10	21.5	− 0.2
		12		31.03	24.1	+ 2.0
		13		31.17	23.8	6.6
		15		31.25	21.4	7.2
		21		31.45	22.7	2.9
		31		31.21	29.0	9.6
	April	6	O	31.43	17.2	4.8
		7		31.59	16.4	11.5
		8		31.88	16.5	11.5
		9		31.59	20.3	16.5
		11		32.04	27.2	13.3
				31.61		
				ι Urs. maj. O. C. 8h 52m 9s		
				+ 0°13′		
97	April	8	W	57″.85	23.7	+ 9°.9
		17		57.86	17.4	11.1
	Dec.	10	O	58.13	32.8	− 2.7
98	Jan.	8	W	57.93	18.7	+ 0.3
	Febr.	6		57.89	22.5	− 4.0
		9	O	57.94	21.9	0.2
		18		58.38	32.5	+ 0.3
		20		58.70	32.3	− 0.3
	März	1		58.08	25.5	+ 2.2
		3		58.24	27.6	1.8
		5	W	57.94	30.6	5.2
		11		57.63	21.5	− 0.2
		12		58.38	24.1	+ 1.9
		13		58.29	23.8	6.6
		15		57.92	21.4	7.2
		21		58.29	22.7	2.9
		31		58.16	29.0	9.6
	April	6	O	58.44	17.2	4.8
		7		58.37	16.4	11.5
		8		58.71	16.5	11.6

Datum			Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
98	April	9	O	58″.39	20.3	+16°.5
		11		58.75	27.2	13.2
				58.19		
				ι Urs. maj. U. C.		
				+83°20′		
96	Aug.	16	O	27″.67	21.9	+13°.5
		20		25.59	24.9	16.6
		25		23.44	24.0	17.0
	Sept.	1		29.00	23.3	16.1
		4		28.38	22.0	17.9
	Okt.	6	W	27.55	17.6	10.9
		8		32.28	19.9	15.3
		9		26.53	20.1	14.8
		16		28.12	22.3	8.8
		17		28.32	28.4	9.8
		22	O	31.90	27.0	10.5
		26		25.88	23.8	4.2
	Nov.	5		27.81	9.5	3.8
		10		23.16	16.3	2.4
		13		27.69	21.0	− 1.2
97	Aug.	24	W	28.76	23.0	+14.5
		26		27.71	22.2	15.8
	Sept.	2		28.17	25.5	20.5
		5		29.55	16.9	11.0
		9		31.71	24.6	14.4
		18	O	26.09	27.5	13.1
		21		26.38	25.3	10.6
		24		30.38	16.0	18.3
		27		30.62	16.8	18.8
		29		27.27	21.1	18.2
		30		25.84	23.7	17.3
	Okt.	1		28.00	26.1	17.7
		13		25.25	23.9	7.7
		15		28.88	20.9	13.7
		25		27.70	12.3	7.0
	Nov.	9		19.76	11.0	2.5
		11		31.40	10.4	− 4.1
				27.72		
				κ Urs. maj. O. C. 8h 56m 36s		
				− 0°38′		
97	März	26	W	57″.69	22.0	+ 9°.7
	April	8		57.71	23.7	9.7
		17		57.47	17.4	11.1
	Dec.	10	O	57.99	32.8	− 2.7
98	Jan.	8	W	58.02	18.7	+ 0.3
	Febr.	6		57.73	22.6	− 4.0
		9	O	57.40	21.9	0.3

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		κ Urs. maj. O. C. Forts.		
98 Febr. 18	O	57″.82	32.5	+ 0°.3
20		57.29	32.3	− 0.3
25		57.74	17.1	+ 4.7
März 1		57.64	25.5	2.2
3		57.46	27.6	1.9
5	W	57.86	30.6	5.2
11		58.05	21.5	− 0.3
12		57.82	24.1	+ 1.8
13		58.17	23.8	6.6
15		58.01	21.4	7.1
21		57.81	22.7	2.9
31		58.27	29.0	9.5
April 6	O	57.83	17.2	4.8
7		57.78	16.4	11.4
8		57.97	16.5	11.6
9		57.51	20.3	16.4
11		57.27	27.2	13.0
		57.76		
		κ Urs. maj. U. C.		
		+84°13′		
96 Aug. 16	O	25″.04	21.9	+13°.4
20		23.42	24.9	16.5
25		25.22	24.0	17.0
Sept. 1		26.93	23.3	16.0
4		27.63	22.1	17.8
17	W	19.43	17.2	17.5
Okt. 6		22.05	17.6	10.9
8		25.51	19.9	15.3
9		24.44	20.1	14.7
16		26.69	22.3	8.7
17		27.83	28.5	9.8
22	O	23.86	27.0	10.5
26		22.28	23.8	4.1
Nov. 5		25.61	9.5	3.8
10		21.13	16.2	2.3
13		27.61	21.0	− 1.2
97 Aug. 24	W	26.99	23.0	+14.2
26		26.24	22.2	15.8
30		24.18	22.6	19.8
Sept. 2		21.88	25.5	20.5
5		21.45	16.9	10.9
9		23.78	24.6	14.4
18	O	24.40	27.5	13.1
21		26.56	25.3	10.6
24		24.80	16.0	18.3
27		24.06	16.8	18.8
30		22.07	23.7	17.3
Okt. 1		24.13	26.1	17.7
13		24.72	23.9	7.8

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
97 Okt. 15	O	22″.94	20.9	+13°.7
25		23.19	12.3	6.9
Nov. 9		20.68	11.0	2.3
11		26.05	10.4	− 4.1
		24.36		
		19 Hydrae.		
		$9^h 3^m 40^s$		
		−56°23′		
97 April 8	W	9″.25	23.7	+ 9°.5
17		10.00	17.4	10.9
98 Febr. 6		10.50	22.7	− 4.0
9	O	10.12	21.9	0.4
18		8.78	32.5	+ 0.3
20		10.22	32.3	− 0.3
25		10.88	17.1	+ 4.7
März 1		10.57	25.5	2.2
3		10.18	27.6	1.9
5	W	10.43	30.6	5.1
11		9.29	21.5	− 0.4
12		9.38	24.1	+ 1.8
13		10.10	23.8	6.6
15		9.79	21.4	7.0
31		9.39	29.0	9.5
April 6	O	9.64	17.2	4.8
7		9.20	16.4	11.4
8		10.47	16.5	11.7
9		9.24	20.4	16.3
11		9.64	27.2	12.7
		9.85		
		ϑ Hydrae.		
		$9^h 9^m 0^s$		
		−45°27′		
97 April 8	W	51″.32	23.6	+ 9°.4
17		51.48	17.4	10.8
98 Febr. 6		51.19	22.8	− 4.1
9	O	51.70	21.8	0.4
18		51.21	32.5	+ 0.3
20		51.27	32.3	− 0.4
25		51.23	17.1	+ 4.7
März 1		51.18	25.6	2.2
3		51.20	27.5	1.8
5	W	50.81	30.6	5.1
11		50.64	21.6	− 0.5
12		50.52	24.1	+ 1.9
13		50.53	23.8	6.6
15		50.80	21.4	6.9
21		51.51	22.7	3.0
31		50.11	29.0	9.6

Datum	Kr.		Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
ϑ Hydrae. Forts.					
98 April 6	O		50″70	17.2	+ 4°8
7			50.94	16.4	11.3
8			51.43	16.5	11.7
9			50.74	20.4	16.2
11			50.79	27.2	12.6
			51.00		
λ Pyxidis.					
			$9^h 18^m 45^s$		
			−76°36′		
97 April 3	W		22″68	32.1	+ 3°7
8			23.04	23.6	9.3
17			20.52	17.5	10.4
98 Febr. 6			24.57	22.8	− 4.1
9	O		25.00	21.8	0.4
18			24.80	32.5	+ 0.3
März 1			24.65	25.6	2.2
3			23.52	27.5	1.7
5	W		23.38	30.6	5.1
11			23.04	21.6	− 0.6
12			25.14	24.1	+ 2.0
13			24.60	23.8	6.6
21			22.50	22.7	3.0
31			23.26	28.9	9.7
April 6	O		23.95	17.2	4.8
7			22.47	16.4	11.1
8			22.92	16.5	11.8
9			24.77	20.5	16.0
11			23.56	27.1	12.5
			23.60		
1 H. Drac. O. C.					
			$9^h 22^m 24^s$		
			+33°34′		
97 März 26	W	3	6″17	22.4	+ 9°5
April 3		1	6.80	32.1	3.6
8		3	6.38	23.6	9.2
17		2	6.59	17.5	10.3
28		4	6.08	18.8	17.2
98 Febr. 6		1	5.72	22.9	− 4.2
9	O	3	5.91	21.7	0.4
18		3	6.10	32.5	+ 0.3
20		3	6.05	32.3	− 0.5
25		4	6.21	17.1	+ 4.7
März 1		3	5.92	25.6	2.2
3		3	5.77	27.5	1.7
5	W	3	6.26	30.6	5.1
11		2	5.94	21.6	− 0.7
12		3	6.14	24.1	+ 2.1
98 März 13	W	3	6″43	23.8	+ 6°6
15		3	6.44	21.4	6.6
21		3	6.37	22.7	3.0
31		4	5.93	28.9	9.7
April 6	O	4	5.65	17.2	4.9
7		4	6.04	16.4	11.0
8		3	6.04	16.5	11.8
9		3	5.90	20.5	15.9
11		3	5.85	27.1	12.7
18		3	5.70	32.5	11.8
			6.12		
1 H. Drac. U. C.					
			+50°0′		
96 Sept. 1	O	1	19″69	23.4	+15°8
4		1	19.68	22.3	17.6
17	W	3	19.23	17.3	17.2
18		2	19.22	22.2	22.0
Okt. 6		3	19.27	17.7	10.4
7		4	19.61	17.8	13.7
8		3	19.77	19.9	15.2
16		3	19.13	22.3	8.6
17		3	19.59	28.6	9.8
22	O	5	19.69	27.1	10.3
26		5	19.74	23.9	4.1
Nov. 5		5	19.46	9.5	3.5
6		4	19.61	16.4	4.0
10		1	19.45	16.2	2.0
13		2	19.14	21.0	− 1.5
14		4	19.28	21.6	2.0
97 Aug. 24	W	2	19.15	23.0	+12.8
26		3	19.89	22.2	15.8
30		3	19.40	22.6	19.9
Sept. 2		3	19.57	25.5	20.2
5		1	19.61	17.0	10.7
9		2	19.72	24.6	14.4
18	O	3	19.72	27.4	12.8
21		3	19.61	25.4	10.8
24		3	19.89	16.0	18.2
27		4	19.83	16.8	18.4
29		3	19.90	21.0	17.9
30		5	19.69	23.8	17.0
Okt. 1		3	19.60	26.1	17.4
13		4	19.57	23.9	7.8
14		5	19.50	21.5	10.3
15		6	19.61	20.9	13.4
19		6	19.71	16.7	13.1
25		7	19.16	12.2	6.7
26		7	19.47	12.2	7.0
27		3	19.45	10.0	5.6
28		4	19.25	11.5	5.3

Datum	Kr.		Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
1 H. Drac. U. C. Forts.					
97 Okt. 29	O	4	20″13	12.9	+ 5°2
30		4	19.23	13.6	5.4
Nov. 9		4	19.56	10.8	2.7
11		3	19.47	10.4	− 4.4
25		4	19.50	18.6	2.8
26		4	19.57	12.4	3.0
			19.54		
ϑ Urs. maj. O. C.					
$9^h\,25^m\,58^s$			+ 3°56′		
97 März 26	W		0″95	22.4	+ 9°4
April 3			1.06	32.1	3.5
17			1.78	17.5	10.2
28			0.55	18.8	17.1
98 Febr. 9	O		1.27	21.7	− 0.5
18			0.97	32.5	+ 0.2
20			1.38	32.3	− 0.6
25			0.81	17.2	+ 4.6
März 1			0.76	25.6	2.3
3			1.17	27.5	1.7
5	W		0.99	30.6	5.1
11			0.84	21.7	− 0.8
12			1.11	24.1	+ 2.2
13			0.89	23.8	6.6
15			0.92	21.4	6.5
21			0.73	22.7	3.0
31			0.72	28.9	9.8
April 7	O		1.11	16.3	10.9
8			1.01	16.4	11.8
9			1.07	20.6	15.9
11			0.89	27.1	12.6
18			1.27	32.5	11.7
			0.96		
ϑ Urs. maj. U. C.					
			+ 79°38′		
96 Sept. 1	O		24″77	23.4	+ 15°7
4			25.05	22.3	17.5
18	W		25.20	22.2	22.0
Okt. 7			27.61	17.8	13.7
8			26.17	19.9	15.2
16			27.38	22.3	8.7
17			25.68	28.7	9.8
Nov. 5	O		24.97	9.5	3.4
6			29.45	16.5	4.0
13			25.17	21.0	− 1.5
97 Aug. 24	W		23.39	23.0	+ 12.6
26			26.03	22.2	15.8

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
97 Aug. 30	W	26″74	22.6	+ 20°0
Sept. 2		24.81	25.5	20.1
5		25.75	17.0	10.6
9		27.02	24.6	14.4
21	O	24.21	25.4	10.8
Okt. 13		24.47	23.9	7.8
14		25.73	21.5	10.3
15		24.66	20.9	13.3
19		27.13	16.7	13.1
Nov. 9		24.85	10.7	2.7
11		26.92	10.4	− 4.4
		25.80		
Lal. 18817.				
$9^h\,28^m\,28^s$		− 68°52′		
97 März 26	W	22″32	22.4	+ 9°4
April 3		22.06	32.1	3.5
17		21.90	17.5	10.1
98 Febr. 9	O	22.48	21.7	− 0.5
18		22.17	32.5	+ 0.2
20		21.97	32.3	− 0.6
März 1		22.32	25.7	+ 2.3
3		21.97	27.5	1.6
5	W	22.38	30.6	5.1
11		22.36	21.7	− 0.8
12		22.81	24.1	+ 2.2
13		22.25	23.8	6.6
15		21.64	21.4	6.4
21		22.42	22.7	3.0
31		22.27	28.9	9.8
April 7	O	23.23	16.3	10.8
8		23.23	16.4	11.8
9		22.32	20.6	15.9
11		22.50	27.1	12.6
		22.68		
o Leonis.				
$9^h\,35^m\,39^s$		− 37°51′		
97 März 26	W	7″69	22.5	+ 9°4
April 3		7.39	32.1	3.4
9		7.37	20.7	6.8
17		6.72	17.5	9.9
28		7.39	18.8	16.8
98 Febr. 9	O	8.14	21.6	− 0.5
18		8.04	32.5	+ 0.2
20		8.03	32.3	− 0.7
25		7.47	17.2	+ 4.6
März 1		8.46	25.7	2.4

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 − Brm.	Th.
o Leonis. Forts.				
98 März 3	O	7″90	27.4	+ 1°6
5	W	8.22	30.6	5.2
11		6.97	21.7	− 0.8
13		7.44	23.8	+ 6.7
15		7.45	21.4	6.5
21		7.42	22.7	2.9
31		7.59	28.9	9.8
April 7	O	7.66	16.3	10.7
8		7.66	16.4	11.8
9		7.32	20.7	15.8
11		7.55	27.1	12.6
		7.61		

ε Leonis.
$9^h\,40^m\,0^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 − Brm.	Th.
		−23°57′		
97 März 26	W	51″94	22.5	+ 9°3
April 3		51.66	32.1	3.4
9		51.71	20.7	6.8
17		51.24	17.5	9.9
28		52.06	18.8	16.6
98 Febr. 9	O	52.04	21.6	− 0.5
18		52.62	32.5	+ 0.2
20		52.00	32.3	− 0.7
25		51.91	17.2	+ 4.5
März 1		52.28	25.7	2.5
3		51.97	27.4	1.6
5	W	52.34	30.6	5.2
11		51.40	21.7	− 0.8
12		52.24	24.1	+ 2.1
13		51.81	23.8	6.7
15		51.78	21.4	6.5
21		51.96	22.7	2.9
31		51.73	28.9	9.7
April 7	O	51.19	16.3	10.7
8		51.91	16.4	11.7
9		51.51	20.7	15.7
11		51.80	27.1	12.6
18		52.02	32.4	11.1
		51.87		

Gr. 1586. O. C.
$9^h\,49^m\,11^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 − Brm.	Th.
		+25°9′		
97 März 26	W	21″53	22.7	+ 9°3
April 3		21.92	32.1	3.4
9		21.25	20.7	6.8
17		22.12	17.5	9.8
28		21.30	18.8	16.3
98 Febr. 9	O	21″98	21.6	− 0°6
18		22.48	32.5	+ 0.2
20		21.98	32.3	− 0.9
25		21.73	17.3	+ 4.4
März 1		22.08	25.8	2.6
3		22.25	27.4	1.7
5	W	21.82	30.6	5.2
11		21.27	21.7	− 0.8
12		21.69	24.1	+ 1.9
13		21.93	23.8	6.8
15		21.72	21.4	6.6
21		21.42	22.7	2.9
31		21.76	28.9	9.5
April 7	O	21.58	16.3	10.6
8		21.98	16.4	11.7
9		21.72	20.8	15.4
11		21.93	27.1	12.6
16		22.03	24.2	10.2
18		21.67	32.4	10.9
		21.81		

Gr. 1586. U. C.

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 − Brm.	Th.
		+58°25′		
96 Aug. 25	O	3″54	24.3	+16°8
Sept. 4		4.11	22.4	17.4
9		3.69	23.1	16.4
15	W	3.87	18.0	18.6
17		4.26	17.3	16.5
18		4.66	22.4	22.0
Okt. 7		3.93	17.8	13.4
Nov. 5	O	3.26	9.5	3.1
6		4.09	12.7	3.8
10		3.25	16.1	1.7
13		3.31	21.0	− 1.8
97 Aug. 24	W	2.87	23.0	+12.6
26		4.69	22.2	15.6
30		3.62	22.6	19.9
Sept. 2		3.48	25.4	20.3
5		4.51	17.3	10.9
8		3.74	21.4	8.5
9		3.92	24.6	14.0
21	O	3.03	25.8	10.6
Okt. 13		3.25	23.7	8.3
14		3.29	21.5	10.2
15		3.90	20.9	13.2
19		4.26	16.8	13.0
24		3.27	13.1	7.0
28		3.44	11.6	5.2
Nov. 9		3.55	10.5	2.7
26		3.20	12.4	− 3.5
		3.70		

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 — Brm.	Th.
		π Leonis. 9h 54m 46s		
		−39°40′		
97 März 26	W	28″.36	22.7	+ 9°.2
April 3		28.40	32.1	3.1
9		28.77	20.7	6.7
17		27.53	17.5	9.7
28		28.02	18.8	16.2
98 Febr. 9	O	28.41	21.5	− 0.6
18		28.73	32.5	+ 0.2
20		27.89	32.4	− 1.0
März 1		28.24	25.8	+ 2.8
3		28.42	27.4	1.8
4	W	28.01	27.5	− 1.4
11		28.16	21.7	0.8
12		28.89	24.1	+ 1.7
13		28.33	23.8	6.9
15		27.94	21.4	6.8
21		28.39	22.7	2.9
31		28.53	28.9	9.4
April 7	O	29.15	16.3	10.6
8		28.07	16.4	11.6
9		28.39	20.9	15.3
15		27.87	20.1	7.5
16		27.54	24.2	10.2
18		28.46	32.3	10.9
Mai 3	W	28.99	27.3	19.4
		28.28		
		α Leonis. 10h 2m 53s		
		−35°44′		
97 März 26	W	32″.25	22.7	+ 9°.3
April 3		32.45	32.1	3.1
9		32.58	20.7	6.7
17		31.75	17.5	9.7
28		32.34	18.8	16.0
98 Febr. 9	O	32.25	21.5	− 0.7
18		32.88	32.5	+ 0.2
20		31.54	32.4	− 1.1
25		32.70	17.3	+ 4.4
März 1		32.73	25.8	2.8
3		32.53	27.4	1.7
4	W	31.57	27.5	− 1.4
11		32.37	21.7	0.8
12		32.45	24.1	+ 1.6
13		32.29	23.8	6.9
15		31.85	21.4	6.8
21		32.18	22.7	2.8
31		32.18	28.9	10.0

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 — Brm.	Th.
98 April 7	O	32″.75	16.3	+ 10°.4
8		31.82	16.4	11.5
9		32.46	20.9	15.2
11		32.61	27.1	12.5
15		32.02	20.1	7.4
16		32.08	24.3	10.2
18		32.30	32.2	10.8
		32.29		
		ζ Leonis. 10h 10m 58s		
		−24°16′		
97 März 26	W	56″.33	22.7	+ 9°.3
April 3		56.19	32.2	3.0
9		56.62	20.7	6.5
17		55.93	17.5	9.7
28		56.51	18.8	15.7
98 Febr. 18	O	56.91	32.5	0.2
20		56.00	32.4	− 1.3
22		56.11	33.6	+ 2.1
März 1		56.60	25.9	2.8
3		57.05	27.4	1.6
4	W	56.03	27.5	− 1.4
11		56.37	21.7	− 0.9
12		56.52	24.1	+ 1.4
13		56.44	23.8	6.9
21		55.62	22.7	2.8
31		56.38	29.0	10.5
April 7	O	56.60	16.3	10.2
9		56.76	21.0	15.1
11		56.20	27.1	12.4
15		56.09	20.1	7.2
16		56.62	24.4	10.2
18		56.71	32.1	10.8
Mai 2	W	56.39	24.5	18.0
3		56.12	27.3	19.1
		56.38		
		α Antliae. 10h 22m 26s		
		−78°45′		
97 April 3	W	22″.03	32.2	+ 2°.9
7		23.77	25.0	5.9
9		22.60	20.7	6.4
17		21.81	17.5	9.7
28		23.11	18.7	15.7
98 Febr. 20	O	22.62	32.4	− 1.4
22		25.00	33.6	+ 2.0
März 1		24.33	26.0	2.6
3		23.15	27.4	1.4

α Antliae. Forts.

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 — Brm.	Th.
98 März 4	W	24″.31	27.5	— 1°.4
11		22.17	21.7	1.1
12		23.79	24.1	+ 1.3
13		22.90	23.8	6.9
21		21.49	22.7	2.7
31		24.34	29.0	10.6
April 7	O	22.25	16.2	10.2
9		24.11	21.0	15.0
11		22.73	27.1	12.3
15		24.20	20.2	7.1
16		24.81	24.4	10.1
18		21.10	32.1	10.8
Mai 2	W	23.70	24.5	17.9
		23.28		

41 Leon. min.
10h 37m 49s

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 — Brm.	Th.
		— 24° 29′		
97 April 3	W	7″.20	32.4	+ 2°.8
7		7.54	25.1	5.8
9		7.44	20.7	6.3
17		7.08	17.5	9.7
28		7.31	18.7	15.5
98 Febr. 20	O	6.97	32.5	— 1.5
22		7.73	33.6	+ 2.0
März 1		7.28	26.1	2.2
3		6.93	27.4	1.3
4	W	7.26	27.5	— 1.2
11		6.11	21.8	1.6
12		7.10	24.1	+ 1.2
13		7.00	23.8	6.8
21		7.01	22.7	2.7
April 6	O	6.92	17.1	4.2
9		6.74	21.1	14.9
15		7.18	20.2	6.8
16		6.53	24.6	9.6
18		7.20	31.9	10.9
27	W	6.85	30.9	14.7
Mai 2		7.65	24.5	17.5
3		7.91	27.3	18.3
		7.14		

42 Leon. min.
10h 40m 8s

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 — Brm.	Th.
		— 16° 59′		
97 März 10	W	17″.63	21.5	+ 2°.2
April 3		17.59	32.4	2.8
7		17.75	25.1	5.8
17		17.34	17.5	9.7
97 April 28	W	17″.30	18.7	+ 15°.5
98 Febr. 20	O	17.42	32.5	— 1.6
22		17.13	33.6	+ 2.0
März 1		17.21	26.1	2.1
3		17.12	27.4	1.3
4	W	17.52	27.6	— 1.2
11		16.58	21.8	1.7
12		17.16	24.1	+ 1.2
13		16.92	23.8	6.8
21		17.42	22.7	2.7
April 6	O	17.01	17.1	4.2
9		17.20	21.1	14.9
15		17.26	20.2	6.8
16		16.81	24.6	9.6
18		17.36	31.9	10.9
27	W	17.14	30.8	14.7
Mai 2		17.63	24.5	17.4
3		18.58	27.3	18.3
		17.23		

β Urs. maj. O. C.
10h 55m 38s

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 — Brm.	Th.
		+ 8° 43′		
96 Nov. 5	O	17″.54	11.7	+ 1°.3
97 März 10	W	17.05	21.5	2.2
April 3		17.94	32.5	2.7
7		17.10	25.1	5.8
9		16.79	20.7	6.3
27		16.89	17.4	12.2
28		17.02	18.7	15.2
30		16.43	24.7	16.5
98 Febr. 20	O	17.34	32.6	— 1.7
22		16.89	33.6	+ 1.9
März 1		16.99	26.2	1.9
3		17.31	27.4	1.2
4	W	17.01	27.7	— 1.2
11		16.25	21.8	1.7
12		16.81	24.1	+ 1.3
14		16.73	22.4	8.0
April 5	O	17.26	20.5	2.6
6		16.91	17.2	4.0
7		17.17	16.2	10.1
9		17.36	21.2	14.8
15		16.83	20.3	6.8
16		17.38	24.7	9.3
18		16.90	31.8	10.7
27	W	17.17	30.8	14.5
Mai 2		16.65	24.5	16.9
3		16.32	27.3	17.7
		16.98		

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		β Urs. maj. U. C.		
		+74°51′		
96 Aug. 25	O	9″.72	24.8	+16°.1
Sept. 4		9.27	23.1	16.0
15	W	9.56	18.0	18.6
19		10.02	30.5	16.7
Okt. 2		8.17	22.0	13.1
7		8.56	17.9	12.9
9		10.47	20.3	12.9
10		9.64	25.3	14.0
25	O	8.14	24.0	6.0
97 Aug. 26	W	9.29	22.3	15.7
30		9.54	22.7	20.0
Sept. 2		7.14	25.1	20.7
5		10.14	17.7	10.9
9		9.45	24.7	13.8
13		8.48	15.8	13.2
21	O	10.08	26.3	10.1
24		9.39	16.2	17.1
27		9.65	16.7	18.1
30		8.64	24.0	16.0
Okt. 1		9.12	26.4	16.5
13		8.26	23.5	7.6
14		9.11	21.7	9.8
15		5.89	20.9	12.6
24		7.36	12.9	6.9
27		8.58	9.9	5.9
Nov. 9		9.28	10.6	2.7
		8.96		
		χ Leonis.		
		$10^h 59^m 42^s$		
		−40°19′		
97 März 10	W	12″.77	21.5	+ 2°.1
April 3		12.32	32.5	2.7
7		12.71	25.1	5.8
9		12.20	20.7	6.2
27		12.37	17.4	12.1
28		11.65	18.7	15.1
30		12.23	24.7	16.4
98 Febr. 20	O	11.80	32.6	− 1.8
22		12.67	33.6	+ 1.9
März 1		12.21	26.2	1.9
3		12.33	27.4	1.2
4	W	12.43	27.7	− 1.2
11		11.89	21.9	1.8
12		12.56	24.1	+ 1.3
14		12.65	22.4	8.0
April 5	O	12.12	20.5	2.5
6		11.78	17.2	3.9
7		11.96	16.2	10.1

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
98 April 9	O	12″.01	21.2	+14°.7
15		12.90	20.3	6.7
16		12.07	24.7	9.2
18		11.93	31.8	10.6
27	W	12.10	30.8	14.5
Mai 2		12.91	24.5	16.8
3		12.30	27.3	17.5
		12.26		
		ψ Urs. maj. O. C.		
		$11^h 3^m 52^s$		
		− 3°9′		
96 Nov. 5	O	20″.38	11.8	+ 1°.8
97 März 10	W	20.71	21.5	2.0
April 3		20.84	32.5	2.6
7		20.68	25.1	5.8
9		20.54	20.7	6.2
10		20.54	23.5	7.6
27		20.42	17.4	12.0
28		20.34	18.7	15.1
30		21.05	24.7	16.4
98 Febr.* 20	O	20.48	32.6	− 1.9
22		21.22	33.6	+ 1.9
März 1		20.97	26.3	1.9
3		20.99	27.4	1.2
4	W	21.22	27.7	− 1.2
11		20.96	21.9	1.8
12		20.64	24.1	+ 1.3
14		20.89	22.4	7.9
April 5	O	20.95	20.5	2.4
6		20.72	17.3	3.9
7		20.71	16.2	10.1
9		20.58	21.3	14.6
15		21.03	20.3	6.7
18		21.14	31.8	10.6
27	W	20.63	30.8	14.4
Mai 2		20.51	24.5	16.6
3		20.47	27.3	17.3
		20.76		
		ψ Urs. maj. U. C.		
		+86°43′		
96 Aug. 25	O	47″.96	24.8	+15°.5
Sept. 4		50.24	23.1	15.7
Okt. 2	W	48.89	22.0	13.1
6		51.31	17.8	10.2
9		43.99	20.3	12.8
10		51.80	25.4	14.1
25	O	49.43	24.0	6.0
97 Aug. 26	W	39.38	22.3	15.7
30		48.74	22.7	19.2

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 – Brm.	Th.
ψ Urs. maj. U. C. Forts.				
97 Sept. 2	W	44″.44	25.0	+ 20°.0
5		46.60	17.7	10.9
9		61.90	24.7	13.8
13		44.93	15.8	13.2
24	O	51.25	16.2	17.1
30		52.50	24.1	16.0
Okt. 1		37.79	26.4	16.6
24		50.77	12.8	6.8
25		44.64	11.9	6.4
27		53.68	9.9	5.6
Nov. 9		34.95	10.6	2.8
		47.77		
δ Crateris. $11^h 14^m 11^s$		−62°26′		
97 März 10	W	2″.46	21.6	+ 1°.7
April 3		2.67	32.6	2.5
7		2.97	25.1	5.8
9		3.45	20.7	6.1
10		3.64	23.5	7.4
27		3.79	17.4	12.0
28		3.19	18.7	15.0
30		3.24	24.7	16.3
98 Febr. 20	O	2.72	32.6	− 1.9
22		2.30	33.6	+ 1.9
März 1		2.33	26.3	2.0
3		2.91	27.3	1.2
4	W	3.43	27.8	− 1.2
11		3.69	21.9	1.8
14		3.42	22.5	+ 7.9
April 5	O	3.02	20.4	2.3
6		3.33	17.3	3.7
7		2.99	16.2	10.2
9		3.24	21.3	14.6
15		3.33	20.3	6.6
16		3.30	24.8	9.1
18		2.89	31.8	10.5
26	W	2.92	27.9	11.8
27		3.10	30.8	14.3
Mai 2		2.60	24.6	16.4
3		4.75	27.4	17.1
		3.01		
ι Leonis. $11^h 18^m 33^s$		−37°6′		
97 März 10	W	58″.46	21.6	+ 1°.5
April 3		58.43	32.6	2.5

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 – Brm.	Th.
97 April 7	W	58″.15	25.1	+ 5°.8
9		58.44	20.7	6.1
10		59.20	23.5	7.3
27		58.54	17.4	11.9
28		59.30	18.7	15.0
30		58.42	24.7	16.3
98 Febr. 20	O	58.13	32.7	− 2.0
22		58.88	33.6	+ 1.9
März 1		58.43	26.3	2.1
3		58.70	27.3	1.2
4	W	59.12	27.8	− 1.2
11		58.91	21.9	1.8
14		59.14	22.5	+ 7.9
April 5	O	58.74	20.4	2.2
6		59.03	17.3	3.7
7		58.92	16.2	10.3
9		58.74	21.3	14.6
15		58.36	20.3	6.6
16		58.18	24.8	9.0
18		58.12	31.7	10.5
26	W	57.73	27.9	11.7
27		57.65	30.8	14.2
Mai 2		58.05	24.6	16.3
3		59.05	27.4	17.2
		58.69		
λ Draconis. O. C. $11^h 25^m 18^s$		+21°41′		
96 Nov. 5	O	10″.95	11.8	+ 2°.6
97 März 10	W	10.30	21.6	1.3
April 3		11.48	32.7	2.5
7		11.19	25.1	5.7
9		11.77	20.7	6.0
10		10.85	23.5	7.2
27		10.80	17.4	11.8
28		10.89	18.7	14.9
30		10.56	24.8	16.3
Mai 30	O	11.42	20.5	19.7
98 Febr. 20		10.86	32.7	− 2.1
22		11.36	33.6	+ 1.9
März 1		10.96	26.3	2.2
3		11.09	27.3	1.3
4	W	10.42	27.8	− 1.3
11		10.68	22.0	1.8
14		10.50	22.5	+ 7.9
April 5	O	10.48	20.4	2.1
6		10.84	17.3	3.7
7		11.01	16.2	10.5
9		10.78	21.4	14.7
11		10.79	27.0	11.9

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		λ Draconis. O. C. Forts.		
98 April 15	O	11″01	20.4	+ 6°5
16		10.76	24.8	9.0
18		11.01	31.7	10.5
26	W	11.09	27.9	11.7
27		10.94	30.8	14.1
Mai 2		10.93	24.6	16.3
3		10.61	27.4	17.2
		10.86		
		λ Draconis. U. C.		
		+61°53′		
96 Sept. 19	W	14″35	30.1	+17°1
Okt. 2		15.25	22.1	13.1
6		14.07	18.0	10.0
7		13.35	17.9	12.5
9		14.68	20.3	12.7
10		14.60	25.5	14.3
24	O	13.92	21.7	5.5
25		14.23	24.0	5.9
97 Aug. 24	W	15.11	23.0	12.1
26		14.80	22.3	15.7
Sept. 5		14.94	17.8	10.8
9		14.61	24.7	13.7
13		15.08	15.8	13.2
24	O	15.07	16.2	17.0
27		14.20	16.8	17.3
30		14.00	24.1	15.8
Okt. 1		15.31	26.4	16.4
13		15.05	23.4	7.5
14		14.98	21.8	9.7
15		14.88	20.9	12.3
24		14.33	12.7	6.7
25		14.29	11.9	6.1
27		15.32	9.9	5.2
		14.64		
		ξ Hydrae.		
		$11^h 27^m 56^s$		
		−79°29′		
97 März 10	W	58″14	21.6	+ 1°2
April 3		63.05	32.7	2.4
7		63.96	25.1	5.7
9		62.05	20.7	6.0
10		64.18	23.5	7.2
27		61.73	17.4	11.8
28		63.93	18.7	14.8
30		62.56	24.8	16.3
98 Febr. 20	O	63.10	32.7	− 2.1
22		65.37	33.6	+ 1.9

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
98 März 3	O	64″21	27.3	+ 1°3
4	W	63.42	27.9	− 1.3
11		61.74	22.0	1.7
14		62.86	22.5	+ 7.9
April 5	O	64.84	20.4	2.1
6		62.60	17.3	3.7
9		64.50	21.4	14.8
11		63.79	27.0	11.8
15		65.05	20.4	6.5
16		63.33	24.8	9.0
18		62.63	31.7	10.4
26	W	62.70	27.9	11.7
27		62.04	30.8	14.1
Mai 2		63.72	24.6	16.2
3		68.35	27.4	17.3
		63.22		
		χ Urs. maj. O. C.		
		$11^h 40^m 37^s$		
		+ 0°8′		
96 Nov. 5	O	14″25	11.9	+ 3°4
97 März 10	W	13.56	21.7	0.7
April 3		14.69	32.7	2.3
7		14.39	25.1	5.6
8		14.45	23.2	7.5
10		14.38	23.5	6.9
27		13.76	17.4	11.7
30		14.22	24.8	15.9
Mai 29	O	14.31	21.1	17.1
30		15.15	20.5	19.5
98 März 3		14.57	27.3	1.4
4	W	13.95	27.9	− 1.4
11		13.96	22.0	1.7
14		13.96	22.5	+ 7.8
April 5	O	14.30	20.3	2.3
6		14.66	17.4	3.7
7		14.65	16.2	10.8
9		14.63	21.4	15.0
11		14.61	27.0	11.4
15		14.58	20.4	6.1
16		14.72	24.9	8.8
26	W	14.10	27.9	11.5
27		14.64	30.8	13.7
Mai 2		14.38	24.6	16.2
3		13.80	27.5	17.4
		14.29		
		χ Urs. maj. U. C.		
		+83°26′		
96 Sept. 19	W	9″09	29.9	+17°2
Okt. 2		9.03	22.2	12.9

Datum			Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
				χ Urs. maj. U. C. Forts.		
96	Okt.	6	W	11″34	18.1	+ 9°9
		7		12.10	17.9	12.4
		9		12.65	20.4	12.8
		10		6.58	25.6	14.4
		24	O	17.42	21.6	5.5
		25		12.69	24.0	5.8
97	Aug.	18	W	12.25	24.1	19.4
		24		13.76	23.0	12.0
	Sept.	9		12.07	24.9	13.5
		24	O	15.58	16.2	16.0
		27		14.24	16.9	17.2
		30		11.74	24.2	15.7
	Okt.	1		11.63	26.4	15.9
		15		8.09	20.9	12.2
		24		10.69	12.6	6.6
		25		12.04	12.0	6.0
		27		13.34	9.9	5.5
				11.91		
				γ Urs. maj. O. C. 11ʰ 48ᵐ 25ˢ		
				+ 6° 3′		
96	Nov.	5	O	14″41	11.9	+ 3°5
97	März	4	W	15.78	28.6	1.6
		10		15.65	21.7	0.5
	April	7		15.90	25.1	5.6
		8		15.86	23.2	7.4
		10		15.81	23.5	6.8
		14		15.86	20.7	10.7
		27		15.87	17.4	11.7
		30		15.79	24.9	15.9
	Mai	17		16.16	25.6	12.8
		29	O	14.94	21.1	17.1
		30		15.97	20.5	19.4
98	März	3		15.10	27.3	1.4
		4	W	15.38	27.9	— 1.4
		14		15.95	22.5	+ 7.8
	April	5	O	15.07	20.2	2.3
		6		15.23	17.4	3.7
		7		15.29	16.2	10.9
		9		14.81	21.5	14.9
		11		15.10	27.0	11.3
		15		14.81	20.4	6.0
		16		15.09	24.9	8.7
		26	W	15.76	27.9	11.5
		27		16.17	30.8	13.6
	Mai	2		15.80	24.6	16.1
		3		15.65	27.5	17.3
				15.44		

Datum			Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
				γ Urs. maj. U. C.		
				+77° 31′		
96	Sept.	19	W	12″89	29.8	+17°2
	Okt.	2		10.17	22.2	12.9
		6		9.05	18.2	9.9
		7		11.71	17.9	12.4
		9		11.56	20.4	12.7
		10		9.56	25.7	14.3
		24	O	9.75	21.6	5.5
		25		11.72	24.0	5.8
97	Aug.	18	W	9.65	24.2	19.3
		24		10.71	23.0	11.9
	Sept.	9		10.93	25.0	13.4
		24	O	11.58	16.2	15.7
		27		11.04	16.9	17.3
		30		8.99	24.2	15.6
	Okt.	1		9.35	26.4	15.7
		14		10.73	21.8	9.5
		15		8.26	20.9	12.0
		24		7.69	12.5	6.4
		25		11.41	12.9	5.9
		27		11.35	9.9	5.7
				10.40		
				o Virginis. 11ʰ 59ᵐ 58ˢ		
				—38° 54′		
97	März	4	W	28″65	28.6	+ 1°5
		10		28.08	21.7	0.5
	April	7		28.60	25.1	5.6
		8		28.73	23.2	7.4
		10		28.69	23.5	6.6
		30		28.45	25.0	15.9
	Mai	17		28.03	25.6	12.8
		29	O	28.68	20.8	17.2
		30		27.48	20.6	18.9
	Juni	25		28.71	23.4	27.2
98	März	4	W	28.43	28.0	— 1.3
		14		28.42	22.5	+ 7.7
	April	5	O	28.32	20.2	2.2
		6		28.65	17.4	3.6
		7		28.23	16.2	11.1
		9		28.27	21.5	14.8
		11		28.14	27.1	11.3
		15		28.08	20.4	5.8
		16		27.86	24.9	8.6
		26	W	27.76	27.9	11.4
		27		27.36	30.9	13.5
	Mai	2		29.20	24.6	16.0
		3		29.49	27.5	17.1
				28.34		

4 H. Drac. O. C.

$12^h\,7^m\,22^s$

Datum			Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
				+29°58′		
97	März	4	W	31″.83	28.6	+ 1°.4
		10		31.72	21.7	0.5
	April	7		31.71	25.1	5.6
		8		31.21	23.2	7.3
		10		31.53	23.5	6.6
		14		31.53	20.7	11.0
		30		31.72	25.0	15.8
	Mai	17		31.33	25.6	12.8
		29	O	31.50	20.7	17.2
		30		31.04	20.6	18.7
98	März	4	W	31.31	28.0	— 1.2
		14		31.90	22.5	+ 7.7
	April	5	O	31.38	20.1	2.1
		6		31.59	17.4	3.6
		7		31.68	16.2	11.2
		9		31.41	21.6	14.7
		11		31.04	27.1	11.3
		15		31.26	20.5	5.6
		16		31.25	24.9	8.5
		26	W	30.87	28.0	11.3
		27		31.23	30.9	13.4
	Mai	2		31.06	24.6	15.9
		3		30.63	27.5	17.0
				31.47		

4 H. Drac. U. C.

Datum			Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
				+53°35′		
96	Sept.	17	W	53″.19	18.1	+16°.1
	Okt.	9		54.44	20.6	12.7
		10		54.11	25.7	13.9
		16		53.86	21.9	7.7
		24	O	54.13	21.6	5.4
		26		53.67	23.8	4.2
97	Aug.	18	W	53.37	24.3	19.1
		24		53.65	23.0	11.9
	Sept.	24	O	52.89	16.2	14.3
		28		53.34	19.0	15.5
		30		53.23	24.2	15.4
	Okt.	1		53.47	26.4	15.3
		15		54.07	20.9	12.1
		25		53.87	12.0	5.9
		27		53.70	9.9	5.8
		30		54.17	13.7	4.0
				53.69		

δ Urs. maj. O. C.

$12^h\,10^m\,20^s$

Datum			Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
				+ 9°23′		
96	Sept.	27	W	30″.35	23.8	+15°.7
	Okt.	15		30.10	21.0	12.8
	Nov.	5	O	30.03	11.9	4.0
97	März	4	W	30.95	28.6	1.4
		10		30.51	21.7	0.5
	April	7		30.10	25.1	5.6
		8		30.86	23.2	7.3
		10		30.48	23.5	6.3
		14		30.30	20.7	11.0
		30		30.26	25.1	15.7
	Mai	12		30.06	24.6	3.6
		17		30.31	25.6	12.8
		29	O	29.81	20.6	17.2
		30		30.31	20.6	18.6
	Juni	25		30.46	23.4	27.1
98	März	4	W	30.37	28.0	— 1.2
		14		30.58	22.5	+ 7.6
	April	5	O	30.16	20.1	2.1
		6		30.00	17.4	3.6
		7		30.27	16.2	11.3
		9		30.31	21.6	14.6
		11		29.77	27.1	11.3
		15		29.98	20.5	5.6
		16		30.00	24.9	8.5
		26	W	30.18	28.0	11.2
		27		30.63	30.9	13.4
	Mai	2		30.36	24.6	15.9
		3		30.05	27.5	16.9
				30.27		

δ Urs. maj. U. C.

Datum			Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
				+74°10′		
96	Sept.	17	W	57″.15	18.1	+16°.1
		18		56.82	23.7	19.2
		22		55.60	26.5	8.9
	Okt.	2		54.96	22.4	12.8
		6		54.30	18.4	9.6
		7		54.23	17.9	11.4
		9		57.04	20.6	12.6
		10		55.78	25.7	13.9
		16		54.44	21.9	7.7
		24	O	53.29	21.6	5.4
		25		53.84	24.0	5.8
		26		55.44	23.8	4.0
97	Aug.	18	W	55.08	24.3	19.0
		24		54.81	23.0	11.9
	Sept.	24	O	54.15	16.2	14.3

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 — Brm.	Th.
		δ Urs. maj. U. C. Forts.		
97 Sept. 28	O	54″79	19.0	+15°5
30		54.18	24.2	15.4
Okt. 1		54.14	26.4	15.4
14		54.76	21.9	9.5
15		53.68	20.9	12.1
27		55.43	9.9	5.7
30		56.60	13.7	4.0
		55.02		
		η Virginis.		
		$12^h 14^m 38^s$		
		−48°18′		
97 März 4	W	26″61	28.6	+ 1°3
April 7		26.39	25.1	5.6
8		26.26	23.2	7.3
10		26.50	23.5	6.4
14		26.50	20.7	11.0
30		26.53	25.1	15.6
Mai 12		26.82	24.6	3.5
17		25.92	25.6	12.8
29	O	26.31	20.6	17.2
30		26.38	20.6	18.4
Juni 25		26.50	23.4	27.1
98 März 4	W	26.67	28.0	− 1.1
14		25.67	22.5	+ 7.6
April 5	O	26.86	20.1	2.0
6		25.93	17.4	3.6
7		25.99	16.2	11.3
9		26.60	21.6	14.5
11		26.53	27.1	11.3
15		26.40	20.5	5.5
16		26.39	24.9	8.4
26	W	26.49	28.0	11.1
27		25.34	30.9	13.3
Mai 2		26.04	24.6	15.9
3		26.17	27.5	16.9
		26.39		
		δ Corvi.		
		$12^h 24^m 32^s$		
		−64°9′		
97 März 10	W	17″54	21.8	+ 0°5
April 3		17.83	33.1	2.3
7		18.33	25.1	5.6
8		18.57	23.2	7.3
9		17.86	20.6	5.6
10		17.32	23.5	6.4
14		18.54	20.8	11.0
30		18.22	25.2	15.6

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 — Brm.	Th.
97 Mai 12	W	16″96	24.6	+ 3°5
17		17.49	25.6	12.8
29	O	17.12	20.6	17.0
30		17.71	20.6	18.2
Juni 25		17.63	23.2	27.0
98 April 5		17.11	20.0	2.0
6		17.64	17.5	3.4
11		16.86	27.2	11.3
15		17.92	20.5	5.4
16		17.34	25.0	8.3
26	W	16.95	28.1	10.9
27		16.88	31.0	13.2
Mai 3		17.82	27.5	16.8
		17.66		
		B. A. C. 4253.		
		$12^h 32^m 14^s$		
		−74°46′		
97 März 4	W	56″08	28.6	+ 1°2
10		57.11	21.8	0.6
April 3		56.27	33.1	2.3
7		56.47	25.1	5.6
8		56.67	23.2	7.2
9		56.35	20.6	5.5
10		55.61	23.6	6.2
14		57.48	20.8	11.0
30		56.68	25.2	15.7
Mai 12		54.73	24.5	3.4
17		56.06	25.6	12.8
21	O	55.99	29.1	17.7
29		56.68	20.6	16.8
30		57.51	20.5	18.1
98 April 5		57.07	20.0	2.1
6		57.15	17.5	3.3
11		55.10	27.2	11.3
15		57.00	20.5	5.3
16		57.59	25.0	8.2
26	W	55.83	28.1	10.8
27		56.24	31.0	13.1
		56.51		
		ε Urs. maj. O. C.		
		$12^h 49^m 30^s$		
		+ 8°18′		
96 Sept. 28	W	20″34	23.9	+16°2
Okt. 15		21.34	21.0	13.6
Nov. 4	O	21.45	10.8	2.9
5		20.81	12.0	5.0
97 März 4	W	20.52	28.7	1.2
10		20.76	21.8	0.7

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 − Brm.	Th.
	ε Urs. maj.	O. C.	Forts.	
97 April 3	W	20″.79	33.1	+ 2°.2
5		20.70	25.5	3.0
7		21.22	25.1	5.6
8		20.53	23.2	6.8
9		20.67	20.6	5.3
10		20.65	23.7	6.2
14		21.11	20.8	11.0
17		21.01	18.5	9.8
27		20.79	17.4	10.9
30		21.42	25.3	15.6
Mai 12		20.51	24.4	3.3
17		20.76	25.5	12.8
21	O	21.68	29.0	17.6
29		21.70	20.4	17.0
30		21.80	20.3	18.1
Juni 1		21.35	22.5	19.9
12		21.33	13.7	17.7
13		21.39	15.3	20.1
14		21.35	19.1	21.7
23		21.13	17.1	21.3
24		21.03	20.4	24.1
25		20.75	23.0	26.7
Juli 2	W	20.65	22.8	27.9
Aug. 18		20.72	22.2	27.9
19		21.20	25.6	28.5
26		20.62	22.7	19.0
Sept. 9		20.57	22.6	20.0
18	O	21.14	25.8	17.7
21		21.00	24.3	14.2
25		21.36	13.9	20.0
Okt. 10		20.58	18.7	9.6
11		20.68	22.1	11.5
24		20.75	11.5	7.9
98 März 11	W	21.10	22.0	− 1.4
14		21.14	22.5	+ 7.6
31		20.30	29.2	6.3
April 6	O	20.64	17.5	3.3
7		21.13	16.3	11.3
11		21.19	27.3	11.3
15		20.43	20.6	5.2
26	W	21.27	28.3	10.6
27		21.35	31.0	13.0
Mai 2		20.68	24.5	15.3
3		20.87	27.5	16.4
		20.95		
	ε Urs. maj.	U. C.		
		+75°16′		
96 Sept. 18	W	5″.43	24.2	+17°.0
22		5.45	26.7	8.7

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 − Brm.	Th.
96 Okt. 2	W	2″.71	22.7	+12°.7
6		6.18	18.7	9.7
7		4.65	17.9	10.6
9		6.51	20.9	12.3
16		5.85	21.9	7.4
24	O	3.20	21.5	5.2
25		7.08	24.0	5.5
26		3.22	24.0	3.7
Nov. 5		4.55	9.5	1.6
13		5.63	21.0	− 2.7
97 Juni 1		3.87	21.6	+19.1
23		7.03	18.2	16.1
24		4.88	21.5	18.1
27		4.89	21.0	18.3
Aug. 18	W	7.17	24.7	19.0
24		4.23	23.0	12.0
Sept. 9		4.44	25.3	12.9
24	O	4.02	16.2	14.1
28		3.32	19.2	15.4
30		4.40	24.4	15.0
Okt. 27		4.87	9.9	5.7
30		4.85	13.7	4.0
Nov. 19		5.04	12.4	8.9
Dec. 10		4.82	28.3	1.4
		4.92		
	12 Can. ven. sq.	$12^h 51^m 13^s$		
		− 9°20′		
96 Okt. 15	W	18″.47	21.0	+13°.6
Nov. 4	O	17.83	10.8	2.9
5		17.98	12.0	5.0
97 März 4	W	18.93	28.7	1.2
10		19.29	21.8	0.6
April 3		18.82	33.1	2.2
5		18.69	25.5	3.0
7		18.35	25.1	5.6
8		18.98	23.2	6.8
9		19.24	20.6	5.3
10		18.45	23.8	6.2
14		19.03	20.8	11.0
17		19.34	18.5	9.8
27		18.66	17.4	10.9
30		18.44	25.3	15.6
Mai 12		18.73	24.4	3.3
17		18.51	25.5	12.8
21	O	18.57	29.0	17.6
29		18.63	20.4	17.0
30		18.32	20.3	18.1
Juni 1		18.09	22.5	19.9
12		17.90	13.7	17.6

12 Can. ven. sq. Forts.

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
97 Juni 13	O	18″72	15.3	+20°1
14		18.76	19.1	21.7
23		17.95	17.1	21.3
24		18.25	20.4	24.1
25		18.28	23.0	26.7
Juli 2	W	18.84	22.8	27.9
Aug. 26		18.92	22.7	19.0
98 März 11		18.85	22.0	− 1.4
14		18.93	22.5	+ 7.6
31		19.37	29.2	6.3
April 6	O	18.76	17.5	3.3
7		18.73	16.3	11.3
11		18.44	27.3	11.3
15		18.66	20.6	5.2
26	W	18.57	28.2	10.6
27		18.38	31.0	13.0
Mai 2		19.04	24.5	15.3
3		19.39	27.5	16.4
		18.64		

Lal. 24277.
$12^h 58^m 15^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		−68°14′		
97 März 4	W	37″60	28.7	+ 1°2
10		36.80	21.8	0.6
April 3		36.01	33.1	2.2
7		35.99	25.1	5.6
8		36.52	23.2	6.6
9		35.80	20.6	5.3
10		36.21	23.8	6.2
14		36.66	20.8	10.8
17		36.63	18.5	9.7
27		35.56	17.4	10.8
30		36.19	25.4	15.6
Mai 12		35.96	24.3	3.2
17		35.90	25.5	12.7
21	O	35.19	29.0	17.6
29		36.34	20.3	17.0
30		36.03	20.3	18.1
Juni 1		36.06	22.5	19.8
98 März 11	W	35.16	22.0	− 1.4
April 6	O	35.41	17.6	+ 3.4
11		35.47	27.3	11.2
15		35.54	20.6	5.1
16		36.62	25.1	8.1
27	W	34.54	31.0	13.0
Mai 2		36.13	24.5	15.2
3		35.45	27.5	16.3
		36.07		

ϑ Virginis.
$13^h 4^m 37^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		−53°12′		
97 März 4	W	7″31	28.7	+ 1°3
10		7.58	21.8	0.6
April 3		7.20	33.1	2.2
5		7.36	25.5	2.8
7		6.87	25.1	5.6
8		7.59	23.2	6.6
9		8.21	20.6	5.3
10		7.29	23.8	6.2
14		7.64	20.8	10.7
17		7.26	18.6	9.7
30		7.76	25.4	15.6
Mai 12		6.94	24.3	3.2
17		6.72	25.5	12.7
21	O	7.03	29.0	17.6
29		7.49	20.2	17.0
30		7.46	20.3	18.1
Juni 1		7.50	22.5	19.8
12		7.27	13.7	17.5
13		7.59	15.3	19.9
14		6.77	19.1	21.7
24		7.19	20.4	23.8
25		7.15	23.0	26.6
98 März 11	W	(4.79)	22.0	− 1.3
April 6	O	7.13	17.6	+ 3.5
11		7.19	27.4	11.2
15		7.03	20.6	5.0
16		7.52	25.1	8.1
26	W	6.66	28.4	10.6
27		5.99	31.0	13.0
Mai 2		6.89	24.5	15.2
3		6.63	27.5	16.2
		7.30		

η Urs. maj. O. C.
$13^h 43^m 29^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		+ 1°36′		
96 Sept. 28	W	50″76	24.0	+17°1
Okt. 15		50.90	21.0	14.4
Nov. 4	O	50.71	10.6	3.9
5		51.21	12.2	5.9
97 März 4	W	50.74	29.0	1.2
10		51.16	21.9	0.6
April 3		50.72	33.1	3.0
5		50.75	25.6	2.2
7		51.14	25.1	5.2
8		50.88	23.2	6.5
9		51.05	20.6	5.1

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760—Brm.	Th.
		η Urs. maj. O. C. Forts.		
97 April 10	W	51".39	23.8	+ 6°0
14		50.76	21.0	10.0
17		51.07	18.8	9.4
28		51.20	18.8	13.3
30		50.53	25.8	15.3
Mai 12		50.63	24.3	2.9
17		50.84	25.5	12.7
21	O	51.58	29.2	15.2
29		51.24	19.9	17.1
30		51.65	20.2	18.0
Juni 1		51.37	22.3	19.4
12		51.38	13.6	17.1
13		51.49	15.3	18.9
14		51.95	19.1	19.8
23		51.20	17.1	19.6
24		51.41	20.4	23.1
25		51.53	23.0	25.3
Juli 2	W	50.92	22.3	27.4
Aug. 18		50.91	22.2	28.0
26		50.67	22.8	19.4
Nov. 30	O	51.42	18.3	− 1.1
98 März 11	W	50.47	22.1	1.9
14		51.08	22.4	+ 7.5
31		50.59	29.3	6.2
April 5	O	51.00	19.7	2.1
6		50.94	17.6	3.6
11		50.94	27.4	10.8
26	W	50.81	28.6	10.7
Mai 2		50.63	24.5	14.8
3		49.96	27.5	15.4
		51.06		
		η Urs. maj. U. C.		
		+81°57′		
96 Sept. 18	W	33".10	24.8	+16°1
22		36.39	26.9	9.2
Okt. 2		34.91	22.9	12.4
6		43.29	19.1	9.3
7		34.07	17.9	11.7
9		34.06	21.0	12.4
16		36.28	21.6	9.3
17		34.87	30.0	7.3
18		34.20	30.4	6.4
21	O	31.91	29.8	7.6
24		32.37	21.3	5.1
25		30.39	24.2	4.6
26		33.77	24.3	3.1
97 Aug. 18	W	33.40	25.0	18.4
24		34.26	23.2	11.9
Sept. 9		36.84	25.5	12.5
97 Sept. 24	O	35".07	16.2	+14°9
29		36.82	21.4	16.2
30		33.87	24.4	14.5
Okt. 15		39.89	21.1	11.6
27		36.49	10.0	5.4
28		34.84	11.7	3.3
29		35.96	13.3	3.0
Dec. 6		37.68	18.7	0.2
10		32.53	28.3	1.0
		34.75		
		i Draconis. O. C.		
		$13^h 48^m 25^s$		
		+17°1′		
97 April 5	W	8".72	25.6	+ 2°2
10		8.58	23.9	5.9
17		8.84	18.8	9.3
28		8.29	18.8	13.3
Mai 12		8.10	24.3	2.9
17		7.86	25.4	12.6
21	O	8.49	29.2	15.4
Juni 1		8.46	22.2	19.4
3		8.47	23.1	19.7
5		8.42	24.8	20.9
12		8.13	13.6	17.0
13		8.34	15.3	18.7
14		9.30	19.1	19.7
23		8.72	17.1	19.4
24		8.25	20.4	23.0
25		8.43	23.0	25.3
98 März 11	W	8.09	22.1	− 1.9
14		8.21	22.4	+ 7.4
31		8.28	29.3	6.3
April 11	O	8.48	27.4	10.8
26	W	7.97	28.6	10.7
Mai 2		7.75	24.5	14.7
3		7.44	27.5	15.4
		8.42		
		i Draconis. U. C.		
		+66°33′		
96 Okt. 9	W	17".03	20.9	+12°3
16		16.72	21.6	9.4
17		16.31	30.0	7.5
18		16.68	30.4	6.5
21	O	17.45	29.8	7.5
26		15.84	24.3	3.2
97 Aug. 24	W	17.15	23.2	11.9
Sept. 24	O	17.18	16.2	15.0
28		16.20	19.3	14.7

i Draconis. U. C. Forts.

Datum			Kr.	Z. D. 1897.0	760 — Brm.	Th.
97	Sept.	29	O	17″.37	21.4	+16°.1
		30		16.04	24.4	14.4
	Okt.	15		18.32	21.1	11.6
		27		18.08	10.0	5.4
		28		17.20	11.7	3.3
		29		16.31	13.3	2.9
	Dec.	6		16.10	18.7	0.2
		10		18.36	28.3	1.0
				16.96		

π Hydrae.
14h 0m 30s

Datum			Kr.	Z. D. 1897.0	760 — Brm.	Th.
				−74°23′		
97	April	5	W	55″.79	25.6	+ 2°.2
		10		56.96	24.0	5.7
		17		55.94	18.9	9.2
		28		57.21	18.9	13.3
	Mai	17		57.50	25.3	12.5
		21	O	56.92	29.2	15.8
	Juni	1		58.02	22.2	19.4
		3		56.48	23.1	19.8
		5		55.81	24.7	21.2
		12		57.43	13.6	16.9
		13		56.12	15.3	18.8
		14		56.11	19.1	19.6
		24		57.30	20.4	23.0
		25		56.13	22.9	24.8
98	März	11	W	56.67	22.1	− 2.0
		31		57.18	29.3	+ 6.5
	April	11	O	56.55	27.5	10.7
		26	W	56.76	28.7	10.7
	Mai	2		57.61	24.5	14.5
		3		57.87	27.5	15.3
				56.73		

α Draconis. O. C.
14h 1m 36s

Datum			Kr.	Z. D. 1897.0	760 — Brm.	Th.
				+16°39′		
97	April	5	W	17″.90	25.6	+ 2°.2
		10		18.37	24.0	5.7
		17		18.15	18.9	9.2
		28		17.98	18.9	13.3
	Mai	12		17.90	24.1	2.9
		17		17.99	25.3	12.5
		21	O	18.33	29.2	15.7
	Juni	1		18.32	22.2	19.4
		3		18.59	23.1	19.8
		5		18.37	24.7	21.2
		12		18.49	13.6	16.9
97	Juni	13	O	18″.73	15.3	+18°.8
		14		18.46	19.1	19.6
		23		17.92	17.1	19.2
		24		18.47	20.4	23.0
		25		18.22	22.9	24.8
98	März	11	W	18.28	22.1	− 2.0
		31		17.88	29.3	+ 6.5
	April	11	O	18.34	27.5	10.7
		26	W	18.38	28.7	10.7
	Mai	2		18.21	24.6	14.5
		3		17.67	27.6	15.3
				18.25		

α Draconis. U. C.

Datum			Kr.	Z. D. 1897.0	760 — Brm.	Th.
				+66°55′		
96	Okt.	9	W	6″.18	20.9	+11°.9
		16		8.28	21.6	9.0
		17		7.97	30.0	7.9
		18		7.13	30.6	6.6
		21	O	7.20	29.7	7.1
		26		5.67	24.2	3.3
97	Aug.	24	W	6.16	23.2	12.0
	Sept.	24	O	7.33	16.2	14.9
		28		6.10	19.3	14.5
		29		7.38	21.5	16.0
		30		7.05	24.4	14.4
	Okt.	15		6.71	21.1	11.6
		27		7.06	10.0	5.4
		28		7.40	11.7	3.3
		29		7.90	13.4	2.8
		30		6.30	13.8	2.9
	Dec.	6		7.37	18.7	0.3
				7.02		

κ Virginis.
14h 7m 24s

Datum			Kr.	Z. D. 1897.0	760 — Brm.	Th.
				−58°0′		
97	April	5	W	25″.42	25.7	+ 2°.1
		10		25.89	24.1	5.6
		17		25.66	19.0	9.1
		28		26.06	18.9	13.3
	Mai	12		26.01	24.1	3.1
		17		25.51	25.3	12.5
		21	O	25.41	29.2	15.6
		22		25.85	34.9	15.7
	Juni	1		26.55	22.2	19.4
		3		26.26	23.1	19.8
		5		26.25	24.7	21.4
		12		25.97	13.6	16.8
		13		26.17	15.3	19.0

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 — Brm.	Th.
		κ Virginis. Forts.		
97 Juni 14	O	25″47	19.1	+ 19°6
23		26.24	17.1	19.2
24		25.33	20.4	22.9
25		25.83	22.8	24.7
98 März 11	W	26.02	22.1	− 2.1
31		25.43	29.3	+ 6.5
April 11	O	25.79	27.5	10.7
26	W	24.92	28.7	10.7
Mai 2		25.18	24.6	14.4
3		25.88	27.6	15.1
		25.86		
		λ Bootis. O. C.		
		14h 12m 28s		
		− 1°39′		
97 April 5	W	6″19	25.7	+ 2°0
10		6.25	24.2	5.5
17		6.07	19.0	9.1
28		6.20	18.9	13.2
Mai 12		6.39	24.0	3.3
17		6.77	25.3	12.4
21	O	6.07	29.3	15.6
22		6.49	34.9	15.7
Juni 1		6.28	22.1	19.4
3		6.27	23.1	19.8
5		6.24	24.6	21.6
12		6.50	13.6	16.7
13		6.37	15.3	19.1
14		6.08	19.1	19.6
23		6.25	17.1	19.0
24		6.50	20.4	22.8
25		6.45	22.6	24.6
98 März 11	W	6.60	22.1	− 2.2
31		6.41	29.3	+ 6.6
April 11	O	6.19	27.5	10.7
26	W	7.11	28.7	10.6
Mai 2		6.57	24.6	14.3
3		6.52	27.6	15.0
		6.32		
		λ Bootis. U. C.		
		+ 85°13′		
96 Okt. 7	W	33″75	17.9	+ 11°4
9		27.20	21.0	12.0
16		35.18	21.6	7.2
17		31.91	30.0	8.0
18		36.60	30.6	6.8
21	O	40.78	29.7	7.1
26		37.38	24.1	3.0

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 — Brm.	Th.
97 Sept. 24	O	34″57	16.2	+ 14°3
Okt. 27		36.35	10.0	5.4
28		34.34	11.8	3.1
29		31.90	13.4	2.7
30		37.63	13.8	2.6
Nov. 8		27.61	11.5	− 1.2
11		32.66	11.4	6.2
19		26.77	12.3	+ 10.0
Dec. 6		37.88	18.7	0.5
		33.91		
		ϑ Bootis. O. C.		
		14h 21m 41s		
		+ 4°6′		
97 April 5	W	49″52	25.7	+ 2°0
10		49.38	24.2	5.6
17		49.32	19.1	9.1
28		49.02	18.9	13.2
Mai 12		49.45	24.0	3.4
17		49.15	25.3	12.4
21	O	49.94	29.3	15.5
22		49.09	34.9	15.8
29		49.67	19.6	16.9
Juni 1		49.46	22.1	19.4
2		49.99	21.6	20.1
3		49.39	23.1	19.8
5		49.53	24.6	21.7
12		49.37	13.5	16.6
13		49.54	15.3	19.0
14		48.94	19.1	19.6
98 März 31	W	49.32	29.3	6.6
April 11	O	49.62	27.6	10.7
26	W	49.29	28.8	10.6
Mai 2		49.70	24.6	14.2
3		49.29	27.6	14.8
		49.29		
		ϑ Bootis. U. C.		
		+ 79°27′		
96 Okt. 7	W	37″76	17.9	+ 11°4
9		36.23	21.1	12.0
16		38.11	21.6	7.0
17		36.40	30.0	7.6
18		37.23	30.6	7.0
21	O	36.57	29.7	7.1
26		37.44	24.0	2.9
97 Sept. 24		36.02	16.2	13.8
28		36.67	19.4	14.2
Okt. 27		37.01	10.0	5.4
28		38.27	11.8	3.1

θ Bootis. U. C. Forts.

Datum			Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
97	Okt.	29	O	36".50	13.4	+ 2°.7
		30		35.03	13.8	2.4
	Nov.	8		34.12	11.5	— 1.2
		11		38.10	11.4	6.3
		19		37.38	12.3	+10.0
				36.81		

ρ Bootis.

$14^h 27^m 23^s$

Datum			Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
				−17°23′		
97	April	5	W	21".58	25.7	+ 2°.0
		10		21.40	24.3	5.6
	Mai	12		21.54	24.0	3.4
		22	O	21.63	34.9	15.8
		29		21.83	19.6	16.9
	Juni	1		21.58	22.1	19.4
		2		21.74	21.6	20.1
		5		21.93	24.7	21.8
		12		21.38	13.5	16.4
		13		21.40	15.3	18.9
		14		21.22	19.1	19.0
		18		21.41	25.3	13.2
98	März	31	W	21.85	29.3	6.6
	April	11	O	21.40	27.6	10.7
		26	W	21.42	28.8	10.6
		27		21.58	31.0	12.5
	Mai	2		22.05	24.6	14.2
		3		21.79	27.6	14.7
				21.53		

β Urs. min. O. C.

$14^h 51^m 0^s$

Datum			Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
				+26°21′		
97	April	5	W	48".40	25.9	+ 1°.9
		10		48.64	24.5	5.7
		17		48.60	19.4	9.1
		28		47.97	19.1	12.9
	Mai	12		48.41	24.0	3.3
		21	O	48.54	29.3	15.8
		22		49.17	34.9	15.6
		26		49.03	32.6	13.8
		29		48.82	19.5	16.7
	Juni	1		48.64	22.1	19.4
		2		(49.94)	21.6	20.1
		3		48.33	23.3	19.0
		5		49.20	24.7	20.5
		13		48.57	15.3	18.6
		14		48.33	19.1	19.0
97	Juni	18	O	48".29	25.4	+13°.1
		28	W	48.12	19.2	19.2
98	März	31		48.25	29.4	5.5
	April	26		47.98	28.9	10.4
		27		48.15	31.1	12.4
	Mai	2		47.99	24.7	13.9
				48.55		

β Urs. min. U. C.

Datum			Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
				−57°12′		
97	Okt.	7	W	37".03	17.9	+11°.1
		16		36.74	21.7	8.7
		18		37.69	30.6	7.0
		21	O	36.84	29.9	7.0
97	Juni	1		36.61	21.7	21.0
	Sept.	28		36.51	19.5	14.1
	Okt.	28		36.66	11.8	3.2
		29		36.52	13.5	2.3
		30		36.91	13.9	2.5
	Nov.	8		36.48	11.7	— 1.2
		11		36.64	11.5	6.4
		19		36.98	12.4	+ 9.3
		22		36.68	7.7	7.1
		26		36.60	12.8	— 5.2
				36.78		

ι Librae.

$15^h 6^m 21^s$

Datum			Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
				−67°36′		
97	April	5	W	53".47	26.0	+ 1°.8
		17		53.73	19.4	9.1
		28		53.93	19.1	12.8
	Mai	12		52.89	24.0	3.2
		21	O	53.27	29.4	15.8
		22		53.11	34.9	15.5
		29		53.18	19.5	16.8
		30		53.15	20.3	17.6
	Juni	1		53.28	22.0	19.5
		3		54.02	23.5	18.9
		5		53.13	24.7	20.5
		13		52.92	15.3	18.5
		14		52.78	19.1	18.8
		18		52.27	25.4	12.6
		28	W	53.15	19.1	19.2
98	März	31		52.71	29.6	4.4
	April	26		52.92	29.0	10.3
		27		53.72	31.1	12.4
	Mai	2		52.62	24.8	13.8
				53.19		

β Librae.
$15^h 11^m 28^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		−57°12′		
97 April 5	W	56″68	26.1	+ 1°8
17		57.16	19.5	9.1
28		57.90	19.1	12.8
Mai 12		56.93	24.0	3.2
21	O	56.86	29.4	15.8
22		56.09	34.9	15.4
26		56.10	32.6	13.7
29		56.63	19.4	16.8
30		56.49	20.3	17.6
Juni 1		56.88	22.0	19.4
3		57.38	23.5	18.8
5		57.08	24.7	20.6
13		57.08	15.3	18.5
14		56.13	19.1	18.7
18		56.75	25.4	12.5
28	W	57.69	19.0	19.2
98 März 31		56.69	29.7	4.5
April 26		56.18	29.0	10.2
27		56.30	31.2	12.5
Mai 2		55.87	24.8	13.7
		56.86		

ι Draconis. O. C.
$15^h 22^m 38^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		+11°6′		
97 April 28	W	49″37	19.1	+12°7
Mai 12		49.56	23.9	3.2
21	O	49.59	29.4	15.8
26		49.61	32.6	13.7
29		49.92	19.4	16.7
30		49.74	20.3	17.6
Juni 1		49.43	22.0	19.4
3		49.01	23.5	18.8
5		49.46	24.7	20.5
13		49.49	15.3	18.5
14		49.17	19.2	18.6
18		49.44	25.5	12.4
22		49.22	16.9	15.1
24		49.09	20.2	22.5
28	W	49.35	19.0	19.2
98 März 31		49.05	29.8	4.7
April 26		49.24	29.1	10.0
27		49.56	31.2	12.4
		49.49		

ι Draconis. U. C.

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		+72°27′		
96 Okt. 7	W	36″18	17.9	+10°9
16		36.13	21.9	7.0
96 Okt. 18	W	36″39	30.7	+ 7°1
28	O	35.74	29.1	12.5
97 Okt. 28		36.21	11.9	3.0
29		35.14	13.6	2.2
30		36.98	14.0	2.0
Nov. 11		35.88	11.6	— 6.6
19		36.16	12.4	+ 9.2
22		35.61	7.8	7.0
26		36.86	13.1	— 5.3
Dec. 31	W	36.53	27.0	+ 1.2
		36.16		

ϑ Coronae bor.
$15^h 28^m 46^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		−16°30′		
97 April 28	W	22″23	19.1	+12°7
Mai 12		21.93	23.9	3.2
21	O	21.74	29.4	15.7
22		21.48	35.0	15.2
26		21.82	32.6	13.6
29		21.97	19.4	16.6
30		21.67	20.3	17.6
Juni 1		21.99	22.0	19.4
3		22.38	23.5	18.9
5		21.80	24.7	20.5
13		22.41	15.3	18.6
14		21.84	19.2	18.5
18		21.26	25.5	12.3
22		22.31	16.9	15.0
24		21.77	20.2	22.5
28	W	22.89	19.0	19.2
98 März 31		22.05	29.8	5.0
April 26		22.08	29.1	10.0
27		22.23	31.2	12.2
		21.97		

α Cor. bor.
$15^h 30^m 20^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		−21°9′		
97 April 28	W	5″84	19.1	+12°7
Mai 12		5.55	23.9	3.2
21	O	4.92	29.4	15.7
22		5.23	35.0	15.2
26		5.50	32.6	13.6
29		5.21	19.4	16.6
30		5.47	20.3	17.5
Juni 1		5.40	22.0	19.4
3		5.60	23.5	19.0
5		5.41	24.7	20.5
13		4.73	15.3	18.6
14		5.04	19.2	18.5

α Cor. bor. Forts.

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
97 Juni 18	O	4″.62	25.5	+12°.3
22		5.33	16.9	15.0
24		5.71	20.2	22.5
28	W	5.98	19.0	19.1
98 März 31		5.60	29.8	5.1
April 26		5.56	29.1	10.0
27		4.92	31.2	12.2
		5.36		

12 H. Drac. O.C.

$15^h 45^m 6^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		+14°42′		
97 Mai 21	O	17″.70	29.4	+15°.5
22		16.88	35.1	15.1
26		17.26	32.6	13.5
29		17.61	19.4	16.5
30		17.46	20.3	17.5
Juni 5		16.87	24.7	20.5
13		17.03	15.3	18.6
18		17.56	25.6	12.0
22		17.21	16.9	15.0
24		17.36	20.3	22.4
28	W	17.27	19.0	19.1
98 März 31		17.26	29.7	5.5
April 26		17.85	29.3	9.9
27		17.56	31.3	11.8
		17.29		

12 H. Drac. U.C.

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		+68°52′		
96 Okt. 18	W	8″.92	30.7	+ 6°.4
28	O	7.37	29.2	12.3
97 Okt. 27		8.73	10.2	4.1
28		8.30	11.9	2.9
29		7.90	13.6	2.0
30		8.04	14.1	2.0
Nov. 11		8.79	11.7	− 6.6
22		8.13	7.9	+ 6.0
26		8.09	13.2	− 5.2
Dec. 31	W	8.31	26.9	+ 1.2
		8.26		

ζ Urs. min. O.C.

$15^h 47^m 44^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		+29°53′		
97 Mai 21	O	53″.70	29.4	+15°.5
22		52.96	35.2	15.1
26		53.42	32.6	13.4
29		52.95	19.4	16.4
97 Mai 30	O	53″.55	20.3	+17°.4
Juni 5		53.30	24.7	20.5
13		53.61	15.3	18.5
18		53.92	25.7	12.0
22		53.04	16.9	15.0
24		53.29	20.3	22.4
28	W	53.55	19.0	19.2
98 März 31		53.29	29.6	5.6
April 26		53.18	29.3	9.9
27		53.11	31.3	11.7
		53.39		

ζ Urs. min. U.C.

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		+53°40′		
96 Okt. 18	W	31″.77	30.7	+ 6°.3
28	O	31.76	29.2	12.3
97 Okt. 27		31.31	10.2	4.1
28		31.35	11.9	2.9
29		30.82	13.6	2.0
30		31.28	14.1	1.9
Nov. 11		31.87	11.7	− 6.6
22		30.95	7.9	+ 6.0
26		31.18	13.3	− 5.2
Dec. 31	W	31.22	26.9	+ 1.2
		31.35		

δ Scorpii.

$15^h 54^m 15^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		−70°32′		
97 Mai 21	O	29″.18	29.4	+15°.5
22		28.67	35.2	15.1
26		28.48	32.6	13.4
29		29.59	19.4	16.4
30		28.64	20.4	17.2
Juni 5		30.12	24.7	20.5
11		29.49	14.5	13.8
13		29.71	15.3	18.4
18		27.38	25.7	12.0
22		29.80	16.8	15.0
28	W	27.92	19.0	19.2
98 März 31		28.49	29.6	5.8
April 26		28.46	29.4	9.9
27		27.90	31.3	11.6
		28.95		

ϑ Draconis. O.C.

$15^h 59^m 58^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		+10°37′		
97 April 30	W	37″.37	27.2	+14°.5
Mai 21	O	38.22	29.5	15.5

ϑ Draconis. O. C. Forts.

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
97 Mai 22	O	37″.35	35.3	+15°.0
26		37.85	32.6	13.4
29		37.55	19.5	16.3
30		38.08	20.4	17.1
Juni 3		37.44	23.6	19.0
5		37.69	24.7	20.5
11		37.61	14.5	13.8
13		37.95	15.3	18.0
18		38.11	25.7	11.9
22		38.09	16.8	15.0
28	W	37.74	19.0	19.3
98 April 26		37.39	29.4	9.9
27		38.27	31.3	11.2
		37.77		

ϑ Draconis. U. C.

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		+72°56′		
96 Okt. 18	W	46″.84	30.8	+ 6°.2
28	O	47.36	29.4	12.1
97 Okt. 27		48.92	10.2	4.1
28		47.01	11.9	2.9
29		46.46	13.6	1.9
30		45.47	14.1	1.7
Nov. 11		47.54	11.8	− 6.6
22		48.64	7.9	+ 5.9
26		48.18	13.3	− 5.2
Dec. 31	W	47.40	26.9	+ 1.1
98 Jan. 8		45.34	18.4	1.3
		47.20		

φ Herculis. O. C.
16h 5m 31s

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		− 3°0′		
97 April 30	W	30″.04	27.2	+14°.4
Mai 21	O	29.15	29.6	13.4
22		29.72	35.3	15.0
26		29.34	32.7	13.3
29		29.58	19.5	16.1
30		29.53	20.4	17.0
Juni 3		29.39	23.6	19.0
5		29.76	24.6	20.5
11		29.13	14.5	13.8
13		29.14	15.3	18.0
18	W	29.20	25.7	11.9
28		29.69	19.0	19.3
98 April 26		29.96	29.4	9.9
27		29.56	31.4	10.8
		29.47		

φ Herculis. U. C.

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		+86°34′		
96 Okt. 18	W	56″.66	30.8	+ 6°.1
28	O	56.65	29.4	12.1
97 Okt. 27		56.62	10.2	4.1
30		59.88	14.1	1.6
Nov. 11		(44.65)	11.8	− 6.6
Dec. 6		58.28	18.5	0.5
31	W	59.84	26.9	+ 1.0
98 Jan. 8		56.47	18.4	1.3
		57.80		

τ Herculis. O. C.
16h 16m 39s

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		− 1°39′		
97 April 30	W	16″.83	27.3	+14°.2
Mai 21	O	15.96	29.6	13.4
22		15.83	35.3	14.9
26		16.04	32.7	13.3
30		15.54	20.4	16.9
Juni 3		15.83	23.6	18.9
5		15.95	24.6	20.5
11		15.87	14.5	13.8
13		15.31	15.4	18.0
18		15.26	25.8	11.7
23		15.76	17.0	18.7
24		15.36	20.4	21.4
25		15.07	22.6	23.5
28	W	16.52	18.9	19.3
98 April 26		16.38	29.4	9.8
27		15.93	31.4	10.7
		15.76		

τ Herculis. U. C.

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		+85°13′		
96 Okt. 18	W	44″.89	30.8	+ 6°.1
28	O	40.46	29.6	12.1
97 Okt. 27		36.52	10.3	3.7
28		47.00	11.9	2.8
30		37.90	14.1	1.6
Nov. 11		46.44	11.9	− 6.7
22		46.81	7.9	+ 5.9
Dec. 6		39.02	18.5	− 0.5
31	W	41.91	26.9	+ 0.8
98 Jan. 8		44.48	18.3	1.0
		42.54		

η Draconis. O. C.
16h 22m 36s

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		+13°32′		
97 April 30	W	3″.17	27.3	+14°.1
Mai 22	O	2.92	35.3	14.8

η Draconis. O. C. Forts.

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
97 Mai 26	O	3".27	32.7	+13°.3
30		3.26	20.5	16.9
Juni 3		2.92	23.6	18.9
11		3.59	14.5	13.7
13		3.34	15.4	18.0
18		2.84	25.9	11.7
23		3.48	17.0	18.7
24		3.03	20.4	21.7
25		3.53	22.6	23.5
28	W	3.06	18.9	19.3
98 April 26		3.73	29.5	9.8
27		3.93	31.4	10.7
		3.22		

η Draconis. U. C.

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		+70° 2′		
96 Okt. 18	W	22".64	30.8	+ 5°.9
28	O	23.52	29.6	12.1
97 Okt. 27		22.32	10.4	3.5
28		22.27	11.9	2.8
Nov. 11		21.99	11.9	− 6.8
22		21.75	7.9	+ 5.9
Dec. 6		21.40	18.5	− 0.5
31	W	22.05	26.9	+ 0.7
98 Jan. 8		22.42	18.3	0.8
März 1	O	22.31	24.3	4.2
4	W	21.71	27.8	4.2
11		21.77	21.4	4.1
		22.18		

α Scorpii. $16^h 23^m 5^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		−74° 24′		
97 Mai 26	O	58".02	32.7	+13°.3
30		58.73	20.5	16.9
Juni 5		58.66	24.6	20.6
11		58.66	14.5	13.7
13		59.50	15.4	18.0
18		58.32	25.9	11.7
23		58.36	17.0	18.7
24		58.56	20.4	21.7
25		59.01	22.6	23.5
28	W	58.26	18.9	19.3
98 April 26		58.45	29.5	9.8
27		58.49	31.4	10.7
		58.61		

β Herculis. $16^h 25^m 47^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		−26° 29′		
97 April 30	W	56".73	27.4	+14°.0
Mai 22	O	56.76	35.3	14.7
97 Mai 26	O	56".19	32.8	+13°.2
30		55.51	20.5	16.8
Juni 3		55.87	23.6	18.9
5		55.72	24.6	20.6
11		55.72	14.5	13.7
13		55.48	15.4	18.0
18		55.56	25.9	11.7
23		55.74	17.0	18.7
24		55.87	20.4	21.7
25		55.70	22.6	23.6
28	W	56.99	18.9	19.3
98 April 26		55.99	29.5	9.8
27		55.65	31.4	10.8
		55.90		

ζ Ophiuchi. $16^h 31^m 29^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		−58° 34′		
97 April 30	W	17".44	27.4	+13°.9
Mai 26	O	17.36	32.8	13.2
30		17.47	20.6	16.7
Juni 3		18.02	23.7	18.9
5		16.98	24.5	20.7
11		17.07	14.5	13.6
13		16.90	15.5	18.0
18		18.04	25.9	11.8
23		17.36	17.0	18.7
24		17.72	20.4	21.9
25		17.64	22.6	23.7
28	W	17.12	18.9	19.3
98 April 27		16.19	31.3	10.9
		17.42		

ζ Herculis. $16^h 37^m 24^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		−16° 25′		
97 April 30	W	24".92	27.4	+13°.9
Mai 22	O	24.87	35.3	14.3
26		25.37	32.8	13.2
30		25.04	20.7	16.5
Juni 3		25.36	23.7	19.0
5		24.92	24.5	20.7
11		24.89	14.5	13.6
13		24.72	15.5	18.1
18		24.98	25.9	11.8
23		24.97	17.0	18.7
24		24.75	20.4	21.9
25		24.83	22.6	23.7
28	W	25.39	18.9	19.3
98 April 27		24.80	31.3	11.0
		25.01		

ε Scorpii.
16h 43m 30s

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		−82° 19′		
97 Mai 26	W	7.″05	32.9	+13.°1
30	O	9.11	20.7	16.5
Juni 3		9.16	23.7	19.0
5		10.29	24.5	20.7
13		11.68	15.5	17.9
23		8.66	17.0	18.7
24		6.18	20.4	21.9
25		8.55	22.6	23.7
28	W	7.00	18.9	19.2
98 April 26		10.26	31.3	11.0
27		10.62	29.5	9.6
		8.64		

24 Ophiuchi.
16h 50m 35s

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		−71° 11′		
97 April 30	W	58.″26	27.5	+13.°9
Mai 26	O	58.39	33.0	13.0
30		57.96	20.7	16.5
Juni 5		59.08	24.6	20.7
11		58.49	14.5	13.4
13		58.36	15.5	17.8
14		59.19	19.9	17.8
23		59.06	17.0	18.7
24		57.24	20.4	22.0
25		58.59	22.6	23.7
28	W	58.95	18.8	19.2
98 April 27		57.27	31.3	10.9
		58.49		

ε Urs. min. O. C.
16h 56m 31s

Datum	Kr.		Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
			+33° 59′		
97 April 28	W	1	37.″54	19.3	+12.°0
30		3	36.86	27.5	13.9
Mai 12		1	37.58	24.2	3.2
26	O	3	37.22	33.0	12.7
30		3	36.61	20.8	16.4
Juni 3		2	37.18	23.7	19.1
5		3	36.82	24.6	20.7
11		3	36.96	14.5	13.4
13		3	37.19	15.6	17.8
14		3	37.09	19.9	17.8
23		3	36.38	17.0	18.7
24		3	37.18	20.4	22.1
25		3	37.22	22.6	23.7
98 April 27	W	5	37.07	31.3	10.8
			37.07		

ε Urs. min. U. C.

Datum	Kr.		Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
			+49° 34′		
97 Okt. 27	O	5	48.″03	10.7	+ 3.°2
28		5	48.59	11.9	2.5
Nov. 22		7	48.76	8.1	6.2
Dec. 6		7	48.43	18.5	− 0.3
10		3	48.48	29.5	+ 0.4
98 Jan. 8	W	4	48.38	18.1	1.0
März 1	O	5	48.66	24.4	3.5
4	W	5	47.75	27.5	2.9
11		4	47.64	21.3	3.4
14		4	48.53	23.0	11.3
			48.33		

60 Herculis.
17h 0m 36s

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		−35° 19′		
97 April 28	W	49.″92	19.3	+11.°9
30		49.92	27.5	13.9
Mai 12		50.05	24.2	3.2
26	O	50.63	33.1	12.6
30		49.98	20.8	16.4
Juni 3		50.51	23.7	19.1
5		50.49	24.6	20.7
11		49.95	14.5	13.3
13		50.61	15.6	17.8
14		50.35	19.9	17.7
23		50.95	17.0	18.7
24		50.22	20.4	22.1
25		49.89	22.6	23.7
98 April 27	W	49.16	31.3	10.7
		50.27		

η Ophiuchi.
17h 4m 28s

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		−63° 48′		
96 Sept. 4	O	37.″19	21.5	+19.°0
5		37.13	22.6	19.4
6		36.44	25.3	17.3
97 April 28	W	37.04	19.3	11.7
30		37.79	27.5	13.9
Mai 12		35.92	24.2	3.2
22	O	36.48	35.3	14.8
26		37.35	33.1	12.5
30		37.35	20.8	16.3
Juni 3		37.24	23.7	19.2
5		37.24	24.6	20.7
11		36.42	14.5	13.3
13		37.34	15.6	17.8
14		36.83	19.9	17.6

η Ophiuchi. Forts.

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
97 Juni 23	O	35.″99	17.0	+18.°7
24		37.04	20.4	22.2
25		36.94	22.6	23.7
98 April 27	W	36.14	31.3	10.7
		36.93		

ϑ Ophiuchi.
$17^h 15^m 41^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		−73°6′		
97 April 28	W	33.″84	19.3	+11.°3
30		34.29	27.7	13.9
Mai 12		35.54	24.2	3.1
22	O	34.65	35.3	14.8
26		33.56	33.1	12.3
Juni 3		34.31	23.7	19.3
5		33.05	24.6	20.7
11		33.36	14.5	13.1
14		34.09	20.0	17.5
23		34.83	17.0	18.7
24		33.24	20.4	22.2
25		33.28	22.6	23.7
Aug. 19	W	34.05	26.8	24.4
Sept. 2		34.81	25.1	23.4
9		34.33	24.5	17.9
		34.09		

51 Ophiuchi.
$17^h 25^m 8^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		−72°5′		
97 April 28	W	44.″06	19.3	+11.°0
30		45.44	27.8	13.9
Mai 12		44.55	24.1	3.1
Juni 3	O	46.10	23.8	19.0
5		46.37	24.7	20.8
11		45.45	14.5	13.0
14		44.47	20.0	17.1
23		46.61	17.0	18.7
24		45.41	20.4	22.0
25		45.66	22.6	23.7
Aug. 17	W	45.06	19.3	20.2
18		45.59	23.0	23.2
19		44.51	26.8	24.2
Sept. 9		46.27	24.5	17.5
		45.40		

β Draconis. O. C.
$17^h 28^m 6^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		+ 4°9′		
96 Sept. 4	O	52.″39	21.5	+18.°5
5		52.24	22.5	19.5
96 Sept. 6	O	51.″96	25.1	+17.°0
97 April 28	W	52.18	19.3	10.9
30		(53.21)	27.8	13.9
Mai 12		52.14	24.1	3.1
22	O	51.98	35.3	14.7
Juni 3		52.56	23.8	18.9
5		51.97	24.7	20.9
11		52.08	14.5	13.0
14		52.07	20.0	17.0
23		52.39	17.0	18.7
24		52.76	20.4	21.9
25		52.72	22.6	23.7
Aug. 17	W	52.44	19.3	20.2
18		51.76	23.0	23.2
19		51.79	26.8	24.1
30		52.44	22.9	20.2
31		51.83	23.8	22.4
Sept. 2		52.25	25.1	23.4
5		51.62	16.6	13.5
9		51.45	24.5	17.3
		52.12		

β Draconis. U. C.

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		+79°24′		
97 Okt. 27	O	33.″77	10.8	+ 2.°5
Nov. 22		33.48	8.3	6.3
Dec. 10		36.98	29.8	− 0.7
98 Jan. 8	W	36.14	18.3	+ 1.0
März 1	O	32.39	24.5	3.1
4	W	32.85	27.5	1.9
11		34.59	21.3	2.8
14		35.63	23.0	10.3
		34.48		

ι Herculis. O. C.
$17^h 36^m 33^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		− 2°9′		
96 Sept. 4	O	7.″17	21.5	+18.°4
5		7.01	22.5	19.5
6		7.24	25.0	16.8
97 April 28	W	6.94	19.3	10.8
30		7.40	27.9	13.8
Mai 12		7.44	24.1	3.0
22	O	7.22	35.3	14.7
Juni 3		7.05	23.9	18.7
5		7.37	24.7	20.9
11		6.69	14.5	12.9
13		7.04	15.7	17.4
14		7.07	20.0	16.9
23		6.66	17.0	18.7
24		6.70	20.4	21.8

Datum			Kr.	Z. D. 1897.0	760 — Brm.	Th.
				ι Herculis. O. C.	Forts.	
97	Juni	25	O	7″09	22.6	+23°7
	Aug.	17	W	7.03	19.3	20.1
		18		6.73	22.9	22.9
		19		7.01	26.8	23.8
		30		6.93	22.9	20.1
		31		6.80	23.8	22.1
	Sept.	2		7.07	25.1	23.3
		5		7.15	16.6	13.5
		9		6.93	24.5	17.1
				7.03		
				ι Herculis. U. C.		
				+85°43′		
97	Okt.	27	O	31″71	10.8	+ 2°5
	Nov.	22		37.65	8.4	6.3
	Dec.	10		30.45	29.9	− 0.8
98	Jan.	8	W	36.25	18.3	+ 1.0
	März	1	O	33.03	24.5	3.1
		4	W	36.00	27.5	1.8
				34.18		
				β Ophiuchi. $17^h 38^m 23^s$		
				−43°36′		
97	April	28	W	(8″14)	19.3	+10°7
		30		9.31	27.9	13.8
	Mai	22	O	9.22	35.3	14.7
	Juni	3		9.17	23.9	18.7
		5		9.61	24.7	20.9
		11		9.42	14.5	12.9
		13		9.38	15.7	17.4
		14		9.32	20.0	16.9
		23		9.36	17.0	18.7
		25		9.71	22.6	23.7
	Aug.	17	W	9.75	19.3	20.0
		18		9.19	22.9	22.9
		19		9.25	26.8	23.8
		30		9.40	22.9	20.1
	Sept.	2		9.37	25.1	23.3
		5		9.48	16.6	13.4
		9		9.46	24.5	17.1
		21	O	9.58	26.2	13.5
				9.41		
				γ Ophiuchi. $17^h 42^m 44^s$		
				−45°28′		
96	Sept.	4	O	0″30	21.5	+18°3
		5		0.86	22.5	19.5

Datum			Kr.	Z. D. 1897.0	760 — Brm.	Th.
96	Sept.	6	O	0″80	24.9	+16°7
97	April	28	W	0.47	19.3	10.6
		30		0.93	27.9	13.8
	Mai	22	O	0.93	35.3	14.7
	Juni	3		0.07	23.9	18.6
		5		1.20	24.7	20.8
		11		0.03	14.5	12.9
		13		0.42	15.8	17.4
		14		0.38	20.1	16.8
		23		0.58	17.0	18.7
		25		0.37	22.6	23.7
	Aug.	17	W	0.63	19.3	20.0
		18		1.04	22.9	22.7
		19		0.34	26.8	23.5
		30		0.36	22.9	20.0
	Sept.	2		0.28	25.1	23.3
		5		0.03	16.6	13.4
		9		0.67	24.5	16.9
				0.53		
				γ Draconis. O. C. $17^h 54^m 13^s$		
				+ 3°17′		
96	Sept.	4	O	15″77	21.5	+18°3
		5		15.98	22.5	19.5
		6		16.02	24.8	16.6
97	April	28	W	15.10	19.3	10.4
		30		15.86	27.9	13.8
	Juni	3	O	16.26	24.0	18.5
		5		15.80	24.7	20.8
		13		16.62	15.8	17.4
		14		15.86	20.1	16.4
		23		16.34	17.0	18.7
		24		16.50	20.5	20.8
		25		16.37	22.7	23.7
	Aug.	17	W	16.40	19.3	19.8
		18		16.23	22.9	22.5
		19		16.29	26.8	23.4
		26		16.42	22.4	17.0
		30		16.24	22.9	19.9
		31		16.27	23.7	21.9
	Sept.	2		16.22	25.1	22.5
		5		16.21	16.4	13.2
		9		15.57	24.5	16.8
		18	O	16.22	27.6	15.6
		21		16.00	26.1	13.2
		24		15.80	16.4	19.5
		27		16.02	17.1	19.9
				16.19		

γ Draconis. U. C.

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 − Brm.	Th.
		+80° 17′		
97 Okt. 27	O	8″19	10.8	+ 2°5
Nov. 22		10.99	8.5	6.3
26		10.58	13.8	− 5.3
Dec. 6		8.23	18.4	0.5
10		11.56	30.3	0.8
98 Jan. 8	W	10.23	18.3	+ 1.0
März 1	O	8.95	24.6	3.0
11	W	9.57	21.3	2.4
14		11.12	23.0	9.9
		9.94		

γ Sagittarii.
$17^h 59^m 11^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 − Brm.	Th.
		−78° 38′		
96 Sept. 4	O	18″83	21.5	+ 18°4
5		19.87	22.5	19.4
97 April 28	W	16.68	19.3	10.3
30		18.78	28.0	13.8
Juni 5	O	17.18	24.7	21.0
13		15.64	15.8	17.4
14		14.84	20.1	16.3
23		18.11	17.0	18.7
24		16.37	20.5	20.7
25		15.69	22.7	23.6
Aug. 17	W	16.45	19.3	19.6
18		17.71	22.9	22.4
19		17.72	26.8	23.3
26		18.68	22.4	17.1
30		18.84	22.9	19.9
Sept. 2		16.70	25.1	22.5
5		16.41	16.4	13.2
9		17.98	24.5	16.7
18	O	16.84	27.6	15.4
21		15.90	26.0	13.0
24		19.97	16.4	19.3
		17.39		

δ Urs. min. O. C.
$18^h 5^m 31^s$

Datum	Kr.		Z. D. 1897.0	760 − Brm.	Th.
			+38° 23′		
96 Sept. 6	O	1	59″09	24.7	+ 16°5
97 April 28	W	3	58.54	19.2	10.2
30		3	58.54	28.0	13.7
Juni 3	O	3	59.46	24.0	18.4
5		3	59.32	24.7	21.0
13		3	59.42	15.8	17.3
14		3	59.23	20.2	16.0
23		3	59.52	17.0	18.7
97 Juni 24	O	3	59″38	20.5	+ 20°5
25		3	59.35	22.7	23.5
Aug. 17	W	1	58.70	19.4	19.3
18		3	58.86	22.9	22.3
19		3	58.86	26.8	23.2
26		3	59.16	22.3	17.2
30		3	58.96	22.8	19.9
31		5	59.01	23.7	21.8
Sept. 2		3	58.99	25.1	22.3
9		3	58.60	24.5	16.5
18	O	3	59.08	27.6	15.2
21		3	59.02	25.9	12.8
24		3	59.36	16.4	19.0
27		4	58.95	17.2	19.8
28		3	59.02	18.6	19.4
			59.15		

δ Urs. min. U. C.

Datum	Kr.		Z. D. 1897.0	760 − Brm.	Th.
			+45° 10′		
97 Nov. 26	O	1	25″79	14.1	− 5°4
Dec. 6		2	25.92	18.4	0.7
10		2	25.46	30.5	1.0
98 Jan. 8	W	2	25.51	18.3	+ 1.0
März 1	O	3	26.05	24.6	2.8
11	W	3	26.12	21.3	2.3
14		3	26.50	22.9	9.8
21		3	25.91	22.9	4.8
23		2	26.33	30.1	4.9
			25.95		

ε Sagittarii.
$18^h 17^m 20^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 − Brm.	Th.
		−82° 38′		
97 Juni 5	O	44″46	24.7	+ 21°2
13		43.72	15.9	17.1
14		47.36	20.3	15.6
23		44.87	17.0	18.7
24		39.89	20.5	20.5
25		43.77	22.7	23.5
Aug. 17	W	47.35	19.4	19.1
18		45.17	22.9	22.2
19		45.70	26.8	23.0
26		46.37	22.2	17.3
30		45.83	22.8	19.9
Sept. 2		54.33	25.1	22.2
9		41.79	24.5	16.1
18	O	47.12	27.6	14.9
21		44.82	25.9	12.6
24		47.64	16.4	18.8
27		46.85	17.2	19.6
		45.71		

χ Draconis. O. C.

$18^h\,22^m\,55^s$

Datum			Kr.	Z. D. 1897.0	760− Brm.	Th.
				+24° 28′		
96	Sept.	19	W	30″.73	28.3	+21°.0
	Okt.	3		30.30	22.7	15.7
97	Juni	5	O	31.03	24.7	21.2
		13		30.42	15.9	17.0
		23		30.66	17.0	18.7
		24		30.66	20.5	20.7
		25		31.24	22.7	23.5
	Aug.	17	W	30.52	19.4	19.1
		18		30.72	22.9	22.0
		19		30.41	26.8	22.9
		26		30.68	22.1	17.3
		30		30.65	22.8	19.9
		31		30.51	23.6	21.9
	Sept.	2		30.20	25.1	22.1
		9		30.44	24.5	15.9
		18	O	30.83	27.5	14.7
		21		30.30	25.9	12.5
		24		30.56	16.4	19.1
		27		30.47	17.2	19.6
		28		30.44	18.6	18.9
		29		30.52	21.2	18.5
		30		30.84	23.6	19.4
				30.59		

χ Draconis. U. C.

Datum			Kr.	Z. D. 1897.0	760− Brm.	Th.
				+59° 5′		
97	Nov.	26	O	55″.55	14.3	− 6°.2
	Dec.	6		55.78	18.3	0.9
		10		54.80	30.9	1.3
98	Febr.	5	W	54.91	33.3	1.5
		20	O	54.68	32.1	+ 0.4
	März	1		55.28	24.8	2.5
		11	W	55.37	21.3	2.1
		12		56.01	23.9	4.3
		14		56.13	22.8	9.8
		21		54.42	22.9	4.1
		23		55.32	30.1	4.6
	April	6	O	54.69	17.0	8.6
				55.25		

Br. 2329.

$18^h\,29^m\,19^s$

Datum			Kr.	Z. D. 1897.0	760− Brm.	Th.
				−59° 16′		
96	Sept.	19	W	13″.38	28.3	+20°.8
	Okt.	3		12.65	22.7	15.6
97	Juni	5	O	13.46	24.8	21.2
		13		13.36	15.9	16.9
97	Juni	24	O	13″.26	20.5	+20°.9
		25		14.40	22.7	23.4
	Aug.	17	W	13.13	19.4	19.0
		18		12.37	22.9	21.8
		19		12.59	26.8	22.8
		26		13.25	22.1	17.2
		30		13.42	22.8	19.8
		31		13.87	23.3	22.0
	Sept.	2		13.08	25.1	22.1
		9		13.19	24.5	15.7
		18	O	13.35	27.5	14.6
		21		13.47	25.9	12.4
		24		13.43	16.3	19.3
		27		13.29	17.1	19.6
		28		13.22	18.6	18.6
		29		13.59	21.1	18.4
		30		13.62	23.6	19.4
				13.30		

Br. 2333.

$18^h\,32^m\,15^s$

Datum			Kr.	Z. D. 1897.0	760− Brm.	Th.
				−71° 48′		
96	Sept.	19	W	19″.66	28.3	+20°.8
97	Juni	5	O	20.36	24.8	21.0
		13		19.21	15.9	16.8
		24		19.79	20.5	21.0
		25		20.97	22.7	23.4
	Aug.	17	W	20.24	19.4	19.0
		18		20.09	22.8	21.6
		19		18.61	26.8	22.7
		30		20.67	22.8	19.8
		31		20.82	23.2	22.2
	Sept.	2		21.40	25.1	22.0
		9		20.46	24.5	15.6
		18	O	20.16	27.5	14.6
		21		21.95	25.9	12.3
		24		19.81	16.3	19.3
		27		21.04	17.1	19.6
		29		20.35	21.2	18.3
		30		20.31	23.6	19.4
				20.32		

110 Herculis.

$18^h\,41^m\,14^s$

Datum			Kr.	Z. D. 1897.0	760− Brm.	Th.
				−27° 45′		
96	Aug.	16	O	53″.86	22.2	+15°.0
	Okt.	2	W	53.95	21.4	15.5
		3		54.94	22.7	15.6
97	Juni	5	O	54.24	24.9	20.8
		13		54.24	15.9	16.7

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760− Brm.	Th.
		110 Herculis. Forts.		
97 Juni 25	O	54″.10	22.8	+23°.4
Aug. 17	W	54.51	19.4	19.0
18		54.17	22.8	21.5
19		54.08	26.8	22.7
24		54.69	23.0	14.7
26		54.49	22.1	16.9
30		54.98	22.8	19.8
Sept. 2		54.43	25.1	22.0
9		54.71	24.5	15.4
18	O	53.90	27.5	14.4
21		53.91	25.9	12.3
24		54.06	16.2	19.3
27		53.77	17.1	19.6
28		53.80	18.6	18.7
29		53.48	21.2	18.3
30		53.74	23.6	19.3
Okt. 1		53.80	26.1	19.0
		54.20		
		o Draconis. O. C.		
		$18^h 49^m 41^s$		
		+11° 2′		
96 Sept. 19	W	57″.27	28.4	+20°.6
97 Juni 5	O	57.75	24.9	21.1
13		57.67	16.0	16.6
25		57.27	22.8	23.4
Aug. 17	W	57.86	19.4	18.9
18		57.92	22.8	21.5
19		57.80	26.9	22.7
24		58.08	23.0	14.9
26		57.77	22.1	16.4
30		57.95	22.7	19.8
Sept. 2		58.27	25.1	21.9
9		58.14	24.5	15.3
18	O	57.54	27.5	14.2
21		57.07	25.9	12.3
24		57.45	16.2	19.3
27		57.28	17.0	19.6
28		57.08	18.6	18.9
29		57.77	21.2	18.4
30		57.10	23.6	19.2
Okt. 1		57.36	26.1	18.9
		57.61		
		o Draconis. U. C.		
		+72° 31′		
97 Nov. 22	O	29″.14	8.9	+ 6°.4
Dec. 6		27.51	18.1	− 0.9
10		27.00	31.3	2.1

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760− Brm.	Th.
98 Febr. 5	W	27″.64	32.9	− 1°.6
20	O	27.72	32.1	0.0
März 1		29.32	24.9	+ 2.0
19	W	29.55	25.0	11.1
21		27.79	22.9	4.0
23		29.67	30.2	3.9
		28.37		
		ζ Aquilae.		
		$19^h 0^m 41^s$		
		−34° 30′		
96 Aug. 16	O	8″.58	22.0	+15°.1
Sept. 18	W	8.21	22.0	21.9
19		8.80	28.5	20.5
97 Juni 13	O	9.39	16.0	16.6
25		10.13	22.9	23.4
Aug. 17	W	8.58	19.4	18.8
18		9.22	22.8	21.4
19		8.84	26.9	22.6
24		9.41	23.0	15.0
26		8.85	22.1	16.2
Sept. 2		8.78	25.1	21.8
9		8.61	24.5	15.0
18	O	9.01	27.4	14.0
21		9.11	25.8	12.3
24		9.00	16.2	19.2
27		9.03	17.0	19.6
28		8.99	18.6	19.0
29		9.55	21.2	18.4
30		8.63	23.6	19.0
Okt. 1		8.80	26.0	18.9
		8.99		
		π Sagittarii.		
		$19^h 3^m 38^s$		
		−69° 23′		
96 Aug. 16	O	60″.40	22.0	+15°.1
Sept. 18	W	61.01	22.0	21.9
19		60.55	28.5	20.5
24		59.51	25.3	10.2
Okt. 9		62.08	19.8	16.4
97 Juni 13	O	60.88	16.0	16.6
25		60.76	22.9	23.4
Aug. 17	W	60.32	19.4	18.8
18		61.75	22.8	21.4
19		60.58	26.9	22.6
22		60.65	26.2	19.1
24		60.77	23.0	15.0
26		60.28	22.1	16.1
Sept. 18	O	60.64	27.4	14.0

Datum			Kr.	Z. D. 1897.0	760 — Brm.	Th.
				π Sagittarii. Forts.		
97	Sept.	21	O	61″85	25.8	+12°3
		24		60.49	16.2	19.1
		27		61.18	17.0	19.5
		28		61.25	18.6	19.0
		29		60.06	21.2	18.4
		30		60.25	23.6	18.9
	Okt.	1		60.62	26.0	18.9
				60.76		
				δ Draconis. O. C.		
				19ʰ 12ᵐ 52ˢ		
				+19°16′		
96	Aug.	16	O	2″29	21.9	+15°2
	Sept.	10		2.71	26.3	16.8
		18	W	2.33	22.0	21.9
		19		2.32	28.5	20.5
		24		1.92	25.3	10.1
	Okt.	2		2.99	21.3	15.3
		9		1.88	19.8	16.2
97	Juni	13	O	1.97	16.0	16.5
		25		2.30	23.0	23.3
	Aug.	17	W	2.79	19.4	18.7
		18		2.34	22.8	21.3
		19		2.36	26.9	22.5
		22		2.07	26.2	19.0
		24		2.31	23.0	15.0
		26		2.45	22.2	16.0
	Sept.	18	O	1.89	27.4	13.9
		21		2.35	25.8	12.3
		24		2.53	16.2	18.9
		27		2.38	17.0	19.5
		28		1.95	18.6	19.0
		29		2.14	21.2	18.4
		30		2.43	23.6	18.8
	Okt.	1		2.34	26.0	18.8
		2		2.05	24.3	16.8
				2.30		
				δ Draconis. U. C.		
				+64°18′		
97	Nov.	22	O	24″91	9.1	+ 6°2
	Dec.	6		22.83	18.0	— 0.9
		10		21.40	31.6	2.7
98	Febr.	9		23.33	22.6	+ 0.3
		20		21.82	32.1	— 0.2
	März	1		24.16	25.0	+ 2.3
		19	W	23.07	25.1	11.1
		21		23.33	22.9	3.6
		23		23.32	30.3	3.7
	April	6	O	23.28	17.3	7.1
				23.14		

Datum			Kr.	Z. D. 1897.0	760 — Brm.	Th.
				κ Cygni. O. C.		
				19ʰ 14ᵐ 43ˢ		
				+ 4°57′		
96	Aug.	16	O	54″94	21.8	+15°2
	Sept.	10		55.35	26.3	16.8
		18	W	55.50	22.0	21.8
		19		55.11	28.5	20.4
		24		55.20	25.3	10.1
	Okt.	2		55.06	21.3	15.3
		9		55.42	19.8	16.2
97	Juni	13	O	55.03	16.0	16.5
		25		55.11	23.0	23.3
	Aug.	17	W	55.45	19.4	18.7
		18		55.89	22.8	21.3
		19		55.44	26.9	22.4
		22		55.58	26.2	19.0
		24		55.68	23.0	15.0
		26		55.56	22.2	16.0
	Sept.	18	O	55.19	27.4	13.9
		21		54.88	25.8	12.3
		24		55.01	16.2	18.9
		27		54.84	17.0	19.4
		28		54.77	18.6	19.0
		29		55.26	21.1	18.5
		30		54.93	23.6	18.8
	Okt.	1		54.95	26.0	18.8
		2		55.10	24.3	16.8
				55.21		
				κ Cygni. U. C.		
				+78°36′		
97	Nov.	22	O	31″56	9.1	+ 6°2
	Dec.	6		30.17	18.0	— 0.9
		10		29.94	31.7	2.8
98	Febr.	20		28.12	32.1	0.2
	März	1		33.13	25.0	+ 2.3
		19	W	30.99	25.1	11.1
		21		31.93	22.9	3.6
		23		32.52	30.3	3.6
	April	6	O	31.13	17.3	7.0
				31.06		
				ι Cygni. O. C.		
				19ʰ 27ᵐ 7ˢ		
				+ 3°17′		
96	Aug.	16	O	50″13	21.8	+15°0
	Sept.	10		49.93	26.3	16.9
		18	W	49.98	21.9	21.7
		19		49.55	28.6	20.3
		24		49.73	25.2	10.0
	Okt.	9		49.77	19.9	16.0

ι Cygni. O. C. Forts.

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760− Brm.	Th.
97 Aug. 17	W	49″.98	19.4	+18°.7
18		50.09	22.9	21.1
19		49.74	26.9	22.4
22		50.11	26.3	19.0
24		50.04	23.0	14.7
30		49.71	22.6	19.8
Sept. 18	O	49.75	27.4	13.7
21		49.48	25.7	12.3
24		49.96	16.1	18.8
27		49.70	17.0	19.3
28		49.58	18.5	19.0
29		49.95	21.1	18.5
30		49.32	23.6	18.6
Okt. 1		49.95	26.0	18.7
2		49.90	24.2	16.7
		49.86		

ι Cygni. U. C.

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760− Brm.	Th.
		+80° 16′		
97 Nov. 22	O	32″.89	9.2	+ 5°.8
Dec. 6		35.21	17.9	− 0.9
10		33.74	31.9	3.0
98 Jan. 8	W	30.33	18.6	+ 0.8
Febr. 9	O	35.72	22.4	0.1
20		36.03	32.2	− 0.3
März 1		36.26	25.0	+ 2.3
19	W	37.19	25.1	11.1
21		36.02	22.9	3.5
23		37.76	30.4	3.6
		35.12		

ϑ Cygni. O. C.
$19^h 33^m 41^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760− Brm.	Th.
		+ 1° 46′		
96 Aug. 16	O	10″.12	21.8	+14°.9
25		10.22	23.5	18.3
Sept. 10		9.85	26.4	16.9
18	W	9.63	21.9	21.7
19		9.96	28.6	20.2
24		10.26	25.2	10.0
Okt. 9		9.48	19.9	15.9
97 Aug. 17		9.88	19.4	18.7
18		9.94	22.9	21.1
19		10.29	26.9	22.1
22		9.84	26.3	18.9
24		10.65	23.0	14.3
30		10.28	22.6	19.8
Sept. 18	O	9.96	27.4	13.6
21		9.89	25.7	12.1
24		9.72	16.1	18.8
97 Sept. 27	O	9″.94	16.9	+19°.3
28		9.87	18.5	19.0
29		10.41	21.1	18.5
30		10.40	23.6	18.6
Okt. 1		10.06	26.0	18.7
2		9.75	24.1	16.7
		10.05		

ϑ Cygni. U. C.

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760− Brm.	Th.
		+81° 48′		
97 Nov. 22	O	12″.61	9.3	+ 5°.1
Dec. 6		15.90	17.9	− 0.9
10		15.48	32.0	2.9
98 Jan. 8	W	17.06	18.6	+ 0.7
Febr. 9	O	16.08	22.4	0.1
18		18.33	32.5	0.5
März 1		16.57	25.0	2.4
19	W	16.01	25.1	11.1
21		15.42	22.9	3.5
23		17.82	30.5	3.6
		16.13		

δ Cygni. O. C.
$19^h 41^m 45^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760− Brm.	Th.
		− 3° 20′		
96 Aug. 16	O	1″.09	21.9	+14°.7
25		1.41	23.5	18.2
Sept. 10		1.41	26.4	16.9
18	W	1.15	21.9	21.6
19		0.74	28.7	20.0
24		0.65	25.2	10.0
Okt. 8		1.08	19.9	15.8
9		0.45	19.9	15.8
22	O	1.19	26.4	10.6
26		1.08	24.2	5.3
97 Aug. 17	W	1.03	19.5	18.6
18		1.37	22.9	21.1
19		1.07	26.9	21.8
22		1.10	26.3	18.8
24		0.19	23.0	13.9
30		0.93	22.6	19.8
Sept. 5		1.33	16.7	11.7
18	O	1.30	27.4	13.4
21		1.41	25.7	11.6
24		1.08	16.1	18.8
27		1.42	16.9	19.2
28		1.39	18.5	19.1
29		0.93	21.1	18.4
30		1.13	23.6	18.5
Okt. 1		1.10	26.0	18.6
2		1.15	24.0	16.7
		1.10		

δ Cygni. U. C.

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		+86°54′		
97 Nov. 22	O	27″.54	9.4	+ 4°.4
Dec. 10		30.75	32.1	− 2.7
98 Jan. 8	W	29.70	18.6	+ 0.7
Febr. 9	O	24.39	22.4	0.2
März 1		35.48	25.1	2.4
19	W	19.43	25.1	11.1
21		26.75	22.9	3.5
		27.71		

ψ Cygni. O. C.
$19^h 52^m 58^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		+ 3°57′		
96 Aug. 16	O	7″.93	21.9	+14°.5
20		8.53	25.0	17.2
25		8.53	23.5	18.1
Sept. 10		8.11	26.4	16.9
18	W	9.01	21.9	21.4
19		8.58	28.8	19.9
24		8.85	25.1	9.9
Okt. 8		8.13	19.9	15.7
9		8.94	20.0	15.6
22	O	8.94	26.4	10.5
26		8.23	24.2	5.2
97 Aug. 17	W	8.61	19.5	18.5
18		8.35	22.9	21.0
19		8.47	26.9	21.9
22		8.62	26.3	18.7
24		(9.78)	23.0	13.7
Sept. 2		8.19	25.1	20.9
5		8.84	16.7	11.7
18	O	8.07	27.5	13.2
24		7.81	16.0	18.7
27		8.25	16.9	19.2
29		8.38	21.1	18.4
30		8.11	23.6	18.3
Okt. 1		8.41	26.1	18.5
2		8.31	23.9	16.8
		8.44		

ψ Cygni. U. C.

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		+79°37′		
97 Nov. 22	O	15″75	9.5	+ 4°.5
Dec. 6		19.16	17.9	− 0.8
10		17.06	32.3	2.7
98 Jan. 8	W	16.26	18.7	+ 0.6
Febr. 9	O	16.98	22.3	0.3
18		21.20	32.5	0.6
März 19	W	17.68	25.1	11.1
98 März 21	W	16″.52	22.8	+ 3°.3
23		19.70	30.7	3.6
April 6	O	17.87	17.3	5.7
		17.82		

c Sagittarii.
$19^h 56^m 19^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		−76°12′		
96 Sept. 10	O	31″.53	26.4	+17°.0
18	W	31.33	21.9	21.4
19		32.09	28.8	19.8
24		29.62	25.1	9.8
Okt. 8		32.91	19.9	15.6
9		32.75	20.0	15.6
22	O	33.27	26.4	10.5
26		33.38	24.1	5.1
97 Aug. 17	W	32.60	19.5	18.4
18		32.95	22.9	20.9
19		30.75	26.9	22.2
22		32.83	26.4	18.6
24		30.73	23.0	13.7
30		32.07	22.6	19.7
Sept. 2		32.69	25.1	20.9
5		32.09	16.7	11.7
18	O	31.48	27.5	13.2
24		33.53	16.0	18.6
27		33.51	16.9	19.1
29		32.56	21.1	18.3
30		32.78	23.6	18.2
Okt. 1		32.74	26.1	18.4
2		33.64	23.8	16.8
		32.34		

o^1 sq. Cygni. O. C.
$20^h 10^m 23^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		− 1°47′		
96 Aug. 25	O	2″.80	23.5	+17°.9
Sept. 1		3.20	23.0	16.0
10		3.27	26.5	17.0
24	W	3.12	25.1	9.8
Okt. 8		3.12	19.9	15.6
9		3.00	20.1	15.4
22	O	3.42	26.4	10.4
26		3.53	24.1	4.9
97 Aug. 18	W	3.25	23.0	20.8
19		3.06	26.9	22.2
22		3.07	26.4	18.4
24		(1.81)	23.0	13.7
30		2.98	22.6	19.6
Sept. 2		2.68	25.1	20.9

o^1 sq. Cygni. O. C. Forts.

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
97 Sept. 5	W	3″.35	16.8	+11°.6
18	O	3.45	27.5	13.2
24		3.48	16.0	18.5
27		3.01	16.9	19.1
29		3.30	21.1	18.2
30		3.03	23.7	17.8
Okt. 1		3.31	26.1	18.2
		3.17		

o^1 sq. Cygni. U. C.

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		+85° 21′		
97 April 8	W	33″.51	24.0	+10°.1
Nov. 22	O	32.78	9.8	4.8
Dec. 10		21.84	32.5	− 2.8
98 Jan. 8	W	24.14	18.7	+ 0.5
Febr. 6		31.78	22.1	− 3.3
9	O	31.76	22.3	+ 0.1
18		29.05	32.5	0.4
März 3		31.69	27.8	1.7
5	W	30.56	30.7	5.2
11		29.33	21.4	0.4
13		37.15	23.7	5.9
19		27.79	25.1	11.0
21		19.35	22.7	3.2
31		33.63	29.1	10.5
		29.60		

ϑ Cephei. O. C.
$20^h 27^m 51^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		+14° 26′		
96 Aug. 16	O	5″.81	21.9	+13°.8
20		5.31	25.0	16.8
25		5.40	23.7	17.5
Sept. 1		5.72	23.1	16.1
17	W	4.91	17.2	17.6
Okt. 6		5.09	17.5	11.0
8		5.34	19.9	15.6
9		5.36	20.1	15.1
17		5.29	28.3	10.0
22	O	5.42	26.6	10.5
26		4.92	24.0	4.6
Nov. 5		4.97	9.7	4.1
14		5.35	21.5	− 1.3
97 Aug. 18	W	5.74	23.0	+20.6
19		5.17	27.0	22.1
24		5.48	23.0	14.1
30		5.20	22.6	19.7
Sept. 2		5.17	25.2	20.9
5		5.24	16.8	11.2
97 Sept. 18	O	4″.96	27.5	+13°.2
24		4.94	16.0	18.3
27		5.16	16.9	19.0
29		5.20	21.1	18.2
30		5.44	23.7	17.6
Okt. 1		4.97	26.1	18.0
		5.26		

ϑ Cephei. U. C.

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		+69° 8′		
97 April 8	W	21″.28	23.9	+10°.1
Nov. 22	O	19.51	10.0	4.4
Dec. 10		21.40	32.7	− 2.9
98 Jan. 8	W	20.39	18.7	+ 0.3
Febr. 6		20.08	22.3	− 3.7
9	O	19.92	22.1	0.0
18		19.84	32.5	+ 0.3
März 1		20.46	25.3	2.6
3		21.29	27.8	1.6
5	W	21.08	30.7	5.2
11		19.72	21.4	0.1
12		19.72	24.1	2.4
13		20.16	23.7	6.5
15		20.70	21.5	6.4
19		20.00	25.1	10.8
21		21.29	22.7	3.0
31		20.50	29.0	10.0
April 6	O	20.34	17.2	5.0
7		20.94	16.4	12.0
9		20.42	20.3	16.7
11		20.44	27.2	13.7
		20.45		

α Cygni. O. C.
$20^h 37^m 55^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		− 3° 18′		
96 Aug. 16	O	3″.24	21.9	+13°.6
20		3.18	25.0	16.7
25		3.35	23.8	17.4
Sept. 1		3.41	23.1	16.1
Okt. 6	W	3.03	17.5	11.0
8		2.66	19.9	15.5
9		3.06	20.1	14.9
17		2.80	28.3	9.9
22	O	2.86	26.7	10.4
26		2.84	23.9	4.4
Nov. 5		3.11	9.6	3.9
14		2.78	21.5	− 1.4
97 Aug. 19	W	2.98	27.0	+22.1
24		2.30	23.0	14.3

α Cygni. O. C. Forts.

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 — Brm.	Th.
97 Aug. 26	W	3".43	22.2	+15°.8
30		2.94	22.6	19.7
Sept. 2		2.76	25.3	20.8
5		2.86	16.8	11.1
18	O	3.16	27.5	13.2
24		3.13	16.0	18.3
27		2.82	16.8	18.9
29		2.97	21.1	18.2
30		2.92	23.7	17.5
Okt. 1		2.97	26.1	17.9
		2.96		

α Cygni. U. C.

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 — Brm.	Th.
		+86°52′		
97 April 8	W	31".90	23.8	+10°.1
Nov. 22	O	32.92	10.1	4.2
Dec. 10		38.79	32.7	− 2.8
98 Jan. 8	W	13.68	18.7	+ 0.3
Febr. 6		37.54	22.4	− 3.9
9	O	37.32	22.0	0.2
18		31.86	32.5	+ 0.3
März 1		29.71	25.3	2.4
11	W	33.05	21.4	0.0
12		22.20	24.1	2.2
13		37.39	23.7	6.6
19		21.81	25.1	10.7
21		30.73	22.7	2.9
31		43.83	29.0	9.8
April 11	O	32.19	27.2	13.5
		31.77		

η Cephei. O. C.

$20^h\,43^m\,12^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 — Brm.	Th.
		+13°13′		
96 Aug. 16	O	32".15	21.9	+13°.5
20		32.26	24.9	16.7
25		31.50	23.9	17.2
Sept. 1		31.60	23.2	16.1
13	W	32.16	27.3	16.8
Okt. 6		32.06	17.5	11.0
8		32.58	19.9	15.4
9		32.00	20.1	14.9
17		32.24	28.4	9.8
22	O	32.43	26.7	10.4
26		31.92	23.9	4.3
Nov. 5		31.40	9.5	3.8
14		32.10	21.5	− 1.5
97 Aug. 24	W	32.53	23.0	+14.4
26		32.18	22.2	15.8
97 Aug. 30	W	32".05	22.6	+19°.7
Sept. 2		32.84	25.4	20.7
5		32.48	16.8	11.0
18	O	31.97	27.5	13.2
24		31.91	16.0	18.3
27		32.22	16.8	18.9
29		31.82	21.1	18.2
30		31.93	23.7	17.4
Okt. 1		32.24	26.1	17.8
		32.10		

η Cephei. U. C.

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 — Brm.	Th.
		+70°20′		
97 April 8	W	54".14	23.8	+10°.1
17		55.15	17.4	11.3
Nov. 22	O	53.25	10.1	4.0
Dec. 10		54.09	32.7	− 2.8
98 Jan. 8	W	54.25	18.7	+ 0.3
Febr. 6		55.34	22.4	− 3.9
9	O	53.49	22.0	0.2
18		54.22	32.5	+ 0.3
20		54.29	32.3	− 0.3
März 1		53.50	25.4	+ 2.3
3		54.44	27.7	1.7
5	W	55.06	30.6	5.2
11		53.45	21.4	− 0.1
12		53.67	24.1	+ 2.1
13		54.61	23.8	6.6
19		53.81	25.0	10.7
21		53.32	22.7	2.9
31		54.27	29.0	9.7
April 6	O	54.08	17.2	4.8
7		53.23	16.4	11.6
8		54.51	16.5	11.5
9		53.91	20.3	16.6
11		54.35	27.2	13.4
		54.10		

ω Capricorni.

$20^h\,45^m\,41^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 — Brm.	Th.
		−75°31′		
96 Okt. 6	W	2".58	17.5	+11°.0
8		4.69	19.9	15.4
9		2.93	20.1	14.9
16		2.81	22.3	8.8
17		3.83	28.7	9.8
22	O	2.70	26.8	10.4
26		2.91	23.8	4.3
Nov. 5		4.08	9.5	3.8
14		3.49	21.5	− 1.6

ω Capricorni. Forts.

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
97 Aug. 24	W	2″.80	23.0	+14°.5
26		2.18	22.2	15.8
30		2.03	22.6	19.7
Sept. 2		2.37	25.4	20.6
5		2.40	16.8	11.0
18	O	2.86	27.5	13.1
24		3.52	16.0	18.3
27		3.26	16.8	18.9
29		3.04	21.1	18.2
30		2.92	23.7	17.3
Okt. 1		3.70	26.1	17.7
		3.06		

ν Aquarii.
$21^h\,3^m\,59^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		−60°0′		
96 Sept. 4	O	5″.90	22.1	+17°.7
17	W	5.60	17.2	17.4
Okt. 6		5.38	17.6	10.8
8		5.79	19.9	15.2
9		5.16	20.1	14.6
16		6.22	22.3	8.6
17		5.39	28.5	9.8
26	O	5.51	23.8	4.1
Nov. 5		5.86	9.5	3.7
6		6.96	16.3	4.1
13		6.22	21.0	− 1.3
14		6.29	21.5	1.8
97 Aug. 24	W	5.94	23.0	+13.9
26		6.81	22.2	15.9
30		6.32	22.6	19.8
Sept. 2		6.23	25.5	20.4
9		6.82	24.6	14.4
18	O	6.25	27.5	13.0
21		6.62	25.3	10.7
24		6.08	16.0	18.3
27		6.35	16.8	18.8
29		6.13	21.1	18.1
30		6.36	23.7	17.2
Okt. 1		6.31	26.1	17.6
Nov. 9		6.12	10.9	2.3
11		5.45	10.4	− 4.3
		6.08		

α Equulei.
$21^h\,10^m\,40^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		−43°23′		
96 Sept. 4	O	27″.83	22.2	+17°.7
17	W	27.31	17.2	17.3
Okt. 6	W	27″.22	17.6	+10°.7
8		27.69	19.9	15.1
9		27.24	20.1	14.6
16		26.47	22.3	8.5
17		27.88	28.6	9.8
26	O	27.89	23.8	4.1
Nov. 5		27.67	9.5	3.7
6		27.93	16.3	4.1
13		28.09	21.0	− 1.3
14		28.30	21.5	1.9
97 Aug. 24	W	27.98	23.0	+13.5
26		27.70	22.2	15.9
30		27.71	22.6	19.9
Sept. 2		27.72	25.5	20.3
9		28.12	24.6	14.4
18	O	27.61	27.5	13.0
21		28.28	25.3	10.7
24		27.32	16.0	18.3
27		27.75	16.8	18.6
29		27.65	21.0	18.0
30		27.22	23.7	17.2
Okt. 1		27.47	26.1	17.6
27		27.80	10.0	5.4
28		27.81	11.5	5.4
Nov. 9		27.83	10.8	2.5
11		26.87	10.4	− 4.4
		27.62		

α Cephei. O. C.
$21^h\,6^m\,7^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		+13°56′		
96 Sept. 1	O	9″.68	23.4	+15°.8
4		10.19	22.2	17.6
17	W	9.78	17.2	17.3
Okt. 6		9.92	17.6	10.6
8		9.82	19.9	15.1
16		9.80	22.3	8.5
17		9.61	28.6	9.8
26	O	10.25	23.9	4.1
Nov. 5		9.70	9.5	3.6
6		10.33	16.4	4.1
13		9.50	21.0	− 1.4
14		9.40	21.5	2.0
97 April 21	W	9.92	23.3	+. 7.8
Aug. 24		10.17	23.0	13.1
26		9.68	22.2	15.9
30		10.36	22.6	19.9
Sept. 2		9.93	25.5	20.2
9		9.62	24.6	14.4
18	O	9.59	27.5	12.9
21		9.28	25.4	10.7

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760—Brm.	Th.
		α Cephei. O. C. Forts.		
97 Sept. 24	O	9″.68	16.0	+18°.2
27		9.64	16.8	18.5
29		9.90	21.0	18.0
30		9.82	23.8	17.1
Okt. 1		9.71	26.1	17.5
27		10.08	10.0	5.5
28		9.52	11.5	5.4
29		10.23	12.9	5.4
30		9.64	13.6	5.4
Nov. 9		9.52	10.8	2.6
11		10.34	10.4	− 4.4
25		9.62	18.6	2.7
26		9.91	12.4	2.8
		9.82		
		α Cephei. U. C.		
		+69°38′		
97 März 26	W	15″.93	22.3	+ 9°.5
April 8		15.84	23.6	9.3
17		16.01	17.5	10.5
28		15.71	18.8	17.4
98 Febr. 6		15.14	22.8	− 4.1
9	O	15.27	21.8	0.4
18		16.17	32.5	+ 0.3
20		15.76	32.3	− 0.4
25		16.19	17.1	+ 4.7
März 1		15.88	25.6	2.2
3		16.03	27.5	1.8
5	W	16.61	30.6	5.1
11		16.28	21.6	− 0.5
12		16.07	24.1	+ 2.0
13		16.28	23.8	6.6
21		14.56	22.7	3.0
31		15.71	28.9	9.6
April 6	O	15.66	17.2	4.8
7		15.04	16.4	11.2
8		16.33	16.5	11.7
9		16.91	20.5	16.1
11		16.50	27.1	12.5
18		15.48	32.6	12.1
		15.90		
		γ Capricorni.		
		$21^h 34^m 23^s$		
		−65°20′		
96 Okt. 8	W	25″.62	19.9	+15°.3
17		26.26	28.6	9.7
20	O	24.79	23.9	4.2
Nov. 5		26.09	9.5	3.3

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760—Brm.	Th.
96 Nov. 6	O	25″.64	16.5	+ 4°.0
10		25.70	16.2	2.0
13		26.28	21.0	− 1.6
97 Aug. 24	W	25.73	23.0	+12.4
26		25.87	22.2	15.7
30		26.27	22.6	20.0
Sept. 2		25.85	25.5	20.1
5		24.35	17.1	10.7
8		25.11	21.3	9.8
9		25.92	24.6	14.3
21	O	25.79	25.5	10.8
Okt. 13		26.43	23.8	8.0
14		26.30	21.5	10.3
15		27.31	20.9	13.3
19		25.82	16.8	13.1
25		25.94	12.2	6.6
27		*26.64	10.0	5.5
28		26.16	11.5	5.3
29		25.79	12.9	5.0
30		26.49	13.6	5.4
Nov. 9		25.87	10.7	2.7
11		26.91	10.4	− 4.4
25		24.46	18.5	2.9
26		24.44	12.4	3.2
		25.82		
		ι Piscis austr.		
		$21^h 38^m 49^s$		
		−81°42′		
96 Okt. 7	W	32″.37	17.8	+13°.6
8		30.80	19.9	15.4
16		30.60	22.3	8.6
17		32.80	28.6	9.6
Nov. 5	O	30.82	9.5	3.2
10		29.95	16.1	1.8
13		31.05	21.0	− 1.7
97 Aug. 24	W	33.40	23.0	+12.5
26		31.24	22.2	15.7
30		31.49	22.6	20.0
Sept. 2		34.29	25.5	20.1
5		31.18	17.2	10.9
8		26.06	21.3	9.1
18	O	34.93	27.4	12.6
24		32.98	16.0	18.0
27		31.58	16.8	17.4
29		31.05	21.0	17.9
30		32.15	23.8	17.0
Okt. 13		30.31	23.8	8.1
14		30.63	21.5	10.2
15		32.18	20.9	13.3
19		32.18	16.8	13.1

ι Piscis austr. Forts.

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
97 Okt. 24	O	33″02	13.1	+ 7°1
27		33.18	10.0	5.4
28		34.06	11.5	5.3
29		33.27	12.9	4.9
30		33.51	13.6	5.3
Nov. 9		31.05	10.6	2.7
11		29.63	10.4	— 4.4
25		27.34	18.5	2.8
26		29.68	12.4	3.3
		31.58		

π^2 Cygni. O. C.

$21^h\,42^m\,59^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		+ 0°37′		
96 Aug. 25	O	11″42	24.3	+16°9
Sept. 4		10.75	22.4	17.5
17	W	10.43	17.3	16.7
18		10.94	22.4	22.0
Okt. 7		10.74	17.8	13.5
Nov. 5	O	11.04	9.5	3.4
6		11.23	12.6	3.8
10		11.08	16.1	1.7
13		11.46	21.0	— 1.7
97 Aug. 24	W	10.65	23.0	+12.5
26		11.29	22.2	15.6
30		11.04	22.6	20.0
Sept. 2		11.01	25.4	20.2
5		11.48	17.2	10.9
8		11.11	21.4	8.5
9		11.35	24.6	14.2
21	O	10.84	25.4	10.7
Okt. 13		11.36	23.8	8.2
14		11.40	21.5	10.2
15		11.95	20.9	13.2
19		11.24	16.8	13.1
24		10.97	13.1	7.0
27		11.32	10.0	5.4
28		11.49	11.6	5.2
29		11.61	13.0	4.8
30		11.13	13.6	5.2
Nov. 9		11.20	10.6	2.7
11		11.18	10.4	— 4.4
25		11.47	18.5	2.7
26		11.47	12.4	3.4
		11.16		

π^2 Cygni. U. C.

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		+82°57′		
98 Febr. 9	O	15″06	21.6	— 0°6
18		15.25	32.5	+ 0.2
20	O	12″01	32.3	— 0°8
25		17.80	17.2	+ 4.5
März 1		15.87	25.7	2.5
3		15.15	27.4	1.7
11	W	8.98	21.7	— 0.8
12		17.56	24.1	+ 2.0
13		17.60	23.8	6.7
21		15.85	22.7	2.9
31		16.79	28.9	+ 9.7
April 8	O	15.31	16.4	11.7
11		15.99	27.1	12.6
18		15.19	32.4	11.0
		15.33		

η Piscis austr.

$21^h\,54^m\,55^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		—77°9′		
96 Sept. 4	O	39″18	22.5	+17°4
15	W	38.27	18.0	18.6
17		38.45	17.3	16.3
18		35.96	22.5	22.0
Okt. 7		40.38	17.8	13.3
Nov. 5	O	40.00	9.5	3.0
10		40.05	16.1	1.7
13		40.77	21.0	— 1.9
97 Aug. 24	W	40.98	23.0	+12.6
26		39.08	22.2	15.5
30		39.19	22.6	19.9
Sept. 2		39.37	25.4	20.4
5		38.86	17.3	10.9
9		39.27	24.6	13.9
Okt. 13	O	40.62	23.7	8.2
14		41.55	21.5	10.2
15		41.20	20.9	13.1
19		39.52	16.8	13.0
24		40.45	13.1	6.9
28		41.14	11.6	5.1
Nov. 9		38.89	10.5	2.7
26		40.36	12.4	— 3.6
		39.72		

20 Cephei. O. C.

$22^h\,1^m\,53^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		+14°4′		
96 Sept. 4	O	11″72	22.6	+17°3
9		11.37	23.1	16.3
15	W	11.91	18.0	18.6
17		11.79	17.4	16.0
18		11.82	22.5	21.9
Nov. 5	O	11.79	9.5	3.0
10		11.37	16.0	1.8

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		20 Cephei. O. C.	Forts.	
96 Nov. 13	O	11″79	21.0	− 1°9
97 Aug. 24	W	12.00	23.0	+ 12.8
26		12.57	22.3	15.3
30		12.25	22.6	19.9
Sept. 2		12.48	25.4	20.4
5		12.05	17.3	10.9
8		12.12	21.5	8.8
9		12.57	24.6	13.9
21	O	12.01	26.0	10.7
Okt. 13		11.68	23.7	8.1
14		11.61	21.5	10.2
15		11.66	20.9	13.1
19		11.50	16.8	13.0
24		12.05	13.1	6.9
28		11.74	11.6	5.1
Nov. 9		11.61	10.5	2.7
26		11.69	12.4	− 3.7
		11.85		
		20 Cephei. U. C.		
		+ 69° 30′		
97 März 26	W	14″09	22.8	+ 9°2
April 3		13.64	32.1	3.1
9		13.23	20.7	6.7
17		14.89	17.5	9.7
28		13.80	18.8	16.0
98 Febr. 9	O	13.97	21.5	− 0.7
18		12.91	32.5	+ 0.2
März 1		13.63	25.8	2.8
3		14.54	27.4	1.8
4	W	14.70	27.5	− 1.4
11		12.22	21.7	0.8
12		14.07	24.1	+ 1.6
13		15.53	23.8	6.9
21		13.79	22.7	2.8
31		14.23	28.9	10.0
April 7	O	14.15	16.3	10.4
9		14.20	20.9	15.2
11		13.56	27.1	12.5
15		14.17	20.1	7.4
16		13.54	24.3	10.2
18		13.79	32.3	10.8
Mai 2	W	14.24	24.5	18.1
3		13.65	27.3	19.3
		13.92		
		ζ Cephei. O. C.		
		$22^h 7^m 17^s$		
		+ 9° 28′		
96 Aug. 25	O	49″40	24.4	+ 16°7
Sept. 4		49.38	22.6	17.3

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
96 Sept. 9	O	48″87	23.2	+ 16°3
15	W	49.34	18.0	18.6
17		49.23	17.4	15.9
18		49.08	22.6	21.9
19		49.22	30.3	17.9
Nov. 5	O	49.47	9.5	2.7
10		49.47	16.0	1.8
13		49.26	21.0	− 2.0
97 April 21	W	49.53	23.2	+ 8.6
Aug. 26		49.60	22.3	15.1
30		49.70	22.6	20.0
Sept. 2		49.41	25.4	20.3
5		49.24	17.4	10.9
8		49.50	21.5	8.9
9		49.36	24.6	13.8
13		49.75	15.8	13.8
21	O	48.89	26.1	10.8
Okt. 13		48.85	23.6	8.0
14		48.91	21.5	10.2
15		48.93	20.9	13.0
19		49.41	16.8	13.0
24		49.21	13.1	6.9
28		48.80	11.6	5.2
Nov. 9		49.09	10.5	2.6
26		48.86	12.4	− 3.9
		49.25		
		ζ Cephei. U. C.		
		+ 74° 5′		
97 März 26	W	36″33	22.7	+ 9°3
April 3		37.29	32.2	3.1
9		36.99	20.7	6.6
17		37.92	17.5	9.7
28		37.55	18.8	15.8
98 Febr. 18	O	35.54	32.5	0.2
20		38.14	32.4	− 1.2
22		38.19	33.6	+ 2.1
März 1		37.11	25.9	2.8
3		35.52	27.4	1.6
4	W	36.39	27.5	− 1.4
11		36.60	21.7	0.9
12		38.15	24.1	+ 1.5
13		38.21	23.8	6.9
21		36.29	22.7	2.8
31		37.55	29.0	10.3
April 7	O	36.15	16.3	10.3
9		36.41	20.9	15.1
11		35.34	27.1	12.4
15		37.24	20.1	7.3
16		37.23	24.3	10.2
18		36.52	32.1	10.8

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760— Brm.	Th.
		ζ Cephei. U. C. Forts.		
98 Mai 2	W	35″84	24.5	+18°1
3		35.94	27.3	19.2
		36.96		
		ϑ Aquarii.		
		$22^h\ 11^m\ 24^s$		
		−56°30′		
96 Aug. 25	O	33″78	24.5	+16°7
Sept. 9		33.12	23.2	16.2
15	W	31.98	18.0	18.6
17		32.44	17.4	15.9
18		32.80	22.6	21.9
19		32.09	30.3	17.8
Okt. 2		32.62	21.8	14.1
Nov. 5	O	33.33	9.5	2.6
10		33.79	16.0	1.8
13		32.83	21.0	− 2.1
97 Aug. 26	W	32.36	22.3	+14.9
30		32.74	22.6	20.0
Sept. 2		32.08	25.4	20.3
5		32.03	17.4	10.8
8		32.80	21.5	9.0
9		33.15	24.6	13.8
13		32.78	15.8	13.3
21	O	33.24	26.2	10.9
Okt. 13		33.24	23.6	8.0
14		32.62	21.5	10.2
15		33.44	20.9	12.9
19		33.05	16.8	13.0
24		32.53	13.1	6.8
Nov. 9		33.29	10.5	2.6
		32.84		
		γ Aquarii.		
		$22^h\ 16^m\ 20^s$		
		−50°7′		
96 Aug. 25	O	9″42	24.5	+16°6
Sept. 9		9.15	23.2	16.2
15	W	9.12	18.0	18.5
17		(8.06)	17.4	15.8
18		8.96	22.7	21.9
19		9.55	30.3	17.6
Okt. 2		9.58	21.8	14.0
Nov. 5	O	8.80	9.5	2.4
10		9.70	16.0	1.8
13		8.68	21.0	− 2.2
97 Aug 26	W	10.13	22.3	+14.7
30		10.35	22.6	20.0
Sept. 2		9.76	25.4	20.2
97 Sept. 5	W	10″32	17.4	+10°8
8		10.00	21.5	9.1
9		10.31	24.6	13.7
13		9.53	15.8	13.2
21	O	9.78	26.3	11.0
Okt. 13		9.17	23.6	7.9
14		9.20	21.6	10.1
15		9.50	20.9	12.9
19		9.17	16.8	12.9
24		9.12	13.1	6.8
Nov. 9		9.24	10.5	2.6
		9.51		
		3 Lacertae. O. C.		
		$22^h\ 19^m\ 30^s$		
		+ 3°29′		
96 Aug. 25	O	59″67	24.5	+16°6
Sept. 4		59.84	22.8	17.3
9		59.25	23.2	16.1
15	W	59.09	18.0	18.5
17		58.97	17.4	15.7
Okt. 2		58.79	21.8	13.9
Nov. 10	O	59.25	16.0	1.8
13		59.16	21.0	− 2.3
97 Aug. 26	W	58.90	22.3	+14.5
30		58.87	22.6	20.1
Sept. 2		59.16	25.4	20.2
5		59.63	17.4	10.8
8		59.49	21.5	9.2
9		59.15	24.6	13.7
13		59.20	15.8	13.2
21	O	59.07	26.4	11.2
Okt. 13		59.04	23.6	7.8
14		59.37	21.6	10.1
15		59.08	20.9	12.8
19		59.51	16.8	12.9
24		59.39	13.1	6.8
Nov. 9		59.61	10.5	2.6
		59.23		
		3 Lacertae. U. C.		
		+80°4′		
97 März 26	W	28″72	22.8	+ 9°3
April 3		26.32	32.3	2.9
7		27.33	25.0	5.9
17		27.73	17.5	9.7
28		25.22	18.8	15.7
98 Febr. 20	O	27.55	32.4	− 1.4
22		25.06	33.6	+ 2.0
März 1		27.23	26.0	2.7
3		25.57	27.4	1.5

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 — Brm.	Th.
3 Lacertae. U. C. Forts.				
98 März 4	W	25.″19	27.5	− 1.°4
11		26.51	21.7	1.1
12		26.05	24.1	+ 1.3
13		28.73	23.8	6.9
21		27.55	22.7	2.7
31		25.10	29.0	10.6
April 7	O	25.35	16.2	10.2
9		26.98	21.0	15.0
11		25.90	27.1	12.3
15		25.83	20.1	7.1
16		25.46	24.4	10.1
18		26.73	32.1	10.8
Mai 2	W	28.06	24.5	17.9
3		26.52	27.3	18.9
		26.47		
7 Lacertae. O. C. $22^h 27^m 3^s$		+ 1°32′		
96 Aug. 25	O	23.″04	24.6	+ 16.°6
Sept. 4		23.36	22.8	17.3
9		(22.60)	23.2	16.1
15	W	22.98	18.0	18.5
17		22.49	17.5	15.7
18		22.60	22.7	21.3
Okt. 2		22.71	21.9	13.8
Nov. 10	O	23.13	16.0	1.8
13		23.12	21.0	− 2.4
97 Aug. 26	W	22.80	22.3	+ 14.5
30		22.99	22.6	20.1
Sept. 2		23.00	25.4	20.1
5		23.32	17.5	10.8
8		23.11	21.5	9.2
9		23.26	24.6	13.7
13		23.48	15.8	13.2
21	O	23.32	26.5	11.1
Okt. 13		23.37	23.6	7.8
14		23.37	21.6	10.1
15		23.57	20.9	12.8
19		23.29	16.9	12.9
24		23.38	13.0	6.8
Nov. 9		23.09	10.5	2.6
		23.16		
7 Lacertae. U. C.		+ 82°2′		
97 April 3	W	1.″32	32.4	+ 2.°8
7		2.88	25.0	5.9
9	W	0.″95	20.7	+ 6.°3
17		6.66	17.5	9.7
28		3.17	18.7	15.7
98 Febr. 20	O	1.57	32.5	− 1.5
22		1.40	33.6	+ 2.0
März 1		5.64	26.0	2.5
3		3.04	27.4	1.3
4	W	3.25	27.5	− 1.4
11		3.62	21.7	1.3
12		4.23	24.1	+ 1.2
13		4.77	23.8	6.9
21		5.50	22.7	2.7
31		3.29	29.0	10.4
April 7	O	2.67	16.2	10.2
9		4.12	21.1	14.9
11		1.39	27.1	12.1
15		3.42	20.2	7.0
16		3.90	24.5	10.0
18		1.60	32.0	10.9
Mai 2	W	2.63	24.5	17.8
3		2.53	27.3	18.7
		3.34		
ε Piscis austr. $22^h 34^m 58^s$		− 75°47′		
96 Sept. 4	O	37.″99	22.9	+ 17.°0
9		37.94	23.3	16.1
15	W	37.25	18.0	18.5
17		36.33	17.5	15.6
18		37.14	22.8	21.4
19		38.47	30.4	17.0
Okt. 2		37.30	21.9	13.6
10		37.57	25.2	14.2
Nov. 13	O	39.55	21.0	− 2.4
97 Aug. 30	W	36.99	22.7	+ 20.1
Sept. 2		37.45	25.4	20.1
5		37.87	17.5	10.8
9		39.68	24.6	13.8
13		36.95	15.8	13.2
21	O	39.37	26.4	10.9
Okt. 13		38.71	23.5	7.7
14		38.99	21.6	10.0
15		35.55	20.9	12.8
19		37.71	16.9	12.9
24		35.88	13.9	6.8
Nov. 9		36.46	10.5	2.6
		37.67		

λ Pegasi.
$22^h\,41^m\,34^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 — Brm.	Th.
		−25° 11′		
96 Sept. 4	O	21″.19	23.0	+16°.8
9		21.42	23.3	16.0
15	W	21.55	18.0	18.5
19		21.24	30.5	16.9
Okt. 10		21.56	25.3	14.2
25	O	21.30	24.0	6.1
Nov. 13		21.24	21.0	− 2.5
97 Aug. 26	W	21.47	22.3	+15.4
30		22.17	22.7	20.1
Sept. 2		21.18	25.3	20.2
5		21.72	17.6	10.9
9		21.47	24.6	13.8
13		22.11	15.8	13.2
21	O	21.54	26.4	10.7
Okt. 13		21.34	23.5	7.6
14		21.55	21.6	9.9
15		21.97	20.9	12.7
19		21.19	16.9	12.9
24		21.50	12.9	6.9
Nov. 9		20.96	10.5	2.6
		21.48		

ι Cephei. O. C.
$22^h\,46^m\,1^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 — Brm.	Th.
		+17° 26′		
96 Aug. 25	O	45″.03	24.8	+16°.3
Sept. 4		44.24	23.0	16.5
9		44.14	23.3	16.0
15	W	44.15	18.0	18.5
19		44.30	30.5	16.8
Okt. 2		44.18	22.0	13.3
9		43.93	20.2	13.1
10		44.36	25.3	14.1
25	O	45.06	24.0	6.1
97 Aug. 26	W	44.80	22.3	15.7
30		44.05	22.7	20.1
Sept. 2		44.60	25.2	20.2
5		44.18	17.6	10.9
9		44.33	24.6	13.8
13		44.24	15.8	13.2
21	O	43.95	26.4	10.5
Okt. 13		44.20	23.5	7.6
14		44.22	21.6	9.8
15		44.38	20.9	12.7
19		44.26	16.9	12.9
24		44.26	12.9	6.9
Nov. 9		44.50	10.5	2.6
		44.34		

ι Cephei. U. C.

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 — Brm.	Th.
		+66° 7′		
97 März 10	W	40″.93	21.5	+ 2°.2
April 3		42.24	32.4	2.7
7		42.99	25.1	5.8
9		42.04	20.7	6.3
27		41.13	17.4	12.6
28		41.80	18.7	15.4
98 Febr. 20	O	41.95	32.6	− 1.7
22		41.24	33.6	+ 1.9
März 1		41.46	26.2	1.9
3		41.75	27.4	1.2
4	W	41.69	27.7	− 1.2
11		42.41	21.8	1.7
12		43.60	24.1	+ 1.2
13		41.82	23.8	6.7
April 5	O	40.77	20.6	2.7
6		42.18	17.2	4.1
7		41.48	16.2	10.1
9		42.31	21.2	14.9
15		42.38	20.2	6.8
16		40.72	24.7	9.4
18		40.92	31.9	10.8
27	W	42.14	30.8	14.6
Mai 2		41.15	24.5	17.2
3		40.14	27.3	18.1
		41.85		

α Piscis austr.
$22^h\,51^m\,57^s$

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 — Brm.	Th.
		+78° 22′		
96 Sept. 4	O	53″.52	23.0	+16°.3
9		51.49	23.3	15.9
15	W	48.30	18.0	18.5
19		52.05	30.5	16.8
Okt. 2		49.94	22.0	13.2
7		54.24	17.9	13.0
9		53.11	20.3	13.0
10		53.21	25.3	14.0
25	O	52.00	24.0	6.0
97 Aug. 30	W	52.10	22.7	20.0
Sept. 2		50.36	25.1	20.5
5		53.86	17.6	10.9
9		51.85	24.6	13.8
13		52.87	15.8	13.2
21	O	52.35	26.3	10.3
27		52.54	16.7	18.1
30		52.28	24.0	15.9
Okt. 1		53.68	26.4	16.3
13		54.73	23.5	7.6
14		52.89	21.7	9.8

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 − Brm.	Th.
		α Piscis austr. Forts.		
97 Okt. 15	O	56″27	20.9	+12°7
19		52.47	16.9	12.9
24		52.02	12.9	6.9
27		53.19	9.9	5.7
Nov. 9		53.39	10.6	2.6
		52.58		
		Br. 3077. O. C. 23h 8m 19s		
		+ 8°23′		
96 Sept. 4	O	11″55	23.1	+15°5
15	W	10.86	18.0	18.7
19		11.59	30.4	16.9
Okt. 2		11.70	22.0	13.2
6		11.47	17.9	10.1
7		11.21	17.9	12.7
9		11.80	20.3	12.8
10		11.40	25.4	14.2
24	O	11.97	21.7	5.7
25		11.77	24.0	5.9
97 Aug. 26	W	11.81	22.3	15.7
30		11.29	22.8	18.8
Sept. 5		11.22	17.7	10.9
9		11.80	24.7	13.8
13		11.82	15.8	13.2
24	O	11.82	16.2	17.1
27		11.40	16.7	17.8
30		11.50	24.1	16.0
Okt. 1		11.34	26.4	16.6
13		11.69	23.4	7.7
14		11.89	21.7	9.8
15		11.38	20.9	12.5
24		11.60	12.8	6.8
25		11.49	11.9	6.3
27		11.80	9.9	5.1
		11.57		
		Br. 3077. U. C.		
		+75°11′		
97 März 10	W	14″51	21.5	+ 1°9
April 3		14.98	32.5	2.6
7		15.60	25.1	5.8
9		15.77	20.7	6.1
10		14.92	23.5	7.5
27		15.28	17.4	12.0
28		15.38	18.7	15.0
98 Febr. 22	O	12.86	33.6	1.9
März 1		14.77	26.3	1.9
3		14.82	27.4	1.2
4	W	15.02	27.8	− 1.2

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 − Brm.	Th.
98 März 11	W	15″43	21.9	− 1°8
12		15.01	24.1	+ 1.3
14		15.93	22.4	7.9
April 5	O	13.03	20.5	2.4
6		15.11	17.3	3.8
7		14.05	16.2	10.1
9		14.79	21.3	14.5
15		13.73	20.3	6.7
16		12.67	24.8	9.2
18		13.55	31.8	10.6
27	W	15.43	30.8	14.3
Mai 2		13.83	24.6	16.5
3		13.87	27.4	17.1
		14.68		
		γ Piscium. 23h 11m 49s		
		−45°29′		
96 Okt. 2	W	35″71	12.1	+13°2
6		36.06	17.9	10.0
9		36.09	20.3	12.7
10		36.73	25.4	14.3
24	O	36.79	21.7	5.6
25		36.87	24.0	5.9
97 Aug. 26	W	36.60	22.3	15.7
30		36.43	22.8	18.5
Sept. 5		36.63	17.8	10.9
9		36.39	24.7	13.8
13		36.87	15.8	13.2
24	O	36.29	16.2	17.1
27		36.33	16.7	17.6
Okt. 1		36.94	26.4	16.5
13		36.84	23.4	7.7
14		36.00	21.7	9.8
15		36.58	20.9	12.4
24		36.50	12.8	6.8
25		36.49	11.9	6.2
27		36.73	9.9	4.9
		36.49		
		4 Cassiop. O. C. 23h 20m 16s		
		+13°30′		
96 Sept. 19	W	15″71	30.2	+17°0
Okt. 2		15.84	22.1	13.2
6		15.65	18.0	10.0
7		14.70	17.9	12.6
9		15.46	20.3	12.7
10		15.38	25.5	14.3
24	O	14.69	21.7	5.6
25		14.98	24.0	5.9

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 — Brm.	Th.
4 Cassiop. O. C. Forts.				
97 Aug. 26	W	15.41	22.3	+15°7
Sept. 5		15.03	17.8	10.9
9		15.27	24.7	13.7
13		15.30	15.8	13.2
24	O	14.90	16.2	17.0
27		14.83	16.8	17.5
30		14.47	24.1	15.8
Okt. 1		14.74	26.4	16.5
13		15.08	23.4	7.6
14		14.86	21.8	9.8
15		14.94	20.9	12.4
24		14.38	12.7	6.7
25		15.15	11.9	6.2
27		14.69	9.9	4.9
		15.08		
4 Cassiop. U. C.				
		+70°4′		
97 März 10	W	8″81	21.6	+ 1°5
April 3		10.96	32.6	2.5
7		11.23	25.1	5.7
9		11.04	20.7	6.0
10		10.80	23.5	7.3
27		9.71	17.4	11.9
28		10.09	18.7	14.9
30		11.12	24.7	16.3
98 Febr. 20	O	10.66	32.7	— 2.0
22		10.27	33.6	+ 1.9
März 1		12.03	26.3	2.1
3		11.80	27.3	1.3
4	W	11.22	27.8	— 1.2
11		10.11	21.9	1.8
14		11.04	22.5	+ 7.9
April 5	O	9.97	20.4	2.2
6		10.12	17.3	3.7
7		11.76	16.2	10.4
9		10.95	21.3	14.6
11		10.55	27.0	12.1
15		10.66	20.3	6.5
16		11.03	24.8	9.0
27	W	10.69	30.8	14.1
Mai 2		9.44	24.6	16.3
3		10.06	27.4	17.2
		10.73		
λ Andromedae. O. C.				
$23^h 32^m 31^s$				
		— 2°18′		
96 Sept. 19	W	45″64	30.1	(+17°2)
Okt. 6		46.66	18.1	10.0
7	W	47″01	17.9	+12°4
9		46.26	20.4	12.8
10		46.77	25.5	14.4
24	O	46.91	21.6	5.5
25		46.57	24.0	5.8
97 Aug. 24	W	46.41	23.0	12.1
26		46.07	22.3	15.7
Sept. 5		46.16	17.9	10.8
9		46.00	24.7	13.6
13		46.72	15.7	13.1
24	O	46.39	16.2	16.8
27		46.59	16.8	17.1
30		46.34	24.1	15.8
Okt. 1		46.31	26.4	16.2
13		46.66	23.4	7.4
14		46.42	21.8	9.6
15		46.73	20.9	12.2
24		46.76	12.6	6.7
25		46.57	12.0	6.1
27		46.24	9.9	5.3
		46.46		
λ Andromedae. U. C.				
		+85°53′		
97 März 10	W	18″24	21.7	+ 1°0
April 3		14.51	32.7	2.4
7		17.56	25.1	5.6
8		17.08	23.2	7.6
10		17.95	23.5	7.1
98 Febr. 20	O	20.56	32.7	— 2.1
März 3		8.91	27.3	+ 1.3
4	W	7.80	27.9	— 1.3
11		12.12	22.0	1.7
14		14.07	22.5	+ 7.9
April 5	O	19.63	20.3	2.1
6		12.17	17.4	3.7
16		11.74	24.8	8.9
27	W	15.62	30.8	13.9
Mai 2		12.64	24.6	16.2
3		20.01	27.4	17.3
		14.79		
γ Cephei. O. C.				
$23^h 35^m 7^s$				
		+28°50′		
96 Sept. 19	W	40″09	30.0	(+17°2)
Okt. 2		40.04	22.2	13.0
6		40.61	18.1	10.0
7		39.57	17.9	12.4
9		40.27	20.4	12.8
10		40.42	25.6	14.4

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 — Brm.	Th.
		γ Cephei. O. C. Forts.		
96 Okt. 24	O	39″89	21.6	+ 5°5
25		39.68	24.0	5.8
97 April 21	W	39.84	23.6	10.0
Aug. 18		39.26	24.1	19.5
24		40.12	23.0	12.0
26		40.57	22.3	15.7
Sept. 5		39.93	17.9	10.2
9		40.41	24.8	13.6
13		40.62	15.7	13.1
24	O	39.89	16.2	16.5
27		40.09	16.8	17.1
30		39.46	24.1	15.8
Okt. 1		39.46	26.4	16.1
13		39.81	23.4	7.4
14		39.51	21.8	9.6
15		39.97	20.9	12.2
24		39.75	12.6	6.6
25		39.36	12.0	6.0
27		40.01	9.9	5.3
		39.94		
		γ Cephei. U. C.		
		+54°43′		
96 Nov. 5	O	44″79	11.9	+ 3°0
97 März 10	W	45.38	21.7	0.9
April 3		46.85	32.7	2.4
7		46.15	25.1	5.6
8		45.80	23.2	7.6
10		46.03	23.5	7.0
27		45.66	17.4	11.8
30		45.65	24.8	16.3
Mai 30	O	46.43	20.5	19.6
98 Febr. 20		45.78	32.7	− 2.2
22		45.59	33.6	+ 1.9
März 3		45.53	27.3	1.3
4	W	45.33	27.9	− 1.3
11		45.55	22.0	1.7
14		46.25	22.5	+ 7.9
April 5	O	45.65	20.3	2.2
6		45.22	17.4	3.7
7		45.28	16.2	10.7
9		45.94	21.4	14.9
11		45.40	27.0	11.5
15		45.50	20.4	6.3
16		44.82	24.8	8.9
26	W	45.89	27.9	11.6
27		45.56	30.8	13.9
Mai 2		45.25	24.6	16.2
3		44.66	27.4	17.4
		45.67		

Datum	Kr.	Z. D. 1897.0	760 — Brm.	Th.
		δ Sculptoris.		
		23h 43m 33s		
		−76°54′		
96 Sept. 19	W	46″39	29.8	(+17°2)
Okt. 2		45.64	22.2	12.9
6		45.65	18.2	9.9
7		45.67	17.9	12.4
9		47.18	20.4	12.8
10		44.22	25.7	14.4
24	O	44.75	21.6	5.5
25		47.25	24.0	5.8
97 Aug. 18	W	48.24	24.2	19.4
24		46.43	23.0	11.9
Sept. 9		47.21	24.9	13.5
13		45.09	15.6	13.0
24	O	48.33	16.2	15.8
27		47.63	16.9	17.2
30		47.98	24.2	15.7
Okt. 1		47.09	26.4	15.8
14		47.92	21.8	9.6
15		50.17	20.9	12.1
24		48.53	12.5	6.5
25		48.51	12.0	6.0
27		47.29	9.9	5.6
		47.01		
		ω Piscium.		
		23h 54m 1s		
		−41°55′		
96 Okt. 2	W	11″00	22.2	+ 12°8
6		11.04	18.3	9.8
7		11.54	17.9	12.4
9		11.93	20.5	12.7
10		11.72	25.7	14.3
24	O	11.93	21.6	5.5
25		12.06	24.0	5.8
97 Aug. 18	W	12.67	24.2	19.2
24		12.28	23.0	11.9
Sept. 9		11.92	25.0	13.4
13		12.03	15.5	12.9
24	O	10.70	16.2	15.5
27		11.76	16.9	17.3
30		11.86	24.2	15.5
Okt. 1		11.28	26.4	15.4
14		11.52	21.8	9.5
15		11.94	20.9	12.0
24		11.92	12.5	6.4
25		11.87	12.0	5.9
27		11.31	9.9	5.8
		11.71		

§ 12.

Die Genauigkeit der Beobachtungen.

In der Voraussetzung, dass die dem Instrumente anhaftenden Fehler mit hinreichender Genauigkeit bestimmt sind, wird sich der mittlere Fehler einer Zenithdistanz zusammensetzen aus einem dem Beobachter eigentümlichen Teile, der von der Gewandheit abhängt, mit welcher dieser Einstellung des Sterns und der Mikroskope auszuführen vermag (wir bezeichnen ihn mit η), aus einem zweiten Teile, ζ, der durch die Genauigkeit des angenommenen Nadirpunkts bedingt ist, und einem dritten, ξ infolge der Unsicherheit der angewandten Refraktion. Es besteht somit die Relation

$$\varepsilon = \pm\sqrt{\eta^2 + \zeta^2 + \xi^2}$$

und es handelt sich darum, diese einzelnen Teile möglichst unabhängig von den beobachteten Zenithdistanzen selbst zu bestimmen, um sodann hieraus Rückschlüsse zu ziehen, ob in den Zenithdistanzen noch fernere systematische Fehler enthalten sind.

Was den ersten Teil betrifft, so teile ich zunächst über die Art der Einstellung folgendes mit: Die Sterne sind stets in die Mitte der festen Horizontalfäden gebracht; hierdurch entstehen allerdings leicht systematische Fehler, aber die Versuche mit einem Reversionsprisma ergaben deren Nichtvorhandensein. Massgebend war für mich, dass bei schwachen Sternen, besonders also bei Tagesbeobachtungen, ferner bei häufiger Bildunruhe die angewandte Methode entschieden den Vorzug verdient; und Bissectionen von Polaris haben auch fast durchweg grössere m. F. ergeben.

Ueber den Ort der Einstellung habe ich von vorne herein keine Einschränkung getroffen, zumal die Fehler des Fadennetzes genau bestimmt und Gestaltfehler des Objectivs nicht zu befürchten waren. Wenn möglich, wurde jedoch die Einstellung in der Nähe des Meridians vorgenommen wegen der mit den Fäden parallelen Bewegung des Sterns hierselbst. Bei sehr ungünstigen Luft- und Bildverhältnissen giebt es während des Durchgangs vereinzelte Momente, in denen der Stern schärfer und ruhiger erscheint und unter Ausnutzung dieser können auch unter sonst ungünstigen Umständen mässig gute Einstellungen erlangt werden. Besonders aber ist bei Horizontsternen ein Verfolgen des Sterns und das Abpassen eines günstigen Moments sehr angezeigt.

Zudem bestand von vorne herein die Absicht, sobald es die Zeit erlaubte, während eines Durchgangs mehrfache Einstellungen vorzunehmen.

Zur Markierung des Moments der Einstellung diente bei Polsternen der Chronograph, bei Südsternen die Vertikalfäden.

Die beweglichen Horizontalfäden sind zur Beobachtung nicht benutzt worden, da es mir sehr fraglich erscheint, ob bei der hierdurch leicht ermöglichten Vervielfältigung der Einstellungen die Sicherheit der Zenithdistanzen erhöht wird. Angestellte Versuche ergaben systematische Unterschiede zwischen Einstellungen auf die festen Fäden und solchen mit den beweglichen, und zwar für die beiden Kreislagen im entgegengesetzten Sinne, so dass vermutlich durch die Berührung des Okularkopfes mit der Hand ein Druck auf das Rohr ausgeübt wurde, der sich jedoch nicht auf den Kreis übertrug, da die einschliessenden Kreisablesungen eine Aenderung nicht zeigten. Auch Nyrén weist in seiner Diskussion der Beobachtungen von Peters, Gyldén und ihm selbst am Pulkowaer Vertikalkreise daraufhin, dass mit dem Gebrauch des Okularmikrometers ein Erfolg nicht zu erzielen gewesen wäre. Da bei der jetzigen Konstruktion der Druck durch eine Uebertragung im horizontalen Sinne wirkt, so mag damit der Uebelstand beseitigt sein.

Zur Bestimmung des mittleren Fehlers einer Einstellung haben die während eines Durchgangs mehrfach eingestellten Polsterne gedient, und zwar nur Nachtbeobachtungen. Die folgende Zusammenstellung enthält neben dem Namen des Sterns die scheinbare Zenithdistanz, die Anzahl n der Einstellungen und den mittleren Fehler η.

Obere Culmination						Untere Culmination					
Stern	Z. D.	n	η	η'	g	Stern	Z. D.	n	η	η'	g
χ Drac.	24°5	36	±0″160	±0″150	1	α Urs. min. .	43°0	338	±0″200	±0″191	4
Gr. 1586 . .	25.2	30	149	150	1	51 H. Ceph.	44.6	28	150	192	1
1 H. Drac. .	33.6	71	158	159	2	ε Urs. min. .	49.6	50	219	205	2
ε Urs. min. .	34.0	36	146	160	1	1 H. Drac. .	50.0	145	212	215	3
δ Urs. min. .	38.4	66	158	175	2	γ Cephei . .	54.9	57	231	230	2
α Urs. min. .	40.5	269	187	184	4	50 Cassiop. .	60.0	22	263	268	1

Diese Zahlen setzen sich zusammen aus einer Reihe von Factoren, die bei der Darstellung derselben zu berücksichtigen kaum möglich ist. Im Wesentlichen dürfte die Abhängigkeit von

der Zenithdistanz in Frage kommen und zum Teil auch von der Polardistanz. Dem entsprechend habe ich die Darstellung der Fehler nach der Formel vorgenommen:

$$\eta^2 = \eta_0^2 + \eta_1^2 \operatorname{tg}^2 z + 2\eta_2^2 \sin^2(p + \pi),$$

wo z die Zenithdistanz, p die Polardistanz und π eine noch zu bestimmende Unbekannte ist. Setzt man

$$x = \eta_0^2 + \eta_2^2, \quad y = \eta_1^2$$
$$u = -\eta_2^2 \cos 2\pi, \quad v = \eta_2^2 \sin 2\pi,$$

so nimmt die obige Gleichung die für die Ausgleichung bequemere Form an:

$$\eta^2 = x + y \operatorname{tg}^2 z + u \cos 2p + v \sin 2p.$$

Da die Anzahl der Einstellungen der einzelnen Sterne sehr ungleich ist, so habe ich die in der letzten Columne unter g befindlichen Gewichte eingeführt. Die Ausgleichung ergiebt:

$$\eta_0 = \pm 0''131, \quad \eta_1 = \pm 0''132, \quad \eta_2 = \pm 0''264$$
$$\pi = -11^\circ\!.0,$$

woraus die unter η' gegebene, sich den Beobachtungen vorzüglich anpassende Darstellung folgt. Eine grössere Abweichung zeigt sich nur bei 51 H. Ceph. U. C., die durch die geringe Anzahl der Einstellungen erklärlich erscheint.

Der grosse Wert von η_2 legt die Vermutung nahe, dass wenigstens innerhalb der gegebenen Grenzen ausser der Polardistanz noch andere dieser parallel wirkende Factoren bestehen. Ich möchte hierzu besonders die Lage des Körpers und vor allem des Kopfes rechnen, da für die Zenithdistanzen von 20—30° dieselbe ausserordentlich bequem war und auf dem Beobachtungsstuhl eine feste Stütze fand, während für kleinere Zenithdistanzen der Kopf eine gezwungene Lage einnehmen musste. In Betracht kommt auch die Lage des Armes für die Feinbewegung; bei natürlicher Haltung desselben oder wenn er eine Unterlage findet, vermag man sicherer einzustellen, als bei einer gezwungenen, nach aufwärts gerichteten. Auf einige andere Factoren komme ich noch zurück bei der Diskussion des mittleren Fehlers einer Position.

Der mittlere Fehler eines Nadirpunktes hat sich zu rund $\pm 0''\!.10$ ergeben. Infolge der ohne Frage reellen Veränderungen des Nadirpunktes während einer Beobachtungsreihe ist jedoch dieser Wert zu klein; er mag als die untere Grenze des gesuchten

Wertes angesehen werden, während die obere Grenze jedenfalls nicht unwesentlich von dem Werte abweicht, der sich ergiebt, wenn wir die Abweichungen der beobachteten Nadirpunkte gegen die der Rechnung zu Grunde gelegten Nadirpunkte bilden. Aus 415 Reihen ergiebt sich diese zu $\pm 0''.185$. Mit diesen Zahlen sind uns hinreichende Anhaltspunkte für die Beurteilung des mittleren Fehlers einer Position gegeben.

Der von der Refraktion abhängige Teil des mittleren Fehlers einer Zenithdistanz kann bedingt sein durch den Tafeln zu Grunde gelegte, ungenaue Werte der Constanten, durch eine unrichtige Annahme über die theoretische Grundlage der Tafel oder durch fehlerhafte Annahme der Tafelargumente, d. h. der scheinbaren Zenithdistanz, der Temperatur, des Luftdrucks und der Luftfeuchtigkeit. Nach bisherigen Erfahrungen kommt, wenn wir von allzu grossen Zenithdistanzen absehen, vor der Hand nur die Temperatur in Betracht. Die Grösse des hierdurch veranlassten Fehlers lässt sich nur aus den Beobachtungen selbst bestimmen, worüber ein weiterer Abschnitt handeln wird; für uns ist augenblicklich nur von Interesse, welche Fehler wir zu erwarten haben. Ist die Temperatur um 1° falsch angenommen, so wird die Zenithdistanz dadurch um folgende Werte geändert:

Z. D. =	0°	0''.00	Z. D. =	40°	0''.19
	10	0.04		50	0.28
	20	0.08		60	0.40
	30	0.13			

Ich verweise hierbei noch auf die in § 10 gegebenen meteorologischen Daten, wonach der theoretischen Anforderung, der Berechnung der Refraction die Temperatur am Objectiv zu Grunde zu legen, hier so weit entsprochen ist, als diese gegen die wirklich angenommene einerseits und gegen die äussere Lufttemperatur andererseits nur um Grössen differierte, die über einige Zehntel Grad nicht hinausgingen.

Gehen wir nunmehr zu der Bildung der mittleren Fehler, wie sie aus den Beobachtungen selbst folgen. Die folgende Zusammenstellung enthält neben dem Namen des Sterns dessen scheinbare Zenithdistanz, Anzahl der Beobachtungen und den mittleren Fehler ε_1, und zwar zunächst nur für die Sterne bis zu 60° Z. D.; die Columne ε_2 findet später ihre Erklärung.

Stern	Schb. Z. D.	n	ε_1	ε_2
I. Südliche Z. D.				
f Puppis	82° 49'5	9		±1".98
ε Sagitt.	82 31.6	17		2.30
α Columb.	82 13.5	8		1.67
ε Scorpii	82 12.4	8		1.72
X Eridani	82 8.9	9		3.24
ι Pisc. austr.	81 36.0	31		1.90
β Fornacis	80 57.1	13		1.03
ξ Hydrae	79 24.9	20		1.39
Lac. μ Forn.	79 20.0	17		1.05
α Antliae	78 40.5	20		0.99
γ Sagitt.	78 33.4	21		1.42
α Pisc. austr.	78 18.1	25		1.49
ζ Can. maj.	78 9.2	9		1.51
υ¹ Eridani	78 6.5	7		2.61
α Sculpt.	78 2.9	25		1.03
ι Sculpt.	77 41.3	20		1.27
12 Eridani	77 31.9	13		0.83
η Pisc. austr.	77 5.4	22		1.06
ε Can. maj.	76 58.4	8		1.05
τ Navis	76 51.1	11		0.89
δ Sculpt.	76 50.6	21		1.20
λ Pyxidis	76 32.3	19		1.12
κ² Sculpt.	76 31.1	19		1.21
c Sagitt.	76 8.6	23		0.92
ε Pisc. austr.	75 43.8	21		1.15
ω Capric.	75 27.3	20		0.64
B. A. C. 4253	74 43.3	19		0.76
δ Can. maj.	74 23.0	11		0.92
α Scorpii	74 21.5	9		0.43
π Hydrae	74 20.4	17		0.67
ϑ Ophiuchi	73 3.3	15		0.62
κ Fornacis	72 26.8	16		0.75
51 Ophiuchi	72 2.7	14		0.71
Br. 2333	71 45.4	18		0.79
24 Ophiuchi	71 9.1	11		0.57
δ Scorpii	70 29.7	12		0.75
π Sagitt.	69 21.3	21		0.61
β Leporis	69 0.7	8		0.41
Lal. 18817	68 49.8	19		0.40
Lal. 24277	68 12.1	22		0.51
54 Eridani	68 2.4	7		0.39
ι Librae	67 34.5	16		0.44
γ Capric.	65 18.3	28		0.84
δ Corvi	64 7.2	18		0.45
η Ophiuchi	63 46.6	17		0.51
δ Crateris	62 24.2	21		0.34
γ Eridani	61 59.0	9		0.47
ν Aquarii	59 58.4	26		0.46
Br. 2329	59 14.5	21	±0".46	0.38
η Ceti	58 54.8	24	0.48	0.42
ζ Ophiuchi	58 32.7	12	0.39	0.37
κ Virginis	57° 58'9	20	±0".41	±0".34
ε Eridani	57 59.6	11	0.42	0.34
κ Orionis	57 53.6	8	0.78	—
ι Ceti	57 34.9	20	0.60	0.53
β Librae	57 11.4	17	0.46	0.45
ϑ Aquarii	56 29.1	24	0.44	0.38
19 Hydrae	56 21.7	20	0.61	0.57
τ Orionis	55 8.8	7	0.25	0.25
β Eridani	53 24.6	9	0.54	0.54
ϑ Virginis	53 10.8	26	0.43	0.33
ν Eridani	51 45.3	8	0.41	—
γ Aquarii	50 6.0	23	0.42	0.40
δ Ceti	48 18.7	12	0.47	0.38
η Virginis	48 17.4	20	0.43	0.32
γ Piscium	45 28.6	20	0.43	0.32
γ Ophiuchi	45 27.0	20	0.44	0.35
ϑ Hydrae	45 26.9	21	0.35	0.38
β Ophiuchi	43 35.2	17	0.34	0.16
α Equulei	43 22.5	28	0.50	0.40
γ Orionis	41 56.5	10	0.55	0.55
ω Piscium	41 54.3	20	0.51	0.45
ζ Hydrae	41 51.7	22	0.38	0.32
δ Piscium	41 10.4	18	0.67	0.41
χ Leonis	40 18.3	21	0.37	0.34
π Leonis	39 39.7	22	0.50	0.40
o Virginis	38 53.7	19	0.41	0.33
o Leonis	37 50.3	21	0.45	0.36
ι Leonis	37 6.2	21	0.52	0.35
α Leonis	35 43.9	24	0.43	0.36
60 Herculis	35 19.2	13	0.36	0.30
ζ Aquilae	34 29.5	20	0.40	0.39
ν Orionis	33 25.3	7	0.33	0.33
γ Gemin.	31 43.0	12	0.31	0.35
110 Herc.	27 45.4	22	0.37	0.28
β Herc.	26 29.5	13	0.28	0.19
λ Pegasi	25 10.9	20	0.43	0.29
41 Leon. min.	24 28.6	18	0.40	0.37
ζ Leonis	24 16.5	21	0.48	0.33
ε Leonis	23 57.5	22	0.34	0.34
ε Gemin.	22 58.4	11	0.33	0.31
α Cor. bor.	21 8.7	17	0.36	0.30
ι Gemin.	20 12.2	10	0.31	0.31
χ Gemin.	20 7.4	12	0.34	0.29
τ Piscium	18 39.9	22	0.43	0.40
ρ Bootis	17 23.1	14	0.25	0.21
42 Leon. min.	16 59.0	18	0.30	0.30
ϑ Cor. bor.	16 30.1	17	0.40	0.35
ζ Herc	16 25.1	13	0.30	0.22
12 Can. ven. sq.	9 20.1	36	0.42	0.32
δ Cygni	3 19.9	26	0.36	0.26
α Cygni	3 18.0	23	0.28	0.24
β Aurigae	3 16.5	13	0.30	0.30

Stern	Schb. Z. D.	n	ε_1	ε_2
ψ Urs. maj. . .	3° 9'.3	22	±0''.41	±0''.26
φ Herc.	3 0.4	12	0.25	0.23
α Aurigae . . .	2 19.2	11	0.14	0.14
λ Andr.	2 18.8	22	0.36	0.28
ι Herc.	2 9.1	23	0.42	0.22
o¹ sq. Cygni .	1 47.1	20	0.39	0.20
τ Herc.	1 39.3	12	0.38	0.31
λ Bootis	1 39.1	20	0.25	0.18
δ Persei	0 45.3	12	0.51	0.34
κ Urs. maj. . .	0 39.0	24	0.27	0.23
o Cassiop. . . .	0 29.6	21	0.43	0.24
26 Lyncis . . .	0 22.9	11	0.29	0.24
υ Persei	0 6.4	27	0.42	0.29

II. Nördliche Z. D.

Stern	Schb. Z. D.	n	ε_1	ε_2
χ Urs. maj. . .	0 8.2	21	0.46	0.29
ι Urs. maj. . .	0 14.0	22	0.26	0.24
θ Persei	0 34.8	13	0.37	0.26
ψ² Cygni . . .	0 37.2	30	0.42	0.27
ι Persei.	1 0.4	14	0.40	0.30
ψ¹ Aurigae . .	1 7.6	11	0.22	0.22
α Persei	1 16.9	13	0.62	0.28
7 Lacertae . .	1 32.4	23	0.41	0.23
η Urs. maj. . .	1 36.8	38	0.44	0.27
θ Cygni	1 46.1	21	0.42	0.25
φ Persei	1 57.4	27	0.45	0.36
γ Dracon. . . .	3 17.2	24	0.32	0.25
ι Cygni	3 17.7	21	0.31	0.22
3 Lacertae . .	3 29.9	22	0.36	0.26
27 Lyncis . . .	3 35.3	17	0.29	0.25
θ Urs. maj. . .	3 55.9	21	0.28	0.24
ψ Cygni	3 57.0	24	0.38	0.28
θ Bootis	4 6.7	18	0.31	0.26
τ Persei.	4 7.5	13	0.56	0.24
β Dracon. . . .	4 9.8	21	0.40	0.32
Gr. 1460 . . .	4 51.4	23	0.29	0.22
γ Persei	4 53.3	14	0.42	0.22
κ Cygni.	4 57.8	24	0.34	0.20
γ Urs. maj. . .	6 3.1	22	0.42	0.29
η Persei	7 15.2	14	0.44	0.30
α Cassiop. . . .	7 45.4	26	0.54	0.38
ε Urs. maj. . .	8 18.2	46	0.46	0.34
Br. 3077	8 23.1	25	0.36	0.26
β Urs. maj. . .	8 43.1	22	0.50	0.34
δ Urs. maj. . .	9 23.3	24	0.36	0.25
ζ Cephei	9 28.6	27	0.44	0.23
15 Lyncis . . .	10 20.5	10	0.38	0.37
β Cassiop. . . .	10 21.9	26	0.41	0.27
θ Dracon. . . .	10 37.4	13	0.30	0.29
2 Lyncis	10 49.9	11	0.29	0.29
o Dracon. . . .	11 2.7	20	0.31	0.23
ι Dracon. . . .	11 6.6	16	0.32	0.27
o Urs. maj. . .	12° 50'.7	21	±0''.31	±0''.25
η Cephei	13 13.3	23	0.34	0.29
4 Cassiop. . . .	13 30.0	22	0.40	0.27
η Dracon. . . .	13 31.8	12	0.30	0.19
α Cephei	13 55.9	33	0.41	0.22
20 Cephei . . .	14 3.9	24	0.41	0.25
κ Cassiop. . . .	14 8.7	24	0.34	0.33
θ Cephei . . .	14 25.8	25	0.41	0.25
12 H. Drac. .	14 42.0	12	0.29	0.27
α Dracon. . . .	16 39.0	19	0.26	0.20
i Dracon. . . .	17 0.8	20	0.34	0.30
ι Cephei	17 26.4	22	0.41	0.30
9 Camel.	17 56.9	9	0.20	0.19
δ Drac.	19 15.6	24	0.38	0.28
Gr. 1308 . . .	20 27.3	9	0.22	0.21
λ Drac.	21 40.8	24	0.44	0.30
5 H. Cam. . . .	22 11.5	10	0.55	0.42
50 Cassiop. . .	23 42.2	19	0.44	0.39
χ Drac.	24 28.0	22	0.32	0.23
Gr. 1586 . . .	25 8.9	23	0.32	0.26
β Urs. min. . .	26 21.3	17	0.31	0.28
Br. 1147 . . .	27 51.0	21	0.23	0.22
γ Cephei	28 50.0	25	0.44	0.33
24 H. Cam. . .	28 53.1	10	0.22	0.20
ζ Urs. min. . .	29 53.3	12	0.32	0.30
4 H. Drac. . .	29 57.9	19	0.36	0.22
1 H. Drac. . .	33 33.4	24	0.30	0.24
ε Urs. min. . .	33 58.9	13	0.30	0.26
δ Urs. min. . .	38 23.2	22	0.30	0.20
51 H. Ceph. .	38 59.0	10	0.31	0.29
α Urs. min. . .	40 31.8	62	0.39	0.32

Untere Culmination.

Stern	Schb. Z. D.	n	ε_1	ε_2
α Urs. min. . .	43 0.8	56	0.40	0.29
51 H. Ceph. .	44 33.6	20	0.30	0.23
δ Urs. min. . .	45 9.4	9	0.31	0.31
ε Urs. min. . .	49 33.6	10	0.33	0.32
1 H. Drac. . .	49 59.1	43	0.37	0.23
4 H. Drac. . .	53 34.5	16	0.51	0.43
ζ Urs. min. . .	53 39.1	10	0.39	0.37
24 H. Cam. . .	54 39.3	22	0.50	0.37
γ Cephei	54 42.4	22	0.60	0.45
Br. 1147 . . .	55 41.4	23	0.59	0.51
β Urs. min. . .	57 11.0	14	0.41	0.17
Gr. 1586 . . .	58 23.4	27	0.55	0.44
χ Drac.	59 4.2	12	0.54	0.54
50 Cass.	59 50.1	20	0.43	0.33
5 H. Cam. . . .	60 44.5	13		0.63
λ Drac.	61 51.3	23		0.52
Gr. 1308 . . .	63 4.7	20		0.47
δ Drac.	64 16.3	10		1.01
9 Camel.	65 35.0	10		0.46

Stern	Schb. Z. D.	n	ε_1	ε_2	Stern	Schb. Z. D.	n	ε_1	ε_2
ι Cephei	66° 5′.4	20		±0″.69	ϑ Urs. maj. . .	79° 33′.1	23		±1″.36
i Drac.	66 31.0	17		0.77	27 Lyncis . . .	79 53.5	22		1.27
α Drac.	66 52.8	17		0.73	3 Lacertae . .	79 58.9	20		1.15
12 H. Drac. .	68 49.5	10		0.43	ι Cygni	80 11.0	10		2.21
ϑ Cephei . . .	69 5.7	21		0.57	γ Drac.	80 11.5	9		1.22
ϰ Cassiop. . . .	69 22.7	18		0.51	φ Persei	81 30.5	22		1.55
20 Cephei . . .	69 27.5	20		0.72	ϑ Cygni	81 41.7	10		1.52
α Cephei	69 35.6	22		0.54	η Urs. maj. . .	81 50.9	24		2.08
η Drac.	69 59.7	12		0.55	7 Lacertae . .	81 55.2	20		1.52
4 Cassiop. . . .	70 1.5	22		0.74	α Persei	82 10.6	18		2.03
η Cephei	70 18.1	23		0.58	ψ¹ Aurigae . .	82 19.7	18		2.24
o Urs. maj. . .	70 40.7	24		0.87	ι Persei.	82 26.8	18		2.37
ι Drac.	72 24.5	12		0.50	π² Cygni	82 49.7	13		2.47
o Drac.	72 28.3	9		0.99	ϑ Persei	82 52.0	15		1.61
2 Lyncis	72 41.1	19		0.64	ι Urs. maj. . .	83 12.5	32		2.53
ϑ Drac.	72 53.6	11		1.08	χ Urs. maj. . .	83 18.2	19		2.40
β Cassiop. . . .	73 9.0	21		0.82	υ Persei	83 32.5	16		1.54
15 Lyncis . . .	73 10.4	20		0.88	26 Lyncis . . .	83 48.7	20		2.40
ζ Cephei	74 2.1	21		0.88	o Cassiop. . . .	83 55.3	17		1.54
δ Urs. maj. . .	74 7.4	22		1.03	ϰ Urs. maj. . .	84 4.5	33		2.18
β Urs. maj. . .	74 47.4	26		1.02	δ Persei	84 10.6	13		2.58
Br. 3077	75 7.5	20		0.68	λ Bootis	85 3.1	16		4.03
ε Urs. maj. . .	75 12.3	26		1.18	τ Herc.	85 3.4	10		3.82
α Cassiop. . . .	75 45.0	28		0.76	o¹ sq. Cygni .	85 10.9	14		4.92
η Persei	76 15.1	18		1.38	ι Herc.	85 32.3	6		2.43
γ Urs. maj. . .	77 26.8	20		1.31	λ Andr.	85 41.6	13		4.07
ϰ Cygni	78 31.7	9		1.41	α Aurigae . . .	85 42.0	14		3.81
γ Persei	78 36.1	17		0.93	φ Herculis . .	86 21.8	7		1.56
Gr. 1460 . . .	78 38.0	24		1.24	ψ Urs. maj. . .	86 30.2	20		6.04
β Drac.	79 19.3	8		0.51	β Aurigae . . .	86 37.2	20		4.88
τ Persei	79 21.6	15		1.33	α Cygni.	86 38.6	15		7.43
ϑ Bootis	79 22.4	16		1.10	δ Cygni.	86 40.4	7		4.56
ψ Cygni	79 32.0	10		1.71					

Nehmen wir zunächst von der Unsicherheit der angewandten Refraktion Abstand, was nach dem Obigen besonders für kleine Z.D. ohne Frage gestattet ist, so erhalten wir als die oberste Grenze des zu erwartenden mittleren Fehlers die in der folgenden Tabelle unter ε gegebenen Zahlen, während unter ε_1 sich der thatsächlich beobachtete mittlere Fehler im Mittel aus obiger Zusammenstellung befindet. Wir beschränken uns hier zunächst auf nördliche Z. D.

Z. D. = + 2°	ε = ± 0″.29	ε_1 = ± 0″.38
7	0.28	0.42
12	0.27	0.34
17	0.25	0.35
25	0.24	0.35
37	0.25	0.32
47	0.27	0.34.

Die besonders für kleine Zenithdistanzen auffallend starken Abweichungen beider Reihen lassen schliessen, dass noch Factoren im Spiele sind, die einer näheren Untersuchung bedürfen.

Zu diesem Zwecke habe ich für jeden Stern bis zu 65° Z. D. die Abweichungen gegen das Mittel gebildet und diese Abendweise zusammengestellt. In der Voraussetzung, dass die Anzahl der beobachteten Zenithdistanzen eines Abends (bis zu 65° Z. D.) hinreichend gross ist und dass die Beobachtungen sich über beide Meridianhälften verteilen, kann man aus der Beschaffenheit einer solchen Reihe Rückschlüsse auf die Richtigkeit des angenommenen Nadirpunkts machen. Ist dieser nämlich falsch angenommen, so werden die nördlichen Zenithdistanzen um den fehlerhaften Betrag zu gross oder zu klein sein wie die südlichen zu klein oder gross.

Diese Reihen nun zeigen die mannigfachsten Variationen, die man etwa nach folgenden Gesichtspunkten zergliedern kann:

I) Nadirpunkt am Anfang und am Schluss der Reihe sind gleich, d. h. ihre Differenz übersteigt nicht 0."20.

1) Die Darstellung ist befriedigend; es findet ein regelmässiger Vorzeichenwechsel statt und die Differenzen halten sich innerhalb der nach der obigen Ableitung des mittleren Fehlers zulässigen Grenzen.

2) Die Abweichungen haben während der ganzen Reihe gleiches Vorzeichen, und zwar die der nördlichen Zenithdistanzen umgekehrtes wie die der südlichen Zenithdistanzen; durch die Anbringung einer konstanten Correction an den Nadirpunkt wird die Darstellung befriedigend.

3) Es treten offenbare Schwankungen innerhalb der Reihe auf, die auf ein gleiches Verhalten des Nadirpunkts schliessen lassen.

4) In der Reihe tritt ein plötzlicher Sprung ein.

II) Nadirpunkt am Anfang und am Schluss der Reihe sind verschieden.

1) Durch die Annahme einer fortschreitenden, jedoch nicht immer der Zeit proportionalen Aenderung des Nadirpunkts wird die Darstellung befriedigend.

2) Die Vorzeichenreihe lässt einen plötzlichen Sprung erkennen.

3) Nur der eine Nadirpunkt giebt eine befriedigende Darstellung.

4) Zu der unter II_1 gemachten Annahme tritt noch eine konstante Correction hinzu.

III) Einige Reihen zeigen auffallend starke und unregelmässige Abweichungen. Die Erklärung liegt zum Teil in der völlig un-

genügenden Bildbeschaffenheit, zum Teil darin, dass das Instrument sich infolge seismischer Störungen in fortwährenden unkontrollierbaren Schwankungen befunden hat.

Zergliedern wir hiernach die Abendreihen, so ergiebt sich untenstehende Zusammenstellung. Neben dem Datum und der Kreislage befindet sich die Angabe über das Verhalten des Nadirpunkts am Anfang und am Schluss der Reihe; c bedeutet, dass er sich konstant verhalten hat, var., dass er sich geändert hat. Die römischen Ziffern mit angehängten Indices weisen auf die betreffende Rubrik der obigen Zergliederung hin. Unter „Corr." befindet sich die Zahl, die endgültig an den Nadirpunkt angebracht wurde; darauf folgen Anzahl der zu einer Abendreihe gehörigen Sterne sowie Bemerkungen über die Ausdehnung der Reihe, mittlerer Fehler derselben (unter der Annahme gleichen Gewichtes für alle Zenithdistanzen) etc. Bei einzelnen Reihen ist angegeben, wie bedeutend der mittlere Fehler nach Anbringung der Correction sinkt. Will man diese direkt an die Zenithdistanzen anbringen, so ergiebt sich für das Vorzeichen folgendes Schema:

Corr.		nördl. Z. D.	südl. Z. D.
+	K. O.	—	+
	K. W.	+	—
—	K. O.	+	—
	K. W.	—	+

Datum	Kr.	Z. P.	Rub.	Corr.	n N	S	Bem.	Datum	Kr.	Z. P.	Rub.	Corr.	n N	S	Bem.
1896								1896							
Aug. 16	O	c	I_1		9	4	$\varepsilon = \pm 0''33$	Sept. 19	W	var.	II_1		10	3	
18		c	I_1		0	4				c	I_2	$+0''60$	6	4	$22^h1 - 23^h8$
20		c	I_1		4	1		22		c	III		5	5	
25		c	I_2	$+0''41$	4	3	$19^h6 - 21^h0$	24		c	I_1		7	2	
		c	I_1		6	2		27		c	I_1		4	0	
Sept. 1		c	I_1		4	2		Okt. 2		var.	II_1		5	1	
4		c	I_2	-0.28	2	3	17.1 — 18.0			var.	II_1		12	9	
		c	I_1		10	3	$\varepsilon = \pm 0''32$	3		c	I_1		2	2	
5		c	I_1		2	3		6		var.	II_4	-0.71	4	3	20.4 — 21.4
6		c	I_2	-0.40	3	3	ε sinkt von			c	III		9	8	
9		c	I_2	-0.43	5	3	$\pm 0''54$ auf $\pm 0''17$	7		c	I_2	$+0.49$	3	0	21.4 — 21.9
10		c	I_4		7	2				c	I_3		9	7	
15	W	c	I_1		7	3				c	I_3		7	2	
17		c	I_1		8	3	gut	8		c	I_2	$+0.52$	6	5	ε sinkt von
		c	I_1		3	2		9		var.	II_1		9	5	$\pm 0''59$ auf $\pm 0''22$
18		var.	II_4	$+0.61$	7	2	$18^h9 - 20^h0$			c	I_2	-0.26	12	7	$22^h8 - 2^h4$
		var.	II_4	$+0.61$	6	2	21.4 — 22.6	10		c	I_1		7	4	$\varepsilon = \pm 0''29$
		c	I_1		4	3		15		c	I_1		2	2	



Datum	Kr.	Z. P.	Rub.	Corr.	n N	n S	Bem.
1896							
Okt. 16	W	c	I_1		14	7	
		c	III		4	1	
17		c	I_2	$+0''27$	4	3	$20^{h}5-21^{h}7$
		c	I_2	$+0.70$	3	4	$0.7-\ 2.4$
18		c	I_3		12	6	
21	O	var.	II_1		3	1	} $\varepsilon=\pm0''17$
		c	I_1		6	1	
22		c	I_1		4	3	
24		c	I_3		10	9	
25		c	I_2	-0.34	6	4	$22^{h}7-23^{h}9$
		var.	II_4		4	6	
26		c	I_2	-0.60	6	5	$19^{h}7-21^{h}6$
		c	I_3	$+0.51$	7	6	$0.1-\ 2.4$
28		c	I_1		4	2	
Nov. 4		c	I_2	-0.40	3	1	
5		c	I_1		9	5	$\varepsilon=\pm0''22$
		c	III	-0.79	2	2	$0^{h}6-1^{h}4$
5/6		c	I_3	-0.62	10	1	
6		c	I_3	$+0.44$	4	2	
10		c	I_1		7	2	
13		c	I_1	$+0.40$	10	8	$20^{h}9-1^{h}6$
14		c	I_4		4	3	
1897							
März 4	W	c	I_2	$+0.39$	6	4	
10		c	I_3		10	9	
26		c	I_1		3	5	$\varepsilon=\pm0''15$
April 3		c	I_3		7	11	
		c	I_2	-0.45	3	3	$12^{h}4-13^{h}7$
5		var.	II_1		8	6	$\varepsilon=\pm0''22$
7		c	I_3		10	11	
8		var.	II_3		6	6	
		c	I_1		7	5	
9		c	I_2	$+0.67$	2	10	$9^{h}6-11^{h}5$
		c	I_1		3	3	
10		c	I_1		14	11	$\varepsilon=\pm0''26$
14		c	I_1		5	4	$\varepsilon=\pm0.22$
17		c	I_3		8	11	
		c	I_1		8	4	$\varepsilon=\pm0''25$
21		c	I_1		5	0	
27		c	I_2	-0.43	6	5	$10^{h}8-13^{h}0$
28		var.	II_1		5	11	
		c	I_1		8	5	
		c	I_2	$+0.71$	4	4	$16^{h}9-18^{h}1$
30		c	I_1		10	9	
		c	I_1		5	10	
Mai 12		c	I_2	-0.48	10	10	$12^{h}2-15^{h}6$
		c	I_1		2	3	schlecht!
17		var.	II_1		10	7	
21		c	I_3		12	11	
22		c	I_3		6	11	
		c	I_1	-0.37	1	4	$17^{h}1-17^{h}9$
26		c	I_2	-0.36	5	12	$14.6-17.3$

Datum	Kr.	Z. P.	Rub.	Corr.	n N	n S	Bem.
1897							
Mai 29	W	var.	II_2	$+0''82$	7	5	$11^{h}7-13^{h}7$
		c	I_1		6	6	
30		c	I_1		9	5	
		c	I_1		6	11	
Juni 1		c	I_1		9	8	$\varepsilon=\pm0''18$
		c	I_2	$+0.90$	8	2	$0^{h}6-3^{h}4$
3		c	I_3		5	5	
		c	I_4		6	10	
5		c	I_3		16	19	
11		c	I_1		4	10	
12		c	I_1		7	5	$\varepsilon=\pm0''24$
13		c	I_1		14	16	
		c	I_2	-0.37	8	2	$17^{h}6-19^{h}3$
14		c	I_1		10	8	
		c	I_2	$+0.39$	4	5	$16.8-18.3$
18		c	I_1		6	10	
22		c	I_1		4	3	
23		c	I_1		6	3	
		c	I_2	$+0.28$	6	9	$16.3-18.4$
		c	I_1		4	2	
24		c	I_2	$+0.37$	6	4	$12.6-14.2$
		c	I_1		9	11	
		c	I_2	-0.32	5	2	$0.1-1.6$
25		c	I_2	$+0.44$	7	7	$12.0-14.2$
		c	I_3		11	12	
27		c	I_1		6	9	
28		c	I_1		4	3	
30		c	I_1		3	0	
Juli 2		c	I_1		3	1	
Aug. 17		c	I_2	$+0.22$	13	7	
18		c	I_3	-0.50	15	8	$17.4-20.5$
		var.	I_4		7	7	
19		c	I_1	-0.35	15	9	$17.1-20.6$
22		c	I_3	$+0.24$	7	2	$19.1-20.4$
24		c	I_3		17	7	
		c	I_1		9	6	
26		c	I_3	-0.22	6	3	$17.9-19.3$
		c	I_3	-0.33	14	8	$20.3-23.6$
30		c	I_1		7	5	
		c	I_1		15	8	
31		c	I_2	-0.25	4	2	
Sept. 2		c	I_1		7	6	$\varepsilon=\pm0''22$
		c	I_1		13	7	
5		c	I_2	$+0.30$	2	3	$17.5-18.0$
		c	I_1		4	3	
		c	I_1		12	5	
8		c	I_2	-0.28	6	2	
9		var.	II_1		7	6	
		c	I_1		13	8	
		c	I_1		2	4	
13		c	I_1		8	6	
		c	I_1		2	3	

Datum	Kr.	Z. P.	Rub.	Corr.	″ N	″ S	Bem.
1897							
Sept. 18	O	c	I_1		17	8	$\varepsilon = \pm 0''.22$
21		c	I_1		11	4	$\varepsilon = \pm 0''.26$
		c	I_1		9	5	
24		c	I_3	+0″.26	17	8	17ʰ9—21ʰ7
		c	I_3		11	9	
27		c	I_2	+0.24	17	8	17.9—21.7
		c	I_2	+0.38	4	3	22.9—23.9
28		c	I_1		9	4	
		c	I_1		13	7	
29		c	I_3		15	8	
		c	I_1		3	2	
30		c	I_1		15	8	
		c	I_1		10	8	
Okt. 1		c	I_2	−0.33	14	7	
		c	I_2	−0.33	8	8	
2		c	I_2	+0.28	7	1	
13		c	I_1		12	4	$\varepsilon = \pm 0''.19$
14		c	I_1		13	7	$\varepsilon = \pm 0''.21$
15		c	I_1		14	7	
		c	I_1		3	3	
19		c	I_1		8	3	$\varepsilon = \pm 0''.16$
24		c	I_2	−0.52	11	6	21ʰ6—23ʰ9
25		c	I_2	+0.49	8	6	23.1— 0.7
27		c	I_2	+0.38	3	1	21.2—21.7
		c	I_3		11	7	
		c	I_1		3	6	
28		c	I_2	−0.25	6	1	21.2—22.1
		c	I_2	+0.15	11	5	2.6— 5.0
29		c	I_1		3	0	
		c	I_4		11	4	
30		c	I_1		3	0	
		c	I_2	−0.49	14	7	0.1— 4.3
Nov. 8		c	I_2	−0.42	7	1	1.3— 3.0
9		c	I_2	+0.60	9	5	20.9—23.1
11		c	I_1		3	2	
		c	I_3		8	4	
19		c	I_2	+0.45	10	4	0.8— 3.7
22		c	I_1		11	11	2.6— 5.9
		c	I_1		8	4	6.6— 8.7
25		c	I_2	−0.56	3	0	
26		c	I_2	−0.58	6	0	
		var.	II_1		11	3	2.6— 4.0
		c	I_1		4	3	
Dec. 6		c	I_2	−0.55	3	0	
		c	I_3		11	8	4.1— 8.1
10		c	III	−0.35	5	4	
		var.	II_1		14	13	4.9— 9.0
31		c	I_1		4	3	
1898							
Jan. 8		c	I_1		4	7	
		c	I_2	+0.29	6	3	7.4— 9.0
Febr. 5		c	I_1		6	2	

Datum	Kr.	Z. P.	Rub.	Corr.	″ N	″ S	Bem.
1898							
Febr. 6	O	c	I_1		5	4	
9		c	I_1		9	11	
18		c	I_1		8	10	
20		c	I_1		7	3	
		c	I_3		7	15	8ʰ7—11ʰ6
22		c	I_1		3	7	
25		c	I_1		3	5	
März 1		c	I_3		11	11	
		c	I_1		7	15	8.5—11.4
3		c	I_2	−0″.28	13	15	
4	W	var.	II_1		2	6	
		c	I_2	+0.30	7	11	9.9—12.3
5		c	I_1		8	6	
11		c	I_3		6	9	
		c	I_1	−0.43	7	9	8.1—10.2
		c	I_1	+0.85	4	6	10.3—11.7
		c	I_1	+0.26	6	3	
12		c	I_1		2	2	
		c	I_3		7	12	
13		var.	II_1		7	11	$\varepsilon = \pm 0''22$
14		var.	II_1		6	7	
		c	I_3		12	8	$\varepsilon = \pm 0''.21$
15		c	I_1		7	8	$\varepsilon = \pm 0''.21$
19		c	I_2	−0.22	8	5	
21		var.	II_1		9	6	
		c	I_1		4	2	8ʰ4— 9ʰ0
		c	I_2	−0.53	3	8	9.1—10.7
23		var.	II_1		7	6	5.1— 6.9
		c	I_1		1	2	7.1— 7.9
31		c	I_3	+0.23	8	9	
		c	I_3		11	8	
April 5	O	c	I_2	−0.39	9	7	
6		c	III		0	5	
		var.	III		5	2	6.2— 7.3
		c	I_1		6	6	
		c	I_1	−0.52	8	11	
7		c	I_1		16	16	
8		c	I_1		6	8	
9		c	I_1		15	18	
11		c	I_1		8	8	
		c	I_1		6	3	11.3—12.6
		c	I_2	−0.45	7	5	ε sinkt von $\pm 0''.51$ auf $\pm 0''.19$
15		c	I_3		4	9	
		c	I_2	−0.34	5	5	12ʰ0—13ʰ4
16		c	I_1		9	12	
18		c			5	10	Okular und
26	W	c			19	17	Objectiv ver-
27		var.			9	11	tauscht!
		var.			7	14	
Mai 2		var.			15	15	
3		c			14	16	

Von insgesammt 235 Reihen, wobei isolierte Beobachtungsreihen von Polaris ausgeschlossen sind, genügen in der Darstellung 114 (Rubrik I_1). Bei veränderlichem Nadirpunkt befriedigt in 16 Fällen die Annahme einer der Zeit proportionalen Aenderung (II_1). Eine konstante Correction ist erforderlich in 54 Fällen bei gleichem Anfangs- und End-Nadir (I_2), in 4 Fällen bei veränderlichem Nadir (II_4). Schwankungen bei gleichem Anfangs- und End-Nadir sind wahrscheinlich in 33 Fällen (I_3). Ein offenbarer Sprung ist vorhanden in 5 Fällen (I_4 und II_2). Eine völlige Verwerfung des einen Nadirpunkts (II_3) hat in einem Falle bei einer längeren Reihe und in 5 Fällen bei Polarisbeobachtungen stattgefunden. In 7 Fällen ist die Darstellung ungenügend.

Suchen wir nunmehr nach Erklärungen für die hier kurz skizzierten Erscheinungen, so sind sie zum Teil nach den Ausführungen in § 9 leicht gegeben. Zunächst dürfte es wohl kaum einem Zweifel unterliegen, dass die ganze Erscheinung auf eine thatsächliche Verschiebung des Nadirpunktes zurückzuführen ist; es ist nur fraglich, ob wir es mit einer nur scheinbaren, in dem Instrumente liegenden, oder mit einer reellen, durch Lotstörungen oder durch Refractionsanomalien hervorgerufenen zu thun haben. Im ersten Falle kann sich die Veränderung des Nadirpunkts in der Abendreihe wiederspiegeln oder auch nicht, während im zweiten Falle offenbar nur eine einseitige Veränderung eintritt entweder des Nadirpunkts oder der gemessenen Zenithdistanzen, wenn es sich um eine Neigung der atmosphärischen Niveauschichten handelt.

Fortschreitende Aenderungen, Schwankungen und Sprünge sowohl im Nadirpunkt wie in der Differenzreihe eines Abends lassen sich sehr wohl durch Aenderungen des Mikroskopsystems gegen die Lotlinie erklären, die ihrerseits ihre Begründung in seismischen Störungen, Schwankungen der Pfeiler, allenfalls auch der in Frage kommenden Instrumententeile infolge von thermischen Einwirkungen etc. finden. Auch die Aenderung der Beleuchtung z. B. bei dem Uebergang von Nacht- zu Tagbeobachtungen oder durch vereinzelte vorüberziehende Wolken beeinflusst die Auffassung der Einstellung im Nadir sowohl wie am Kreise. Ich verweise hier auf die Polarisbeobachtungen von 1897 April 30 und Oktober 13, die bereits in § 5 besprochen wurden. 36 Reihen ziehen sich vom Tage in die Nacht hinein; hiervon zeigen 12 eine auch in der

Differenzreihe auftretende Veränderung des Nadirpunkts. 8 Reihen erfordern konstante Correctionen, 9 weisen Schwankungen auf und 7 genügende Darstellung. Für die variablen Fälle sind die einzelnen Mikroskope besonders untersucht; es ergiebt sich bei guter innerer Uebereinstimmung für Kreis Ost eine Zunahme der Kreisablesung von 0″.70 für alle 4 Mikroskope, und für Kreis West eine Abnahme von gleichem Betrage.

Auffallender und weniger leicht erklärlich sind jene Fälle, in denen bei gleichem Anfangs- und End-Nadir die Zenithdistanzen einer Abendreihe systematische Abweichungen gegen ihre Mittelwerte ergeben, und besonders wo diese Abweichungen für alle Zenithdistanzen konstant sind. Die gleiche Erscheinung zeigt sich auch bei Bauschinger (l. c. § 11, p. 168), ohne dass auch hier ein hinreichender Grund für dieselbe gefunden ist. Wir denken zunächst an reelle Lotstörungen; jedoch sind solche in den hier auftretenden Beträgen bis zu 1″ bislang nirgendwo nachgewiesen und sie erscheinen auch hier sehr unwahrscheinlich, wenn auch die Sternwarte an dem Fusse des gewaltigen Gebirgsstocks der Alpen liegt, in dem Massenverschiebungen in grösster Ausdehnung möglich sind. Eine Abweichung der Nadirstellung des Instruments von der Lotrichtung kann verursacht werden durch Fehler im Nadirhorizont, sei es infolge Unsauberkeit der Quecksilberoberfläche oder in der Verquickung, sei es dass bei starker Abweichung des Spiegelmittelpunkts von der optischen Axe auf Randteile des Spiegels eingestellt wird, deren Oberfläche infolge von Capillarwirkungen nicht völlig horizontal ist. Indess möchte ich diese Gründe hier ausschliessen wegen der auf den Horizont verwandten Sorgfalt und wegen der völligen Unverrückbarkeit desselben.

Einseitige Belastung der Pfeiler durch die Nadirtreppe, lockere Befestigung des Objectivs, ungleichartige Erwärmung des Rohrs oder Kreises etc. vermögen auch das nur sporadische Auftreten der Abweichungen nicht zu erklären.

Betrachten wir schliesslich noch als Grund der Erscheinung Störungen in der Refraktion, so ist klar, dass durch eine Neigung der atmosphärischen Niveauschichten symmetrisch zum Meridian eine Verschiebung des Zeniths herbeigeführt wird der Art, dass nördliche und südliche Zenithdistanzen im entgegengesetzten Sinne beeinflusst werden. Ist die Neigung der Schichten gleicher Dichtig-

keit für alle Höhen der Atmosphäre dieselbe, $=\lambda$, so beträgt der Fehler in der Refraktion

$$dr = \alpha \sec^2 z dz,$$

wo $dz = \lambda$ ist. Für $\lambda = 1^0$ erhalten wir für

$$z = 0^0,\ dr = 1'';\ z = 45^0,\ dr = 2'';\ z = 60^0,\ dr = 4''\ \text{etc.}$$

Diese Annahme ist jedoch wenig plausibel, sondern vielmehr die, dass die Neigung mit der Höhe abnimmt. Setzen wir hierfür mit Radau (l. c. II p. 55) das Verhältniss 1:10, so ergiebt sich

$$dr = 0''.1\,\lambda_0 \sec^2 z,$$

also ein zehnmal kleinerer Fehler. Bei der Verschiedenheit des Geländes im Norden und Süden der Sternwarte, welches hierhin sanft ansteigt, dorthin stark abfällt, ist die Möglichkeit dieser Fehler keineswegs ausgeschlossen. Doch haben diese Zahlen, abgesehen davon, dass sie von der Zenithdistanz abhängig sind, zunächst nur theoretischen Wert, da eine rechnerische Auswertung und eine Elimination der konstanten Correctionen aus den Beobachtungsreihen sich kaum ermöglichen lassen wird.

Es verbleibt hiernach nichts anderes, als die Reihencorrectionen in irgend einer Weise zu bestimmen und anzubringen. Zunächst habe ich ein graphisches Verfahren eingeschlagen und habe mit der Zeit oder der Zenithdistanz als Argument die Abweichungen einer Reihe aufgetragen. Hierdurch wären allerdings die mittleren Fehler auf ein Minimum reduciert, der Willkür aber die weitesten Grenzen gezogen. Aus diesem Grunde habe ich schliesslich nur dort, wo die innere Uebereinstimmung der Abweichungen und ihre Grösse (über 0".20) es angezeigt erscheinen liessen, das Mittel derselben als Correction angebracht. Hiermit sind aufs Neue und zwar jetzt für sämmtliche Sterne die mittleren Fehler einer Zenithdistanz gerechnet und in der obigen Zusammenstellung unter ε_2 gegeben. Man erkennt sofort, dass bereits hierdurch eine wesentliche Verbesserung erzielt ist.

Die graphische Darstellung der Werte ergiebt, dass die nördliche Curve anders verläuft als die südliche. Die mittleren Fehler von 10° zu 10° in Mittel zusammengezogen enthält die folgende Tabelle in der zweiten Columne, während die dritte die Werte der aus der Ausgleichung (bis zu Zenithdistanzen von 70°) folgenden Formel giebt:

$$\varepsilon^2 = (0''230)^2 + (0''195 \operatorname{tg} z)^2 + (0''227 \sin p)^2,$$

wo p die Polardistanz bedeutet, dessen Coefficient hier wieder von auffallender Grösse ist.

Südliche Z. D.			Nördliche Z. D.		
	beob.	ber.		beob.	ber.
85°	—	—	85°	3″28	3″33
80	1″52	1″51	80	1.66	1.50
70	0.65	0.62	70	0.64	0.59
60	0.45	0.46	60	0.43	0.41
50	0.39	0.40	50	0.34	0.33
40	0.36	0.36	40	0.27	0.28
30	0.33	0.33	30	0.27	0.26
20	0.29	0.31	20	0.27	0.26
10	0.26	0.29	10	0.27	0.26
0	0.25	0.27	0	0.25	0.27

Für 80° Z. D. ist der Coefficient von tg z auf 0″26 und für 85° auf 0″29 erhöht.

Hiermit haben wir uns der anfangs abgeleiteten obersten Grenze des zu erwartenden mittleren Fehlers bedeutend genähert. Eine weitere Annäherung würde eintreten, wenn wir noch gewisse Umstände in Rechnung zögen, die ohne Frage für die Gestaltung des mittleren Fehlers von Einfluss sind. Trennt man z. B. Tag- und Nachtbeobachtungen, so ergiebt sich für einzelne auch häufig am Tage beobachtete Sterne:

α Urs. min.	O. C.	Tagbeob. $\varepsilon =$	$\pm$ 0″34	Nachtbeob. $=$	$\pm$ 0″30
„	U. C.	„	$\pm$ 0.33	„	$\pm$ 0.27
ε Urs. maj.	O. C.		$\pm$ 0.39		$\pm$ 0.33
12 Can. ven. sq.			$\pm$ 0.44		$\pm$ 0.32
α Cassiop.	O. C.		$\pm$ 0.35		$\pm$ 0.30.

Der mittlere Fehler einer Einstellung von α Urs. min. O. C. beträgt $\pm$ 0″187 für Nachtbeobachtungen und $\pm$ 0″217 für solche am Tage; für U. C. sind die betreffenden Zahlen $\pm$ 0″200 und $\pm$ 0″231. Der Grund für diese Unterschiede ist leicht ersichtlich. Nach Grössenklassen geordnet, ergiebt sich

Sterne 2. Kl. $\varepsilon =$	$\pm$ 0″30		Sterne 5. Kl. $\varepsilon =$	$\pm$ 0″26
3. „	$\pm$ 0.28		6. „	$\pm$ 0.24.
4. „	$\pm$ 0.28			

Als Curiosa führe ich die beiden Sterne 1. Grössenklasse α Cygni und besonders α Aurigae an mit einem mittleren Fehler von $\pm 0''.24$ und $\pm 0''.14$; die Sterne erschienen als vollkommene Scheibchen, die auf beiden Seiten genau von den Fäden tangiert wurden.

Schliesslich habe ich noch die mittleren Fehler nach den AR. der Sterne geordnet. Es zeigt sich, dass die Fehler am grössten sind in den Stunden 20^h—3^h, am kleinsten von 4^h—10^h und 14^h—19^h. Die ersteren fallen hauptsächlich in die Monate Oktober bis December, in denen die Bilder wesentlich schlechter waren als von März bis Juni in den Stunden 4—19. Ausserdem sind in den Monaten September bis December die meisten Nadirpunktcorrectionen erforderlich.

Da es schwierig ist, alle diese Factoren in Rechnung zu ziehen, begnügen wir uns mit der oben gegebenen Formel und fügen zu dieser noch den durch die Teilungsfehler bedingten Betrag hinzu, um den mittleren Fehler einer Position zu erlangen; derselbe wurde in § 6 zu $\pm 0''.15$ gefunden. Demgemäss ergiebt sich:

$$e = \pm \sqrt{0.230^2 + 0.195^2 \operatorname{tg}^2 z + 0.227^2 \sin^2 p + 0.150^2}$$

und für n auf beide Lagen des Kreises gleichmässig verteilte Beobachtungen:

$$E = \pm \sqrt{\frac{0.230^2 + 0.195^2 \operatorname{tg}^2 z + 0.227^2 \sin^2 p}{n} + \frac{0.150^2}{2}}.$$

Die Anzahl der beobachteten Zenithdistanzen jedes Sterns variiert sehr stark, so dass für n keine Durchschnittszahl anzunehmen ist. Um aber einen Vergleich mit den von Professor Bauschinger (l. c. pag. 195) gefundenen Zahlen zu geben, nehme ich auch $n = 19$ und erhalte damit:

$-80°$	$\pm 0''36$	$-20°$	$\pm 0''13$	$+40°$	$\pm 0''12$
70	18	10	13	50	13
60	15	0	12	60	14
50	14	$+10$	12	70	17
40	13	20	12	80	36
30	13	30	12	85	77.

Für die Berechnung der Gewichte sind die für jeden einzelnen Stern abgeleiteten mittleren Fehler benutzt mit Hinzu-

fügung des aus der Unsicherheit der Teilungsfehler herrührenden Betrages und in der Annahme, dass der Gewichtseinheit ein mittlerer Fehler von $\pm$ 1".00 entspricht.

§ 13.

Die Polhöhe und ihre Schwankungen.

Nach der Ableitung aller Instrumentalfehler können wir nunmehr daran gehen, eine vorläufige Ableitung der Polhöhe vorzunehmen. Bei allem Bestreben, den Meridiankreisbeobachtungen die grösstmögliche Unabhängigkeit zu wahren, erscheint es m. E. nicht angezeigt, die Schwankungen der Polhöhe aus ihnen abzuleiten, denn da die Zenithpunktstörungen, wie sie in § 9 und 12 besprochen wurden, in demselben Sinne die beobachteten Zenithdistanzen beeinflussen, so können durch diese, welcher Art sie auch sein mögen, die Polhöhenschwankungen völlig entstellt werden. Die Neigung der atmosphärischen Niveauschichten ist als störendes Element hierin bereits zum Teil einbegriffen, aber auch Refractionsanomalien anderer Art, wie die Unsicherheit in der Kenntnis der wahren Lufttemperatur etc., die numerisch auszuwerten kaum möglich ist, kommen hier in Betracht. Dem steht gegenüber, dass die Resultate der Beobachtungen nach der Horrebow-Talcott-Methode von einer grossen Reihe von Sternwarten bereits vorliegen, und zwar in einer Genauigkeit, die die Realität derselben ausser allem Zweifel stellt.

Hieraus ergiebt sich der einzuschlagende Weg von selbst: Die Zenithdistanzen sind in Bezug auf die Polhöhenschwankungen auf eine gemeinsame Epoche zu reducieren und hierauf ist die Bestimmung der anderen Elemente vorzunehmen. Die reducierten Zenithdistanzen mögen uns alsdann ein Urteil verschaffen, ob die Meridiankreisbeobachtungen andere Werte der Polhöhenschwankungen liefern als die der Horrebow-Talcott-Methode.

Demgemäss sind die Schwankungen der Polhöhe von mir aus dem „Bericht des Centralbureaus der internationalen Erdmessung über den Stand der Erforschung der Breitenvariationen am Schluss des Jahres 1898“ von Herrn Geheimrat Albrecht entnommen; sie betragen in dem Sinne momentane-mittlere Breite:

	1896	1897		1897	1898
Juli 1	+ 0″10	+ 0″00	Jan. 1	− 0″07	+ 0″07
Aug. 1	+ 0.15	+ 0.09	Febr. 1	− 0.16	− 0.03
Sept. 1	+ 0.17	+ 0.15	März 1	− 0.20	− 0.12
Okt. 1	+ 0.16	+ 0.19	April 1	− 0.21	− 0.18
Nov. 1	+ 0.11	+ 0.19	Mai 1	− 0.17	− 0.20
Dec. 1	+ 0.03	+ 0.14	Juni 1	− 0.10	− 0.19

Die Zahlen wurden bei allen früheren Untersuchungen bereits berücksichtigt.

Für die Ableitung der Polhöhe sollten in erster Linie α Urs. min. und 1 H. Drac. dienen; solange jedoch die Teilungsfehler nur durch ein Interpolationsverfahren gewonnen werden und über die zufälligen gar nichts bekannt ist, erscheint es nicht ratsam, sich auf wenige Striche zu beschränken. Ich habe deshalb sämmtliche Circumpolarsterne bis zu 60° Zenithdistanz zur Diskussion herangezogen mit Ausnahme von ζ Urs. min. wegen zu geringer Anzahl von Beobachtungen.

Der Bestimmung der Gewichte sind die in § 12 abgeleiteten mittleren Fehler zu Grunde zu legen; da jedoch der von der Unsicherheit der Teilungsfehler herrührende Betrag für alle Sterne in gleicher Grösse eingehen würde, und da ferner, wie wir gesehen haben, der mittlere Fehler von 20 bis 60 Grad besonders bei nördlicher Zenithdistanz sich nur sehr wenig ändert, von 0″12 bis 0″14 bei 19 Beobachtungen, so genügt es vollkommen, die Gewichte gleich der Anzahl der Beobachtungen jedes Sterns zu setzen. Von einer Berücksichtigung der Anzahl der Einstellungen während eines Durchgangs ist auch hier abgesehen worden, denn einmal wird hierdurch infolge der Unsicherheit des Nadirpunkts das Gewicht nicht wesentlich erhöht und andrerseits würde alsdann α Urs. min. eine so wesentliche Bevorzugung erhalten, die die Genauigkeit des Endresultats sicherlich nicht heben würde, zumal es scheint, dass der eine oder andere der Teilstriche bei α Urs. min. mit einem grösseren zufälligen Fehler behaftet ist.

Die folgende Zusammenstellung enthält das Mittel der beobachteten Zenithdistanzen jeder Culmination, die Anzahl n der Beobachtungen und die hieraus abgeleitete Polhöhe, für jede Kreislage getrennt.

Stern	Z. D. O. C.					Z. D. U. C.					$\varphi = 48^\circ 12' +$	
		K. O.	n	K. W.	n		K. O.	n	K. W.	n	K. O.	K. W.
50 Cassiop.	23° 42′	34″43	13	34″84	6	59° 51′	51″26	11	50″93	9	47″15	47″12
χ Dracon. .	24 28	30.66	12	30.51	10	59 5	55.13	6	55.36	6	10	06
Gr. 1586 . .	25 9	21.98	11	21.65	12	58 25	53.53	16	53.95	11	24	20
β Urs. min. .	26 21	48.70	10	48.34	7	57 12	36.68	11	37.15	3	31	25
Br. 1147 . .	27 51	28.13	10	28.29	11	55 42	57.17	13	57.65	10	35	03
γ Cephei . .	28 50	39.71	12	40.14	13	54 43	45.50	12	45.86	10	39	00
24 H. Cam.	28 53	41.41	6	41.93	4	54 40	43.42	12	43.62	10	58	22
4 H. Drac. .	29 58	31.35	9	31.58	10	53 35	53.65	10	53.77	6	50	32
1 H. Drac. .	33 34	5.97	11	6.25	13	50 0	19.57	30	19.48	13	23	13
ε Urs. min. .	33 59	36.99	10	37.33	3	49 34	48.50	6	48.08	4	25	29
δ Urs. min. .	38 23	59.28	13	58.98	10	45 10	25.81	4	26.07	5	45	47
51 H. Ceph.	38 59	47.00	6	46.85	4	44 34	38.68	10	38.94	10	16	10
α Urs. min. .	40 32	42.94	33	42.32	28	43 1	42.77	29	42.62	27	14	53

Hieraus ergiebt sich für die vorläufige Polhöhe für 1897.0:

Kr. Ost $\varphi = 48^\circ 12' 47''.271$ $n = 326$

Kr. West $\varphi = 48\ 12\ 47.242$ $n = 255$ und

im Mittel $\varphi = 48\ 12\ 47.258$

mit dem mittleren Fehler $\varepsilon = \pm 0''.030$.

Mit diesem Werte von φ sind die in folgender Zusammenstellung gegebenen Deklinationen abgeleitet worden; die Bildung der Gewichte ist bereits in § 12 erklärt worden.

Vorläufige Deklinationen für 1897.0.

Südsterne.

Stern	Dekl.	Gew.
f Puppis	− 34° 44′ 14″13	2
ε Sagitt.	34 25 58.43	3
α Columb.	34 7 44.80	3
ε Scorpii	34 6 21.36	3
X Eridani . . .	34 3 1.49	1
ι Pisc. austr. . .	33 29 44.30	9
β Fornacis . . .	32 50 20.07	11
ξ Hydrae	31 17 15.94	10
Lac. μ Forn. . .	31 12 25.24	13
α Antliae	30 32 36.00	16
γ Sagitt.	30 25 30.11	10
α Pisc. austr. .	30 10 5.30	10
ζ Can. maj. . . .	30 1 3.69	4
v^1 Eridani	29 58 29.03	1
α Sculptoris . .	29 54 50.87	19
ι Sculptoris . .	29 33 3.77	11

Stern	Dekl.	Gew.
12 Eridani . . .	− 29° 23′ 35″49	16
η Pisc. austr. . .	28 56 52.44	16
ε Can. maj. . . .	28 49 54.77	7
τ Navis	28 42 31.40	12
δ Sculptoris . .	28 41 59.73	13
λ Pyxidis	28 23 36.32	13
$\varkappa^2$ Sculptoris . .	28 22 24.03	11
c Sagitt.	27 59 45.06	21
ε Pisc. austr. . .	27 34 50.39	14
ω Capric.	27 18 15.78	31
B. A. C. 4253 . .	26 34 9.23	24
δ Can. maj. . . .	26 13 47.19	11
α Scorpii	26 12 11.33	31
π Hydrae	26 11 9.45	26
ϑ Ophiuchi . . .	24 53 46.81	27
$\varkappa$ Fornacis	24 17 3.28	21

Stern	Dekl.	Gew.	Stern	Dekl.	Gew.
51 Ophiuchi . .	— 23° 52′ 58″.12	21	γ Ophiuchi . . .	+ 2° 44′ 46″.75	58
Br. 2333	23 35 33.04	22	ϑ Hydrae	2 44 56.28	55
24 Ophiuchi . .	22 59 11.21	24	β Ophiuchi . . .	4 36 37.87	78
δ Scorpii	22 19 41.67	17	α Equulei	4 49 19.66	59
π Sagitt.	21 11 13.48	34	γ Orionis	6 15 23.30	24
β Leporis	20 50 29.66	31	ω Piscium	6 17 35.57	47
Lal. 18817 . . .	20 39 35.40	50	ζ Hydrae	6 20 15.67	63
Lal. 24277 . . .	20 1 48.79	44	δ Piscium	7 1 28.68	49
54 Eridani . . .	19 52 9.07	30	χ Leonis	7 53 35.02	60
ι Librae	19 24 5.91	43	π Leonis	8 32 19.00	53
γ Capric.	17 7 38.54	26	o Virginis	9 18 18.94	59
δ Corvi	15 56 30.38	44	o Leonis	10 21 39.67	57
η Ophiuchi . . .	15 35 49.65	37	ι Leonis	11 5 48.59	59
δ Crateris	14 13 15.73	59	α Leonis	12 28 14.99	60
γ Eridani	13 48 5.66	28	60 Herculis . . .	12 52 57.01	55
ν Aquarii	11 47 18.80	51	ζ Aquilae	13 42 38.29	53
Br. 2329	11 3 26.02	54	ν Orionis	14 46 50.74	38
η Ceti	10 43 41.67	53	γ Geminorum .	16 29 14.39	47
ζ Ophiuchi . . .	10 21 30.14	43	110 Herculis .	20 26 53.08	67
κ Virginis	9 47 38.58	58	β Herculis . . .	21 42 51.38	71
ε Eridani	9 48 24.98	46	λ Pegasi	23 1 25.80	65
κ Orionis	9 42 22.09	12	41 Leon. min. .	23 43 40.14	53
ι Ceti	9 23 41.52	40	ζ Leonis	23 55 50.90	61
β Librae	9 0 9.58	43	ε Leonis	24 14 55.41	60
ϑ Aquarii	8 17 45.56	58	ε Geminorum .	25 13 59.28	50
19 Hydrae . . .	8 10 22.57	37	α Cor. bor. . . .	27 3 41.92	60
τ Orionis	6 57 20.30	50	ι Geminorum .	28 0 10.10	48
β Eridani	5 13 10.41	23	χ Geminorum .	28 4 59.63	55
ϑ Virginis	4 59 20.02	65	τ Piscium	29 32 34.59	54
ν Eridani	3 33 46.87	31	ϱ Bootis	30 49 25.75	69
γ Aquarii	1 54 22.23	54	42 Leon. min. .	31 13 30.05	61
δ Ceti	0 6 56.40	43	ϑ Cor. bor. . . .	31 42 25.31	54
η Virginis	— 0 5 39.11	61	ζ Herculis	31 47 22.27	67
γ Piscium	+ 2 43 10.80	61	12 Can. ven. sq.	38 52 28.64	70

Circumpolarsterne.

Stern	Dekl.	O. C.	Gew.	U. C.	Gew.	Mittel	Stern	Dekl.	O. C.	Gew.	U. C.	Gew.	Mittel
δ Cygni . .	44° 52′	46″.18	72	45″.01	—	46″.18	o Cassiop. .	47° 43′	14″.27	71	12″.23	7	14″.09
α Cygni . .	44 54	44.32	72	40.95	—	44.32	26 Lyncis .	47 49	53.36	61	50.78	3	53.24
β Aurigae .	44 56	12.46	55	10.77	—	12.46	υ Persei . .	48 6	22.73	70	22.43	6	22.73
ψ Urs. maj.	45 3	26.52	70	24.95	—	26.52	χ Urs. maj. .	48 21	1.57	65	0.81	3	1.54
φ Herculis .	45 12	17.81	64	14.92	3	17.68	ι Urs. maj. .	48 26	45.47	71	45.00	5	45.44
α Aurigae .	45 53	34.97	79	33.67	—	34.97	ϑ Persei . .	48 47	33.51	61	32.83	6	33.45
λ Androm. .	45 54	0.82	64	57.93	—	0.82	π^2 Cygni .	48 49	58.44	73	57.39	2	58.41
ι Herculis .	46 3	40.25	75	38.54	1	40.25	ι Persei . .	49 13	10.50	57	10.11	3	10.48
o^1 sq. Cygni	46 25	44.11	75	43.12	—	44.11	ψ^1 Aurigae	49 20	24.59	64	23.69	4	24.54
τ Herculis .	46 33	31.52	52	30.18	—	31.52	α Persei . .	49 29	39.69	58	40.09	4	39.72
λ Bootis . .	46 33	40.96	78	38.81	1	40.96	7 Lacertae	49 45	10.44	74	9.38	8	10.34
δ Persei . .	47 27	29.04	50	28.18	2	29.01	η Urs. maj. .	49 49	38.34	76	37.97	5	38.32
κ Urs. maj.	47 33	49.52	74	48.36	7	49.42	ϑ Cygni . .	49 58	57.33	70	56.59	4	57.29

Stern	Dekl.	O. C.	Gew.	U. C.	Gew.	Mittel	Stern	Dekl	O. C.	Gew.	U. C.	Gew.	Mittel
φ Persei . .	50° 10′	10″.96	62	10″.98	8	10″.96	4 Cassiop. .	61° 43′	2″.36	69	1″.99	28	2″.26
γ Dracon. .	51 30	3.47	72	2.78	6	3.41	η Dracon. .	61 44	50.50	70	50.54	27	50.51
ι Cygni . . .	51 30	37.14	74	37.60	2	37.15	α Cephei . .	62 8	57.10	78	56.82	40	57.01
3 Lacertae	51 42	46.51	70	46.25	13	46.47	20 Cephei .	62 16	59.13	72	58.80	27	59.04
27 Lyncis .	51 48	12.03	67	10.68	12	11.83	ϰ Cassiop. .	62 21	47.74	63	47.70	40	47.72
ϑ Urs. maj.	52 8	48.24	71	46.92	11	48.06	ϑ Cephei . .	62 38	52.54	74	52.27	38	52.45
ψ Cygni . .	52 9	55.72	69	54.90	3	55.69	12 H. Drac.	62 55	4.57	58	4.46	33	4.53
ϑ Bootis . .	52 19	36.57	66	35.91	11	36.47	α Dracon. .	64 52	5.53	75	5.70	24	5.58
τ Persei . .	52 20	26.56	64	26.38	8	26.54	i Dracon. .	65 13	55.70	63	55.76	22	55.72
β Dracon. .	52 22	39.40	62	38.24	23	39.08	ι Cephei . .	65 39	31.62	65	30.87	29	31.39
Gr. 1460 . .	53 4	20.46	74	19.29	13	20.29	9 Camel . .	66 10	2.51	65	2.76	31	2.59
γ Persei . .	53 6	10.25	68	9.91	16	10.19	δ Dracon. .	67 28	49.58	69	49.58	9	49.58
ϰ Cygni . . .	53 10	42.49	77	41.66	4	42.45	Gr. 1308 . .	68 40	32.90	62	32.84	44	32.88
γ Urs. maj. .	54 16	2.72	66	2.32	10	2.67	λ Dracon. .	69 53	58.14	66	58.08	43	58.12
η Persei . .	55 28	3.90	57	4.37	9	3.96	5 H. Cam. .	71 0	52.80	35	52.54	24	52.69
α Cassiop. .	55 58	20.68	59	20.68	31	20.68	50 Cassiop.	71 55	21.84	52	21.61	60	21.72
ε Urs. maj.	56 31	8.23	72	7.80	16	8.15	χ Dracon. .	72 41	17.87	73	17.47	28	17.76
Br. 3077 . .	56 35	58.85	71	58.04	29	58.62	Gr. 1586 . .	73 22	9.09	70	9.02	54	9.06
β Urs. maj.	56 56	4.26	60	3.76	19	4.14	β Urs. min.	74 34	35.83	63	35.94	75	35.89
δ Urs. maj.	57 36	17.55	72	17.70	17	17.58	Br. 1147 . .	76 4	15.49	74	15.34	44	15.43
ζ Cephei . .	57 41	36.53	75	35.76	21	36.36	γ Cephei . .	77 3	27.22	64	27.05	49	27.15
15 Lyncis .	58 33	26.61	40	26.77	20	26.66	24 H. Cam.	77 6	28.90	65	29.21	57	29.04
β Cassiop. .	58 34	53.63	71	53.72	23	53.66	ζ Urs. min.	78 6	40.67	53	41.37	40	40.97
ϑ Dracon. .	58 50	25.05	56	25.52	9	25.11	4 H. Drac. .	78 11	18.75	72	19.03	44	18.86
2 Lyncis . .	59 2	52.18	53	52.33	30	52.23	1 H. Drac. .	81 46	53.40	73	53.18	80	53.28
o Dracon. .	59 15	44.89	72	44.35	8	44.84	ε Urs. min.	82 12	24.35	61	24.39	47	24.37
ι Dracon. .	59 19	36.77	63	36.56	30	36.70	δ Urs. min.	86 36	46.43	76	46.77	45	46.56
o Urs. maj.	61 3	44.47	70	43.92	24	44.33	51 H. Ceph.	87 12	34.22	51	33.91	72	34.04
η Cephei . .	61 26	19.38	67	18.62	39	19.10	α Urs. min.	88 45	29.94	77	30.02	78	29.98

Es mag nunmehr noch kurz untersucht werden, wie weit die vorliegenden Positionen die angenommenen Polhöhenschwankungen darstellen; es sind hierzu sämmtliche Zenithdistanzen bis zu 60° nördlich und 50° südlich vom Zenith herangezogen worden. Die Trennung in einzelne Epochen ergiebt sich von selbst, sei es durch grössere Pausen in der Beobachtung, sei es durch Umlegen des Kreises oder durch sonstige Aenderungen am Instrument. Die folgende Tabelle enthält neben der Epoche und der Anzahl der zum Mittelwert zusammengezogenen Beobachtungen den aus diesen folgenden Momentanwert der Polhöhe und daneben denselben nach dem Bericht des Centralbureaus, d. h. 48° 12′ 47″.26 + Polhöhenschwankung. Mit Ausnahme der ersten, die nur auf einer verhältnismässig geringen Anzahl von Beobachtungen beruht, sind die in der letzten Columne gegebenen Differenzen nach Grösse und Zeichenwechsel völlig befriedigend.

	n	φ_1	φ_2	$\varphi_1 - \varphi_2$
1896.64	15	48° 12′ 47″.19	47″.45	−0″26
68	24	55	45	+ 10
72	31	54	45	+ 9
77	80	44	44	0
81	43	38	43	− 5
85	33	39	38	+ 1
1897.16	17	16	08	+ 8
24	73	05	06	− 1
33	77	11	10	+ 1
40	92	20	16	+ 4
46	105	17	23	− 6
50	11	35	28	+ 7
64	74	35	41	− 6
68	77	36	44	− 8
73	125	50	46	+ 4
80	84	50	48	+ 2
90	73	42	45	− 3
1898.05	31	37	29	+ 8
15	81	24	17	+ 7
21	142	14	12	+ 2
27	110	08	10	− 2

Die weitere Diskussion des im Vorstehenden mitgeteilten Beobachtungsmaterials wird in einer zweiten Abhandlung erfolgen.

ÜBER DIE

MAXWELL-HERTZ'SCHE THEORIE

VON

C. NEUMANN.

Des XXVII. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe
der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

Nº II.

MIT 3 TEXTFIGUREN.

LEIPZIG
BEI B. G. TEUBNER.
1901.

Vorgetragen für die Abhandlungen am 29. Juli 1901.
Das Manuscript der Gesellschaft der Wissenschaften eingeliefert am 29. Juli 1901.
Den letzten Bogen druckfertig erklärt am 18. October 1901.

ÜBER DIE

MAXWELL-HERTZ'SCHE THEORIE

VON

C. NEUMANN.

Man mag die MAXWELL-HERTZ'sche Theorie annehmbar finden, oder nicht. Man mag über ihre Entstehungsweise, über ihre Bedeutung uud ihre Zukunft so oder so urtheilen. *Nothwendig* ist jedenfalls, dass man diese Theorie [die fast ein halbes Jahrhundert hindurch[1]) sich erhalten hat] einem genaueren Studium unterwirft, und von ihrem eigentlichen Inhalt ein möglichst anschauliches Bild sich zu verschaffen sucht. Dieser Aufgabe ist die vorliegende Abhandlung gewidmet.

HERTZ sagt mit vollem Recht [Ges. Werke, Bd. 2, Seite 23], „*die* MAXWELL'*sche Theorie ist das System der* MAXWELL'*schen Gleichungen*".

Diese Gleichungen, die (ihrer Natur nach) nur für den Fall der substantiellen *Ruhe* gelten, sind bekanntlich von HERTZ verallgemeinert, nämlich ausgedehnt worden auf den Fall der substantiellen *Bewegung*. Und wenn heutzutage von der MAXWELL-HERTZ'schen Theorie die Rede ist, und nach dem eigentlichen Wesen dieser Theorie gefragt werden sollte, so würde in ähnlicher Weise zu antworten sein: *Die* MAXWELL-HERTZ'*sche Theorie sei das System der* MAXWELL-HERTZ'*schen Gleichungen.*

Diese theils von MAXWELL, theils von HERTZ aufgestellten Gleichungen sind es also, welche in der vorliegenden Abhandlung einem genaueren Studium unterworfen werden sollen. Um von vornherein über den Gang meiner Abhandlung zu orientiren, erlaube ich mir, hier Näheres mitzutheilen über den Inhalt der einzelnen Paragraphe.

§ 1. — Die in den MAXWELL'schen Gleichungen enthaltenen Grössen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ hat man mit allerhand Namen versehen. So z. B. pflegt man die Grössen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ elektrische Verschiebungen, oder elektrische Störungen, oder elektrische Momente, oder elektrische Polarisationen, oder endlich auch elektrische In-

1) MAXWELL's Abhandlung über FARADAY's Kraftlinien ist gedruckt im Jahre 1855.

ductionen zu nennen. Und Analoges ist über die $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ zu sagen. Doch habe ich nicht bemerkt, dass die durch solche Namen erweckten Anklänge oder Vorstellungen für eine klare Auffassung der Dinge von irgend welcher Bedeutung oder von irgend welchem Nutzen sind. Im Gegentheil dürften solche Namen, indem sie einigermassen prädisponirend einwirken, für das eigentliche Verständniss der in Rede stehenden Gleichungen mehr hinderlich als förderlich sein.

Die nackte unverschleierte Wahrheit ist sehr einfach. Sie besteht darin, dass wir über jene mit $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ bezeichneten elektrischen und magnetischen Zustände *gar nichts* wissen, dass uns diese Zustände, ihrer eigentlichen Natur nach, *absolut unbekannt* sind. Allerdings ist in der Bezeichnungsweise selber, nämlich in den Buchstaben $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ schon eine gewisse Voraussetzung über diese Zustände enthalten, nämlich die Voraussetzung, dass jeder solcher Zustand geometrisch darstellbar sei durch eine von dem Ort des Zustandes ausgehende gerade Linie von bestimmter Richtung und Länge. Und jene Buchstaben $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ oder $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ sind alsdann die den Coordinatenaxen entsprechenden Componenten dieser Linien.

Als *unmittelbare Appendices*[1]) der Zustände $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ sind anzusehen: die Grössen u, v, w, ferner jene von Helmholtz mit σ, (σ), τ, (τ) bezeichneten Grössen, und endlich auch noch eine gewisse Grösse E. Die u, v, w werden die *elektrischen Strömungs-Componenten* genannt. Ferner werden die Grössen σ und (σ) die *wahre* und *freie elektrische Dichtigkeit* genannt. Desgleichen werden τ und (τ) als die *wahre* und *freie magnetische Dichtigkeit* bezeichnet. Endlich wird E die *elektromagnetische Energie* genannt.

Beiläufig sei darauf hingewiesen, dass die sogenannte wahre Elektricität und der sogenannte wahre Magnetismus wohl *wirkliche Materien* sein möchten von äusserst feiner Beschaffenheit. Die wahre Elektricität würde alsdann diejenige Materie sein, deren

1) Wenn ich hier die acht Grössen u, v, w, σ, (σ), τ, (τ), E als *unmittelbare Appendices* der Zustands-Componenten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ bezeichne, so soll damit angedeutet sein, dass jede von jenen acht Grössen in der Maxwell-Hertz'schen Theorie durch einen gewissen analytischen Ausdruck definirt wird, der aus den Componenten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ in ganz bestimmter Weise zusammen gesetzt ist, und in welchem, ausser diesen Componenten, nur noch gewisse von der Beschaffenheit der Substanz abhängende Coefficienten λ, ε, μ, X', Y', Z' enthalten sind.

Dichtigkeit durch σ, und deren Strömungs-Componenten durch u, v, w dargestellt sind. Ebenso würde alsdann der wahre Magnetismus diejenige Materie sein, deren Dichtigkeit τ ist.

§ 2. — Dieser Paragraph enthält nur einige rein äusserliche Bemerkungen über die anzuwendende Bezeichnungsweise, sowie auch Erinnerungen an bekannte Gleichungen (z. B. an gewisse POISSON'sche Formeln).

§ 3. — Der Uebergang von der substantiellen Ruhe zur substantiellen Bewegung, nämlich von den MAXWELL'schen zu den HERTZ'schen Differentialgleichungen ist von HERTZ selber [Ges. Werke, Bd. 2, Seite 259] nur in aller Kürze angedeutet. Ich werde nun hier im dritten Paragraphen diesen Uebergang in mehr ausführlicher Weise darzulegen suchen.

Selbstverständlich ist ein solcher Uebergang nur zu ermöglichen durch Hinzunahme irgend welcher Hypothesen. Und ich werde in dieser Beziehung mich den bereits von HERTZ selber gemachten Hypothesen genau anschliessen. Dabei habe ich daran zu erinnern, dass jene HERTZ'schen Hypothesen einigermassen verwandt sein dürften mit gewissen in der Wärmetheorie üblichen Vorstellungen.

§ 4. — Im Widerspruch gegen eine früher von mir ausgesprochene Behauptung werde ich zeigen, dass HERTZ vollkommen Recht hat, wenn er die von ihm aufgestellten Differentialgleichungen als *invariant,* nämlich als Gleichungen bezeichnet, deren Form *ein und dieselbe* bleibt, mag nun das der Betrachtung zu Grunde gelegte Coordinatensystem in absoluter Ruhe, oder aber in irgend welcher Bewegung sich befinden.

§ 5 und 6. — In diesen beiden Paragraphen werde ich die soeben genannte Invarianz der HERTZ'schen Differentialgleichungen *direct* nachweisen, indem ich zu diesem Zwecke die Gleichungen von *einem* Coordinatensystem auf irgend ein *anderes* transformire, mag nun die relative Bewegung der beiden Systeme zu einander sein, welche sie wolle.

§ 7. — Man denke sich eine unendlich ferne geschlossene Fläche. z. B. eine um den Beobachtungsort (als Mittelpunkt) mit unendlich grossem Radius beschriebene Kugelfläche. Bekanntlich hat man bisher bei der Behandlung der MAXWELL'schen oder HERTZ'schen Differentialgleichungen stets vorausgesetzt, dass ge-

wisse über eine solche unendlich ferne Fläche ausgedehnte Integrale $= 0$ seien.[1])

Um auf diese ganz unmotivirte Voraussetzung näher einzugehen, werde ich nachweisen, dass die Grössen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ im Unendlichen von der Ordnung $\left(\frac{1}{\varrho}\right)^2$ sind, wo ϱ den Abstand des betrachteten unendlich fernen Punctes vom Beobachtungsorte vorstellt; — wenigstens werde ich solches für den Fall nachweisen, dass die unendlich fernen Werthe der $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ *während des betrachteten Zeitraumes* keinerlei Aenderung erfahren.

Auf diesen Zeitraum, von welchem solches vorausgesetzt werden darf, werde ich mich nun bei meinen weiter folgenden Untersuchungen *beschränken*. — Es ist das offenbar nur ein *Nothbehelf*. Doch wird man dieses oder irgend eines ähnlichen Nothbehelfs wohl nicht gut entbehren können, solange nicht von irgend welcher Seite her neue Momente emportauchen, die dazu geeignet sind, das eigentliche Wesen der Maxwell-Hertz'schen Theorie etwas heller zu beleuchten.

§ 8 und 9. — Aus den Hertz'schen Differentialgleichungen ergeben sich gewisse allgemeine Sätze über *die elektrischen Dichtigkeiten σ und* (σ); und diese Sätze sprechen z. B. für die schon in § 1 ausgesprochene Vorstellung, dass die wahre Elektricität eine wirkliche Materie sei. Auch setzen uns jene allgemeinen Sätze in den Stand, über die elektrischen Dichtigkeiten in *homogenen* Substanzen, sowie auch an den *Grenzflächen*, in denen je zwei solche homogene Substanzen zusammenstossen, genauere Auskunft zu gewinnen.

§ 10 und 11. — Ebenso wie die beiden vorigen Paragraphen auf σ und (σ) sich beziehen, — in ähnlicher Weise werden hier die *magnetischen Dichtigkeiten τ und* (τ) einer näheren Untersuchung unterworfen.

§ 12. — Schon in meinem Werke über die elektrischen Kräfte (1898) habe ich die Hertz'schen Differentialgleichungen einer ge-

1) Diese Integrale sind, abgesehen von unwesentlichen Factoren, von folgender Gestalt:

$$\int \frac{\mathfrak{X}}{r} Do, \quad \int \mathfrak{X}^2 Do, \quad \int (\mathfrak{Z}\mathfrak{M} - \mathfrak{Y}\mathfrak{N}) Do,$$

wo Do ein Element der unendlich fernen Fläche vorstellt, während r den Abstand dieses Elementes Do vom Beobachtungsorte bezeichnet.

wissen Transformation oder Transfiguration unterworfen. Ich werde hier diese damals nur flüchtig angedeutete Umgestaltung in mehr ausführlicher und zugleich auch in etwas einfacherer Weise darzulegen versuchen. Dabei habe ich mich auf jenen bereits vorhin [in § 7] angegebenen Umstand zu stützen, dass die unendlich fernen Werthe der $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ während des zu betrachtenden Zeitraums von der Ordnung $\left(\frac{1}{\varrho}\right)^2$ sind, und dass in Folge dessen gewisse über eine unendlich ferne Fläche ausgedehnte Integrale $= 0$ sind.

Die in Rede stehende *Transfiguration* der Hertz'schen Differentialgleichungen erleichtert in vielen Fällen deren Anwendung. Solches gilt z. B. für die Anwendung auf *statische* und *stationäre* Zustände. Auch erinnern die Gleichungen in ihrer transfigurirten Gestalt einigermassen an die Vorstellung von Fernwirkungen.

§ 13 und 14. — Soll jene [in § 1] als elektromagnetische Energie bezeichnete Grösse E wirklich Anspruch auf diesen Namen haben, so muss sie dem *allgemeinen Princip der Energie* sich subordiniren. Substituirt man aber den Werth von E in der Formel dieses Princips, so gelangt man zu gewissen Gleichungen, welche Auskunft geben über die durch die elektrischen und magnetischen Zustände provocirten *ponderomotorischen Kräfte*; der Art, dass man für die Werthe dieser Kräfte zu bestimmten analytischen Ausdrücken gelangt.

§ 15. — Es wird gezeigt, dass diese für die ponderomotorischen Kräfte erhaltenen analytischen Ausdrücke dem allgemeinen Princip der Gleichheit der Action und Reaction Genüge leisten.

§ 16 bis 20. — Die Maxwell-Hertz'sche Theorie wird in Anwendung gebracht auf die *Probleme der Elektrostatik.* Dabei zeigt sich Uebereinstimmung mit der Poisson'schen Theorie, für ein System von lauter *Conductoren*, (dieselben von einem isolirenden Medium, z. B. von Luft umgeben gedacht). Hingegen fehlt die Uebereinstimmung, falls das betrachtete System von Körpern ganz oder zum Theil aus *Isolatoren* besteht.

§ 21 bis 24. — Die Maxwell-Hertz'sche Theorie wird angewendet auf die *Probleme der magnetischen Vertheilung.* Die dabei sich ergebenden Resultate sind fast durchweg verschieden von denen der Poisson'schen Theorie. Doch würde noch eine weitere Discussion der erhaltenen Resultate, namentlich auch eine weitere

Ausführung derselben in passend gewählten Specialfällen erforderlich sein, um beurtheilen zu können, in wie weit diese Resultate die Maxwell-Hertz'sche Theorie zu bestätigen oder zu erschüttern im Stande sind, oder in wie weit dieselben in dieser Theorie vielleicht irgend welche Abänderungen nothwendig machen.

Gegenüber dieser Fremdartigkeit der Resultate ist zu bemerken, dass die vorliegende Abhandlung frei ist von irgend welchen willkürlichen neuen Annahmen, und dass sie daher ein treues Abbild der Maxwell-Hertz'schen Theorie oder vielmehr derjenigen Folgerungen darbieten dürfte, welche aus dieser Theorie sich mit *Nothwendigkeit* ergeben.

§ 1.

Ueber die Grundlagen der Maxwell-Hertz'schen Theorie, insbesondere über die Maxwell'schen Differentialgleichungen.

Mit Hertz [Ges. Werke, Bd. 2, S. 257] nehmen wir an, dass die den Weltraum erfüllende Substanz allenthalben und fortdauernd *continuirlich* ist, dass nämlich überall, wo verschiedene Theile der Substanz zusammengrenzen, dünne Uebergangsschichten sich vorfinden. Ob man nun diese den Raum erfüllende Substanz mit Helmholtz als von ponderabler Materie durchdrungenen Aether, oder ob man sie umgekehrt als von Aether durchdrungene ponderable Materie bezeichnet, dürfte wohl ziemlich auf dasselbe hinauskommen. Im sogenannten *leeren* Raum wird das Mischungsverhältniss dieser beiden Materien, der ponderablen Materie und des Aethers, $= 0:1$, oder wenigstens *nahezu* $= 0:1$ sein; denn die Möglichkeit, dass ponderable Materie in minimaler Dichtigkeit auch im sogenannten Vacuum noch anzutreffen sei, dürfte schwer zu bestreiten sein, und sogar eine gewisse Wahrscheinlichkeit für sich haben.

Ferner wollen wir mit Hertz [Ges. W., Bd. 2, S. 257] annehmen, dass der innerhalb der ponderablen Materie enthaltene Aether nur mit dieser zugleich sich bewegen könne; so dass also ponderable Materie und Aethermaterie zusammengenommen gewissermassen nur eine *einzige* Substanz bilden, deren Mischungsverhältniss an verschiedenen Stellen des Weltraumes ein sehr verschiedenes ist.

Endlich wollen wir, der Einfachheit willen, annehmen, dass diese den ganzen Weltraum erfüllende *continuirliche* und *einheitliche* Substanz überall *isotrop* (nirgends krystallinisch) sei.

All' diese Annahmen sind offenbar nur provisorischer Natur, nämlich darauf berechnet, die wirklichen Verhältnisse zunächst durch etwas einfachere ideale Verhältnisse zu ersetzen, mit denen alsdann (eben in Folge ihrer grösseren Einfachheit) sich leichter operiren lässt.

Jene den ganzen Weltraum erfüllende continuirliche und einheitliche Substanz wird verschiedener elektrischer und magnetischer Zustände fähig sein, die man bald als elektrische respective magnetische *Verschiebungen*, bald als elektrische oder magnetische *Polarisationen*, bald als *Störungen*, bald als *Momente*, bald auch als *Inductionen* bezeichnet. Doch habe ich nicht bemerkt, dass die durch solche Namen erweckten Anklänge oder Vorstellungen für die eigentliche Entwickelung der MAXWELL-HERTZ'schen Theorie von irgend welcher Bedeutung oder von irgend welchem Nutzen wären. Im Gegentheil dürften solche Namen, indem sie einigermassen prädisponirend einwirken, für das Verständniss und für die weitere Entwickelung der Theorie mehr hinderlich als förderlich sein.

Einstweilen haben wir diese Zustände, ihrer eigentlichen innern Natur nach, als *völlig unbekannt* anzusehen. Das Einzige, was wir über dieselben voraussetzen, besteht darin, dass sie (ebenso wie Geschwindigkeiten, Rotationen und Kräfte) geometrisch durch *Vectoren*, d. i. durch Linien von bestimmter Länge und Richtung darstellbar sind. Dementsprechend bezeichnen wir den augenblicklichen elektrischen Zustand der Substanz an der Stelle (x, y, z) mit $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$, und ihren augenblicklichen magnetischen Zustand an dieser Stelle mit $(\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N})$, indem wir dabei unter $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ die rechtwinkligen Componenten der betreffenden Vectoren verstehen.

Es sind das *vorübergehende* Zustände, die (etwa ebenso wie die Wellen in einem Teiche) unter bestimmten Umständen entstehen, weiter sich ausbreiten, bis sie schliesslich wieder verschwinden.

An jene elektrischen und magnetischen Zustände schliessen sich nun unmittelbar gewisse Grössen an, die von HELMHOLTZ mit $\sigma, (\sigma), \tau, (\tau)$ bezeichnet sind. Diese Grössen $\sigma, (\sigma), \tau, (\tau)$ sind als blosse Trabanten oder Appendices jener Zustände, kurz als blosse

Begleiterscheinungen derselben anzusehen. Ihre Beziehung zu den Componenten jener Zustände ist enthalten in folgenden Formeln:

$$\text{(A.)}\quad \begin{cases} 4\pi\sigma = \dfrac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}, \\ 4\pi\tau = \dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathfrak{N}}{\partial z}, \end{cases} \quad \begin{cases} 4\pi(\sigma) = \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} + \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} + \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}, \\ 4\pi(\tau) = \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\mathfrak{L}}{\mu} + \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\mathfrak{M}}{\mu} + \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\mathfrak{N}}{\mu}. \end{cases}$$

Hier ist ε der sogenannte Dielektricitätscoefficient, und μ der Magnetisirungscoefficient. Diese der Substanz eigenthümlichen Coefficienten würden *Constanten* sein, wenn die Substanz vollkommen gleichförmig wäre. Im Allgemeinen aber werden sie (ebenso wie etwa die Dichtigkeit) an verschiedenen Stellen der Substanz verschiedene Werthe besitzen, also Functionen der Coordinaten sein.

Ferner sind als unmittelbare *Begleiterscheinungen* jener elektrischen und magnetischen Zustände aufzuführen die Grössen E, E_e, E_m. Sie stehen zu den Componenten jener Zustände in folgenden Beziehungen:

$$\text{(B.)}\quad \begin{cases} \mathsf{E} = \mathsf{E}_e + \mathsf{E}_m, \\ \mathsf{E}_e = \displaystyle\int \frac{\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2}{8\pi\varepsilon} D\mathrm{v}, \\ \mathsf{E}_m = \displaystyle\int \frac{\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2}{8\pi\mu} D\mathrm{v}, \end{cases}$$

die Integrationen ausgedehnt gedacht über alle Volumelemente $D\mathrm{v}$ des ganzen unendlichen Raumes.

Was die in (A.) definirten Grössen betrifft, so heissen σ, (σ) die *elektrischen Dichtigkeiten;* und zwar heisst σ die Dichtigkeit der *wahren*, und (σ) die der *freien* Elektricität. Desgleichen heissen τ, (τ) die *magnetischen Dichtigkeiten*, und zwar τ die des *wahren* und (τ) die des *freien* Magnetismus.

Was ferner die Grössen (B.) anbelangt, so heisst E die *elektromagnetische Energie* der den ganzen Weltraum erfüllenden Substanz. Sie besteht aus zwei Theilen, nämlich aus der *elektrischen* Energie E_e, und aus der *magnetischen Energie* E_m.

Als unmittelbare *Begleiterscheinungen* der elektrischen Zustände sind ferner aufzuführen die Grössen X, Y, Z und u, v, w, welche zu den Componenten jener Zustände in folgender Beziehung stehen:

$$\text{(C.)}\quad \begin{cases} X = \dfrac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}, \quad Y = \dfrac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}, \quad Z = \dfrac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}, \\ u = \lambda X, \quad v = \lambda Y, \quad w = \lambda Z; \end{cases}$$

woraus durch Elimination von X, Y, Z sich ergiebt:

(D.) $$u = \frac{\lambda \mathfrak{X}}{\varepsilon}, \quad v = \frac{\lambda \mathfrak{Y}}{\varepsilon}, \quad w = \frac{\lambda \mathfrak{Z}}{\varepsilon},$$

wo λ (ebenso wie ε und μ) einen bestimmten der Substanz zugehörigen Coefficienten vorstellt, die sogenannte *elektrische Leitungsfähigkeit* der Substanz. Die Grössen X, Y, Z heissen die Componenten der an der betrachteten Stelle (x, y, z) augenblicklich vorhandenen *elektromotorischen Kraft*, und u, v, w die Componenten der daselbst augenblicklich vorhandenen *elektrischen Strömung.*

Die Formeln (C.), (D.) entbehren noch der hinreichenden Allgemeinheit. Es können nämlich an einigen Stellen der Substanz in Folge von Structurunterschieden oder auch in Folge von Temperaturunterschieden eigenthümliche elektromotorische Kräfte vorhanden sein, über deren Entstehen die Maxwell-Hertz'sche Theorie keine nähere Auskunft giebt, die also gewissermassen ausserhalb des eigentlichen Rahmens dieser Theorie liegen. Sind nun solche der Theorie *fremde*[1]) elektromotorische Kräfte wirklich vorhanden, und bezeichnet man dieselben mit X', Y', Z', so sind die Gleichungen (C.) zu ersetzen durch folgende Formeln:

(E.) $$\begin{cases} X = \frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} + X', & Y = \frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} + Y', & Z = \frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} + Z', \\ u = \lambda X, & v = \lambda Y, & w = \lambda Z; \end{cases}$$

woraus durch Elimination von X, Y, Z sich ergiebt:

(F.) $$u = \frac{\lambda \mathfrak{X}}{\varepsilon} + \lambda X', \quad v = \frac{\lambda \mathfrak{Y}}{\varepsilon} + \lambda Y', \quad w = \frac{\lambda \mathfrak{Z}}{\varepsilon} + \lambda Z'.$$

Es liegt nahe, diese Dinge in Parallele zu stellen mit der berühmten Fourier'*schen Wärmetheorie.* Ebenso wie dort von einem seiner Natur nach ganz unbekannten calorischen Zustande die Rede ist, der kurzweg die *Temperatur* genannt, und mit ϑ bezeichnet wird; — ebenso ist hier von gewissen ihrer Natur nach ebenfalls völlig unbekannten elektrischen und magnetischen Zuständen die Rede, deren Componenten kurzweg mit $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ benannt werden. Und ebenso wie dort der Substanz gewisse Coefficienten D, C, K, H (Dichtigkeit, specifische Wärme, innere und äussere Leitungsfähigkeit) zugehören, die auf die calo-

1) Es mag mir, in Ermangelung einer besseren Ausdrucksweise gestattet sein, mit dem Epitheton „*fremd*" alle Vorgänge und Kräfte zu bezeichnen, welche die Hertz'sche Theorie als durch die Erfahrung gegeben ansieht, ohne über dieselben irgend welche nähere Auskunft zu ertheilen. Zu solchen fremden Kräften werden also z. B. auch gehören die Schwere, überhaupt die Kräfte der Gravitation.

rischen Vorgänge von Einfluss sind; — ebenso machen sich auch hier gewisse der Substanz zugehörige Coefficienten $\lambda, \varepsilon, \mu, X', Y', Z'$ bemerkbar durch ihren Einfluss auf die elektrischen und magnetischen Vorgänge.[1]) Und ebenso wie endlich dort die Temperatur ϑ in einem festen homogenen Körper von Augenblick zu Augenblick der Formel entspricht:

$$(\Phi.) \qquad \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{K}{CD}\left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}\right); \text{ —}$$

ebenso sollen auch hier die in der betrachteten Substanz sich abspielenden elektrischen und magnetischen Zustände beherrscht sein von gewissen Differentialgleichungen; dieselben lauten:

Erste Gruppe der Maxwell'schen Gleichungen

$$(\text{G.}) \begin{cases} \dfrac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} = \dfrac{1}{A}\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\mathfrak{N}}{\mu} - \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\mathfrak{M}}{\mu}\right) - 4\pi u, \\ \dfrac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} = \dfrac{1}{A}\left(\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\mathfrak{L}}{\mu} - \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\mathfrak{N}}{\mu}\right) - 4\pi v, \\ \dfrac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} = \dfrac{1}{A}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\mathfrak{M}}{\mu} - \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\mathfrak{L}}{\mu}\right) - 4\pi w, \end{cases}$$

Zweite Gruppe der Maxwell'schen Gleichungen.

$$(\text{H.}) \begin{cases} \dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} = -\dfrac{1}{A}\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} - \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\right), \\ \dfrac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} = -\dfrac{1}{A}\left(\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} - \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right), \\ \dfrac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t} = -\dfrac{1}{A}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} - \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\right), \end{cases}$$

wo A eine *positive* Constante vorstellt, während t die Zeit bezeichnet.

Nach der Ansicht von Hertz sind diese Gleichungen (G.), (H.) im Wesentlichen schon von Maxwell aufgestellt worden. Und wenn Hertz z. B. [Ges. Werke, Bd. 2, Seite 23] auf die Frage nach dem eigentlichen Wesen der Maxwell'schen Theorie die Antwort giebt: „*Die Maxwell'sche Theorie ist das System der Maxwell'schen Gleichungen*", so hat er dabei offenbar vorzugsweise die Gleichungen (G.), (H.) im Auge.

Noch sei bemerkt, dass die Gleichungen (G.), (H.) bezogen zu denken sind auf ein *positives* rechtwinkliges Axensystem (x, y, z). Denkt man sich also um den Anfangspunct O des Axensystems (x, y, z) eine Kugelfläche beschrieben, und die auf dieser Fläche durch die Axen x, y, z entstehenden drei Puncte respective mit A, B, C bezeichnet, so soll derjenige, welcher, auf der Aussenseite der Kugelfläche fortschreitend, das sphärische Dreieck ABC in

1) Die X', Y', Z' hängen, ebenso wie $\lambda, \varepsilon, \mu$, nur von der Substanz selber oder vielmehr von der augenblicklichen Beschaffenheit der Substanz ab Und diese augenblickliche Beschaffenheit der Substanz wird ihrerseits bedingt sein durch die Natur der Substanz, z. B. durch ihre Structurverhältnisse, sowie auch durch ihre augenblicklichen calorischen Verhältnisse.

der Richtung $ABCA$ umwandert, während dieser Wanderung die Fläche des sphärischen Dreiecks fortdauernd zur *Linken* haben.[1])

Diese Definition des *positiven* Axensystems gilt übrigens ganz allgemein, einerlei ob dasselbe rechtwinklig oder schiefwinklig ist. Denkt man sich z. B. auf der Kugelfläche irgend ein sphärisches Dreieck ABC gezeichnet, dessen Seiten sämmtlich $< 90^0$ sind, und liegen die drei Ecken des Dreiecks *in* der Ebene des Papiers, während der Mittelpunct O der Kugelfläche *unterhalb* dieser Ebene sich befindet, so wird derjenige, welcher, auf der Aussenseite der Kugelfläche fortschreitend, das Dreieck in der Richtung $ABCA$ umwandert, während dieser Wanderung die Fläche des Dreiecks fortdauernd zur *Linken* haben. Und demgemäss wird das durch die drei Kugelradien $x = OA$, $y = OB$, $z = OC$ gebildete Axensystem ein *positives* zu nennen sein.

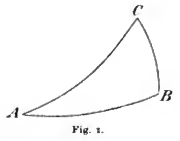


Fig. 1.

Beiläufig bemerkt, werden wir uns einer analogen Ausdrucksweise auch bedienen bei der Rotation um irgend welche Axe. Denkt man sich z. B. auf der Kugelfläche irgend einen *kleinen Kreis* ABC *mit dem Mittelpunct* M gezeichnet, und liegt dieser Kreis *in* der Papierebene, während der Mittelpunct O der Kugelfläche *unterhalb* der Papierebene sich befindet, so wird derjenige, welcher, auf der Aussenseite der Kugelfläche fortschreitend, den Kreis in der Richtung $ABCA$ umwandert, während dieser Wanderung die Kreisfläche fortdauernd zur *Linken* haben. *Und dementsprechend soll die Rotation $ABCA$ positiv genannt werden in Bezug auf die Richtung des Kugelradius OM.*

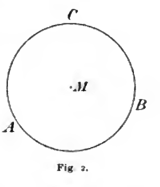


Fig. 2.

Ueber die Nomenclatur. — Die eingeführten Grössen σ, (σ), τ, (τ), E, u, v, w, etc. etc. sind vorhin mit allerhand Namen belegt worden. Wie weit diese Namen berechtigt, oder wenigstens zweckmässig sind, — das wird sich aus den weiter folgenden Betrachtungen ergeben.

1) Will man die Gleichungen (G.), (H.), wie das z. B. Hertz thut, auf ein *negatives* rechtwinkliges Axensystem beziehen, so muss man in ihnen die Constante A ersetzen durch $-A$.

Dem Folgenden vorgreifend, sei indessen schon jetzt bemerkt, dass σ wohl die Dichtigkeit einer wirklichen *Materie* sein möchte, und dass u, v, w alsdann die Strömungscomponenten ebenderselben Materie sein werden. Bezeichnet man nun diese Materie als die *wahre Elektricität*, so wird σ die *Dichtigkeit der wahren Elektricität* zu nennen sein; was mit dem vorhin für σ eingeführten Namen in Uebereinstimmung ist.

Desgleichen wird vielleicht auch τ die Dichtigkeit einer wirklich vorhandenen *Materie* sein; und diese Materie ist alsdann als *der wahre Magnetismus* zu bezeichnen.

Die sogenannten *freien Dichtigkeiten* (σ) und (τ) stehen zu jenen Materien in keiner einfachen Beziehung, und scheinen von viel complicirterer Bedeutung zu sein.

Ein wesentliches Verdienst von Hertz dürfte wohl darin bestehen, dass er die Maxwell'schen Gleichungen (G.), (H.), welche ihrer Natur nach nur für die *ruhende* Substanz gelten, ausgedehnt hat auf den Fall der *Bewegung*. Bevor wir aber auf diese Dinge näher eingehen können, wird es nothwendig sein, im folgenden Paragraph zuvörderst einige Bemerkungen von rein formaler Natur voranzuschicken.

§ 2.

Einige Bemerkungen rein formaler Natur, namentlich z. B. über den Gebrauch[1]) der beiden Charakteristiken d und ∂.

Die den Weltraum erfüllende Substanz befindet sich im Allgemeinen in irgend welcher Bewegung. Ist nun z. B. von einer *substantiellen Curve* die Rede, so wird darunter eine Curve zu verstehen sein, die fortdauernd aus ein und denselben substantiellen Puncten besteht, und die also, falls diese substantiellen Puncte in Bewegung sind, ihrer Lage und Gestalt nach, von Augenblick zu Augenblick sich ändert. Ist insbesondere die betrachtete substantielle Curve von sehr geringer Länge, so wird sie als ein *substantielles Curvenelement* zu bezeichnen sein. — In analogem Sinne mag das Epitheton *„substantiell“* auch bei Flächen und Flächen-

1) Es wird in diesem Paragraph der Gebrauch der Charakteristiken d und ∂ nicht durch irgend welche Definition oder Anweisung, sondern nur durch einzelne Beispiele erläutert werden. Uebrigens handelt es sich dabei nicht etwa um irgend welchen *neuen* Gebrauch jener Charakteristiken, sondern nur um denjenigen, der in der Hydrodynamik und Aërodynamik schon seit vielen Jahrzehnten üblich ist.

elementen, und ebenso auch bei einem Volumen oder Volumelement zur Anwendung kommen. So z. B. wird unter einem *substantiellen Volumelement* ein solches zu verstehen sein, welches fortdauernd von ein und denselben substantiellen Puncten erfüllt ist.

Die Bewegungen und Geschwindigkeiten der substantiellen Puncte mögen kurzweg *substantielle Bewegungen* und *substantielle Geschwindigkeiten* genannt werden. Die Werthe der substantiellen Geschwindigkeitscomponenten an irgend einer Stelle (x, y, z) im Zeitaugenblick t mögen mit α, β, γ bezeichnet werden:

(I.) $$\alpha = \alpha(x, y, z, t), \quad \beta = \beta(x, y, z, t), \quad \gamma = \gamma(x, y, z, t).$$

Ferner mögen die an der Stelle (x, y, z) zur Zeit t vorhandenen *elektrischen Strömungscomponenten* mit u, v, w bezeichnet werden:

(K.) $$u = u(x, y, z, t), \quad v = v(x, y, z, t), \quad w = w(x, y, z, t).$$

Wir wollen jetzt, während die betrachtete Substanz in irgend welcher Bewegung begriffen ist, die in einem *bestimmten substantiellen Volumelement* vorhandenen elektrischen Strömungen u, v, w von Augenblick zu Augenblick verfolgen. In den Augenblicken t und $t + dt$ seien die Coordinaten dieses substantiellen Volumelementes und die in ihm vorhandenen elektrischen Strömungen bezeichnet respektive mit x, y, z, u, v, w und mit $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, $u + du$, $v + dv$, $w + dw$. Alsdann ist nach (K.) z. B.:

$$u = u(x, y, z, t),$$

$$u + du = u(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt).$$

mithin:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz + \frac{\partial u}{\partial t} dt,$$

oder, falls man durch das Zeitelement dt dividirt:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Nun sind aber offenbar dx, dy, dz die Verschiebungen des betrachteten substantiellen Elementes während der Zeit dt. Folglich sind die Quotienten $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ nichts Anderes als die *substantiellen Geschwindigkeitscomponenten* α, β, γ (I.); sodass also die letzte Formel übergeht in:

(K_1.) $$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\gamma + \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Denkt man sich insbesondere die betrachtete Substanz in *Ruhe*, so sind α, β, γ überall $= 0$; wodurch alsdann die Formel übergeht in:

(K_2.) $$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Ebenso wie in (I.) und (K.) die α, β, γ und u, v, w als abhängig von x, y, z, t angesehen sind; — genau in derselben Art und Weise mögen auch die elektrischen und magnetischen Zustandscomponenten $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$, als Functionen von x, y, z, t aufgefasst werden:

(L.) $$\begin{cases} \mathfrak{X} = \mathfrak{X}(x,y,z,t), & \mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}(x,y,z,t), \quad \mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}(x,y,z,t), \\ \mathfrak{L} = \mathfrak{L}(x,y,z,t), & \mathfrak{M} = \mathfrak{M}(x,y,z,t), \quad \mathfrak{N} = \mathfrak{N}(x,y,z,t), \end{cases}$$

Alsdann sind folgende mit (K_1.) analoge Formeln zu notiren:

(L_1.) $$\begin{cases} \frac{d\mathfrak{X}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x}\alpha + \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y}\beta + \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial z}\gamma + \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}, \\ \frac{d\mathfrak{L}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x}\alpha + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial y}\beta + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial z}\gamma + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t}, \end{cases}$$

auch werden alsdann, speciell für den Zustand der *substantiellen Ruhe,* folgende mit (K_2.) analoge Formeln zu beachten sein:

(L_2.) $$\begin{cases} \frac{d\mathfrak{X}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}, \\ \frac{d\mathfrak{L}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t}. \end{cases}$$

Ebenso mögen ferner auch die elektrischen und magnetischen Dichtigkeiten σ, (σ), τ, (τ) als Functionen von x, y, z, t angesehen werden:

(M.) $$\begin{cases} \sigma = \sigma(x,y,z,t), \\ \tau = \tau(x,y,z,t), \end{cases} \qquad \begin{cases} (\sigma) = (\sigma)(x,y,z,t), \\ (\tau) = (\tau)(x,y,z,t); \end{cases}$$

sodass also folgende mit (K_1.), (L_1.) analoge Formeln zu notiren sind:

(M_1.) $$\begin{cases} \frac{d\sigma}{dt} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}\alpha + \frac{\partial \sigma}{\partial y}\beta + \frac{\partial \sigma}{\partial z}\gamma + \frac{\partial \sigma}{\partial t}, \\ \frac{d\tau}{dt} = \frac{\partial \tau}{\partial x}\alpha + \frac{\partial \tau}{\partial y}\beta + \frac{\partial \tau}{\partial z}\gamma + \frac{\partial \tau}{\partial t}, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{d(\sigma)}{dt} = \frac{\partial (\sigma)}{\partial x}\alpha + \frac{\partial (\sigma)}{\partial y}\beta + \frac{\partial (\sigma)}{\partial z}\gamma + \frac{\partial (\sigma)}{\partial t}, \\ \frac{d(\tau)}{dt} = \frac{\partial (\tau)}{\partial x}\alpha + \frac{\partial (\tau)}{\partial y}\beta + \frac{\partial (\tau)}{\partial z}\gamma + \frac{\partial (\tau)}{\partial t}; \end{cases}$$

und hieraus ergeben sich, speciell für den Fall der *substantiellen Ruhe,* folgende mit (K_2.), (L_2) analoge Formeln:

(M_2.) $$\begin{cases} \frac{d\sigma}{dt} = \frac{\partial \sigma}{\partial t}, \\ \frac{d\tau}{dt} = \frac{\partial \tau}{\partial t}, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{d(\sigma)}{dt} = \frac{\partial (\sigma)}{\partial t}, \\ \frac{d(\tau)}{dt} = \frac{\partial (\tau)}{\partial t}. \end{cases}$$

Ein wenig anders gestalten sich die betreffenden Formeln für die der Substanz zugehörigen Coefficienten:

(N.) $$\varepsilon = \varepsilon(x,y,z,t), \quad \mu = \mu(x,y,z,t), \quad \lambda = \lambda(x,y,z,t).$$

Von diesen Coefficienten wollen wir nämlich mit Helmholtz annehmen, ***dass ihre Werthe an den einzelnen substantiellen Elementen unveränderlich haften***; sodass sie also für ein bestimmtes substantielles Element fortdauernd ein und dieselben Werthe haben. Es versteht sich von selber, dass diese Annahme, wie auch Helmholtz bemerkt hat, nur approximativ richtig, nämlich nur dann richtig sein kann, wenn man den Einfluss, den die im Laufe der Zeit stattfindenden Dilatationen oder Contractionen des substantiellen Elementes auf die Werthe von ε, μ, λ ausüben, vollständig vernachlässigt. — Analog mit (K_1.) und (L_1.) ergiebt sich nun zuvörderst:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\alpha + \frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\beta + \frac{\partial\varepsilon}{\partial z}\gamma + \frac{\partial\varepsilon}{\partial t}.$$

Nach der soeben gemachten Annahme wird aber $\frac{d\varepsilon}{dt} = 0$ sein; denn $d\varepsilon$ repräsentirt den Zuwachs, den der Coefficient ε für ein und dasselbe substantielle Element während der Zeit dt erhält, also einen Zuwachs, der nach jener Annahme stets $= 0$ zu denken ist. Somit ergiebt sich also:

$$(N._1)\quad \begin{cases} \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\alpha + \frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\beta + \frac{\partial\varepsilon}{\partial z}\gamma + \frac{\partial\varepsilon}{\partial t} = 0, \quad \text{und ebenso:} \\ \frac{d\mu}{dt} = \frac{\partial\mu}{\partial x}\alpha + \frac{\partial\mu}{\partial y}\beta + \frac{\partial\mu}{\partial z}\gamma + \frac{\partial\mu}{\partial t} = 0, \\ \frac{d\lambda}{dt} = \frac{\partial\lambda}{\partial x}\alpha + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\beta + \frac{\partial\lambda}{\partial z}\gamma + \frac{\partial\lambda}{\partial t} = 0; \end{cases}$$

und diese Gleichungen nehmen speziell für den Fall der *substantiellen Ruhe* folgende Gestalt an:

$$(N._2)\quad \begin{cases} \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial t} = 0, \\ \frac{d\mu}{dt} = \frac{\partial\mu}{\partial t} = 0, \\ \frac{d\lambda}{dt} = \frac{\partial\lambda}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

Die Dilatationsformeln. — Ist die betrachtete Substanz in irgend welcher Bewegung begriffen, so wird im Allgemeinen jedwedes *substantielle Element*, seiner Lage und Gestalt nach, von Augenblick zu Augenblick sich ändern. Bezeichnet man nun die Coordinaten und das Volumen eines solchen substantiellen Elementes in zwei aufeinanderfolgenden Zeitaugenblicken t und $t + dt$ respective mit x, y, z, $D\mathrm{v}$ und mit $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, $D\mathrm{v} + d(D\mathrm{v})$, so muss man die hier auftretenden Zuwüchse dx, dy, dz und $d(D\mathrm{v})$ zu berechnen im Stande sein, falls die Bewegung der Substanz in irgend

welcher Weise gegeben ist; letzteres aber wird der Fall sein, falls man sich die in (1.) genannten Functionen α, β, γ in bestimmter Weise gegeben denkt. Es müssen also die in Rede stehenden Zuwüchse dx, dy, dz und $d(D\mathrm{v})$ durch jene Functionen α, β, γ analytisch ausdrückbar sein. In der That erkennt man sofort, dass dx, dy, dz die Werthe haben:

$$(\text{O.}) \qquad dx = \alpha dt, \quad dy = \beta dt, \quad dz = \gamma dt.$$

Auch ist bekannt, dass man für den Zuwachs $d(D\mathrm{v})$ folgenden Werth erhält[1]):

$$(\text{P.}) \qquad d(D\mathrm{v}) = \left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z}\right) D\mathrm{v} \cdot dt.$$

An Stelle des substantiellen *Volum*-Elementes $D\mathrm{v}$ wollen wir jetzt ein substantielles *Flächen*-Element Do in Betracht ziehen; und hier die analoge Frage zu beantworten suchen, indem wir dabei nicht nur das Element Do selber, sondern zugleich auch die auf ihm errichtete *Normale* in Betracht ziehen. Wir bezeichnen die Coordinaten eines solchen substantiellen Flächenelementes, ferner seine Grösse (sein Areal), und endlich die Richtungscosinus der auf ihm errichteten Normale n in zwei auf einander folgenden Augenblicken t und $t + dt$ respective mit x, y, z, Do, a, b, c, und mit $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, $Do + d(Do)$, $a + da$, $b + db$, $c + dc$; und stellen uns die Aufgabe, die hier auftretenden Zuwüchse dx, dy, dz, $d(Do)$, da, db, dc mittelst jener in (1.) genannten Functionen α, β, γ analytisch auszudrücken. Selbstverständlich erhält man zuvörderst, ebenso wie in (O.) die Formeln:

$$(\text{Q.}) \qquad dx = \alpha dt, \quad dy = \beta dt, \quad dz = \gamma dt.$$

Ferner wird der Zuwachs $d(Do)$ folgenden Werth haben[2]):

$$(\text{R.}) \quad d(Do) = \left\{\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z}\right) - \left[a^2\frac{\partial\alpha}{\partial x} + ab\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y} + \frac{\partial\beta}{\partial x}\right) + \cdots\right]\right\} Do \cdot dt,$$

wo der in den eckigen Klammern enthaltene Ausdruck, vollständig hingeschrieben, folgendermassen lautet:

$$a^2\frac{\partial\alpha}{\partial x} + b^2\frac{\partial\beta}{\partial y} + c^2\frac{\partial\gamma}{\partial z} + bc\left(\frac{\partial\beta}{\partial z} + \frac{\partial\gamma}{\partial y}\right) + ca\left(\frac{\partial\gamma}{\partial x} + \frac{\partial\alpha}{\partial z}\right) + ab\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y} + \frac{\partial\beta}{\partial x}\right).$$

---

1) Vgl. C. NEUMANN: *Die elektrischen Kräfte*. II. Theil, Leipzig, bei Teubner. 1889, Seite 250 (17). Daselbst sind die Producte αdt, βdt, γdt mit f, g, h bezeichnet, und überdies die Indices 1, 2, 3 angewendet zur Andeutung der partiellen Ableitungen nach x, y, z.

2) a. a. O. Seite 252 (21).

Was endlich die Zuwüchse da, db, dc betrifft, so findet man für die Combinationen

$$d(a\,Do) = da \cdot Do + a \cdot d(Do),$$
$$d(b\,Do) = db \cdot Do + b \cdot d(Do),$$
$$d(c\,Do) = dc \cdot Do + c \cdot d(Do)$$

nach einiger Rechnung[1]) folgende Werthe:

$$(S.)\quad \begin{cases} d(a\,Do) = \left\{a\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z}\right) - \left(a\frac{\partial\alpha}{\partial x} + b\frac{\partial\beta}{\partial x} + c\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)\right\} Do \cdot dt, \\ d(b\,Do) = \left\{b\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z}\right) - \left(a\frac{\partial\alpha}{\partial y} + b\frac{\partial\beta}{\partial y} + c\frac{\partial\gamma}{\partial y}\right)\right\} Do \cdot dt, \\ d(c\,Do) = \left\{c\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z}\right) - \left(a\frac{\partial\alpha}{\partial z} + b\frac{\partial\beta}{\partial z} + c\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right)\right\} Do \cdot dt. \end{cases}$$

Von den Formeln (P.) und (R.), (S.) wird weiterhin Gebrauch zu machen sein. Die Formeln (R.), (S.) dürften als Poisson'*sche Formeln* zu bezeichnen sein; denn Poisson hat dieselben wohl zuerst aufgestellt (bei seinen Untersuchungen über die Theorie der Elasticität).

Bemerkung. — Das betrachtete Flächenelement Do ist ein *substantielles*. Hingegen wird die auf ihm errichtete Normale $n(a, b, c)$ im Allgemeinen keine substantielle, sondern nur eine *ideale* Linie sein; denn sie wird im Allgemeinen, während der Bewegung der Substanz, von Augenblick zu Augenblick durch andere und andere substantielle Punkte hindurchgehen.

Ueber gewisse Integrale. — Das Newton'sche Potential.

$$(T.)\qquad V = \frac{m}{\varrho}$$

ist im Unendlichen unendlich klein, d. i. $= 0$. Dennoch kann die Summe von lauter solchen Nullen einen Werth haben, der *nicht* $= 0$ ist. Summirt man z. B. das Potential V über alle Elemente Do einer um m (als Mittelpunkt) mit unendlichgrossem grossem Radius ϱ beschriebene Kugelfläche, so erhält man

$$(T'.)\qquad \int V\,Do = \int \frac{m\,Do}{\varrho} = \frac{m}{\varrho}\int Do = \frac{m}{\varrho}(4\pi\varrho^2).$$

Die in Rede stehende Summe ist also $= 4\pi m\varrho$. D. h. sie wird *nicht* $= 0$ sein, sondern (ebenso wie ϱ selber) *unendlich gross* sein.

Nimmt man ferner, statt des Potentials V, die allgemeinere Function

$$(U.)\qquad W = \frac{m}{\varrho^p},$$

---

1) a. a. O. Seite 252 (23).

wo p eine Zahl aus der Reihe 1, 2, 3, 4, ... sein soll, so wird wiederum W selber im Unendlichen unendlich klein, also $=0$ sein. Und trotzdem wird eine Summe von lauter solchen Nullen nicht immer $=0$ sein. Summirt man z. B. die Function W über alle Elemente Do der schon genannten Kugelfläche, so erhält man:

$$(\mathrm{U}'.) \qquad \int W\,Do = \int \frac{m\,Do}{\varrho^p} = \frac{m}{\varrho^p}\int Do = \frac{m}{\varrho^p}(4\pi\varrho^2).$$

Die in Rede stehende Summe ist also $=\infty$ für $p=1$, ferner $=4\pi m$ für $p=2$, in beiden Fällen also *nicht* $=0$. Sie wird erst $=0$ werden für $p=3$ oder $p=4$, u. s. w.

Aehnlich kann es sich vielleicht mit den Zustandscomponenten $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ *verhalten. Gesetzt nämlich, es seien diese Componenten im Unendlichen unendlich klein, also* $=0$; *so könnte doch möglicher Weise eine Summe von lauter solchen Nullen einen Werth haben, der nicht* $=0$ *ist.* Da derartige Summationen oder Integrationen in der Maxwell-Hertz'schen Theorie eine grosse Rolle spielen, so wird es später im 7. Paragraph nothwendig werden, auf diese Dinge näher einzugehen. Offenbar ist es für solche Fragen ganz unzureichend, zu wissen, dass die betreffenden Grössen im Unendlichen unendlich klein werden. Vielmehr muss man sich Rechenschaft darüber zu geben suchen, *in welcher Weise, nach welchem Gesetz* dieses Unendlichkleinwerden von Statten geht.

§ 3.

Aus den Maxwell'schen Differentialgleichungen werden die allgemeinern Hertz'schen Differentialgleichungen abgeleitet.

Die Maxwell'schen Gleichungen (G.), (H.) Seite 222 können ihrer Natur nach (nämlich weil in ihnen die substantiellen Geschwindigkeitscomponenten α, β, γ nicht enthalten sind) nur gültig sein für den Fall der *ruhenden* Substanz. Von selber drängt sich daher die Nothwendigkeit auf, die Gleichungen zu verallgemeinern, ihnen eine Form zu geben, in welcher sie auch noch gültig sind für den Fall der *Bewegung*; was selbstverständlich nicht möglich sein wird ohne Zuhülfenahme irgend welcher Hypothese. Wir werden in dieser Beziehung den von Hertz eingeschlagenen Weg verfolgen.

Die den Weltraum erfüllende einheitliche und continuirliche Substanz (vgl. Seite 218 ff.) sei in irgend welcher *Bewegung* begriffen. Denken wir uns also inmitten dieser Substanz irgend ein substantielles Flächenelement Do markirt, und auf diesem die Normale n errichtet, so wird Do an jener Bewegung theilnehmen; sodass also Do seiner Lage und Gestalt nach von Augenblick zu Augenblick sich ändert, während n gegen Do fortdauernd senkrecht bleiben soll.[1]) Für irgend einen Zeitaugenblick t bezeichnen wir die Coordinaten des Elementes Do mit x, y, z, ferner die Richtungscosinus der Normale n mit a, b, c, endlich die an der Stelle des Elementes Do vorhandenen elektrischen Zustandscomponenten mit $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$; und bilden nun folgenden Ausdruck:

$$(1.) \qquad q = (\mathfrak{X}a + \mathfrak{Y}b + \mathfrak{Z}c)\, Do.$$

Beiläufig sei bemerkt, dass dieser Ausdruck q, nach der Nomenclatur von Faraday, Maxwell und Hertz, zu bezeichnen sein würde als die Menge der durch das Element Do im Augenblick t hindurchgehenden elektrischen Zustandslinien.

Während des nächstfolgenden Zeitelementes dt wird q sich *ändern*, und zwar aus doppeltem Grunde, nämlich erstens, weil $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ sich ändern, und zweitens auch deswegen, weil das substantielle Element Do in Bewegung begriffen ist (indem es im Allgemeinen von Augenblick zu Augenblick, seiner Lage und Gestalt nach, sich ändert). Der dem Zeitelement dt entsprechende Zuwachs dq des Ausdruckes q wird daher aus zwei Theilen bestehen, von denen der eine nur von den Aenderungen der $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$, der andere aber nur von der substantiellen Bewegung herrührt. Demgemäss erhält man:

$$(2.) \qquad dq = \left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}a + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t}b + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}c\right) Do\,dt + \delta q,$$

wo δq jenen *zweiten Theil* des Zuwachses dq vorstellen soll.

Was den *ersten Theil* des Zuwachses dq betrifft, so ist derselbe in solcher Weise zu bilden, als befände sich die Substanz in völliger Ruhe. Die in diesem ersten Theil auftretenden Ableitungen $\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}, \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t}, \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}$ werden daher Werthe besitzen, die unmittelbar aus den Maxwell'schen Gleichungen (G.) Seite 222 zu entnehmen sind und die also lauten:

1) Dieses n ist nur eine *ideale* Linie. Vgl. die Bemerkung Seite 229.

$$(3.)\quad \begin{cases} \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} = \frac{1}{A}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{N}}{\mu} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{M}}{\mu}\right) - 4\pi u, \\ \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} = \frac{1}{A}\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{L}}{\mu} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathfrak{N}}{\mu}\right) - 4\pi v, \\ \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} = \frac{1}{A}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathfrak{M}}{\mu} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{L}}{\mu}\right) - 4\pi w. \end{cases}$$

Was andrerseits den *zweiten Theil* des Zuwachses dq, nämlich das δq anbelangt, so macht HERTZ die Annahme [oder, wie er sich ausdrückt, die „Behauptung"], *dass dieser blos von der substantiellen Bewegung herrührende Theil* δq *stets* $= 0$ *sei. Und diese* HERTZ'*sche Hypothese:*

$$(4.)\qquad \delta q = 0$$

mag hier adoptirt werden. — Die Formel (2.) gewinnt alsdann durch Substitution der Werthe (3.), (4.) folgende Gestalt:

$$(5.)\quad dq = \frac{1}{A}\left[\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{N}}{\mu} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{M}}{\mu}\right)a + \left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{L}}{\mu} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathfrak{N}}{\mu}\right)b + \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathfrak{M}}{\mu} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{L}}{\mu}\right)c\right] Do\,dt$$
$$- 4\pi(ua + vb + wc)\,Do\,dt.$$

Nun kann man aber dieses dq noch auf *anderem* Wege berechnen, nämlich in rein formaler Weise, direct auf Grund des Ausdruckes (1). Differenzirt man nämlich diesen Ausdruck (1) nach der Zeit, so erhält man sofort:

$$(6.)\qquad dq = \frac{d[(\mathfrak{X}a + \mathfrak{Y}b + \mathfrak{Z}c)Do]}{dt}dt,$$

oder ausführlicher geschrieben[1]):

$$(7.)\quad dq = \left[\left(\frac{d\mathfrak{X}}{dt}a\,Do + \frac{d\mathfrak{Y}}{dt}b\,Do + \frac{d\mathfrak{Z}}{dt}c\,Do\right) + \left(\mathfrak{X}\frac{d(a\,Do)}{dt} + \mathfrak{Y}\frac{d(b\,Do)}{dt} + \mathfrak{Z}\frac{d(c\,Do)}{dt}\right)\right]dt.$$

Substituirt man in der Formel (7.) im letzten Trinom die bekannten Werthe [vgl. (S.) Seite 229]:

$$\frac{d(a\,Do)}{dt} = \left[a\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z}\right) - \left(a\frac{\partial\alpha}{\partial x} + b\frac{\partial\beta}{\partial x} + c\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)\right]Do,$$
$$\frac{d(b\,Do)}{dt} = \left[b\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z}\right) - \left(a\frac{\partial\alpha}{\partial y} + b\frac{\partial\beta}{\partial y} + c\frac{\partial\gamma}{\partial y}\right)\right]Do,$$
$$\frac{d(c\,Do)}{dt} = \left[c\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z}\right) - \left(a\frac{\partial\alpha}{\partial z} + b\frac{\partial\beta}{\partial z} + c\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right)\right]Do,$$

und ordnet man sodann nach $a\,Do$, $b\,Do$, $c\,Do$, so gelangt man zu einer Gleichung von folgender Gestalt:

$$(8.)\qquad dq = (\varDelta\mathfrak{X})a\,Do + (\varDelta\mathfrak{Y})b\,Do + (\varDelta\mathfrak{Z})c\,Do,$$

1) Die Art und Weise, wie hier, z. B. in (2.), (3.) und (5.), (6.), (7.), die Zeichen d und ∂ unterschieden sind, ist in voller Uebereinstimmung mit dem Inhalt des vorigen Paragraphen.

wo $\Delta\mathfrak{X}$, $\Delta\mathfrak{Y}$, $\Delta\mathfrak{Z}$ *blosse Abbreviaturen* sein sollen, definirt durch folgende Formeln:

$$(9.)\quad \begin{cases} \Delta\mathfrak{X} = \left[\frac{d\mathfrak{X}}{dt} + \mathfrak{X}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z}\right) - \left(\mathfrak{X}\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \mathfrak{Y}\frac{\partial\alpha}{\partial y} + \mathfrak{Z}\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right)\right]dt, \\ \Delta\mathfrak{Y} = \left[\frac{d\mathfrak{Y}}{dt} + \mathfrak{Y}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z}\right) - \left(\mathfrak{X}\frac{\partial\beta}{\partial x} + \mathfrak{Y}\frac{\partial\beta}{\partial y} + \mathfrak{Z}\frac{\partial\beta}{\partial z}\right)\right]dt, \\ \Delta\mathfrak{Z} = \left[\frac{d\mathfrak{Z}}{dt} + \mathfrak{Z}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z}\right) - \left(\mathfrak{X}\frac{\partial\gamma}{\partial x} + \mathfrak{Y}\frac{\partial\gamma}{\partial y} + \mathfrak{Z}\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right)\right]dt. \end{cases}$$

Unsere Betrachtungen gelten selbstverständlich für *jedwedes* substantielle Flächenelement Do mit der Normale n (a, b, c). Sie gelten also für *beliebige* Werthe von a, b, c. Setzt man daher z. B. die für dq in (5.) und (8.) erhaltenen Werthe einander gleich, so wird die so entstehende Gleichung gültig sein für beliebige Werthe von a, b, c; und hieraus folgt, dass in dieser Gleichung die Coefficienten von aDo, bDo, cDo einzeln einander gleich sein müssen. Demgemäss gelangt man zu folgenden drei Formeln:

$$(10.)\quad \begin{cases} \Delta\mathfrak{X} = \left[\frac{1}{A}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{N}}{\mu} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{M}}{\mu}\right) - 4\pi u\right]dt, \\ \Delta\mathfrak{Y} = \left[\frac{1}{A}\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{L}}{\mu} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathfrak{N}}{\mu}\right) - 4\pi v\right]dt, \\ \Delta\mathfrak{Z} = \left[\frac{1}{A}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathfrak{M}}{\mu} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{L}}{\mu}\right) - 4\pi w\right]dt. \end{cases}$$

Und diese Formeln (10), *in denen* $\Delta\mathfrak{X}$, $\Delta\mathfrak{Y}$, $\Delta\mathfrak{Z}$ *nur Abbreviaturen sind für die in* (9.) *angegebenen Ausdrücke, repräsentiren die von* HERTZ *gegebene Erweiterung der* MAXWELL'*schen Gleichungen* (G.) *Seite 222, nämlich die Ausdehnung jener Gleichungen auf den Fall der substantiellen Bewegung.*

Um nun ferner die *zweite* Gruppe der MAXWELL'schen Gleichungen, d. i. die Formeln (H.) Seite 222, einer analogen Erweiterung zu unterwerfen, betrachten wir, an Stelle des Ausdruckes q (1.), gegenwärtig folgenden Ausdruck:

$$(11.)\quad Q = (\mathfrak{L}a + \mathfrak{M}b + \mathfrak{N}c)Do,$$

der bezeichnet werden könnte als die Menge der durch Do gehenden magnetischen Zustandslinien.

Ebenso wie wir von (1.) zu (2.) gelangten, ebenso werden wir, von (11.) aus, zu folgender Formel gelangen:

$$(12.)\quad dQ = \left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial t}a + \frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial t}b + \frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial t}c\right)Do\,dt + \delta Q.$$

wo alsdann δQ denjenigen Theil von dQ vorstellt, der blos von der substantiellen Bewegung herrührt.

Durch (12.) zerfällt also der Zuwachs dQ in zwei Theile. Und zwar wird der *erste* Theil so zu bilden sein, *als befände sich die betrachtete Substanz in völliger Ruhe.* Demgemäss werden die Werthe der in diesem ersten Theil enthaltenen Ableitungen $\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t}, \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t}, \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t}$ ohne Weiteres aus den MAXWELL'schen Gleichungen (H.) Seite 222 zu entnehmen sein, und also folgendermassen lauten:

$$(13.)\quad \begin{cases} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} = -\frac{1}{A}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\right), \\ \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} = -\frac{1}{A}\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right), \\ \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t} = -\frac{1}{A}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\right). \end{cases}$$

Was andrerseits den zweiten Theil des Zuwachses dQ, nämlich das δQ anbelangt, so macht HERTZ die *Annahme,* dass dieses

$$(14.)\quad \delta Q \text{ stets } = 0$$

sei. Diese HERTZ'*sche Hypothese* adoptiren wir und erhalten alsdann aus (12.), durch Substitution der Werthe (13.), (14.), sofort folgende Gleichung:

$$(15.)\quad dQ = -\frac{1}{A}\left[\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\right)a + \left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right)b + \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\right)c\right] Do\, dt.$$

Nun können wir aber den der Zeit dt entsprechenden Zuwachs dQ noch auf *anderm* Wege bilden, nämlich dadurch, dass wir den Ausdruck Q (11.) nach der Zeit differenziren. In solcher Weise ergiebt sich sofort:

$$(16.)\quad dQ = \frac{d[(\mathfrak{L}a + \mathfrak{M}b + \mathfrak{N}c)Do]}{dt}dt,$$

oder etwas anders geschrieben:

$$(17.)\quad dQ = \left[\left(\frac{d\mathfrak{L}}{dt}a\,Do + \frac{d\mathfrak{M}}{dt}b\,Do + \frac{d\mathfrak{N}}{dt}c\,Do\right) + \left(\mathfrak{L}\frac{d(a\,Do)}{dt} + \mathfrak{M}\frac{d(b\,Do)}{dt} + \mathfrak{N}\frac{d(c\,Do)}{dt}\right)\right]dt.$$

Substituirt man hier im letzten Trinom die bekannten Werthe [vgl. (S.) Seite 229]:

$$\frac{d(a\,Do)}{dt} = \left[a\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z}\right) - \left(a\frac{\partial\alpha}{\partial x} + b\frac{\partial\beta}{\partial x} + c\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)\right] Do,$$
$$\frac{d(b\,Do)}{dt} = \left[b\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z}\right) - \left(a\frac{\partial\alpha}{\partial y} + b\frac{\partial\beta}{\partial y} + c\frac{\partial\gamma}{\partial y}\right)\right] Do,$$
$$\frac{d(c\,Do)}{dt} = \left[c\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z}\right) - \left(a\frac{\partial\alpha}{\partial z} + b\frac{\partial\beta}{\partial z} + c\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right)\right] Do,$$

so erhält man eine Gleichung von folgender Gestalt:

$$(18.)\quad dQ = (\Delta\mathfrak{L})a\,Do + (\Delta\mathfrak{M})b\,Do + (\Delta\mathfrak{N})c\,Do,$$

in welcher $\Delta\mathfrak{L}$, $\Delta\mathfrak{M}$, $\Delta\mathfrak{N}$ als *blosse Abbreviaturen* anzusehen sind für folgende Ausdrücke:

$$(19.)\quad \begin{cases} \Delta\mathfrak{L} = \left[\frac{d\mathfrak{L}}{dt} + \mathfrak{L}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z}\right) - \left(\mathfrak{L}\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \mathfrak{M}\frac{\partial\alpha}{\partial y} + \mathfrak{N}\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right)\right]dt, \\ \Delta\mathfrak{M} = \left[\frac{d\mathfrak{M}}{dt} + \mathfrak{M}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z}\right) - \left(\mathfrak{L}\frac{\partial\beta}{\partial x} + \mathfrak{M}\frac{\partial\beta}{\partial y} + \mathfrak{N}\frac{\partial\beta}{\partial z}\right)\right]dt, \\ \Delta\mathfrak{N} = \left[\frac{d\mathfrak{N}}{dt} + \mathfrak{N}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z}\right) - \left(\mathfrak{L}\frac{\partial\gamma}{\partial x} + \mathfrak{M}\frac{\partial\gamma}{\partial y} + \mathfrak{N}\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right)\right]dt. \end{cases}$$

Setzt man jetzt endlich die für dQ in (15.) und in (18.) erhaltenen Ausdrücke einander gleich, so müssen in der so entstehenden Gleichung die Coefficienten von $a\,Do$, $b\,Do$, $c\,Do$ einzeln einander gleich sein; sodass man also zu folgenden drei Formeln gelangt:

$$(20.)\quad \begin{cases} \Delta\mathfrak{L} = -\frac{1}{A}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\right)dt, \\ \Delta\mathfrak{M} = -\frac{1}{A}\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right)dt, \\ \Delta\mathfrak{N} = -\frac{1}{A}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\right)dt. \end{cases}$$

Und diese Formeln (20.), *in denen* $\Delta\mathfrak{L}$, $\Delta\mathfrak{M}$, $\Delta\mathfrak{N}$ *nur zur augenblicklichen Abkürzung stehen an Stelle der Ausdrücke* (19.), *repräsentiren die von* Hertz *gegebene Erweiterung der* Maxwell'*schen Gleichungen* (H.) *Seite* 222 *nämlich ihre Ausdehnung auf den Fall der substantiellen Bewegung.*

Man kann der Hertz'schen Hypothese, soweit sie z. B. den Ausdruck (1.):

$$(\alpha.)\qquad q = (\mathfrak{X}a + \mathfrak{Y}b + \mathfrak{Z}c)Do$$

betrifft, eine etwas andere Einkleidung geben. Für den Fall der *ruhenden* Substanz sind nämlich die Grössen a, b, c, Do unveränderlich. Und für diesen Fall der ruhenden Substanz wird daher der der Zeit dt entsprechende Zuwachs dq der Grösse q ohne allen Zweifel folgenden Werth haben:

$$(\beta.)\qquad dq = \left(\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t}a + \frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial t}b + \frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial t}c\right)Do\,dt.$$

Genau dieselbe Formel (β.) ergiebt sich aber aus (2.) und in Anbetracht der Hertz'schen Hypothese (4.): $\delta q = 0$, auch für den Fall der *bewegten* Substanz.

Man wird somit sagen können, die Hertz'sche Hypothese bestehe in der Annahme, *dass die für den Fall der Ruhe geltende Formel* (β.) *auch noch gültig sei für den Fall der Bewegung.*

Solange man über die eigentliche Natur des elektrischen Zustandes ($\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$) keine bestimmte Vorstellung hat, kann man unmöglich daran denken, jene Hertz'sche Hypothese (4.) durch irgendwelche Argumente beweisen oder widerlegen zu wollen. Immerhin mag es hier gestattet sein, an einigermassen analoge Dinge aus der Fourier'schen Wärmetheorie zu erinnern.

Man denke sich im Innern eines festen Körpers oder auch im Innern einer gegebenen Flüssigkeit irgend ein substantielles Flächenelement Do

markirt, mit der Normale n. Bezeichnet nun ϑ die Temperatur der Substanz, und denkt man sich diese Temperatur verschieden an verschiedenen Stellen der Substanz, so wird die während der Zeit dt durch das Element Do im Sinne jener Normale n hindurchfliessende Wärmemenge dW den Werth haben:

$$(\gamma.) \qquad dW = -K\frac{d\vartheta}{dn}Do\,dt,$$

wo K die innere Wärmeleitungsfähigkeit der Substanz vorstellt.

Der einzige Beweis, der für diese Formel (γ.) gegeben werden kann, besteht im Experiment, oder vielmehr in der experimentellen Bestätigung der auf dieser Formel (γ.) basirenden Theorie.

Ein solcher experimenteller Beweis der Formel (γ.) ist wohl ohne Zweifel immer nur geführt worden für den Fall der *ruhenden* Substanz. Und trotzdem wird man keinen Augenblick beanstanden, die Formel (γ.) auch als gültig zu erklären für den Fall der *Bewegung*.

Einigermassen ähnlich liegen die Dinge hier in der Elektrodynamik. Die Formel (β.) ist vollkommen einwandfrei für den Fall der *Ruhe*. Und hieraus kann vielleicht mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit gefolgert werden, dass sie auch noch gültig sei für den Fall der *Bewegung*.

Selbstverständlich würde Analoges zu sagen sein von der *magnetischen* HERTZ'schen Hypothese, d. i. von der Hypothese (14): $\delta Q = 0$.

Um die Hauptsache hervorzuheben, — die auf Grund gewisser Hypothesen (4.) und (14.) entstandenen allgemeinen HERTZ'schen Differentialgleichungen (10.) und (20.) lauten folgendermassen:

Erste Gruppe der Hertz'schen Gleichungen.

$$(21.)\begin{cases} \dfrac{\varDelta\mathfrak{X}}{dt} = \dfrac{1}{A}\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\mathfrak{N}}{\mu} - \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\mathfrak{M}}{\mu}\right) - 4\pi u, \\ \dfrac{\varDelta\mathfrak{Y}}{dt} = \dfrac{1}{A}\left(\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\mathfrak{L}}{\mu} - \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\mathfrak{N}}{\mu}\right) - 4\pi v, \\ \dfrac{\varDelta\mathfrak{Z}}{dt} = \dfrac{1}{A}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\mathfrak{M}}{\mu} - \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\mathfrak{L}}{\mu}\right) - 4\pi w, \end{cases}$$

Zweite Gruppe der Hertz'schen Gleichungen.

$$(22.)\begin{cases} \dfrac{\varDelta\mathfrak{L}}{dt} = -\dfrac{1}{A}\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} - \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\right), \\ \dfrac{\varDelta\mathfrak{M}}{dt} = -\dfrac{1}{A}\left(\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} - \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right), \\ \dfrac{\varDelta\mathfrak{N}}{dt} = -\dfrac{1}{A}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} - \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\right), \end{cases}$$

Dabei sind $\varDelta\mathfrak{X}$, $\varDelta\mathfrak{Y}$, $\varDelta\mathfrak{Z}$ und $\varDelta\mathfrak{L}$, $\varDelta\mathfrak{M}$, $\varDelta\mathfrak{N}$ die in (9.) und (19.) angegebenen *Abbreviaturen*. Werden die partiellen Ableitungen nach x, y, z durch die Indices 1, 2, 3 angedeutet, so ist z. B. $\varDelta\mathfrak{X}$ [vgl. (9.)] definirt durch folgende Formel:

$$(23.) \qquad \frac{\varDelta\mathfrak{X}}{dt} = \frac{d\mathfrak{X}}{dt} + \mathfrak{X}(\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3) - (\mathfrak{X}\alpha_1 + \mathfrak{Y}\alpha_2 + \mathfrak{Z}\alpha_3);$$

wofür man mit Rücksicht auf (L_1.) Seite 226 auch schreiben kann:

$$(24.)\begin{cases} \dfrac{\varDelta\mathfrak{X}}{dt} = \dfrac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t} + (\mathfrak{X}_1\alpha + \mathfrak{X}_2\beta + \mathfrak{X}_3\gamma) + \mathfrak{X}(\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3) - (\mathfrak{X}\alpha_1 + \mathfrak{Y}\alpha_2 + \mathfrak{Z}\alpha_3), \\ \text{d. i. } \dfrac{\varDelta\mathfrak{X}}{dt} = \dfrac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t} + (\mathfrak{X}_1\alpha + \mathfrak{X}_2\beta + \mathfrak{X}_3\gamma) + (\mathfrak{X}\beta_2 - \mathfrak{Y}\alpha_2) + (\mathfrak{X}\gamma_3 - \mathfrak{Z}\alpha_3), \\ \text{d. i. } \dfrac{\varDelta\mathfrak{X}}{dt} = \dfrac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t} + (\mathfrak{X}_1 + \mathfrak{Y}_2 + \mathfrak{Z}_3)\alpha + (\mathfrak{X}\beta - \mathfrak{Y}\alpha)_2 + (\mathfrak{X}\gamma - \mathfrak{Z}\alpha)_3; \end{cases}$$

leicht erkennt man nämlich, dass diese drei Ausdrücke unter einander identisch sind.

Desgleichen hat z. B. $\varDelta\mathfrak{L}$ [vgl. (19.)] folgende Bedeutung:

$$(25.)\qquad \frac{\varDelta\mathfrak{L}}{dt} = \frac{d\mathfrak{L}}{dt} + \mathfrak{L}(\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3) - (\mathfrak{L}\alpha_1 + \mathfrak{M}\alpha_2 + \mathfrak{N}\alpha_3);$$

wofür man mit Rücksicht auf (L_1.) Seite 226 auch schreiben kann:

$$(26.)\begin{cases} \dfrac{\varDelta\mathfrak{L}}{dt} = \dfrac{\partial\mathfrak{L}}{\partial t} + (\mathfrak{L}_1\alpha + \mathfrak{L}_2\beta + \mathfrak{L}_3\gamma) + \mathfrak{L}(\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3) - (\mathfrak{L}\alpha_1 + \mathfrak{M}\alpha_2 + \mathfrak{N}\alpha_3), \\ \text{d. i. } \dfrac{\varDelta\mathfrak{L}}{dt} = \dfrac{\partial\mathfrak{L}}{\partial t} + (\mathfrak{L}_1\alpha + \mathfrak{L}_2\beta + \mathfrak{L}_3\gamma) + (\mathfrak{L}\beta_2 - \mathfrak{M}\alpha_2) + (\mathfrak{L}\gamma_3 - \mathfrak{N}\alpha_3), \\ \text{d. i. } \dfrac{\varDelta\mathfrak{L}}{dt} = \dfrac{\partial\mathfrak{L}}{\partial t} + (\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{N}_3)\alpha + (\mathfrak{L}\beta - \mathfrak{M}\alpha)_2 + (\mathfrak{L}\gamma - \mathfrak{N}\alpha)_3. \end{cases}$$

Wie man aus (23.), (24.) und (25.) (26.) die analogen Formeln für $\varDelta\mathfrak{Y}$, $\varDelta\mathfrak{Z}$, und $\varDelta\mathfrak{M}$, $\varDelta\mathfrak{N}$, durch cyklische Aufeinanderfolge der Buchstaben, abzuleiten vermag, bedarf keiner weiteren Auseinandersetzung.

Von Wichtigkeit ist es, aus den Untersuchungen des gegenwärtigen Paragraphs noch zwei Formeln hervorzuheben, die für die weiter folgenden Untersuchungen recht nützlich sein werden. Die eine derselben ergiebt sich aus (1.) und (8.) durch Elimination von q; sie lautet:

$$d[(\mathfrak{X}a + \mathfrak{Y}b + \mathfrak{Z}c)\,Do] = (\varDelta\mathfrak{X})a\,Do + (\varDelta\mathfrak{Y})b\,Do + (\varDelta\mathfrak{Z})c\,Do,$$

oder, falls man auf beiden Seiten noch durch das betrachtete Zeitelement dt dividirt:

$$(27.)\qquad \frac{d[(\mathfrak{X}a + \mathfrak{Y}b + \mathfrak{Z}c)\,Do]}{dt} = \left(\frac{\varDelta\mathfrak{X}}{dt}a + \frac{\varDelta\mathfrak{Y}}{dt}b + \frac{\varDelta\mathfrak{Z}}{dt}c\right)Do.$$

Die andere ergiebt sich in analoger Art durch Elimination von Q aus (11.) und (18.); sie lautet:

$$(28.)\qquad \frac{d[(\mathfrak{L}a + \mathfrak{M}b + \mathfrak{N}c)\,Do]}{dt} = \left(\frac{\varDelta\mathfrak{L}}{dt}a + \frac{\varDelta\mathfrak{M}}{dt}b + \frac{\varDelta\mathfrak{N}}{dt}c\right)Do.$$

Sollen die elektrischen und magnetischen Zustände ($\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$) und ($\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$) mittelst der HERTZ'schen Gleichungen (21.), (22.) wirklich berechnet werden, so müssen zu diesen Gleichungen noch hinzugenommen werden die Formeln (F.) Seite 221:

Die elektrischen Strömungsgleichungen.

$$(29.)\qquad u = \lambda\left(\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} + X'\right),\quad v = \lambda\left(\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} + Y'\right),\quad w = \lambda\left(\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} + Z'\right).$$

Denkt man sich nämlich die substantielle Bewegung bekannt, mithin α, β, γ als gegebene Functionen von x, y, z, t, so wird man im Allgemeinen aus den *neun* Gleichungen (21.), (22.) und (29.) die *neun* Componenten $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, u, v, w$ zu berechnen im Stande sein, d. h. sie zu bestimmen im Stande sein als Functionen von x, y, z, t.

Der in (29.) enthaltene Factor λ repräsentirt die sogenannte elektrische Leitungsfähigkeit. Diese Leitungsfähigkeit λ denken wir uns in den *vollkommenen Conductoren*, d. i. in den Metallen *sehr gross*. Andererseits aber wird sie in den *vollkommenen Isolatoren* als *Null* anzusehen sein; und zufolge der Gleichungen (29.) werden daher in den vollkommenen Isolatoren auch die elektrischen Strömungscomponenten

(30.) u, v, w stets gleich *Null*

sein. Als vollkommene Isolatoren werden wir im Folgenden z. B. *Luft* und *Schellack* ansehen; was allerdings nur approximativ richtig ist. In Wirklichkeit sind ja vollkommene Isolatoren überhaupt nicht vorhanden. Vielmehr ist der Begriff des vollkommenen Isolators nur eine mathematische Abstraction, — ebenso wie etwa der Begriff eines vollkommen starren Körpers.

§ 4.

Sind die Hertz'schen Differentialgleichungen anwendbar auf jedes beliebige positive rechtwinklige Axensystem?

Oder mit anderen Worten: Werden die Hertz'schen Differentialgleichungen [Seite 236 (21.), (22.)] beim Uebergang von einem positiven rechtwinkligen Axensystem zu einem andern solchen System, ihrer äusseren Gestalt nach, *ungeändert, invariant* bleiben? Zur Beantwortung dieser Frage sagt Hertz (Ges. Werke, Bd. 2, Seite 261, 262) ungefähr Folgendes:

I. Unsere Ableitung der Differentialgleichungen [d. i. die hier gegebene Ableitung der Gleichungen Seite 236 (21.), (22.)] erforderte *nicht*, dass das benutzte Coordinatensystem absolut im Raume ruhte.

II. Wir können daher diese Gleichungen von dem *etwa zuerst* gewählten Coordinatensystem, ohne Aenderung der Form, auf jedes beliebige *andere*, im Raume beliebig gewählte Coordinatensystem dadurch transformiren, dass wir unter α, β, γ die relativen Geschwindigkeitscomponenten in Bezug auf das neugewählte Coordinatensystem verstehen, und ebenso die von der Richtung abhängenden Constanten[1]) in jedem Augenblick auf dieses beziehen.

III. Daraus geht hervor, dass die absolute Bewegung eines starren Körpersystems keinen Einfluss auf irgend welche inneren elektrodynamischen Vorgänge in demselben habe, sofern nur wirklich *alle* in Betracht kommenden Körper, also auch der Aether an der Bewegung theilnehmen.

---

1) Zu diesen von der Richtung abhängenden Constanten oder Coefficienten gehören die X', Y', Z', und, falls die Substanz krystallinisch sein sollte, auch die λ, ε, μ.

IV. Es geht ferner aus dieser Ueberlegung hervor, dass wenn sich auch nur ein einzelner Theil eines bewegten Systems bewegt wie ein starrer Körper, dass dann in diesem Theile sich die Vorgänge gerade so abspielen, als wie in ruhenden Körpern. Hat also die vorhandene Bewegung *dennoch* einen Einfluss auf diesen Theil, so kann doch dieser Einfluss nur entstanden sein in denjenigen Gebieten des Systems, in welchen Verzerrungen der Elemente stattfinden, und muss sich von dort secundär fortgepflanzt haben zu denjenigen Gebieten, welche sich nach Art starrer Körper bewegen.

V. Wird z. B. eine feste Metallmasse im magnetischen Felde plötzlich verschoben, so hat nach unsern Differentialgleichungen diese Bewegung *unmittelbar* (d. h. *gleichzeitig*) nur allein auf die *Oberfläche* und die *Umgebung* der Metallmasse einen Einfluss, und ruft hier elektrische Kräfte hervor, welche sich dann *secundär* (d. h. *etwas später*) in das Innere der Metallmasse fortpflanzen und hier Störungeu erzeugen.

VI. Die aufgestellten Differentialgleichungen sind nach Form und Absicht *verwandt* mit denjenigen, durch welche von Helmholtz im 78. Bande des Borchardt'schen Journals[1]) das Verhalten der elektrischen und magnetischen Kräfte in bewegten Körpern darstellte. U. s. w.

Diese Hertz'schen Worte geben uns ein schönes anschauliches und weit sich ausdehnendes Gemälde; nur fehlen dem Gemälde die scharfen Umrisse. Wir erkennen in dem Gemälde mehr Dasjenige, was Hertz abzuleiten und zu begründen *beabsichtigt*, als die Ableitung oder Begründung selber. Immerhin dürften die Hertz'schen Aeusserungen in I. und II. einen *wirklichen Beweis* für die Invarianz der in Rede stehenden Differentialgleichungen enthalten.

Um näher hierauf einzugehen, mag es mir gestattet sein, zuvörderst an die Fourier'sche Differentialgleichung der Wärmebewegung [vgl. (Φ.) Seite 222] zu erinnern. Niemand wird bezweifeln, dass diese Fourier'sche Gleichung ganz allgemein gilt für ein in beliebiger Bewegung begriffenes rechtwinkliges Axensystem (x, y, z), falls nur die einzelnen Theilchen der betrachteten Substanz in Bezug auf dieses Axensystem fortdauernd ein und dieselben Coordinaten behalten.

Analoges dürfte nun in der Elektrodynamik anzunehmen sein in Betreff der Maxwell'*schen Gleichungen* [Seite 222 (G.), (H.)]. Nach dieser Annahme gelten alsdann die Maxwell'schen Gleichungen für ein in beliebiger Bewegung begriffenes positives rechtwinkliges Axensystem (x, y, z), falls nur die betrachtete Substanz in Bezug auf dieses Axensystem fortdauernd in relativer Ruhe sich befindet.

1) Helmholtz' Ges. Abhandlungen Bd. I, Seite 745.

Wenn wir jetzt die Vorstellung des in beliebiger Bewegung begriffenen Axensystems (x, y, z) beibehalten, hingegen die Substanz aus ihrer relativen Ruhe in irgend welche relative Bewegung in Bezug auf jenes Axensystem übergehen lassen, so können wir nun auf diesen Uebergang die Betrachtungen des vorigen Paragraphs (mit sammt der dortigen Hypothesen) Schritt für Schritt von Neuem zur Anwendung bringen, und gelangen in solcher Art ohne Weiteres zu den Hertz'*schen Differentialgleichungen* [Seite 236 (21.), (22.)], und zwar mit Bezug auf jenes gegenwärtig acceptirte *in beliebiger Bewegung begriffene* Axensystem (x, y, z).

Wir erkennen somit, dass die Hertz'schen Differentialgleichungen, und zwar in genau derselben Form, in welcher sie vorhin [Seite 236 (21.), (22.)] aufgestellt sind, ganz allgemein gelten für jedes beliebige positive rechtwinklige Axensystem (x, y, z), mag nun dasselbe in absoluter Ruhe, oder aber in irgend welcher Bewegung begriffen sein. Mit anderen Worten: *Wir gelangen zu der Einsicht, dass die* Hertz'*schen Differentialgleichungen, beim Uebergange von einem Axensystem zum andern, ihrer Form nach invariant sind.*[1])

Immerhin dürfte es nicht ohne Interesse sein, diese Invarianz *direct* nachzuweisen. Und das soll in den beiden folgenden Paragraphen geschehen.

§ 5.

Allgemeine Bemerkungen über den Uebergang von einem positiven rechtwinkligen Axensystem zu einem anderen solchen Axensystem.

Zwei positive rechtwinklige Axensysteme (x, y, z) und $(1, 2, 3)$ mögen in ganz beliebigen Bewegungen begriffen sein; sodass ihre relative Lage zu einander im Allgemeinen von Augenblick zu

1) Hertz hat also in seinen Behauptungen I. II. (Seite 238) *vollkommen Recht.* Und wenn ich ihn in dieser Beziehung in meinem Werke über die elektrischen Kräfte [zweiter Theil, Leipzig, 1898, daselbst Seite XXVIII und Seite 402] eines Irrthums beschuldigte, so liegt der Irrthum auf *meiner* Seite. Zu meiner Entschuldigung möchte ich anführen, dass meine Aufmerksamkeit bei der Ausarbeitung jenes Werkes nach gar zu vielen verschiedenen Richtungen hin gleichzeitig in Anspruch genommen war. Uebrigens habe ich in jenem Werke (Seite 401—403) nur allein die *Resultate* meiner betreffenden Untersuchungen kurz angegeben, ohne die Untersuchungen selber Schritt für Schritt darzulegen; sonst würde jener Irrthum wohl vermieden worden sein.

Augenblick sich ändern wird. Bezeichnen wir die Coordinaten irgend eines Punctes im einen und im andern System resp. mit x, y, z und x_1, x_2, x_3, so werden diese beiderlei Coordinaten durch Gleichungen von folgender Gestalt mit einander verbunden sein:

$$(1.)\qquad \begin{cases} x = A_0 + A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3, \\ y = B_0 + B_1 x_1 + B_2 x_2 + B_3 x_3, \\ z = C_0 + C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3, \end{cases}$$

wo z. B. A_1, B_1, C_1, die Richtungscosinus der Axe 1 in Bezug auf die Axen x, y, z vorstellen; u. s. w. Da die relative Lage der beiden Axensysteme zu einander von Augenblick zu Augenblick sich ändert, so sind $A_0, A_1, A_2, A_3, B_0, B_1, B_2, B_3$ und C_0, C_1, C_2, C_3 Functionen der Zeit.

Als Appendices dieser Functionen mögen gewisse neue Functionen ξ, η, ζ und $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ eingeführt werden mittelst folgender Formeln:

$$(2.)\quad \begin{cases} \xi = B_1 \frac{dC_1}{dt} + B_2 \frac{dC_2}{dt} + B_3 \frac{dC_3}{dt}, \\ \eta = C_1 \frac{dA_1}{dt} + C_2 \frac{dA_2}{dt} + C_3 \frac{dA_3}{dt}, \\ \zeta = A_1 \frac{dB_1}{dt} + A_2 \frac{dB_2}{dt} + A_3 \frac{dB_3}{dt}, \end{cases} \qquad (3.)\quad \begin{cases} \omega_1 = A_3 \frac{dA_2}{dt} + B_3 \frac{dB_2}{dt} + C_3 \frac{dC_2}{dt}, \\ \omega_2 = A_1 \frac{dA_3}{dt} + B_1 \frac{dB_3}{dt} + C_1 \frac{dC_3}{dt}, \\ \omega_3 = A_2 \frac{dA_1}{dt} + B_2 \frac{dB_1}{dt} + C_2 \frac{dC_1}{dt}. \end{cases}$$

Zwischen den Functionen ξ, η, ζ und $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ werden alsdann folgende einfache Relationen stattfinden:

$$(4.)\qquad \begin{cases} \xi = A_1 \omega_1 + A_2 \omega_2 + A_3 \omega_3, \\ \eta = B_1 \omega_1 + B_2 \omega_2 + B_3 \omega_3, \\ \zeta = C_1 \omega_1 + C_2 \omega_2 + C_3 \omega_3, \end{cases}$$

woraus z. B. folgt:

$$(4a.)\qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2.$$

Denkt man sich also im System (1, 2, 3) eine gerade Linie construirt mit den Componenten $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, so wird diese Linie im System (x, y, z) die Componenten ξ, η, ζ besitzen.

Beweis der Relationen (4.). — Die Axensysteme (x, y, z) und (1, 2, 3) sind *gleichartig*, nämlich beide positiv; folglich ist die Determinante

$$(\alpha.)\qquad \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = +1;$$

und hieraus ergeben sich leicht folgende Formeln:

$$(\beta.)\begin{cases}A_1 = B_2C_3 - B_3C_2, \\ B_1 = C_2A_3 - C_3A_2, \\ C_1 = A_2B_3 - A_3B_2,\end{cases} \quad \begin{cases}A_2 = B_3C_1 - B_1C_3, \\ B_2 = C_3A_1 - C_1A_3, \\ C_2 = A_3B_1 - A_1B_3,\end{cases} \quad \begin{cases}A_3 = B_1C_2 - B_2C_1, \\ B_3 = C_1A_2 - C_2A_1, \\ C_3 = A_1B_2 - A_2B_1.\end{cases}$$

Offenbar ist $A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 = 1$, mithin $A_1dA_1 + B_1dB_1 + C_1dC_1 = 0$. Demgemäss gelangt man, unter Zuziehung der Formeln (3.), zu folgenden Gleichungen:

$$(\gamma.)\quad\begin{cases}A_1dA_1 + B_1dB_1 + C_1dC_1 = 0, \\ A_2dA_1 + B_2dB_1 + C_2dC_1 = +\,\omega_3dt, \\ A_3dA_1 + B_3dB_1 + C_3dC_1 = -\,\omega_2dt.\end{cases}$$

Multiplicirt man diese drei Gleichungen mit A_1, A_2, A_3, oder mit B_1, B_2, B_3, oder endlich mit C_1, C_2, C_3, und addirt man jedesmal, so ergeben sich folgende Formeln:

$$(\delta.)\quad\begin{cases}dA_1 = (A_2\omega_3 - A_3\omega_2)\,dt, \\ dB_1 = (B_2\omega_3 - B_3\omega_2)\,dt, \\ dC_1 = (C_2\omega_3 - C_3\omega_2)\,dt.\end{cases}$$

Ferner ist $A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = 1$, mithin $A_1dA_1 + A_2dA_2 + A_3dA_3 = 0$; sodass man also, unter Zuziehung der Formeln (2.), die Gleichungen erhält:

$$(\varepsilon.)\quad\begin{cases}A_1dA_1 + A_2dA_2 + A_3dA_3 = 0, \\ B_1dA_1 + B_2dA_2 + B_3dA_3 = -\,\zeta dt, \\ C_1dA_1 + C_2dA_2 + C_3dA_3 = +\,\eta dt.\end{cases}$$

Hieraus folgt durch Multiplication mit A_1, B_1, C_1 und Addition:

$$(\zeta.)\quad\begin{cases}dA_1 = (C_1\eta - B_1\zeta)dt, \text{ und in ähnlicher Art:} \\ dA_2 = (C_2\eta - B_2\zeta)dt, \\ dA_3 = (C_3\eta - B_3\zeta)dt.\end{cases}$$

Ebenso wie hier dA_1, dA_2, dA_3 berechnet sind, ebenso werden sich offenbar in analoger Art auch dB_1, dB_2, dB_3 und dC_1, dC_2, dC_3 ausdrücken lassen. Stellt man von all' diesen neun Ausdrücken nur die für dA_1, dB_1, dC_1 zusammen, so hat man folgende Formeln:

$$(\eta.)\quad\begin{cases}dA_1 = (C_1\eta - B_1\zeta)dt, \\ dB_1 = (A_1\zeta - C_1\xi)dt, \\ dC_1 = (B_1\xi - A_1\eta)dt.\end{cases}$$

Setzt man nun die in (δ.) und (η.) für dA_1, dB_1, dC_1 erhaltenen Ausdrücke einander gleich, so erhält man:

$$\begin{aligned}A_2\omega_3 - A_3\omega_2 &= C_1\eta - B_1\zeta, \\ B_2\omega_3 - B_3\omega_2 &= A_1\zeta - C_1\xi, \\ C_2\omega_3 - C_3\omega_2 &= B_1\xi - A_1\eta.\end{aligned}$$

Hieraus folgt durch Multiplication mit A_2, B_2, C_2 und Addition:

$$(\vartheta.)\quad \omega_3 = (B_1C_2 - B_2C_1)\xi + (C_1A_2 - C_2A_1)\eta + (A_1B_2 - A_2B_1)\zeta,$$

oder mit Rücksicht auf (β.):

$$(\iota.)\quad \omega_3 = A_3\xi + B_3\eta + C_3\zeta.$$

Analoge Ausdrücke werden offenbar für ω_1 und ω_2 sich ergeben; sodass man also zu folgenden Formeln gelangt:

$$(\varkappa.)\qquad \begin{cases} \omega_1 = A_1\xi + B_1\eta + C_1\zeta, \\ \omega_2 = A_2\xi + B_2\eta + C_2\zeta, \\ \omega_3 = A_3\xi + B_3\eta + C_3\zeta; \end{cases}$$

hieraus aber ergeben sich, durch Auflösung nach ξ, η, ζ, sofort die Relationen (4.) — *Q. e. d.*

Die relative Bewegung der beiden Systeme (x, y, z) und $(1, 2, 3)$ gegen einander wird im Allgemeinen für jedwedes Zeitelement als eine unendlich kleine *Schraubenbewegung* anzusehen sein. Einfacher und bequemer ist es, jenen Systemen zwei andere mit ihnen beständig parallelbleibende Axensysteme (X, Y, Z) und (I, II, III) zu adjungiren, die beide *ein und denselben* Anfangspunct O besitzen. Die relative Bewegung dieser beiden starren Systeme (X, Y, Z) und (I, II, III) gegen einander wird alsdann während eines unendlich kleinen Zeitelements in einer unendlich kleinen *Rotation* bestehen um irgend welche durch O gehende Axe.

Denkt man sich nämlich im System (X, Y, Z) eine vom Anfangspunct O ausgehende Linie OJ construirt mit den Componenten ξ, η, ζ, und im System (I, II, III) eine *andere*, ebenfalls von O ausgehende Linie OJ mit den Componenten $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ construirt, *so werden diese beiden Linien OJ, OJ* [sie sind nach (4.), (4a.) beide von gleicher Länge] *während des Zeitelementes dt miteinander coincidiren*; sodass also während dieser Zeit die relative Bewegung der beiden starren Systeme (X, Y, Z) und (I, II, III) gegen einander in einer unendlich kleinen Drehung des einen gegen das andre um diese Linie OJ besteht. Dabei wird übrigens im Allgemeinen diese Drehungsaxe OJ während der Zeit dt in irgend welcher räumlichen Bewegung sich befinden. Man denke etwa an zwei starre Körper, die beide um ein und dieselbe Stahlnadel mit verschiedenen Geschwindigkeiten rotiren; während dieser Rotationen kann jene Stahlnadel ihre Lage und ihre Richtung im Raume ändern.

Man wird die Linie OJ zu charakterisiren haben als die *gegenseitige Drehungsaxe* der beiden starren Systeme (X, Y, Z) und (I, II, III) während der Zeit dt. Bezeichnet man ihre Länge mit ω:

$$(4\text{b.})\qquad \omega = OJ,$$

so wird bekanntlich ω die *Winkelgeschwindigkeit* vorstellen, mit welcher das eine System gegen das andere während der Zeit dt um jene Linie sich dreht.

Endlich wird aus der *Richtung* der Linie $\omega = OJ$ auch der *Sinn* zu erkennen sein, in welcher die in Rede stehende Drehung stattfindet. Es sind nämlich die starren Systeme (X, Y, Z) und (I, II, III) beide positiv; auch haben die Componenten ξ, η, ζ und $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ der Linie $\omega = OJ$ die in (2.), (3.) angegebenen Werthe; und hieraus folgt, dass die Drehung des Systems (I, II, III) gegen das System (X, Y, Z) *positiv* ist in Bezug auf die Richtung der Linie $\omega = OJ$; sodass also umgekehrt die Drehung des Systems (X, Y, Z) gegen das System (I, II, III) in Bezug auf jene Richtung $\omega = OJ$ *negativ* sein wird. Was unter einer positiven oder negativen Rotation zu verstehen sei, ist bereits früher gesagt worden. [Vgl. Seite 223.]

Es sind das Alles bekannte Dinge. Trotzdem aber mag es mir gestattet sein auf dieselben hier näher einzugehen, theils der Vollständigkeit willen, theils aber auch weil es sich hier um Unterscheidungen (von positiv und negativ) handelt, bei denen man sehr leicht sich versehen kann. Uebrigens werde ich die betreffenden Beweise in einer Form geben, die von der althergebrachten wesentlich abweicht.

Beweis der über die Linie $\omega = OJ$ gemachten Behauptungen. — Die Linie $\omega = OJ$ hat die Componenten

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3 \text{ und } \xi, \eta, \zeta.$$

Aus (δ.) Seite 242 ergiebt sich leicht: $\omega_1 dA_1 + \omega_2 dA_2 + \omega_3 dA_3 = 0$, oder etwas anders geschrieben:

$$\omega_1 A_1 + \omega_2 A_2 + \omega_3 A_3 = \omega_1(A_1 + dA_1) + \omega_2(A_2 + dA_2) + \omega_3(A_3 + dA_3).$$

D. h. die Linie ω ist zu Anfang und zu Ende des Zeitelements dt gegen die Axe X unter ein und demselben Winkel geneigt. Analoges wird in analoger Weise offenbar für die Axen Y und Z sich ergeben. Demgemäss bleibt also die relative Lage der Linie ω gegen die Axen X, Y, Z während der Zeit dt *ein und dieselbe.*

Ferner ist nach (η.) Seite 242: $\xi dA_1 + \eta dB_1 + \zeta dC_1 = 0$, mithin auch:

$$\xi A_1 + \eta B_1 + \zeta C_1 = \xi(A_1 + dA_1) + \eta(B_1 + dB_1) + \zeta(C_1 + dC_1).$$

D. h. die Linie ω ist gegen die Axe I zu Anfang und zu Ende der Zeit dt unter ein und demselben Winkel geneigt. Analoges gilt offenbar von II und III. Folglich bleibt die relative Lage der Linie ω gegen die Axen I, II, III während der Zeit dt völlig *ungeändert.*

Da nun die relative Lage der Linie ω während der Zeit dt sowohl im Systeme (X, Y, Z), wie auch im Systeme (I, II, III) ungeändert bleibt, so

folgt hieraus, *dass diese Linie ω diejenige Axe repräsentirt, um welche die beiden Systeme während der Zeit dt sich gegen einander drehen.*

Zweitens. — Um den gemeinschaftlichen Anfangspunct O der beiden Axensysteme (X, Y, Z) und (I, II, III) mag eine Kugelfläche vom Radius *Eins* beschrieben sein; diese Kugelfläche mag mit dem Systeme (I, II, III) *starr verbunden* sein; sodass z. B. die Puncte, in denen dieselbe von den Axen I, II, III und von der Linie $\omega = OJ$ getroffen wird, während der Zeit dt *ein und dieselben* bleiben. Der letzte dieser vier Puncte mag kurzweg mit J bezeichnet werden. Ferner mögen diejenigen Puncte, in denen diese Kugelfläche von den Axen X, Y, Z in den Augenblicken t und $t + dt$ getroffen wird, resp. mit X, Y, Z und X', Y', Z' bezeichnet werden.

Wie schon bewiesen, behält die Axe OJ gegen die Axen X, Y, Z während der Zeit dt ein und dieselbe relative Lage. Demgemäss wird, was die auf der Kugelfläche von J aus nach X, Y, Z und nach X', Y', Z' gehenden grössten Kreisbogen anbelangt, offenbar

$$(JX) = (JX'), \quad (JY) = (JY'), \quad (JZ) = (JZ')$$

sein. Setzt man nun in dem gleichschenkligen sphärischen Dreieck JXX' die Sinus der Seiten proportional den Sinus der gegenüberliegenden Winkel, so erhält man sofort:

$$\frac{\sin(JX)}{\sin(90^\circ)} = \frac{\sin(XX')}{\sin(d\varphi)},$$

wo $d\varphi$ den der Seite (XX') gegenüberliegenden Winkel, d. i. den der Zeit dt entsprechenden Drehungswinkel vorstellt. Die letzte Formel ist offenbar auch so darstellbar:

$$d\varphi \cdot \sin(JX) = (XX'),$$

oder auch so:

$$(d\varphi)^2 \sin^2(JX) = (XX')^2 = (dA_1)^2 + (dA_2)^2 + (dA_3)^2;$$

denn die Puncte X und X' haben im Systeme (I, II, III) die Coordinaten A_1, A_2, A_3 und $A_1 + dA_1$, $A_2 + dA_2$, $A_3 + dA_3$; und es ist daher: $(XX')^2 = (dA_1)^2 + (dA_2)^2 + (dA_3)^2$.

Noch einer weitern Abänderung ist die letzte Formel fähig. Beachtet man nämlich die aus den Gleichungen (ε.) Seite 242 durch Quadraterhebung und Addition entspringende Relation:

$$(dA_1)^2 + (dA_2)^2 + (dA_3)^2 = (\eta^2 + \zeta^2)(dt)^2,$$

so erkennt man sofort, dass jene Formel auch so geschrieben werden kann:

$(d\varphi)^2[1 - \cos^2(JX)] = [\eta^2 + \zeta^2](dt)^2$. Ebenso ergiebt sich:

$$(d\varphi)^2[1 - \cos^2(JY)] = [\zeta^2 + \xi^2](dt)^2,$$

$$(d\varphi)^2[1 - \cos^2(JZ)] = [\xi^2 + \eta^2](dt)^2.$$

Aus diesen drei Gleichungen folgt durch Addition:

$$(d\varphi)^2[3 - 1] = 2[\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2](dt)^2$$

d. i.

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2.$$

Nach (4a.) Seite 241 ist aber $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2$. Demgemäss ergiebt sich für das *Quadrat der Winkelgeschwindigkeit* die Formel:

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2.$$

Drittens. — Ob während der betrachteten Zeit dt die Rotation des Systems (X, Y, Z) gegen das System (I, II, III) in Bezug auf die Richtung OJ der Rotationsaxe $\omega = OJ$ *positiv* oder *negativ* ist, — das wird sich offenbar leicht ablesen lassen aus dem schon construirten schmalen sphärischen Dreieck JXX', oder auch aus den diesem Dreieck entsprechenden drei Strahlen OJ, OX, OX'. Es wird nämlich *Ersteres* oder *Letzteres* der Fall sein, jenachdem diese drei Strahlen OJ, OX, OX' ein *positives* oder ein *negatives* Strahlensystem bilden, d. i. jenachdem die aus den Richtungscosinus dieser drei Strahlen zusammengesetzte Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \omega_1 & A_1 & A_1 + dA_1 \\ \omega_2 & A_2 & A_2 + dA_2 \\ \omega_3 & A_3 & A_3 + dA_3 \end{vmatrix}$$

einen *positiven* oder *negativen* Werth hat.

Nun ist offenbar:

$$\Delta = \begin{vmatrix} dA_1 & \omega_1 & A_1 \\ dA_2 & \omega_2 & A_2 \\ dA_3 & \omega_3 & A_3 \end{vmatrix},$$

d. i.

$$\Delta = dA_1(\omega_2 A_3 - \omega_3 A_2) + dA_2(\omega_3 A_1 - \omega_1 A_3) + dA_3(\omega_1 A_2 - \omega_2 A_1).$$

Nach (δ.) Seite 242 ist aber:

$$\omega_2 A_3 - \omega_3 A_2 = -\frac{dA_1}{dt}, \text{ etc.};$$

sodass man also erhält:

$$\Delta = -\frac{(dA_1)^2 + (dA_2)^2 + (dA_3)^2}{dt}.$$

Folglich wird Δ einen *negativen* Werth haben u. s. w.

Wir kehren zurück zu den ersten Formeln (1.) des gegenwärtigen Paragraphs:

$$(5.) \quad \begin{cases} x = A_0 + A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3, \\ y = B_0 + B_1 x_1 + B_2 x_2 + B_3 x_3, \\ z = C_0 + C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3. \end{cases}$$

Hier sind offenbar A_0, B_0, C_0 diejenigen Coordinaten, welche der *Anfangspunct* des Systems (1, 2, 3) besitzt in Bezug auf das System (x, y, z). Folglich sind z. B.

$$(6.) \quad \frac{dA_0}{dt}, \quad \frac{dB_0}{dt}, \quad \frac{dC_0}{dt}$$

die Componenten der relativen Geschwindigkeit jenes Anfangspunctes in Bezug auf das System (x, y, z). Die den Axen 1, 2, 3 entsprechenden Componenten dieser Geschwindigkeit (6.) mögen π_1, π_2, π_3 heissen. Also:

$$(7.)\qquad \begin{cases} \pi_1 = A_1 \dfrac{dA_0}{dt} + B_1 \dfrac{dB_0}{dt} + C_1 \dfrac{dC_0}{dt}, \\ \pi_2 = A_2 \dfrac{dA_0}{dt} + B_2 \dfrac{dB_0}{dt} + C_2 \dfrac{dC_0}{dt}, \\ \pi_3 = A_3 \dfrac{dA_0}{dt} + B_3 \dfrac{dB_0}{dt} + C_3 \dfrac{dC_0}{dt}. \end{cases}$$

Wir betrachten jetzt einen im Raume in beliebiger Bewegung begriffenen *substantiellen Punct*, und bezeichnen im Augenblicke t seine Coordinaten mit Bezug auf jene beiden Axensysteme mit x, y, z und x_1, x_2, x_3. Alsdann werden zwischen diesen Coordinaten die Gleichungen (5.) stattfinden. Und hieraus ergeben sich für die den beiden Axensystemen entsprechenden Geschwindigkeitscomponenten

$$(8.)\qquad \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt} \text{ und } \frac{dx_1}{dt},\ \frac{dx_2}{dt},\ \frac{dx_3}{dt}$$

des Punctes drei Formeln, deren erste folgendermassen lautet:

$$(9.)\ \frac{dx}{dt} = \frac{dA_0}{dt} + \left(A_1 \frac{dx_1}{dt} + A_2 \frac{dx_2}{dt} + A_3 \frac{dx_3}{dt}\right) + \left(x_1 \frac{dA_1}{dt} + x_2 \frac{dA_2}{dt} + x_3 \frac{dA_3}{dt}\right)$$

Nun ist aber [vgl. (δ.) Seite 242]:

$$\frac{dA_1}{dt} = A_2\omega_3 - A_3\omega_2,$$
$$\frac{dA_2}{dt} = A_3\omega_1 - A_1\omega_3,$$
$$\frac{dA_3}{dt} = A_1\omega_2 - A_2\omega_1.$$

Substituirt man diese Werthe, sowie auch den aus (7.) entspringenden Werth:

$$\frac{dA_0}{dt} = A_1\pi_1 + A_2\pi_2 + A_3\pi_3$$

in der Formel (9.), so erhält man:

$$\frac{dx}{dt} = (A_1\pi_1 + A_2\pi_2 + A_3\pi_3) + \left(A_1 \frac{dx_1}{dt} + A_2 \frac{dx_2}{dt} + A_3 \frac{dx_3}{dt}\right)$$
$$+ A_1(\omega_2 x_3 - \omega_3 x_2) + A_2(\omega_3 x_1 - \omega_1 x_3) + A_3(\omega_1 x_2 - \omega_2 x_1).$$

Diese Gleichung aber verwandelt sich, unter Anwendung der Abbreviaturen:

$$(10.)\qquad \begin{cases} \mathsf{A}_1 = \dfrac{dx_1}{dt} + \pi_1 + (\omega_2 x_3 - \omega_3 x_2), \\ \mathsf{A}_2 = \dfrac{dx_2}{dt} + \pi_2 + (\omega_3 x_1 - x\omega_{13}), \\ \mathsf{A}_3 = \dfrac{dx_3}{dt} + \pi_3 + (\omega_1 x_2 - \omega_2 x_1), \end{cases}$$

in die erste Formel folgenden Systems:

$$(11.)\quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = A_1\mathsf{A}_1 + A_2\mathsf{A}_2 + A_3\mathsf{A}_3, \\ \frac{dy}{dt} = B_1\mathsf{A}_1 + B_2\mathsf{A}_2 + B_3\mathsf{A}_3, \\ \frac{dz}{dt} = C_1\mathsf{A}_1 + C_2\mathsf{A}_2 + C_3\mathsf{A}_3, \end{cases}$$

dessen übrige Formeln in analoger Weise zu erhalten sind.

Wir wollen nun die Geschwindigkeitscomponenten (8.) des betrachteten *substantiellen Punctes* mit α, β, γ und α_1, α_2, α_3 bezeichnen:

$$(12.)\quad \begin{cases} \alpha = \frac{dx}{dt}, \\ \beta = \frac{dy}{dt}, \\ \gamma = \frac{dz}{dt}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_1 = \frac{dx_1}{dt}, \\ \alpha_2 = \frac{dx_2}{dt}, \\ \alpha_3 = \frac{dx_3}{dt}. \end{cases}$$

Alsdann lauten die Abbreviaturen (10.) folgendermassen:

$$(13.)\quad \begin{cases} \mathsf{A}_1 = \alpha_1 + \pi_1 + \omega_2 x_3 - \omega_3 x_2, \\ \mathsf{A}_2 = \alpha_2 + \pi_2 + \omega_3 x_1 - \omega_1 x_3, \\ \mathsf{A}_3 = \alpha_3 + \pi_3 + \omega_1 x_2 - \omega_2 x_1, \end{cases}$$

und gleichzeitig werden alsdann die Formeln (11.) folgende Gestalt erhalten:

$$(14.)\quad \begin{cases} \alpha = A_1\mathsf{A}_1 + A_2\mathsf{A}_2 + A_3\mathsf{A}_3, \\ \beta = B_1\mathsf{A}_1 + B_2\mathsf{A}_2 + B_3\mathsf{A}_3, \\ \gamma = C_1\mathsf{A}_1 + C_2\mathsf{A}_2 + C_3\mathsf{A}_3. \end{cases}$$

Die π_1, π_2, π_3 (7.) und ω_1, ω_2, ω_3 (3.) sind, ebenso wie die A_j, B_j, C_j, *Functionen der Zeit*; auch werden diese Functionen völlig bekannt sein, falls die relative Bewegung des Systems (1, 2, 3) in Bezug auf das System (x, y, z) in bestimmter Weise gegeben ist.

Nimmt man nun für den betrachteten *substantiellen Punct* der Reihe nach die einzelnen Puncte der den Weltraum erfüllenden Substanz, so wird man die Geschwindigkeitscomponenten α_1, α_2, α_3 eines solchen Punctes ansehen können als Functionen ihrer Coordinaten und der Zeit, nämlich als Functionen von x_1, x_2, x_3 und t: Substituirt man diese Werthe

$$(15.)\quad \alpha_1 = \varphi(x_1, x_2, x_3, t), \quad \alpha_2 = \psi(x_1, x_2, x_3, t), \quad \alpha_3 = \chi(x_1, x_2, x_3, t)$$

in (13.), (14.), so erhält man die Geschwindigkeitscomponenten α, β, γ ebenfalls ausgedrückt als Functionen von x_1, x_2, x_3, t:

$$(16.)\quad \alpha = \Phi(x_1, x_2, x_3, t), \quad \beta = \Psi(x_1, x_2, x_3, t), \quad \gamma = \mathrm{X}(x_1, x_2, x_3, t).$$

Und denkt man sich jetzt endlich hier für die Coordinaten x_1, x_2, x_3 ihre aus (5.) entspringenden Werthe substituirt, so erhält man drei Formeln:

$$(17.)\qquad \alpha = F(x, y, z, t), \quad \beta = G(x, y, z, t), \quad \gamma = H(x, y, z, t),$$

die für die betrachteten substantiellen Puncte mit Bezug auf das Axensystem (x, y, z) von genau derselben Bedeutung sind, wie die Formeln (15.) mit Bezug auf das System (1, 2, 3).

§ 6.

Transformation der Hertz'schen Differentialgleichungen von einem positiven rechtwinkligen Axensystem auf ein anderes solches Axensystem.

Zwischen den Coordinaten x, y, z und x_1, x_2, x_3 irgend eines Punctes in Bezug auf die Axensysteme (x, y, z) und (1, 2, 3) finden die Gleichungen statt:

$$(1.)\qquad \begin{cases} x = A_0 + A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3, \\ y = B_0 + B_1 x_1 + B_2 x_2 + B_3 x_3. \\ z = C_0 + C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3. \end{cases}$$

wo die A_j, B_j, C_j blosse Functionen der Zeit sind; *und es sollen nun die* Hertz'*schen Differentialgleichungen* [(21.), (22.) *Seite* 236] *vom System* (x, y, z) *auf das System* (1, 2, 3) *transformirt werden.*

Bezeichnet man die *elektrischen Strömungscomponenten* der den Weltraum erfüllenden Substanz in Bezug auf die Axensysteme (x, y, z) und (1, 2, 3) resp. mit u, v, w und u_1, u_2, u_3, so sind u, v, w als Functionen von x, y, z, t, und ebenso u_1, u_2, u_3 als Functionen von x_1, x_2, x_3, t anzusehen. Nun sind aber u, v, w und u_1, u_2, u_3 die Componenten ein und desselben Vectors; folglich finden zwischen ihnen die Relationen statt:

$$(2.)\qquad \begin{cases} u = A_1 u_1 + A_2 u_2 + A_3 u_3, \\ v = B_1 u_1 + B_2 u_2 + B_3 u_3, \\ w = C_1 u_1 + C_2 u_2 + C_3 u_3. \end{cases}$$

Desgleichen werden für die *elektrischen* und *magnetischen Zustandscomponenten* folgende Relationen zu notiren sein;

$$(3.)\quad \begin{cases} \mathfrak{X} = A_1 \mathfrak{X}_1 + A_2 \mathfrak{X}_2 + A_3 \mathfrak{X}_3, \\ \mathfrak{Y} = B_1 \mathfrak{X}_1 + B_2 \mathfrak{X}_2 + B_3 \mathfrak{X}_3, \\ \mathfrak{Z} = C_1 \mathfrak{X}_1 + C_2 \mathfrak{X}_2 + C_3 \mathfrak{X}_3, \end{cases} \qquad (4.)\quad \begin{cases} \mathfrak{L} = A_1 \mathfrak{L}_1 + A_2 \mathfrak{L}_2 + A_3 \mathfrak{L}_3, \\ \mathfrak{M} = B_1 \mathfrak{L}_1 + B_2 \mathfrak{L}_2 + B_3 \mathfrak{L}_3, \\ \mathfrak{N} = C_1 \mathfrak{L}_1 + C_2 \mathfrak{L}_2 + C_3 \mathfrak{L}_3, \end{cases}$$

wo alsdann $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \mathfrak{X}_3$ und $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}_3$ auf das neue System (1, 2, 3) in derselben Weise sich beziehen, in welcher $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ auf das ursprüngliche System (x, y, z) Bezug haben. Uebrigens mag vorübergehend, zur Abkürzung, gesetzt werden:

$$(5.)\quad \frac{\mathfrak{L}}{\mu} = L,\quad \frac{\mathfrak{M}}{\mu} = M,\quad \frac{\mathfrak{N}}{\mu} = N \text{ und } \frac{\mathfrak{L}_1}{\mu} = L_1,\quad \frac{\mathfrak{L}_2}{\mu} = L_2,\quad \frac{\mathfrak{L}_3}{\mu} = L_3,$$

wo μ den Magnetisirungscoefficienten vorstellen soll. Alsdann werden die Formeln (4.), falls man sie durch μ dividirt, folgende Gestalt annehmen:

$$(6.)\quad \begin{cases} L = A_1 L_1 + A_2 L_2 + A_3 L_3, \\ M = B_1 L_1 + B_2 L_2 + B_3 L_3, \\ N = C_1 L_1 + C_2 L_2 + C_3 L_3. \end{cases}$$

Sehr viel complicirter sind die Relationen, welche zwischen den *substantiellen Geschwindigkeitscomponenten* α, β, γ und $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ stattfinden. Dieselben lauten nämlich [vgl. Seite 248 (12.), (13.), (14.)] folgendermassen:

$$(7.)\quad \begin{cases} \alpha = A_1 \mathsf{A}_1 + A_2 \mathsf{A}_2 + A_3 \mathsf{A}_3, \\ \beta = B_1 \mathsf{A}_1 + B_2 \mathsf{A}_2 + B_3 \mathsf{A}_3, \\ \gamma = C_1 \mathsf{A}_1 + C_2 \mathsf{A}_2 + C_3 \mathsf{A}_3; \end{cases}$$

hier haben $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \mathsf{A}_3$ die Bedeutungen:

$$(8.)\quad \begin{cases} \mathsf{A}_1 = \alpha_1 + \pi_1 + (\omega_2 x_3 - \omega_3 x_2), \\ \mathsf{A}_2 = \alpha_2 + \pi_2 + (\omega_3 x_1 - \omega_1 x_3), \\ \mathsf{A}_3 = \alpha_3 + \pi_3 + (\omega_1 x_2 - \omega_2 x_1). \end{cases}$$

wo π_1, π_2, π_3 und $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ lediglich von den A_j, B_j, C_j abhängen, und, ebenso wie diese, *blosse Functionen der Zeit* sind.

Die zu transformirenden HERTZ'schen Differentialgleichungen lauten nun [nach Seite 236 (21.) und (24.)] folgendermassen:

$$(a.)\quad \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} + \left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x}\alpha + \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y}\beta + \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial z}\gamma\right) + \mathfrak{X}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right) - \\ - \left(\mathfrak{X}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \mathfrak{Y}\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \mathfrak{Z}\frac{\partial \alpha}{\partial z}\right) = \frac{1}{A}\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right) - 4\pi u,$$

$$(b.)\quad \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} + \left(\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial x}\alpha + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y}\beta + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial z}\gamma\right) + \mathfrak{Y}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right) - \\ - \left(\mathfrak{X}\frac{\partial \beta}{\partial x} + \mathfrak{Y}\frac{\partial \beta}{\partial y} + \mathfrak{Z}\frac{\partial \beta}{\partial z}\right) = \frac{1}{A}\left(\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) - 4\pi v,$$

$$(c.)\quad \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} + \left(\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial x}\alpha + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial y}\beta + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}\gamma\right) + \mathfrak{Z}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right) - \\ - \left(\mathfrak{X}\frac{\partial \gamma}{\partial x} + \mathfrak{Y}\frac{\partial \gamma}{\partial y} + \mathfrak{Z}\frac{\partial \gamma}{\partial z}\right) = \frac{1}{A}\left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right) - 4\pi w,$$

wo L, M, N die soeben, in (5.), eingeführten Abbreviaturen sind. Multiplicirt man diese Gleichungen (*a.*), (*b.*), (*c.*) der Reihe nach mit A_1, B_1, C_1, und addirt, so gelangt man, mit Rücksicht auf (3.) und (7.) und (2.), zu folgender Formel:

$$(9.)\quad \begin{cases} \left(A_1\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} + B_1\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} + C_1\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial x}\alpha + \frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial y}\beta + \frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial z}\gamma\right) \\ + \mathfrak{X}_1\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right) - \left(\mathfrak{X}\frac{\partial \mathsf{A}_1}{\partial x} + \mathfrak{Y}\frac{\partial \mathsf{A}_1}{\partial y} + \mathfrak{Z}\frac{\partial \mathsf{A}_1}{\partial z}\right) \end{cases} =$$

$$= \frac{1}{A}\left[A_1\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right) + B_1\left(\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) + C_1\left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right)\right] - 4\pi u_1.$$

Die hier auftretenden *fünf Trinome* bedürfen einer weiteren Umgestaltung. Wir beginnen, das *erste* Trinom einstweilen übergehend, mit dem *zweiten*, und notiren zu diesem Zwecke die aus (1.) und (7.) sich ergebenden Gleichungen:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial x} = \frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial x_1}A_1 + \frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial x_2}A_2 + \frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial x_3}A_3, \\ \frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial y} = \frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial x_1}B_1 + \frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial x_2}B_2 + \frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial x_3}B_3, \\ \frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial z} = \frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial x_1}C_1 + \frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial x_2}C_2 + \frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial x_3}C_3, \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = \mathsf{A}_1A_1 + \mathsf{A}_2A_2 + \mathsf{A}_3A_3, \\ \beta = \mathsf{A}_1B_1 + \mathsf{A}_2B_2 + \mathsf{A}_3B_3, \\ \gamma = \mathsf{A}_1C_1 + \mathsf{A}_2C_2 + \mathsf{A}_3C_3. \end{cases}$$

Multiplicirt man hier je zwei Formeln gleicher Zeile mit einander, und addirt man die so entstehenden drei Producte, so erhält man sofort:

$$(10.)\quad \frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial x}\alpha + \frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial y}\beta + \frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial z}\gamma = \frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial x_1}\mathsf{A}_1 + \frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial x_2}\mathsf{A}_2 + \frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial x_3}\mathsf{A}_3\,;$$

womit die Umgestaltung jenes zweiten Trinoms erreicht ist.

Was das *dritte Trinom* betrifft, so sind α, β, γ Functionen von x, y, z, t; andererseits aber die A_1, A_2, A_3 (ebenso wie α_1, α_2, α_3) als Functionen von x_1, x_2, x_3, t anzusehen [vgl. (8.)]. Wir notiren die aus (1.) und (7.) sich ergebenden Formeln:

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = A_1\frac{\partial \mathsf{A}_1}{\partial x} + A_2\frac{\partial \mathsf{A}_2}{\partial x} + A_3\frac{\partial \mathsf{A}_3}{\partial x}, \\ \frac{\partial \beta}{\partial y} = B_1\frac{\partial \mathsf{A}_1}{\partial y} + B_2\frac{\partial \mathsf{A}_2}{\partial y} + B_3\frac{\partial \mathsf{A}_3}{\partial y}, \\ \frac{\partial \gamma}{\partial z} = C_1\frac{\partial \mathsf{A}_1}{\partial z} + C_2\frac{\partial \mathsf{A}_2}{\partial z} + C_3\frac{\partial \mathsf{A}_3}{\partial z}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{\partial \mathsf{A}_1}{\partial x_1} = \frac{\partial \mathsf{A}_1}{\partial x}A_1 + \frac{\partial \mathsf{A}_1}{\partial y}B_1 + \frac{\partial \mathsf{A}_1}{\partial z}C_1, \\ \frac{\partial \mathsf{A}_2}{\partial x_2} = \frac{\partial \mathsf{A}_2}{\partial x}A_2 + \frac{\partial \mathsf{A}_2}{\partial y}B_2 + \frac{\partial \mathsf{A}_2}{\partial z}C_2, \\ \frac{\partial \mathsf{A}_3}{\partial x_3} = \frac{\partial \mathsf{A}_3}{\partial x}A_3 + \frac{\partial \mathsf{A}_3}{\partial y}B_3 + \frac{\partial \mathsf{A}_3}{\partial z}C_3. \end{cases}$$

Was die rechten Seiten dieser sechs Formeln betrifft, so ist in der *ersten* Gruppe die oberste Horizontalreihe identisch mit der vordersten Verticalreihe in der *zweiten* Gruppe u. s. w. Somit folgt sofort:

$$(11.)\quad \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} = \frac{\partial \mathsf{A}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathsf{A}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathsf{A}_3}{\partial x_3}.$$

Was nun ferner das *vierte Trinom* der Formel (9.) betrifft, so ergiebt sich aus (1.) und (3.):

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathsf{A}_1}{\partial x} = \frac{\partial \mathsf{A}_1}{\partial x_1} A_1 + \frac{\partial \mathsf{A}_1}{\partial x_2} A_2 + \frac{\partial \mathsf{A}_1}{\partial x_3} A_3, \\ \frac{\partial \mathsf{A}_1}{\partial y} = \frac{\partial \mathsf{A}_1}{\partial x_1} B_1 + \frac{\partial \mathsf{A}_1}{\partial x_2} B_2 + \frac{\partial \mathsf{A}_1}{\partial x_3} B_3, \\ \frac{\partial \mathsf{A}_1}{\partial z} = \frac{\partial \mathsf{A}_1}{\partial x_1} C_1 + \frac{\partial \mathsf{A}_1}{\partial x_2} C_2 + \frac{\partial \mathsf{A}_1}{\partial x_3} C_3, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 A_1 + \mathfrak{X}_2 A_2 + \mathfrak{X}_3 A_3, \\ \mathfrak{Y} = \mathfrak{X}_1 B_1 + \mathfrak{X}_2 B_2 + \mathfrak{X}_3 B_3, \\ \mathfrak{Z} = \mathfrak{X}_1 C_1 + \mathfrak{X}_2 C_2 + \mathfrak{X}_3 C_3. \end{cases}$$

Multiplicirt man hier je zwei Formeln gleicher Zeile mit einander, und addirt die so entstehenden drei Producte, so erhält man sofort:

$$(12.) \qquad \mathfrak{X} \frac{\partial \mathsf{A}_1}{\partial x} + \mathfrak{Y} \frac{\partial \mathsf{A}_1}{\partial y} + \mathfrak{Z} \frac{\partial \mathsf{A}_1}{\partial z} = \mathfrak{X}_1 \frac{\partial \mathsf{A}_1}{\partial x_1} + \mathfrak{X}_2 \frac{\partial \mathsf{A}_1}{\partial x_2} + \mathfrak{X}_3 \frac{\partial \mathsf{A}_1}{\partial x_3}.$$

Um auf das *fünfte oder letzte Trinom* der Formel (9.) näher einzugehen, notiren wir die aus (6.) entspringenden Gleichungen:

$$\frac{\partial M}{\partial z} = B_1 \frac{\partial L_1}{\partial z} + B_2 \frac{\partial L_2}{\partial z} + B_3 \frac{\partial L_3}{\partial z},$$
$$\frac{\partial N}{\partial y} = C_1 \frac{\partial L_1}{\partial y} + C_2 \frac{\partial L_2}{\partial y} + C_3 \frac{\partial L_3}{\partial y}.$$

Diese beiden Gleichungen können, mit Rücksicht auf (1.), auch so geschrieben werden:

$$\frac{\partial M}{\partial z} = B_1 \left(\frac{\partial L_1}{\partial x_1} C_1 + \frac{\partial L_1}{\partial x_2} C_2 + \frac{\partial L_1}{\partial x_3} C_3\right) + B_2 \left(\frac{\partial L_2}{\partial x_1} C_1 + \frac{\partial L_2}{\partial x_2} C_2 + \frac{\partial L_2}{\partial x_3} C_3\right)$$
$$+ B_3 \left(\frac{\partial L_3}{\partial x_1} C_1 + \frac{\partial L_3}{\partial x_2} C_2 + \frac{\partial L_3}{\partial x_3} C_3\right),$$
$$\frac{\partial N}{\partial y} = C_1 \left(\frac{\partial L_1}{\partial x_1} B_1 + \frac{\partial L_1}{\partial x_2} B_2 + \frac{\partial L_1}{\partial x_3} B_3\right) + C_2 \left(\frac{\partial L_2}{\partial x_1} B_1 + \frac{\partial L_2}{\partial x_2} B_2 + \frac{\partial L_2}{\partial x_3} B_3\right)$$
$$+ C_3 \left(\frac{\partial L_3}{\partial x_1} B_1 + \frac{\partial L_3}{\partial x_2} B_2 + \frac{\partial L_3}{\partial x_3} B_3\right).$$

Subtrahirt man diese beiden Gleichungen von einander, so werden sich rechter Hand zerstören: die Anfangsglieder der vorderen Trinome, ebenso die zweiten Glieder der mittleren Trinome, und ebenso auch die Endglieder der letzten Trinome; sodass man also, mit Rücksicht auf (β.) Seite 242 zu folgender Formel gelangt:

$$\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y} = \left(A_3 \frac{\partial L_1}{\partial x_2} - A_2 \frac{\partial L_1}{\partial x_3}\right) + \left(A_1 \frac{\partial L_2}{\partial x_3} - A_3 \frac{\partial L_2}{\partial x_1}\right) + \left(A_2 \frac{\partial L_3}{\partial x_1} - A_1 \frac{\partial L_3}{\partial x_2}\right).$$

Dies noch mit (—1) multiplicirt, ergibt sich die erste Formel folgenden Systems:

$$\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} = A_1 \left(\frac{\partial L_3}{\partial x_2} - \frac{\partial L_2}{\partial x_3}\right) + A_2 \left(\frac{\partial L_1}{\partial x_3} - \frac{\partial L_3}{\partial x_1}\right) + A_3 \left(\frac{\partial L_2}{\partial x_1} - \frac{\partial L_1}{\partial x_2}\right),$$
$$\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} = B_1 \left(\frac{\partial L_3}{\partial x_2} - \frac{\partial L_2}{\partial x_3}\right) + B_2 \left(\frac{\partial L_1}{\partial x_3} - \frac{\partial L_3}{\partial x_1}\right) + B_3 \left(\frac{\partial L_2}{\partial x_1} - \frac{\partial L_1}{\partial x_2}\right),$$
$$\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} = C_1 \left(\frac{\partial L_3}{\partial x_2} - \frac{\partial L_2}{\partial x_3}\right) + C_2 \left(\frac{\partial L_1}{\partial x_3} - \frac{\partial L_3}{\partial x_1}\right) + C_3 \left(\frac{\partial L_2}{\partial x_1} - \frac{\partial L_1}{\partial x_2}\right),$$

dessen übrige Formeln in analoger Art zu erhalten sind. — Multiplicirt man diese drei Formeln mit A_1, B_1, C_1, und addirt, so ergiebt sich:

$$(13.)\quad A_1\left(\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial z}\right)+B_1\left(\frac{\partial L}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)+C_1\left(\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial y}\right)=\frac{\partial L_3}{\partial x_2}-\frac{\partial L_2}{\partial x_3}.$$

Unsere Hauptformel (9.) *gewinnt nun, durch Substitution der Werthe* (10.), (11.), (12.), (13.), *folgende Gestalt:*

$$(14.)\quad \left\{\begin{aligned}&\left(A_1\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t}+B_1\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial t}+C_1\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial t}\right)+\left(\frac{\partial\mathfrak{X}_1}{\partial x_1}\mathsf{A}_1+\frac{\partial\mathfrak{X}_1}{\partial x_2}\mathsf{A}_2+\frac{\partial\mathfrak{X}_1}{\partial x_3}\mathsf{A}_3\right)\\&+\mathfrak{X}_1\left(\frac{\partial\mathsf{A}_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\mathsf{A}_2}{\partial x_2}+\frac{\partial\mathsf{A}_3}{\partial x_3}\right)-\left(\mathfrak{X}_1\frac{\partial\mathsf{A}_1}{\partial x_1}+\mathfrak{X}_2\frac{\partial\mathsf{A}_1}{\partial x_2}+\mathfrak{X}_3\frac{\partial\mathsf{A}_1}{\partial x_3}\right)\end{aligned}\right\}=$$
$$=\frac{1}{A}\left(\frac{\partial L_3}{\partial x_2}-\frac{\partial L_2}{\partial x_3}\right)-4\pi u_1.$$

Die Grössen A_1, A_2, A_3 haben die in (8.) angegebenen Bedeutungen; und zwar sind in jenen Ausdrücken (8.) die Grössen π_1, π_2, π_3 und ω_1, ω_2, ω_3 blosse Functionen der Zeit. Somit ergiebt sich:

$$\frac{\partial\mathsf{A}_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\mathsf{A}_2}{\partial x_2}+\frac{\partial\mathsf{A}_3}{\partial x_3}=\frac{\partial\alpha_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\alpha_2}{\partial x_2}+\frac{\partial\alpha_3}{\partial x_3},$$

und ferner:

$$\mathfrak{X}_1\frac{\partial\mathsf{A}_1}{\partial x_1}+\mathfrak{X}_2\frac{\partial\mathsf{A}_1}{\partial x_2}+\mathfrak{X}_3\frac{\partial\mathsf{A}_1}{\partial x_3}=\mathfrak{X}_1\frac{\partial\alpha_1}{\partial x_1}+\mathfrak{X}_2\left(\frac{\partial\alpha_1}{\partial x_2}-\omega_3\right)+\mathfrak{X}_3\left(\frac{\partial\alpha_1}{\partial x_3}+\omega_2\right).$$

Demgemäss kann die Formel (14.) auch so geschrieben werden:

$$(15.)\quad \left\{\begin{aligned}&\left(A_1\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t}+B_1\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial t}+C_1\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial t}\right)+\left(\frac{\partial\mathfrak{X}_1}{\partial x_1}\alpha_1+\frac{\partial\mathfrak{X}_1}{\partial x_2}\alpha_2+\frac{\partial\mathfrak{X}_1}{\partial x_3}\alpha_3\right)\\&+\mathfrak{X}_1\left(\frac{\partial\alpha_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\alpha_2}{\partial x_2}+\frac{\partial\alpha_3}{\partial x_3}\right)-\left(\mathfrak{X}_1\frac{\partial\alpha_1}{\partial x_1}+\mathfrak{X}_2\frac{\partial\alpha_1}{\partial x_2}+\mathfrak{X}_3\frac{\partial\alpha_1}{\partial x_3}\right)\\&+\frac{\partial\mathfrak{X}_1}{\partial x_1}(\pi_1+\omega_2x_3-\omega_3x_2)+\frac{\partial\mathfrak{X}_1}{\partial x_2}(\pi_2+\omega_3x_1-\omega_1x_3)+\frac{\partial\mathfrak{X}_1}{\partial x_3}(\pi_3+\omega_1x_2-\omega_2x_1)\\&+(\mathfrak{X}_2\omega_3-\mathfrak{X}_3\omega_2)\end{aligned}\right\}=$$
$$=\frac{1}{A}\left(\frac{\partial L_3}{\partial x_2}-\frac{\partial L_2}{\partial x_3}\right)-4\pi u_1.$$

Schliesslich ist nun noch das erste Trinom in dieser Formel (15.) *zu untersuchen.* Nach (3.) ist:

$$(16.)\quad \mathfrak{X}=A_1\mathfrak{X}_1+A_2\mathfrak{X}_2+A_3\mathfrak{X}_3=\sum_{j=1}^{3}A_j\mathfrak{X}_j.$$

Wir betrachten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ als Functionen der vier Argumente x, y, z, t [ebenso wie z. B. in (L.) Seite 226], und verstehen also z. B. unter

$$(\text{p.})\quad \frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t},\quad \frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial t},\quad \frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial t}$$

die Ableitungen nach jenem vierten Argumente t, wobei die drei andern Argumente x, y, z ungeändert zu lassen sind.

Desgleichen und hiermit parallel, denken wir uns die $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{X}_3$ als Functionen der vier Argumente x_1, x_2, x_3, t; sodass also z. B. unter

$$(\text{q.})\qquad \frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial t},\quad \frac{\partial \mathfrak{X}_2}{\partial t},\quad \frac{\partial \mathfrak{X}_3}{\partial t}$$

diejenigen Ableitungen zu verstehen sein werden, welche, bei constant erhaltenen Werthen der x_1, x_2, x_3, durch blosse Aenderung von t sich ergeben.

Wollen wir also die Formel (16.):

$$(17.)\qquad \mathfrak{X}(x,\ y,\ z,\ t) = \sum_{j=1}^{3} A_j \cdot \mathfrak{X}_j(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t)$$

benutzen zur Berechnung der ersten der drei Ableitungen (p.), so müssen wir auf ihrer rechten Seite die in den Functionen $\mathfrak{X}_j$ enthaltenen Coordinaten x_1, x_2, x_3 in solcher Weise sich ändern lassen, dass x, y, z *ungeändert* bleiben. Bezeichnen wir also die in solcher Weise entstehenden Ableitungen der x_1, x_2, x_3 mit

$$(18.)\qquad \frac{\delta x_1}{\delta t},\quad \frac{\delta x_2}{\delta t},\quad \frac{\delta x_3}{\delta t},$$

so erhalten wir aus (17.) die erste Formel folgenden Systems:

$$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} = \sum_{j=1}^{3} \frac{dA_j}{dt}\mathfrak{X}_j + \sum_{j=1}^{3} A_j\left(\frac{\partial \mathfrak{X}_j}{\partial x_1}\frac{\delta x_1}{\delta t} + \frac{\partial \mathfrak{X}_j}{\partial x_2}\frac{\delta x_2}{\delta t} + \frac{\partial \mathfrak{X}_j}{\partial x_3}\frac{\delta x_3}{\delta t} + \frac{\partial \mathfrak{X}_j}{\partial t}\right),$$

$$\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} = \sum_{j=1}^{3} \frac{dB_j}{dt}\mathfrak{X}_j + \sum_{j=1}^{3} B_j\left(\frac{\partial \mathfrak{X}_j}{\partial x_1}\frac{\delta x_1}{\delta t} + \frac{\partial \mathfrak{X}_j}{\partial x_2}\frac{\delta x_2}{\delta t} + \frac{\partial \mathfrak{X}_j}{\partial x_3}\frac{\delta x_3}{\delta t} + \frac{\partial \mathfrak{X}_j}{\partial t}\right),$$

$$\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} = \sum_{j=1}^{3} \frac{dC_j}{dt}\mathfrak{X}_j + \sum_{j=1}^{3} C_j\left(\frac{\partial \mathfrak{X}_j}{\partial x_1}\frac{\delta x_1}{\delta t} + \frac{\partial \mathfrak{X}_j}{\partial x_2}\frac{\delta x_2}{\delta t} + \frac{\partial \mathfrak{X}_j}{\partial x_3}\frac{\delta x_3}{\delta t} + \frac{\partial \mathfrak{X}_j}{\partial t}\right),$$

dessen übrige Formeln in analoger Art zu erhalten sind. Multipliciren wir diese drei Formeln mit A_1, B_1, C_1, und addiren, und beachten wir dabei die bekannten Gleichungen [vgl. (3.) Seite 241]:

$$(19).\qquad \begin{cases} \omega_1 = A_3\dfrac{dA_2}{dt} + B_3\dfrac{dB_2}{dt} + C_3\dfrac{dC_2}{dt}, \\ \omega_2 = A_1\dfrac{dA_3}{dt} + B_1\dfrac{dB_3}{dt} + C_1\dfrac{dC_3}{dt}, \\ \omega_3 = A_2\dfrac{dA_1}{dt} + B_2\dfrac{dB_1}{dt} + C_2\dfrac{dC_1}{dt}, \end{cases}$$

so erhalten wir sofort:

$$(20.)\qquad A_1\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} + B_1\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} + C_1\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} = \left\{\begin{aligned} &0 - \omega_3\mathfrak{X}_2 + \omega_2\mathfrak{X}_3 \\ &+ \left(\frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial x_1}\frac{\delta x_1}{\delta t} + \frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial x_2}\frac{\delta x_2}{\delta t} + \frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial x_3}\frac{\delta x_3}{\delta t} + \frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial t}\right)\end{aligned}\right\}.$$

Was die hier auftretenden und vorhin [in (18.)] charakterisirten Ableitungen von x_1, x_2, x_3 nach t anbelangt, so ist nach (1.):

$$(\alpha.)\qquad \begin{cases} x - A_0 = A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3, \\ y - B_0 = B_1 x_1 + B_2 x_2 + B_3 x_3, \\ z - C_0 = C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3, \end{cases}$$

mithin z. B.:

$$(\beta.)\qquad x_1 = A_1(x - A_0) + B_1(y - B_0) + C_1(z - C_0).$$

Jene Ableitung $\frac{\delta x_1}{\delta t}$ (18.) sollte der Art gebildet werden, dass x, y, z constant bleiben. Somit folgt:

$$(\gamma.)\quad \frac{\delta x_1}{\delta t} = \left[\frac{dA_1}{dt}(x - A_0) + \frac{dB_1}{dt}(y - B_0) + \frac{dC_1}{dt}(z - C_0)\right] - \left(A_1 \frac{dA_0}{dt} + B_1 \frac{dB_0}{dt} + C_1 \frac{dC_0}{dt}\right).$$

Substituirt man aber hier für $(x - A_0)$, $(y - B_0)$, $(z - C_0)$ die Werthe (α.), so erhält man mit Rücksicht auf (19.):

$$(\delta.)\qquad \frac{\delta x_1}{\delta t} = (\omega_3 x_2 - \omega_2 x_3) - \left(A_1 \frac{dA_0}{dt} + B_1 \frac{dB_0}{dt} + C_1 \frac{dC_0}{dt}\right),$$

oder mit Rücksicht auf (7.) Seite 247:

$$(\varepsilon.)\qquad \frac{\delta x_1}{\delta t} = (\omega_3 x_2 - \omega_2 x_3) - \pi_1.$$

Demgemäss gelangt man zu folgenden drei Gleichungen:

$$(\zeta.)\qquad \begin{cases} \frac{\delta x_1}{\delta t} = -(\pi_1 + \omega_2 x_3 - \omega_3 x_2), \\ \frac{\delta x_2}{\delta t} = -(\pi_2 + \omega_3 x_1 - \omega_1 x_3), \\ \frac{\delta x_3}{\delta t} = -(\pi_3 + \omega_1 x_2 - \omega_2 x_1); \end{cases}$$

sodass also die Formel (20.) übergeht in:

$$(21.)\qquad A_1 \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} + B_1 \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} + C_1 \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} -\left[\frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial x_1}(\pi_1 + \omega_2 x_3 - \omega_3 x_2) + \frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial x_2}(\pi_2 + \omega_3 x_1 - \omega_1 x_3) + \frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial x_3}(\pi_3 + \omega_1 x_2 - \omega_2 x_1)\right] \\ + \frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial t} - (\mathfrak{X}_2 \omega_3 - \mathfrak{X}_3 \omega_2) \end{array} \right\}.$$

Dies also ist das *erste Trinom* in der Formel (15.). Substituirt man aber diesen Werth des ersten Trinoms in jener Formel (15.), so heben sich merkwürdiger Weise alle mit ω_1, ω_2, ω_3 und π_1, π_2, π_3 behafteten Glieder gegenseitig fort, und man erhält:

$$(22.)\qquad \left\{ \begin{array}{l} + \frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial t} + \left(\frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial x_1}\alpha_1 + \frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial x_2}\alpha_2 + \frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial x_3}\alpha_3\right) \\ + \mathfrak{X}_1\left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \alpha_3}{\partial x_3}\right) - \left(\mathfrak{X}_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} + \mathfrak{X}_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} + \mathfrak{X}_3 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_3}\right) \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{A}\left(\frac{\partial L_3}{\partial x_2} - \frac{\partial L_2}{\partial x_3}\right) - 4\pi u_1.$$

Giebt man dieser Gleichung eine etwas andere Schreibweise, so erhält man die erste Formel folgenden Systems:

$$\text{(A.)}\quad \frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial t} + \left(\frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial x_1}\alpha_1 + \frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial x_2}\alpha_2 + \frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial x_3}\alpha_3\right) + \mathfrak{X}_1\left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \alpha_3}{\partial x_3}\right) - \\ - \left(\mathfrak{X}_1\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} + \mathfrak{X}_2\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} + \mathfrak{X}_3\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_3}\right) = \frac{1}{A}\left(\frac{\partial L_3}{\partial x_2} - \frac{\partial L_2}{\partial x_3}\right) - 4\pi u_1,$$

$$\text{(B.)}\quad \frac{\partial \mathfrak{X}_2}{d t} + \left(\frac{\partial \mathfrak{X}_2}{\partial x_1}\alpha_1 + \frac{\partial \mathfrak{X}_2}{\partial x_2}\alpha_2 + \frac{\partial \mathfrak{X}_2}{\partial x_3}\alpha_3\right) + \mathfrak{X}_2\left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \alpha_3}{\partial x_3}\right) - \\ - \left(\mathfrak{X}_1\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} + \mathfrak{X}_2\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} + \mathfrak{X}_3\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_3}\right) = \frac{1}{A}\left(\frac{\partial L_1}{\partial x_3} - \frac{\partial L_3}{\partial x_1}\right) - 4\pi u_2,$$

$$\text{(C.)}\quad \frac{\partial \mathfrak{X}_3}{\partial t} + \left(\frac{\partial \mathfrak{X}_3}{\partial x_1}\alpha_1 + \frac{\partial \mathfrak{X}_3}{\partial x_2}\alpha_2 + \frac{\partial \mathfrak{X}_3}{\partial x_3}\alpha_3\right) + \mathfrak{X}_3\left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \alpha_3}{\partial x_3}\right) - \\ - \left(\mathfrak{X}_1\frac{\partial \alpha_3}{\partial x_1} + \mathfrak{X}_2\frac{\partial \alpha_3}{\partial x_2} + \mathfrak{X}_3\frac{\partial \alpha_3}{\partial x_3}\right) = \frac{1}{A}\left(\frac{\partial L_2}{\partial x_1} - \frac{\partial L_1}{\partial x_2}\right) - 4\pi u_3,$$

dessen übrige Formeln entsprechender Weise abzuleiten sind. Diese Gleichungen (A.), (B.), (C.) sind offenbar *völlig analog* mit den Gleichungen (a.), (b.), (c.) Seite 250; dabei haben L_1, L_2, L_3 in den einen, und L, M, N in den andern die in (5.) angegebenen Bedeutungen.

Nun repräsentiren jene Gleichungen (a.), (b.), (c.) die ursprünglichen Hertz'schen Differentialgleichungen, bezogen auf das Axensystem (x, y, z); andrerseits repräsentiren (A.), (B.), (C.) eben dieselben Gleichungen, transformirt auf das neue Axensystem (1, 2, 3). Und in Folge der vollständigen *Analogie*, die zwischen den Formeln (a.), (b.), (c.) und (A.), (B.), (C.) stattfindet, kann man also sagen:

Die Hertz'schen Differentialgleichungen bleiben, wenn man sie von einem positiven rechtwinkligen Axensystem auf irgend ein anderes solches Axensystem transformirt, ihrer Gestalt nach völlig ungeändert, welche relative Bewegung das eine System in Bezug auf das andere auch immer besitzen mag.

Dieses Resultat ist hier erhalten worden für die erste Gruppe der Hertz'schen Differentialgleichungen [Seite 236 (21.)]. Dass sich in analoger Art Analoges auch ergeben wird für die zweite Gruppe jener Gleichungen [Seite 236 (22.)], bedarf kaum noch der Erwähnung.

Diese Resultate stehen nun offenbar in vollem Einklang mit der schon von Hertz selber ausgesprochenen Behauptung, vrgl. Seite 238—240.

§. 7.

Allgemeine Betrachtungen zur Orientirung über die weiterhin anzustellenden Untersuchungen, sowie auch zur Ermöglichung[1]) derselben.

Bei schwierigen theoretischen Untersuchungen werden häufig, unter Beiseitesetzung der Wirklichkeit, mehr oder weniger *ideale* Fälle in Betracht gezogen, theils um auf diese Weise eine gewisse *Annäherung* an die Wirklichkeit zu erreichen, theils auch nur in der Hoffnung, in solcher Art eine *Vorbereitung* zu schaffen für die Inangriffnahme der eigentlich vorliegenden, viel complicirteren Aufgaben. Man wird diese allgemeine Bemerkung bestätigt finden beim Hinblick auf die einzelnen Capitel der analytischen Mechanik, und namentlich auch beim Hinblick auf die einzelnen Theile der mathematischen Physik.

Ist z. B., was die FOURIER'*sche Wärmetheorie* betrifft, von der allmähligen Abkühlung eines *homogenen Körpers* (etwa einer Kugel oder eines Ellipsoids) die Rede, so denkt man sich diesen Körper von einem *homogenen Medium* umgeben, welches nach allen Seiten ins Unendliche reicht. Dieses homogene Medium kann z. B. aus *homogener Luft* bestehen.

Unter Beiseitesetzung der Wirklichkeit, denkt man sich also den ganzen unendlichen Weltraum von homogener Luft erfüllt, und innerhalb dieser Luft (wie eine einzelne Insel) jenen zu untersuchenden Körper; indem man dabei zugleich annimmt, dass Körper und Luft zu Anfang constante, aber von einander verschiedene Temperaturen besitzen. Man abstrahirt dabei also z. B. vom Vorhandensein der Erdkugel und der übrigen Himmelskörper.

Auch wird man, der Bequemlichkeit willen, Körper und Luft nicht nur in relativer Ruhe, sondern geradezu in *absoluter Ruhe* sich denken, und demgemäss auch ein *absolut ruhendes Axensystem* (x, y, z) der analytischen Untersuchung zu Grunde legen.

Zur Rechtfertigung dieser ganz idealen Vorstellungen wird zu sagen sein, dass bei hinreichend grossen Dimensionen des

1) Am Ende dieses Paragraphs werden wir zu der Einsicht gelangen, dass die $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ im Unendlichen von der Ordnung $\left(\frac{1}{\varrho}\right)^2$ sind, wo ϱ den Abstand des unendlich fernen Punktes von unserm Beobachtungsorte vorstellt. Und ohne diese Kenntniss würden die weiterhin anzustellenden Untersuchungen *unmöglich* sein.

Beobachtungszimmers, in dessen Mitte jener zu untersuchende Körper aufgestellt sein mag, nur allein die in diesem Zimmer enthaltene Luft in Betracht kommt, während die weiter entfernten Gegenstände, in Folge ihres zu grossen Abstandes, auf den zu untersuchenden Abkühlungsprocess jenes Körpers ohne merklichen Einfluss sind; und dass es also einerlei sei, ob die den Körper umgebende Luft an den Wänden, der Decke und dem Fussboden des Zimmers ihre Grenze findet, oder ob sie von jenem Körper aus nach allen Seiten hin sich ins Unendliche erstreckt.

Und zur ferneren Rechtfertigung der in Rede stehenden idealen Vorstellungsweise wird man sagen können, für den Abkühlungsprocess jenes Körpers sei es völlig gleichgültig, ob der Körper und die umgebende Luft in relativer Ruhe, oder in absoluter Ruhe sich befinden.

In ähnlicher Weise wollen wir nun auch in die Maxwell-Hertz'*sche Theorie der Elektrodynamik* mit gewissen idealen Vorstellungen hineinzugehen suchen. Wir denken uns gegeben:

I) ein *absolut ruhendes positives rechtwinkliges Axensystem* (x, y, z);

II) *den oder die zu untersuchenden Körper*, alle gelegen in der Nähe des Anfangspunctes des Axensystems (x, y, z);

III) eine die Körper umgebende, und nach allen Seiten sich ins Unendliche erstreckende *homogene Luft*.

Die ganze den unendlichen Raum erfüllende Substanz besteht für uns also nur allein in jenen zu untersuchenden Körpern und in der sie umgebenden homogenen Luft.[1])

Auch wollen wir uns diese Substanz, wenigstens zu *Anfang*, in absoluter Ruhe denken; sodass also die dem absolut ruhenden Axensystem (x, y, z) entsprechenden substantiellen Geschwindigkeitscomponenten α, β, γ zu Anfang allenthalben $= 0$ sind. *Später* werden wir alsdann jene Körper vielleicht in irgend welcher Weise in Bewegung gerathen lassen. Und hierdurch wird alsdann die die Körper umgebende Luft mit in Bewegung gerathen, aber doch nur bis auf eine gewisse Entfernung hin; so dass also die unendlich fernen Theile der Luft *fortdauernd* in absoluter Ruhe

1) Es wird also abstrahirt vom Vorhandensein der Erdkugel (mithin z. B. auch vom Vorhandensein des Erdmagnetismus) und ebenso auch vom Vorhandensein der übrigen Himmelskörper.

verharren. Beschreiben wir also um den Anfangspunct des Systems (x, y, z) eine die gegebenen Körper in weiter Entfernung umschliessende Kugelfläche von hinreichend grossem Radius R, so werden die substantiellen Geschwindigkeitscomponenten α, β, γ im *Aussenraum* dieser Kugel (R) fortdauernd $= 0$ sein.

Mit andern Worten: Sind x, y, z die Coordinaten irgend eines Punctes in Bezug auf jenes der Betrachtung zu Grunde gelegte absolut ruhende positive rechtwinklige Axensystem, und setzt man

(1.) $$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

so werden

(2.) *die substantiellen Geschwindigkeitscomponenten* α, β, γ *fortdauernd* $= 0$ *sein in allen denjenigen Puncten* (x, y, z), *deren* $\varrho \geqq R$ *ist.*

Die die Körper umgebende homogene Luft betrachten wir als einen *vollkommenen Isolator;* so dass also in dieser Luft sowohl λ (die elektrische Leitungsfähigkeit), wie auch σ (die wahre elektrische Dichtigkeit) fortdauernd $= 0$ sind. Aus dem Nullsein von λ folgt sofort [vgl. Seite 221 (D.), (F.)], dass in ihr auch u, v, w (die elektrischen Strömungscomponenten) stets $= 0$ sind.

Ebenso wie σ (die wahre elektrische Dichtigkeit), ebenso denken wir uns auch τ (die wahre magnetische Dichtigkeit) in der homogenen Luft fortdauernd $= 0$.

Endlich werden in dieser Luft, weil sie homogen sein soll, die Coefficienten ε und μ (d. i. der Dielektricitäts- und der Magnetisirungscoefficient) allenthalben *constant* sein. Alles zusammengefasst, können wir also sagen:

(3.) *In der die Körper umgebenden homogenen Luft, also z. B. auch in allen Puncten, deren* $\varrho \geqq R$ *ist, sind die Coefficienten* ε, μ *Constanten, und die Grössen* λ, σ, u, v, w *und* τ *fortdauernd gleich Null.*

Von Hause aus sei in den zu untersuchenden Körpern irgend welches Quantum E^* wahrer Elektricität und irgend welches Quantum M^* von wahrem Magnetismus enthalten. Jenes Quantum E^* kann möglicherweise im Laufe der Zeit auf die einzelnen Körper in verschiedener Weise sich vertheilen. Sind z. B. zwei von jenem Körper Conductoren, und kommen diese beiden Conductoren im Laufe der Zeit mit einander in Berührung, so kann aus dem einen Conductor ein Theil der in ihm enthaltenen wahren

Elektricität in den andern übergehen. U. s. w. Es mag einstweilen dahingestellt bleiben, ob zwischen den einzelnen Körpern ein solcher Transport von einem Körper zum andern auch stattfinden kann hinsichtlich des in ihnen enthaltenen wahren Magnetismus.

Jedenfalls aber wird die die Körper umgebende homogene Luft dafür sorgen, dass die Gesammtmenge E^* der in allen Körpern zusammengenommen enthaltenen wahren Elektricität fortdauernd *ein und dieselbe* bleibt. Und Analoges wird von M^* zu sagen sein. Demgemäss sind E^* und M^* zwei von Hause aus gegebene *Constanten.*

Die Newton'*schen Potentiale*[1]) dieser Materien E^* und M^* in Bezug auf *unendlich ferne* Puncte werden von genau derselben Beschaffenheit sein, als wären die Materien E^* und M^* concentrirt im Anfangspunct des der Betrachtung zu Grunde gelegten Axensystems. Bezeichnet man also diese Potentiale in Bezug auf irgend welchen unendlich fernen Punct (x, y, z) mit Φ und Ψ, so wird sein:

$$(4.) \qquad \Phi = \frac{E^*}{\varrho} \quad \text{und} \quad \Psi = \frac{M^*}{\varrho},$$

wo ϱ [ebenso wie in (1.)] $= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ist.[2])

Nach all' diesen Vorbereitungen kommen wir nun zur eigentlichen Hauptsache. Es handelt sich um die elektrischen und magnetischen Zustandscomponenten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, namentlich um die Werthe derselben in den *unendlich fernen Puncten.* Von welcher Wichtigkeit diese Frage ist, wurde bereits früher [auf Seite 229, 230] einigermassen anzudeuten versucht.

Wir wollen uns nicht bloss die Luft, sondern auch die zu untersuchenden Körper von Hause aus völlig unelektrisch und unmagnetisch denken; sodass also die $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ sowohl in diesen Körpern wie auch in der sie umgebenden Luft *zu Anfang* allenthalben $= 0$ sind.

Später werden alsdann, wollen wir uns denken, in jenen Körpern durch allerhand Processe (Reiben, Streichen, Erwärmen,

---

1) Es versteht sich von selber, dass wir hier mit dem Worte „Newton'*sches Potential*“ keinerlei physikalische Bedeutung verbinden, sondern darunter nur den betreffenden analytischen Ausdruck verstehen.

2) Uebrigens ist nicht nur nach Poisson, sondern ebenso auch im Sinne der Maxwell-Hertz'schen Theorie die Constante M^* stets $= 0$. Vergl. § 10.

relative Bewegung eines Körpers gegen den andern) irgend welche Quantitäten von wahrer Elektricität und von wahrem Magnetismus im Innern der Körper erzeugt, und vielleicht auch irgend welche elektrische Strömungen im Innern jener Körper hervorgebracht. In solcher Weise entstehen in den Körpern irgend welche elektrische und magnetische Zustände $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$. Diese Zustände werden in die umgebende homogene Luft hinein sich fortpflanzen. Dabei wird anzunehmen sein, dass sie die unendlich fernen Theile der homogenen Luft nur in unendlicher Abschwächung erreichen; sodass also

(5.) *die Werthe der $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ in unendlicher Ferne immer nur unendlich klein sein werden.*

Von Wichtigkeit ist nun die Frage, *in welcher Weise, nach welchem Gesetz* dieses Unendlichkleinwerden im Unendlichen stattfindet. Um hierauf zu antworten, wollen wir uns vorläufig auf irgend einen *gegebenen endlichen Zeitraum* beschränken (der beliebig klein gedacht werden kann), und *annehmen*, dass die Werthe der $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ im Unendlichen während dieses gegebenen Zeitraums keinerlei Aenderung erfahren. Mit andern Worten: Wir wollen annehmen,

(6.) *dass die Werthe der Ableitungen $\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}$, $\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t}$, $\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}$ und $\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t}$, $\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t}$, $\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t}$ für alle Puncte, deren $\varrho \geqq R$ ist, während des gegebenen Zeitraums fortdauernd gleich Null sind, falls nur das R hinreichend gross gedacht wird.*

Solches vorausgesetzt, wird es nun möglich sein, mit Bezug auf diesen gegebenen Zeitraum, über die Werthe der $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ im Unendlichen Genaueres zu ermitteln. Zu diesem Zweck benutzen wir die Hertz'schen Differentialgleichungen Seite 236 (21.), (22.). Dieselben erhalten mit Rücksicht auf (2.), (3.) und (6.) für alle Puncte (x, y, z), deren $\varrho \geqq R$ ist, folgende Gestalt:

$$(7.)\quad \begin{cases} 0 = \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial z}, \\ 0 = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial x}, \\ 0 = \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial y}, \text{ für } \varrho \geqq R, \end{cases} \qquad (8.)\quad \begin{cases} 0 = \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial z}, \\ 0 = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial x}, \\ 0 = \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y}, \text{ für } \varrho \geqq R; \end{cases}$$

wie solches leicht zu übersehen ist. So z. B. gewinnt die als Definition von $\Delta \mathfrak{X}$ gegebene Formel (24.) Seite 236 im gegenwärtigen Fall, mit Rücksicht auf (2.), die einfache Gestalt:

$$\frac{\varDelta \mathfrak{X}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}, \text{ für } \varrho \geqq R;$$

woraus mit Rücksicht auf (6.) sich ergibt:

$$\frac{\varDelta \mathfrak{X}}{dt} = 0, \text{ für } \varrho \geqq R.$$

U. s. w. — Zu den Gleichungen (7.), (8.) wollen wir noch hinzufügen die allgemeinen Definitionsformeln von τ und σ, d. i. die Formeln (A.) Seite 220. Dieselben gewinnen für $\varrho \geqq R$, mit Rücksicht auf (3.), folgendes Aussehen:

$$(9.)\quad \begin{cases} 0 = \dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathfrak{N}}{\partial z}, \\ \quad \text{für } \varrho \geqq R, \end{cases} \qquad (10.)\quad \begin{cases} 0 = \dfrac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}, \\ \quad \text{für } \varrho \geqq R. \end{cases}$$

Solches constatirt, markiren wir jetzt im *Aussenraume* der Kugel (R) irgend zwei Puncte (x_0, y_0, z_0) und (x, y, z), und ziehen vom einen zum andern zwei *vollständig im Aussenraum liegende* Curven s und σ. Diese Curven s und σ bilden alsdann zusammengenommen eine einzige in sich zurücklaufende Curve $s + \sigma$. Und das über alle Elemente Ds (Dx, Dy, Dz) dieser geschlossenen Curve $s + \sigma$ hinerstreckte Integral

$$(11.)\qquad \int_{s+\sigma} (\mathfrak{X}\, Dx + \mathfrak{Y}\, Dy + \mathfrak{Z}\, Dz)$$

wird nach dem Stokes'schen Satz gleichwerthig sein mit folgendem Flächen-Integral:

$$(12.)\qquad \int \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial z} \right) a + \left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial x} \right) b + \left(\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y} \right) c \right] Do,$$

selbiges ausgedehnt gedacht über alle Elemente Do irgend einer von der Curve $s + \sigma$ umgrenzten Fläche; dabei sind a, b, c die Richtungscosinus der auf Do errichteten Normale. Diese Fläche kann, weil die Curve $s + \sigma$ *ausserhalb* der Kugel (R) liegt, so construirt gedacht werden, dass sie ebenfalls mit all' ihren Elementen Do *ausserhalb* (R) sich befindet. Alsdann aber verschwindet das Integral (12.), zufolge der Formeln (8.). Demgemäss wird das mit (12.) gleichwerthige Integral (11.) ebenfalls verschwinden. Hieraus aber folgt weiter, dass die beiden über s und σ erstreckten Integrale

$$\int_s (\mathfrak{X}\, Dx + \mathfrak{Y}\, Dy + \mathfrak{Z}\, Dz) \text{ und } \int_\sigma (\mathfrak{X}\, Dx + \mathfrak{Y}\, Dy + \mathfrak{Z}\, Dz)$$

einander *gleich* sein werden, falls man nur beide in übereinstimmenden Richtungen hinlaufend sich denkt, etwa beide vom Puncte (x_0, y_0, z_0) aus nach dem Puncte (x, y, z) hin.

Folglich wird der Werth irgend eines auf ganz beliebigem Wege von (x_0, y_0, z_0) nach (x, y, z) hinerstreckten Integrales

$$(13.) \qquad \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} (\mathfrak{X}\, Dx + \mathfrak{Y}\, Dy + \mathfrak{Z}\, Dz)$$

nur von der Lage der beiden Puncte (x_0, y_0, z_0) und (x, y, z) abhängen, nämlich unabhängig sein von der Wahl jenes Integrationsweges; — vorausgesetzt dass jener Weg stets *ausserhalb* der Kugel (R) bleibt.

Betrachtet man also den Punct (x_0, y_0, z_0) als *völlig festliegend*, so wird der Werth des Integrals (13.), falls man seine Integrationscurve der soeben genannten Beschränkung unterwirft, nur allein von (x, y, z) abhängen, also zu bezeichnen sein als eine *eindeutige* Function von (x, y, z). Die in solcher Weise für den ganzen Aussenraum von (R) definirte eindeutige Function von (x, y, z) bezeichnen wir mit $\mathfrak{F}$ oder besser mit $-\mathfrak{F}$. Also:

$$(14.) \qquad -\mathfrak{F} = -\mathfrak{F}(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} (\mathfrak{X}\, Dx + \mathfrak{Y}\, Dy + \mathfrak{Z}\, Dz).$$

Differenzirt man diese Formel (14.) partiell nach x, so erhält man sofort:

$$-\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} = \mathfrak{X}.$$

U. s. w. Kurz man sieht, dass die $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ nichts Anderes sind als die negativen partiellen Ableitungen von $\mathfrak{F}$ nach x, y, z:

$$(15.) \qquad \mathfrak{X} = -\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x}, \quad \mathfrak{Y} = -\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y}, \quad \mathfrak{Z} = -\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z}, \text{ für } \varrho \geqq R.$$

Der hier angebrachte Beisatz: $\varrho \geqq R$ bedarf keiner weiteren Erläuterung. Beziehen sich doch die vorhergehenden Formeln (11.), (12.), (13.), (14.) immer nur auf solche Puncte (x, y, z), deren $\varrho \geqq R$ ist.

Substituirt man jetzt die Werthe (15.) in der Formel (10.), so folgt sofort:

$$(16.) \qquad \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial z^2} = 0, \text{ für } \varrho > R.$$

Und auf Grund dieser Formel (16.) kann man nun nähere Auskunft erhalten über die Werthe von $\mathfrak{F}$ in allen Puncten a, die

ausserhalb der Kugel (R) liegen. Ist nämlich ein solcher Punct a irgendwo im Aussenraum von (R) markirt, und construirt man sodann irgend eine zu (R) concentrische und diesen Punct a umschliessende *Hülfskugelfläche* (R'), so wird der in a vorhandene Werth der Function $\mathfrak{F}$ darstellbar sein durch folgende Green'sche Formel:

$$(17.)\qquad \mathfrak{F}_a = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathfrak{S}}\left(\mathfrak{F}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\nu} - \frac{1}{r}\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\nu}\right)Do,$$

die Integration ausgedehnt gedacht über alle Oberflächenelemente Do des von den Flächen (R) und (R') begrenzten *schaalenförmigen Raumes* $\mathfrak{S}$; dabei bezeichnet ν die auf Do errichtete, in den Raum $\mathfrak{S}$ hineingehende Normale, und r den Abstand des Elementes Do von jenem Puncte a. Dieser Punct a liegt (wie aus den soeben gemachten Angaben ersichtlich ist) *zwischen* den beiden Kugelflächen (R) und (R').

Der in (17.) enthaltene Quotient $\frac{1}{r}$ kann nach Kugelfunctionen entwickelt werden; dabei ergeben sich zwei verschiedene Entwickelungen, je nachdem r den Abstand des Punctes a von einem Element Do der Fläche (R), oder aber den Abstand jenes Punctes von einem Element Do der Fläche (R') vorstellt. Denkt man sich diese Entwickelungen in (17.) substituirt, und sodann die Integration ausgeführt, so gelangt man sofort zu einer Formel von folgender Gestalt:

$$(18.)\quad \mathfrak{F}_a = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\varrho_a}\right)^{n+1}\cdot Y^{(n)}(\vartheta_a, \varphi_a) + \sum_{n=0}^{\infty}\varrho_a^n\cdot Z^{(n)}(\vartheta_a, \varphi_a),\ \text{für}\ \varrho_a \geqq R.$$

Hier sind ϱ_a, ϑ_a, φ_a die Polarcoordinaten des Punctes a; während $Y^{(n)}$ und $Z^{(n)}$ Kugelfunctionen $n$ter Ordnung vorstellen.

Hätte man statt der Hülfskugelfläche (R') irgend welche andere zu (R) concentrische und den Punct a umschliessende Hülfskugelfläche (R'') angewandt, so würde man für $\mathfrak{F}_a$ genau dieselbe Entwickelung wie in (18.) gefunden haben; wie leicht zu übersehen ist. Die Entwickelung (18.) ist daher von der benutzten Hülfskugelfläche völlig unabhängig, *und folglich ganz allgemein gültig für jedweden Punct a, der ausserhalb der Kugel (R) liegt;* wie solches in (18.) angedeutet ist durch den Beisatz: $\varrho_a \geqq R$.

Bezeichnet man den Punct a $(\varrho_a, \vartheta_a, \varphi_a)$ kurzweg mit $(\varrho, \vartheta, \varphi)$, und den zugehörigen Functionswerth $\mathfrak{F}_a$ kurzweg mit $\mathfrak{F}$, so gewinnt die Formel (18.) folgendes Aussehen:

$$(19.)\quad \mathfrak{F} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\varrho}\right)^{n+1}\cdot Y^{(n)}(\vartheta,\varphi) + \sum_{n=0}^{\infty}\varrho^n\cdot Z^{(n)}(\vartheta,\varphi),\ \text{für}\ \varrho \geqq R;$$

wofür man ausführlicher schreiben kann:

$$(20.)\quad \mathfrak{F} = \left\{\begin{matrix}\frac{H}{\varrho} + \frac{Y^{(1)}(\vartheta,\varphi)}{\varrho^2} + \frac{Y^{(2)}(\vartheta,\varphi)}{\varrho^3} + \cdots \\ + h + \varrho Z^{(1)}(\vartheta,\varphi) + \varrho^2 Z^{(2)}(\vartheta,\varphi) + \cdots\end{matrix}\right\}\ \text{für}\ \varrho \geqq R;$$

hier sind alsdann $H = Y^{(0)}(\vartheta,\varphi)$ und $h = Z^{(0)}(\vartheta,\varphi)$ Kugelfunctionen nullter Ordnung, d. i. *Constanten*.

Die Glieder *zweiter Zeile* in (20.) sind bekanntlich ganze rationale Functionen von x, y, z, falls man nämlich unter x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten des Punctes $(\varrho, \vartheta, \varphi)$ versteht. So z. B. ist:

$$(21.)\quad \begin{cases}\varrho Z^{(1)}(\vartheta,\varphi) = C_1 x + C_2 y + C_3 z, \\ \varrho^2 Z^{(2)}(\vartheta,\varphi) = C_{11}x^2 + 2C_{12}xy + \cdots + C_{33}z^2, \\ \varrho^3 Z^{(3)}(\vartheta,\varphi) = C_{111}x^3 + 3C_{112}x^2y + \cdots + C_{333}z^3, \\ \qquad \text{etc. etc. etc. etc.}\end{cases}$$

wo die C lauter *Constanten* vorstellen.

Wären nun derartige Glieder, wie die hier in (21.) angegebenen, in der Formel (20.) wirklich vorhanden, so würden offenbar die Ausdrücke (15.):

$$\mathfrak{X} = -\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial x},\quad \mathfrak{Y} = -\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial y},\quad \mathfrak{Z} = -\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial z}$$

im Unendlichen *endlich* bleiben oder sogar *unendlich gross* werden; — während doch diese Grössen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ nach unserer Annahme (5.) im Unendlichen *unendlich klein* werden müssen. In Wirklichkeit können also solche Glieder, wie die in (21.) angegebenen, in der Formel (20.) *nicht* vorkommen; sodass also jene Formel sich reducirt auf:

$$(22.)\quad \mathfrak{F} = h + \frac{H}{\varrho} + \frac{Y^{(1)}(\vartheta,\varphi)}{\varrho^2} + \frac{Y^{(2)}(\vartheta,\varphi)}{\varrho^3} + \cdots,\ \text{für}\ \varrho \geqq R.$$

In diesem Ausdruck werden wir uns auf die drei ersten Glieder beschränken können, sobald ϱ ins Unendliche anwächst. Demgemäss schreiben wir:

$$(23.)\quad \mathfrak{F} = h + \frac{H}{\varrho} + \frac{Y^{(1)}(\vartheta,\varphi)}{\varrho^2},\ \text{für}\ \varrho = \infty.$$

Bekanntlich ist aber:

$$Y^{(1)}(\vartheta,\varphi) = \frac{H_1 x + H_2 y + H_3 z}{\varrho},$$

wo H_1, H_2, H_3 Constanten sind. Somit folgt:

$$(24.)\qquad \mathfrak{F} = h + \frac{H}{\varrho} + \frac{H_1 x + H_2 y + H_3 z}{\varrho^3}, \text{ für } \varrho = \infty.$$

Die Werthe der $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ in den unendlich fernen Puncten werden sich nun dadurch ergeben, dass man den Ausdruck (24.) in den Formeln (15.) substituirt. Bei dieser Substitution fällt die Constante h fort. Und man erhält also schliesslich:

$$(25.)\qquad \mathfrak{X} = -\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x}, \quad \mathfrak{Y} = -\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial y}, \quad \mathfrak{Z} = -\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial z}, \text{ für } \varrho = \infty,$$

wo $\mathfrak{P}$ die Bedeutung hat:

$$(26.)\qquad \mathfrak{P} = \frac{H}{\varrho} + \frac{H_1 x + H_2 y + H_3 z}{\varrho^3};$$

schliesslich würde also nur noch etwa die Frage zu beantworten sein nach den Werthen der hier auftretenden vier Constanten H, H_1, H_2, H_3. Jedenfalls geht aus den Ausdrücken (25.), (26.) deutlich hervor, dass $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ im Unendlichen *von der Ordnung* $\left(\frac{1}{\varrho}\right)^2$ sind. Auch übersieht man leicht, dass man für die $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ zu ganz analogen Resultaten gelangen wird, nämlich zu folgenden Formeln:

$$(27.)\qquad \mathfrak{L} = -\frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial x}, \quad \mathfrak{M} = -\frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial y}, \quad \mathfrak{N} = -\frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial z}, \text{ für } \varrho = \infty,$$

wo $\mathfrak{Q}$ den Ausdruck vorstellt:

$$(28.)\qquad \mathfrak{Q} = \frac{K}{\varrho} + \frac{K_1 x + K_2 y + K_3 z}{\varrho^3};$$

hier sind K, K_1, K_2, K_3 vier neue unbekannte Constanten; und es werden also die $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ für die unendlich fernen Puncte ebenfalls von der Ordnung $\left(\frac{1}{\varrho}\right)^2$ sein.

Das Resultat der angestellten Untersuchung *ist also folgendes: Setzt man voraus* [*vgl.* (6.) *Seite* 261], *dass die unendlich fernen Werthe der* $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ *und* $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ *während eines gegebenen Zeitraums keinerlei Aenderung erfahren, so werden jene unendlich fernen Werthe während dieses Zeitraums von der Ordnung* $\left(\frac{1}{\varrho}\right)^2$ *sein. Dabei sind unter* ϱ *die Abstände der unendlich fernen Puncte vom Anfangspunct des der Betrachtung zu Grunde gelegten Axensystems zu verstehen.*

Auf diesen Zeitraum, von welchem solches vorausgesetzt werden darf, werden wir uns nun bei unseren Untersuchungen in den weiter folgenden Paragraphen zu beschränken haben. — Es ist das offenbar nur ein Nothbehelf; doch dürfte ein solcher Nothbehelf seine Recht-

fertigung finden im augenblicklichen Zustande der MAXWELL-HERTZ'*schen Theorie, nämlich bei der einstweiligen Unvollkommenheit dieser Theorie nicht gut sich vermeiden lassen.*

Bemerkung. — Man könnte vielleicht die soeben ausgesprochene Beschränkung für *entbehrlich* halten. Ist nämlich ein *ganz beliebiger Zeitraum* gegeben, so könnte man denselben in lauter unendlich kleine Zeitelemente zerlegen. Während jedes einzelnen unendlich kleinen Zeitelementes würde alsdann der unendlich ferne Werth von $\mathfrak{X}$ nur unendlich wenig sich verändern, mithin so gut wie *ungeändert* bleiben. Die unendlich fernen Werthe von $\mathfrak{X}$ würden daher für diese auf einander folgenden Zeitelemente, zufolge des bewiesenen Satzes, der Reihe nach lauten:

$$\frac{C}{\varrho^2}, \quad \frac{C'}{\varrho^2}, \quad \frac{C''}{\varrho^2}, \quad \frac{C'''}{\varrho^2}, \text{ etc. etc.,}$$

wo C, C', C'', C''', etc. Constanten sind. Demgemäss würde der unendlich ferne Werth von $\mathfrak{X}$ in jedwedem Augenblick t des gegebenen Zeitraums lauten:

$$\frac{C(t)}{\varrho^2},$$

wo $C(t)$ eine blosse Function der Zeit ist. Und hiermit würde alsdann bewiesen sein, dass die unendlich fernen Werthe von $\mathfrak{X}$ *stets und unter allen Umständen* von der Ordnung $\left(\frac{1}{\varrho}\right)^2$ sind. U. s. w.

Man könnte, sage ich, so verfahren. Doch scheint mir ein solches Verfahren der hinreichenden Strenge zu entbehren.

Zweite Bemerkung. — Was die in (25.), (26.) und (27.), (28.) enthaltenen Constanten betrifft, so lässt sich leicht zeigen, dass $H = E^*$ und $K = M^*$ ist, wo E^* und M^* die früher [Seite 259] festgesetzten Bedeutungen haben sollen.

Beschreibt man nämlich um den Anfangspunct des Axensystems eine die gegebenen Körper in weiter Entfernung umschliessende Kugelfläche vom Radius ϱ, so ist offenbar:

$$(\alpha.) \qquad E^* = \int_{(\varrho)} \sigma D\mathrm{v},$$

die Integration ausgedehnt gedacht über alle in dieser Kugel (ϱ) enthaltenen Volumelemente $D\mathrm{v}$. Substituirt man hier für σ seinen Werth (A.) Seite 220, so ergiebt sich:

$$(\beta.) \qquad E^* = \frac{1}{4\pi}\int_{(\varrho)} \left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}\right) D\mathrm{v},$$

oder mittelst einer bekannten GREEN'schen Transformation:

$$(\gamma.) \qquad E^* = \frac{1}{4\pi}\int_{(\varrho)} [\mathfrak{X}\cos(\varrho, x) + \mathfrak{Y}\cos(\varrho, y) + \mathfrak{Z}\cos(\varrho, z)]\, Do.$$

In dieser letzten Formel ist alsdann die Integration ausgedehnt zu denken über alle Oberflächenelemente Do der Kugel (ϱ); dabei ist z. B. im Producte $\mathfrak{X}\cos(\varrho, x)\, Do$ unter ϱ die Richtung des nach Do hinlaufenden Kugelradius,

d. i. die *äussere* Normale des Elementes Do zu verstehen. Sind also x, y, z die Coordinaten des Elementes Do, so ist:

$$\cos(\varrho, x) = \frac{x}{\varrho}, \quad \cos(\varrho, y) = \frac{y}{\varrho}, \quad \cos(\varrho, z) = \frac{z}{\varrho};$$

sodass also die Formel (γ.) übergeht in:

$$(\delta.) \qquad E^* = \frac{1}{4\pi} \int_{(\varrho)} \frac{\mathfrak{X} x + \mathfrak{Y} y + \mathfrak{Z} z}{\varrho} Do.$$

All' diese Formeln (α.), (β.), (γ.), (δ.) bleiben in Kraft, wenn man die Kugel (ϱ) noch weiter vergrössert. Lässt man ihren Radius ϱ ins Unendliche anwachsen, so kann man, was $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ betrifft, von den Werthen (25.), (26.) Gebrauch machen; wodurch alsdann die Formel (δ.) übergeht in:

$$(\varepsilon.) \qquad E^* = -\frac{1}{4\pi} \int_{(\varrho)} \left(\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x} \frac{x}{\varrho} + \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial y} \frac{y}{\varrho} + \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial z} \frac{z}{\varrho} \right) Do.$$

Das hier unter dem Integralzeichen stehende Trinom erhält, falls man für $\mathfrak{P}$ seinen Werth (26.) anwendet, die Gestalt:

$$-\frac{H}{\varrho^2} - \frac{2(H_1 x + H_2 y + H_3 z)}{\varrho^4}.$$

Dies aber in (ε.) substituirt, erhält man sofort:

$$(\zeta.) \quad E^* = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{H}{\varrho^2} \int_{(\varrho)} Do + \frac{2H_1}{\varrho^4} \int_{(\varrho)} x Do + \frac{2H_2}{\varrho^4} \int_{(\varrho)} y Do + \frac{2H_3}{\varrho^4} \int_{(\varrho)} z Do \right].$$

Von den hier auftretenden Integralen ist aber, wie man sofort erkennt, das erste $= 4\pi\varrho^2$, während die drei andern $= 0$ sind. Somit ergiebt sich schliesslich

$$(\eta.) \qquad E^* = H.$$

Und in analoger Weise wird man offenbar finden, dass

$$(\vartheta.) \qquad M^* = K$$

ist. — *Q. e. d.*

§ 8.

Ueber die wahre und freie Elektricität.

Wir haben in (A.) Seite 220 unter σ und (σ) folgende Grössen verstanden:

$$(1.) \qquad \sigma = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z} \right),$$

$$(2.) \qquad (\sigma) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} \right),$$

und die so definirten Grössen σ und (σ) als die elektrischen Dichtigkeiten bezeichnet, nämlich σ als die Dichtigkeit der *wahren*, und (σ) als die der *freien* Elektricität. Man kann nun die Formel (2.) offenbar auch so schreiben:

$$(\sigma) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z} \right) - \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \left(\mathfrak{X} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \mathfrak{Y} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + \mathfrak{Z} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right),$$

oder mit Rücksicht auf (1.) auch so:

$$(3.)\qquad (\sigma) = \frac{\sigma}{\varepsilon} - \frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\left(\mathfrak{X}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} + \mathfrak{Y}\frac{\partial\varepsilon}{\partial y} + \mathfrak{Z}\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}\right).$$

Ist also z. B. die betrachtete Substanz *homogen*, mithin ihr Dielektricitätscoefficient ε eine *Constante*, so ergiebt sich

$$(4.)\qquad (\sigma) = \frac{\sigma}{\varepsilon}; \text{ —}$$

eine Formel, die folgenden Satz enthält: *In einer homogenen Substanz stehen die beiderlei Dichtigkeiten σ und (σ) in sehr einfacher Beziehung zu einander; die letztere wird nämlich dadurch erhalten, dass man die erstere dividirt durch den der homogenen Substanz zugehörigen Dielektricitätscoefficienten ε.*

Noch ein anderer wichtiger Satz kann aus jenen beiden Formeln (1.), (2.) mit grosser Leichtigkeit abgeleitet werden. Denkt man sich nämlich innerhalb der den Weltraum erfüllenden Substanz einen ganz beliebigen Raum $\mathfrak{R}$ abgegrenzt, und integrirt man sodann die Formeln (1.), (2.) über alle Volumelemente Dv dieses Raumes $\mathfrak{R}$, so erhält man mittelst einer bekannten GREEN'schen Transformation sofort:

$$(5.)\qquad \int_{\mathfrak{R}} \sigma\, Dv = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathfrak{R}} [\mathfrak{X}\cos(n,x) + \mathfrak{Y}\cos(n,y) + \mathfrak{Z}\cos(n,z)]\, Do,$$

$$(6.)\qquad \int_{\mathfrak{R}} (\sigma)\, Dv = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathfrak{R}} \frac{1}{\varepsilon}[\mathfrak{X}\cos(n,x) + \mathfrak{Y}\cos(n,y) + \mathfrak{Z}\cos(n,z)]\, Do,$$

die Integrationen rechter Hand ausgedehnt gedacht über alle Elemente Do der den Raum $\mathfrak{R}$ umgrenzenden Oberfläche; dabei bezeichnet n die auf Do errichtete *äussere* Normale. Wir wollen uns nun denken, es habe zufälliger Weise das ε an allen Stellen dieser Oberfläche ein und denselben Werth. Alsdann kann in (6.) der Divisor ε *vor* das Integralzeichen gesetzt werden. Solches aber ausgeführt, ergiebt sich alsdann aus (5.) und (6.) sofort:

$$(7.)\qquad \int_{\mathfrak{R}} (\sigma)\, Dv = \frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathfrak{R}} \sigma\, Dv; \text{ —}$$

eine Formel, die folgenden Satz enthält:

Man denke sich innerhalb der den Weltraum erfüllenden Substanz irgend einen Raum $\mathfrak{R}$ abgegrenzt. Dabei bleibe völlig dahingestellt, ob die Substanz innerhalb $\mathfrak{R}$ homogen oder unhomogen ist; doch sei vorausgesetzt, dass der Dielektricitätscoefficient ε an der Oberfläche des Raumes $\mathfrak{R}$ allenthalben ein und denselben constanten Werth besitzt.

Alsdann werden die innerhalb $\mathfrak{R}$ enthaltenen Quantitäten wahrer und freier Elektricität in einfacher Beziehung zu einander stehen. Es wird nämlich die letztere dadurch erhalten werden, dass man die erstere durch ε dividirt, wo ε jenen constanten Werth des Dielektricitätscoefficienten an der Oberfläche des Raumes $\mathfrak{R}$ vorstellt.

Nachdem diese Sätze (4.) und (7.) über die gegenseitige Beziehung zwischen den beiderlei elektrischen Dichtigkeiten σ und (σ) vorangeschickt sind, wollen wir nun namentlich die *erstere* ins Auge fassen, und untersuchen, in welcher Art dieses σ im Laufe der Zeit sich ändert.

Die HERTZ'schen Differentialgleichungen erster Gruppe lauten, falls man in ihnen die $\Delta\mathfrak{X}$, $\Delta\mathfrak{Y}$, $\Delta\mathfrak{Z}$ durch ihre eigentlichen Bedeutungen ersetzt, folgendermassen [vgl. Seite 236 (21.) und (24.)]:

$$\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t} + (\mathfrak{X}_1 + \mathfrak{Y}_2 + \mathfrak{Z}_3)\alpha + (\mathfrak{X}\beta - \mathfrak{Y}\alpha)_2 + (\mathfrak{X}\gamma - \mathfrak{Z}\alpha)_3 = \frac{1}{A}\left[\left(\frac{\mathfrak{N}}{\mu}\right)_2 - \left(\frac{\mathfrak{M}}{\mu}\right)_3\right] - 4\pi u\,,$$

$$\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial t} + (\mathfrak{X}_1 + \mathfrak{Y}_2 + \mathfrak{Z}_3)\beta + (\mathfrak{Y}\gamma - \mathfrak{Z}\beta)_3 + (\mathfrak{Y}\alpha - \mathfrak{X}\beta)_1 = \frac{1}{A}\left[\left(\frac{\mathfrak{L}}{\mu}\right)_3 - \left(\frac{\mathfrak{N}}{\mu}\right)_1\right] - 4\pi v\,,$$

$$\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial t} + (\mathfrak{X}_1 + \mathfrak{Y}_2 + \mathfrak{Z}_3)\gamma + (\mathfrak{Z}\alpha - \mathfrak{X}\gamma)_1 + (\mathfrak{Z}\beta - \mathfrak{Y}\gamma)_2 = \frac{1}{A}\left[\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mu}\right)_1 - \left(\frac{\mathfrak{L}}{\mu}\right)_2\right] - 4\pi w\,,$$

wo die Indices 1, 2, 3 durchweg die partiellen Ableitungen nach x, y, z andeuten. Differenzirt man nun diese drei Gleichungen partiell nach x, y, z und addirt, so heben sich die drei Binome rechter Hand gegen einander fort; ebenso zerstören sich dabei die sechs Binome linker Hand. Man gelangt also, mit Rücksicht auf die in (1.) notirte Formel

$$4\pi\sigma = \mathfrak{X}_1 + \mathfrak{Y}_2 + \mathfrak{Z}_3\,,$$

zu folgender Gleichung:

$$4\pi\left[\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \sigma_1\alpha + \sigma_2\beta + \sigma_3\gamma\right] + 4\pi\sigma(\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3) = -4\pi(u_1 + v_2 + w_3)\,,$$

d. i.

$$\left[\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \frac{\partial\sigma}{\partial x}\alpha + \frac{\partial\sigma}{\partial y}\beta + \frac{\partial\sigma}{\partial z}\gamma\right] + \sigma\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z}\right) = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right);$$

wofür man mit Hinblick auf Seite 226 (M_1.)] auch schreiben kann:

(8.) $$\frac{d\sigma}{dt} + \sigma\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z}\right) = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right).$$

An der betrachteten Stelle (x, y, z) mag nun ein unendlich kleines *substantielles Volumelement* $D\mathrm{v}$ abgegrenzt werden. Multiplicirt man die letzte Formel mit diesem $D\mathrm{v}$, so erhält man:

$$\frac{d\sigma}{dt}D\mathrm{v} + \sigma\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z}\right)D\mathrm{v} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)D\mathrm{v};$$

wofür man [mit Rücksicht auf Seite 228 (P.)] auch schreiben kann:

$$\frac{d\sigma}{dt} D\mathrm{v} + \sigma \frac{d(D\mathrm{v})}{dt} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) D\mathrm{v},$$

d. i.

(9.)
$$\frac{d(\sigma D\mathrm{v})}{dt} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) D\mathrm{v}.$$

Nimmt man nun an, das betrachtete substantielle Volumelement gehöre einem *Isolator* an, so sind die u, v, w alle $= 0$ [vgl. Seite 238 (30.)]; so dass alsdann die Gleichung (9.) übergeht in:

(10.)
$$\frac{d(\sigma D\mathrm{v})}{dt} = 0; \; -$$

eine Formel, die folgenden Satz enthält:

Denkt man sich innerhalb eines Isolators irgend ein substantielles Volumelement $D\mathrm{v}$ abgegrenzt, so wird die in diesem Volumelement $D\mathrm{v}$ enthaltene wahre Elektricitätsmenge $\sigma D\mathrm{v}$ fortdauernd constant bleiben.

Mit andern Worten: Die in einem Isolator enthaltene wahre Elektricität wird sich stets in solcher Weise bewegen, als wäre sie mit den einzelnen substantiellen Theilchen des Isolators unlöslich verbunden.

Zur Vereinfachung der Dinge werden wir im Folgenden nur wenige Isolatoren betrachten, eigentlich nur *Luft* und *Schellack*. Dabei werden wir die *Luft* stets als völlig *unelektrisch* uns denken, nämlich annehmen, dass die in der Luft enthaltene wahre Elektricität überall $= 0$ ist, und daher, zufolge des soeben ausgesprochenen Satzes, auch fortdauernd $= 0$ bleibt.

Andererseits aber werden wir annehmen, dass in die zu betrachtende *Schellackmasse* zu Anfang (durch Reiben oder irgend welche andern Processe) irgend welches Quantum wahrer Elektricität hineingebracht ist. Diese im Schellack enthaltene wahre Elektricität ist alsdann, zu Folge des soeben ausgesprochenen Satzes, mit den einzelnen substantiellen Theilchen des Schellacks unlöslich verbunden zu denken; so dass die in irgend einem substantiellen Volumelement $D\mathrm{v}$ des Schellacks vorhandene wahre Elektricitätsmenge $\sigma D\mathrm{v}$ fortdauernd ein und dieselbe bleibt.[1])

---

1) In Wirklichkeit ist das niemals der Fall. Denn der *Schellack* ist kein vollkommener Isolator. Und gesetzt, er wäre ein vollkommener Isolator, so würde es unmöglich sein, irgend welche Quantitäten wahrer Elektricität in ihn hineinzubringen. Streng genommen würde daher zu sagen sein: Wir beschränken uns

Aus der Formel (9.) ergeben sich noch weitere Consequenzen. — Es sei innerhalb der den Weltraum erfüllenden Substanz irgend ein *substantielles Volumen* $\mathfrak{R}$ abgegrenzt, das nach Belieben Conductoren und Isolatoren in sich enthalten mag. Integrirt man nun jene Formel (9.) über alle substantiellen Elemente $D\mathrm{v}$ dieses Volums $\mathfrak{R}$, so erhält man, mittelst einer bekannten Green'schen Transformation sofort:

$$(11.)\quad \int_{\mathfrak{R}} \frac{d(\sigma D\mathrm{v})}{dt} = \int_{\mathfrak{R}} [u\cos(\nu, x) + v\cos(\nu, y) + w\cos(\nu, z)]\, Do,$$

die Integration rechter Hand ausgedehnt gedacht über alle Oberflächenelemente Do des substantiellen Raumes $\mathfrak{R}$; dabei bezeichnet ν die auf Do errichtete *innere* Normale. Das Integral linker Hand ist offenbar

$$= \frac{d}{dt}\left(\int_{\mathfrak{R}} \sigma D\mathrm{v}\right).$$

Multiplicirt man daher die Formel (11.) mit dem Zeitelement dt, so ergiebt sich:

$$(12.)\quad d\left(\int_{\mathfrak{R}} \sigma D\mathrm{v}\right) = (dt)\int_{\mathfrak{R}} [u\cos(\nu, x) + v\cos(\nu, y) + w\cos(\nu, z)]\, Do,$$

wo alsdann die linke Seite denjenigen Zuwachs vorstellt, den die im substantiellen Raume $\mathfrak{R}$ vorhandene Menge wahrer Elektricität während des Zeitelementes dt erfährt.

Liegen nun alle Oberflächenelemente Do des Raumes $\mathfrak{R}$ in *isolirender* Substanz, so sind die u, v, w für all' diese Do gleich Null [vgl. Seite 238 (30.)]; so dass alsdann die Formel (12.) sich reducirt auf:

$$(12a.)\quad d\left(\int_{\mathfrak{R}} \sigma D\mathrm{v}\right) = 0;$$

es wird also in diesem Falle die Menge der in dem substantiellen Raume $\mathfrak{R}$ vorhandenen wahren Elektricität bei fortschreitender Zeit fortdauernd *ein und dieselbe* bleiben.

Liegen hingegen, um zu einem etwas andern Fall überzugehen, jene Elemente *Do, mit Ausnahme eines einzigen*, in isolirender

---

bei unsern Untersuchungen auf einen *mässigen Zeitraum*, innerhalb dessen die dem einzelnen Volumelemente $D\mathrm{v}$ entsprechenden Producte $\sigma D\mathrm{v}$ als unveränderlich angesehen werden dürfen.

Substanz, während dieses *eine* in leitender Substanz sich befindet, so geht die Formel (12.) über in:

$$(12b.)\quad d\Big(\int_{\mathfrak{R}} \sigma\, D\mathrm{v}\Big) = (dt)\cdot[u\cos(\nu,x) + v\cos(\nu,y) + w\cos(\nu,z)]\, Do,$$

wo rechter Hand unter Do jenes *eine* in leitender Substanz gelegene Element zu verstehen ist. In diesem Fall wird daher die in $\mathfrak{R}$ enthaltene wahre Elektricitätsmenge während der Zeit dt einen gewissen Zuwachs erhalten, der genau eben so gross ist, wie diejenige Elektricitätsmenge, welche die durch dieses Element Do gehende Strömung (u, v, w) während der Zeit dt in den Raum $\mathfrak{R}$ hineinbringt.[1])

Auf Grund dieser den Formeln (12a., b.) sich anschliessenden Ueberlegungen wird man berechtigt sein, *die u, v, w als die Strömungscomponenten derjenigen Materie anzusehen, deren Dichtigkeit σ ist; d. h. sie anzusehen als die Strömungscomponenten der wahren Elektricität;* — was in Einklang ist mit unsern schon früher (Seite 224) gemachten Bemerkungen.

Schliesslich wollen wir jetzt die allgemeine Formel (9.) noch in Anwendung bringen auf einen *homogenen Conductor von überall gleicher Temperatur*. Die mit X', Y', Z' bezeichneten elektromotorischen Kräfte rühren nur her von Structurunterschieden oder Temperaturunterschieden [vgl. Seite 221], und werden daher innerhalb des genannten Conductors überall $= 0$ sein; so dass also die Strömungsgleichungen [Seite 237 (29.)] die Gestalt erhalten

$$(13.)\qquad u = \frac{\lambda}{\varepsilon}\mathfrak{X}, \quad v = \frac{\lambda}{\varepsilon}\mathfrak{Y}, \quad w = \frac{\lambda}{\varepsilon}\mathfrak{Z};$$

auch werden die hier auftretenden Grössen λ und ε *Constanten* sein, (weil der betrachtete Conductor homogen und frei von Temperaturunterschieden sein soll). Substituirt man nun in jener Formel (9.) die Werthe (13.), so erhält man:

$$\frac{d(\sigma D\mathrm{v})}{dt} = -\Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\lambda}{\varepsilon}\mathfrak{X}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\lambda}{\varepsilon}\mathfrak{Y}\Big) + \frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\lambda}{\varepsilon}\mathfrak{Z}\Big)\Big] D\mathrm{v},$$

oder, weil λ, ε *Constanten* sind:

$$\frac{d(\sigma D\mathrm{v})}{dt} = -\frac{\lambda}{\varepsilon}\Big(\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z}\Big) D\mathrm{v},$$

---

1) Es ist zu beachten, dass ν die auf Do errichtete *innere* Normale vorstellt.

oder endlich mit Rücksicht auf (1.):

$$(14.)\qquad \frac{d(\sigma D\mathrm{v})}{dt} = -\frac{4\pi\lambda}{\varepsilon}(\sigma D\mathrm{v}).$$

Dabei bezeichnet $D\mathrm{v}$ irgend ein substantielles Volumelement des betrachteten Conductors, und $\sigma D\mathrm{v}$ die augenblicklich in diesem Element enthaltene wahre Elektricitätsmenge. *Diese Elektricitätsmenge* $\sigma D\mathrm{v}$ *bestimmt sich, mittelst der Gleichung* (14.), *als Function der Zeit.* In der That gelangt man durch Integration der Gleichung (14.) zu folgender Formel:

$$(15.)\qquad \sigma D\mathrm{v} = \sigma^0 D\mathrm{v}^0 e^{-\left(\frac{4\pi\lambda}{\varepsilon}\right)(t-t^0)},$$

wo alsdann σ, $D\mathrm{v}$ und σ^0, $D\mathrm{v}^0$ die Werthe dieser Grössen in den Augenblicken t und t^0 vorstellen.

Die Constante $\frac{4\pi\lambda}{\varepsilon}$ ist für einen *vollkommenen* Conductor — und nur von solchen soll hier die Rede sein — sehr gross. Die in dem substantiellen Volumelement $D\mathrm{v}$ enthaltene wahre Elektricitätsmenge $\sigma D\mathrm{v}$ wird daher, zufolge der Formel (15.), binnen kurzer Zeit *Null* oder wenigstens *verschwindend klein* werden. Dieses schnelle Verschwinden wird [weil die wahre Elektricität, nach (12a., b) etc., nur infolge ihrer Strömungen (u, v, w) von einer Stelle zur andern wandert] seinen Grund haben in sehr starken Strömungen, vermöge deren die etwa in irgend einem Augenblick im Elemente $D\mathrm{v}$ enthaltene wahre Elektricität sehr schnell aus diesem Elemente wieder herausgeht.

Solches gilt von sämmtlichen Elementen $D\mathrm{v}$ des hier betrachteten Conductors. Die in dem ganzen Conductor enthaltene wahre Elektricitätsmenge E wird daher binnen kurzer Zeit, in Gestalt elektrischer Strömungen, aus dem Conductor heraustreten, — falls nicht derselbe etwa ringsum von einem Isolator umgeben ist, in den die elektrischen Strömungen [vgl. Seite 238 (30.)] nicht hineintreten können. Im letztern Fall wird dieser den Conductor ringsum umgebende Isolator dafür sorgen, dass jene im Conductor zu Anfang enthaltene Elektricitätsmenge E aus demselben nicht entweichen kann. Und es wird alsdann also jener Elektricitätsmenge E nichts übrig bleiben, als an der Oberfläche des Conductors, in Gestalt einer äusserst dünnen Schicht, sich niederzuschlagen. Wir gelangen somit zu folgendem Satz:

Es sei gegeben ein vollkommener Conductor der homogen und von überall gleicher Temperatur ist. Und dieser Conductor sei von einem Isolator (etwa von Luft) umgeben.

In diesem Conductor befinde sich nun irgend ein Quantum E wahrer Elektricität (in denselben hineingebracht durch irgend welche Processe, um die wir uns hier nicht weiter kümmern). Alsdann wird diese Elektricitätsmenge E binnen sehr kurzer Zeit in eine elektrische Oberflächenbelegung des Conductors sich verwandeln; so dass also nach Ablauf jener kurzen Zeit die Dichtigkeit σ der wahren Elektricität im Innern des Conductors überall = 0 sein wird.

Etwas vollständiger wird man zu sagen haben, dass nach Ablauf jener kurzen Zeit

(16.) *sowohl* σ, *wie auch* u, v, w *und* $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$

im Innern des Conductors allenthalben = 0 sind.

Denn mit dem Nullwerden von σ, d. h. mit dem Verschwinden der im Conductor enthaltenen wahren Elektricität, werden selbstverständlich die Strömungen u, u, w dieser Elektricität ebenfalls verschwinden. Sind aber die u, v, w überall im Conductor = 0, so ergiebt sich hieraus, auf Grund der Formeln (13.), sofort, dass auch die $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ im Innern des Conductors überall = 0 sind.

Wollte man, beiläufig bemerkt, die Formel (14.) auf einen *Isolator* anwenden, so würde man (weil in ihm $\lambda = 0$ ist) erhalten:

(17.) $$\frac{d(\sigma D v)}{dt} = 0;$$

was in Einklang ist mit dem früher, in (10.), erhaltenen Resultat.

§ 9.

Ueber die elektrische Vertheilung in einem System von Körpern, die theils Isolatoren theils Conductoren sind.

Die Untersuchungen des vorigen Paragraphs gelten offenbar ganz allgemein, einerlei ob die betrachtete Substanz in Ruhe oder in Bewegung sich befindet. Gegenwärtig wollen wir nun aber annehmen, dass die von uns betrachtete den ganzen Weltraum erfüllende Substanz in *Ruhe*, und überhaupt *völlig unbeweglich* sei. Und zwar mag diese Substanz aus *Luft* bestehen, innerhalb deren (wie einzelne Inseln) ein *vollkommener Conductor*, und eine gegebene *Schellackmasse* gelegen sind. Jeder der drei Körper (Schellack, Luft und Conductor) sei an und für sich betrachtet, d. i. ab-

gesehen von den *Uebergangsschichten*, völlig homogen; so dass also die Dielektricitätscoefficienten ε der drei Körper drei gegebene *Constanten* sind. Zwischen diesen drei Constanten werden stetige Verbindungen stattfinden durch diejenigen Werthe, welche ε in den Uebergangsschichten besitzt. Und es werden also die Werthe von ε in den Uebergangsschichten als stetige Functionen der Coordinaten anzusehen sein.

Wir halten fest an unseren schon früher über die Isolatoren gemachten Annahmen [vgl. Seite 271]. Demgemäss ist die wahre elektrische Dichtigkeit σ in der *Luft* allenthalben und fortdauernd $= 0$, andererseits aber im *Schellack* eine unveränderliche Function der Coordinaten, die etwa mit $f(x, y, z)$ bezeichnet werden mag.

Was ferner den *Conductor* anbelangt, so mag derselbe von Hause aus (durch irgend welche Processe, um die wir uns nicht weiter kümmern) mit einer gewissen wahren Elektricitätsmenge E_1 geladen sein. In kurzer Zeit wird der *elektrische Gleichgewichtszustand* eintreten; und nach Ablauf dieser kurzen Zeit wird jene Elektricitätsmenge E_1 auf der *Oberfläche* des Conductors abgelagert sein in Gestalt einer äusserst dünnen elektrischen Schicht; sodass alsdann σ im Innern des Conductors überall $= 0$ ist [vgl. den Satz Seite 275].

Nach Eintritt des elektrischen Gleichgewichtszustandes gelten also folgende Formeln:

(1.)

im Schellack $\mathfrak{S}$:	*in der Luft* $\mathfrak{L}$:	*im Conductor* $\mathfrak{C}$:
$\sigma = f(x, y, z)$	$\sigma = 0$	$\sigma = 0$

Dabei mögen, wie in dieser Tabelle schon angedeutet ist, Schellack, Luft und Conductor resp. mit den Buchstaben $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{C}$ bezeichnet sein. Was die aus wahrer Elektricität bestehende elektrische Oberflächenbelegung des Conductors anbelangt, so mag die *Flächendichtigkeit* derselben mit S bezeichnet werden; sodass also SDo die auf einem Oberflächenelement Do des Conductors vorhandene wahre Elektricität vorstellt. Alsdann ist offenbar:

$$(2.) \qquad \int_{\mathfrak{C}} S\,Do = E_1,$$

die Integration ausgedehnt gedacht über alle Oberflächenelemente Do des (mit $\mathfrak{C}$ bezeichneten) Conductors. Die dem Conductor von Hause aus zuertheilte elektrische Ladung E_1 ist gegeben; und es

handelt sich nun namentlich um die nähere Bestimmung der in Rede stehenden elektrischen Oberflächenbelegung des Conductors, d. h. um die Bestimmung der Flächendichtigkeit S.

Möglicherweise wird übrigens auf der Schellackoberfläche ebenfalls eine elektrische Belegung vorhanden sein; und sicherlich wird das der Fall sein, wenn der Schellack durch *Reiben* elektrisch gemacht worden ist. Diese Belegung aber wird, weil sie in völlig *isolirender* Substanz, nämlich in der Uebergangsschicht von Schelllack und Luft, sich vorfindet, völlig *unbeweglich* sein; [denn die Strömungscomponenten u, v, w der hier in Rede stehenden wahren Elektricität sind in isolirender Substanz stets $= 0$, vgl. (30.) Seite 238]. Die Flächendichtigkeit S der auf der Schellackoberfläche vorhandenen wahren elektrischen Belegung ist daher anzusehen als eine von Hause aus gegebene Function der Coordinaten, die etwa mit $F(x, y, z)$ bezeichnet werden mag. Demgemäss haben wir jetzt folgendes Bild vor uns:

(3.)

im Schellack $\mathfrak{S}$	a. d. Grenze	*in der Luft* $\mathfrak{L}$	a. d. Grenze	*im Conductor* $\mathfrak{C}$
$\sigma = f(x, y, z)$	$S = F(x, y, z)$	$\sigma = 0$	$S = ?$	$\sigma = 0$

All' diese Dichtigkeiten σ und S beziehen sich auf die *wahre* Elektricität. Wir gehen jetzt über zur Untersuchung der etwa vorhandenen *freien* Elektricitäten, deren Dichtigkeiten mit (σ) und (S) zu bezeichnen sein werden. — Nach dem allgemeinen Satz Seite 269 (4.) ist im Innern des Schellacks $(\sigma) = \frac{\sigma}{\varepsilon}$, also nach der Tabelle (3.): $(\sigma) = \frac{f(x, y, z)}{\varepsilon}$. Ebenso ist im Innern der Luft $(\sigma) = \frac{\sigma}{\varepsilon}$, also nach der Tabelle (3.): $(\sigma) = 0$. Und ebenso ergiebt sich endlich auch im Innern des Conductors: $(\sigma) = 0$. Demgemäss ist die Tabelle (3.) folgendermassen zu vervollständigen[1]):

(4.)

ε		ε_0		ε_1
im Schellack $\mathfrak{S}$	a. d. Grenze	*in der Luft* $\mathfrak{L}$	a. d. Grenze	*im Conductor* $\mathfrak{C}$
$\sigma = f(x, y, z)$	$S = F(x, y, z)$	$\sigma = 0$	$S = ?$	$\sigma = 0$
$(\sigma) = \frac{f(x, y, z)}{\varepsilon}$	$(S) = ?$	$(\sigma) = 0$	$(S) = ?$	$(\sigma) = 0$

1) Durch die *oberste Zeile* dieser Tabelle (4.) wird angedeutet, dass die constanten Dielektricitätscoefficienten des homogenen *Schellacks*, der homogenen *Luft*, und des homogenen *Conductors* resp. mit ε, ε_0 und ε_1 bezeichnet sein sollen.

Drei Grössen S, (S), (S) sind hier mit Fragezeichen versehen, weil wir über ihre Werthe einstweilen noch völlig im Unklaren sind. Vorläufig haben wir zur Bestimmung dieser *drei Unbekannten* nur *eine* Gleichung, d. i. die schon in (2.) aufgeführte:

$$(5.)\qquad \int_{\mathfrak{C}} S\,Do = E_1,$$

wo E_1 gegeben ist. Sehr bald indessen werden wir für jene drei Unbekannten noch eine *zweite* Gleichung erhalten. Sie findet statt zwischen den beiden der Conductoroberfläche zugehörigen Grössen S, (S), und lautet:

$$(6.)\qquad (S) = \frac{1}{\varepsilon_0} S,$$

wo ε_0 den constanten Dielektricitätscoefficienten der Luft vorstellt.

Um näher auf die Dinge einzugehen, müssen wir zurückgreifen zu den allgemeinen Formeln Seite 268 (1.), (2.) und (5.), (6.). Dieselben lauten:

$$(7.)\qquad 4\pi\sigma = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z},$$

$$(8.)\qquad 4\pi(\sigma) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon},$$

und

$$(9.)\qquad 4\pi\int_{\mathfrak{R}} \sigma\,D\mathrm{v} = \int_{\mathfrak{R}} [\mathfrak{X}\cos(n,x) + \mathfrak{Y}\cos(n,y) + \mathfrak{Z}\cos(n,z)]\,Do,$$

$$(10.)\qquad 4\pi\int_{\mathfrak{R}} (\sigma)\,D\mathrm{v} = \int_{\mathfrak{R}} \frac{1}{\varepsilon}[\mathfrak{X}\cos(n,x) + \mathfrak{Y}\cos(n,y) + \mathfrak{Z}\cos(n,z)]\,Do,$$

die beiden letzten Formeln beziehen sich auf einen ganz *beliebig* construirten Raum $\mathfrak{R}$; dabei ist $D\mathrm{v}$ ein Volum-, und Do ein Oberflächenelement des Raumes $\mathfrak{R}$; endlich ist n die auf Do errichtete *äussere* Normale.

Wir betrachten nun die dünne Uebergangsschicht zwischen Schellack und Luft, und zerlegen dieselbe in lauter kleine *scheibenförmige Elemente*. Jedes solches Element mag begrenzt gedacht werden von zwei einander gegenüberliegenden Flächenelementen Do und Do_0, und überdies von einer verschwindend schmalen gürtelförmigen Fläche; es soll nämlich die Breite dieser gürtelförmigen Fläche (d. i. die Dicke der betrachteten Uebergangsschicht) als unendlich klein angesehen werden im Vergleich mit den linearen Dimensionen jener beiden Elemente Do und Do_0. Bringen wir nun die Formeln (9.) in Anwendung auf den Innenraum $\mathfrak{R}$ eines solchen scheibenförmigen Elementes (Do, Do_0), so erhalten wir

unter Vernachlässigung jener verschwindend schmalen gürtelförmigen Fläche, folgende Gleichung:

$$4\pi \int_{\mathfrak{R}} \sigma D\mathrm{v} = \left\{ \begin{array}{l} + [\mathfrak{X} \cos (n, x) + \mathfrak{Y} \cos (n, y) + \mathfrak{Z} \cos (n, z)] \, Do \\ + [\mathfrak{X}_0 \cos (n_0, x) + \mathfrak{Y}_0 \cos (n_0, y) + \mathfrak{Z}_0 \cos (n_0, z)] \, Do_0 \end{array} \right\}.$$

Dabei mögen, um die Vorstellung zu fixiren, Do, n, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ dem *Schellack* und Do_0, n_0, $\mathfrak{X}_0$, $\mathfrak{Y}_0$, $\mathfrak{Z}_0$ der *Luft* angehören; sodass also die auf Do errichtete Normale n in den Schellack, uud die auf Do_0 errichtete Normale n_0 in die Luft hineingeht. Vrgl. die beistehende Figur.

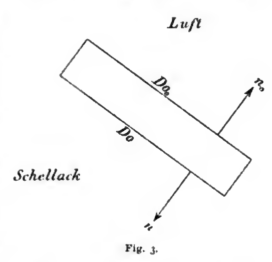


Fig. 3.

Die linke Seite unserer Formel ist offenbar, abgesehen vom Factor 4π, nichts anderes, als die in dem scheibenförmigen Elemente (Do, Do_0) enthaltene wahre Elektricitätsmenge: SDo, wo S dieselbe Bedeutung hat wie in (3.), (4.). Ueberdies ist $Do = Do_0$; sodass also unsere Formel folgende Gestalt annimmt:

$$(11.) \quad 4\pi S Do = \left\{ \begin{array}{l} + [\mathfrak{X} \cos (n, x) + \mathfrak{Y} \cos (n, y) + \mathfrak{Z} \cos (n, z)] \\ + [\mathfrak{X}_0 \cos (n_0, x) + \mathfrak{Y}_0 \cos (n_0, y) + \mathfrak{Z}_0 \cos (n_0, z)] \end{array} \right\} Do.$$

Ebenso wie diese Gleichung (11.) aus der Formel (9.) entstanden ist, in genau derselben Weise wird man offenbar aus der Formel (10.) folgende Gleichung erhalten:

$$(12.) \quad 4\pi (S) \, Do = \left\{ \begin{array}{l} + \frac{1}{\varepsilon} [\mathfrak{X} \cos (n, x) + \mathfrak{Y} \cos (n, y) + \mathfrak{Z} \cos (n, z)] \\ + \frac{1}{\varepsilon_0} [\mathfrak{X}_0 \cos (n_0, x) + \mathfrak{Y}_0 \cos (n_0, y) + \mathfrak{Z}_0 \cos (n_0, z)] \end{array} \right\} Do.$$

Und ebenso wie in (11.) das Product SDo die Masse der auf dem Elemente Do vorhandenen *wahren* Elektricität vorstellt, ebenso ist in (12.) unter $(S) Do$ die auf diesem Elemente Do vorhandenen Menge *freier* Elektricität zu verstehen. Mit anderen Worten: *Es sind S und (S) die betreffenden elektrischen Flächendichtigkeiten.* Alles dies bezieht sich auf die Oberfläche des *Schellacks*.

Mit (11.), (12.) analoge Formeln werden sich nun offenbar auch ergeben für die Oberfläche des *Conductors*; nur werden dieselben bedeutend einfacher sein. Wir wissen nämlich bereits, dass,

zur Zeit des hier betrachteten Gleichgewichtszustandes, die Grössen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ im Innern des Conductors überall $=0$ sind [vgl. Seite 275 (16.)]. Bezeichnet daher Do irgend ein Element der Conductoroberfläche, so werden für dieses Element Do, statt der Gleichungen (11.), (12.), sich folgende Gleichungen ergeben:

$$(13.)\quad 4\pi S Do = [\mathfrak{X}_0 \cos(n_0, x) + \mathfrak{Y}_0 \cos(n_0, y) + \mathfrak{Z}_0 \cos(n_0, z)]\, Do,$$

$$(14.)\quad 4\pi (S) Do = \frac{1}{\varepsilon_0} [\mathfrak{X}_0 \cos(n_0, x) + \mathfrak{Y}_0 \cos(n_0, y) + \mathfrak{Z}_0 \cos(n_0, z)]\, Do,$$

wo ε_0, ebenso wie in (12.), den constanten Dielektricitätscoefficienten der *Luft* vorstellt. — Aus (13.), (14.) folgt sofort:

$$(15.)\qquad (S) = \frac{1}{\varepsilon_0} S;$$

und hiermit ist der Beweis erbracht für die Richtigkeit jener schon in (6.) *angegebenen Formel.*

Noch sei Folgendes bemerkt: Integrirt man die Formel (15.) über alle Elemente Do der Conductoroberfläche, so erhält man:

$$(16.)\qquad \int_{\mathfrak{C}} (S)\, Do = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\mathfrak{C}} S Do;$$

was in vollem Einklang steht mit dem allgemeinen Satz Seite 269 (unten). Denn für den Conductor sind [vgl. die Tabelle (4.)] σ und (σ) beide $=0$, sodass also die in (16.) auftretenden Integrale

$$(17.)\qquad \int_{\mathfrak{C}} (S) Do \quad \text{und} \quad \int_{\mathfrak{C}} S Do$$

nichts Andres sind, als die Gesammtmengen der im Conductor vorhandenen freien und wahren Elektricität. — Noch sei bemerkt, dass man die Formel (16.) mit Rücksicht auf (5.) auch so schreiben kann:

$$(18.)\qquad \int_{\mathfrak{C}} (S)\, Do = \frac{E_1}{\varepsilon_0}.$$

Was wir hier begonnen haben, nämlich die nähere Bestimmung der drei Dichtigkeiten S, (S), (S), [vgl. (4.)], werden wir später fortsetzen, und zum Abschluss bringen. Einstweilen aber wird es gut sein, zuvörderst uns mit dem *Magnetismus* zu beschäftigen.

§ 10.

Ueber den wahren und den freien Magnetismus.

Wir haben in (A.) Seite 220 unter τ und (τ) folgende Grössen verstanden:

$$\text{(I.)} \qquad \tau = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial z}\right),$$

$$\text{(II.)} \qquad (\tau) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathfrak{L}}{\mu} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{M}}{\mu} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{N}}{\mu}\right).$$

Die so bestimmten Grössen τ, (τ) haben wir die magnetischen Dichtigkeiten genannt, und zwar τ die Dichtigkeit des *wahren* und (τ) die des *freien* Magnetismus. Aus diesen Formeln (I.), (II.) ergiebt sich nun leicht [vgl. Seite 268 den Uebergang von (1.), (2.) zu (4.)], dass im Innern einer *homogenen* Substanz stets

$$\text{(IV.)} \qquad (\tau) = \frac{\tau}{\mu}, \quad \text{d. i.:} \quad \tau = \mu(\tau) \text{ sein wird;}$$

sodass man also sagen kann[1]): *Im Innern einer homogenen Substanz unterscheiden sich die beiderlei Dichtigkeiten τ und (τ) von einander nur durch den constanten Factor μ.*

Denkt man sich innerhalb der den Weltraum erfüllenden Substanz einen ganz beliebigen Raum $\mathfrak{R}$ abgegrenzt, und integrirt man sodann die Formeln (I.), (II.) über alle Volumelemente $D\mathrm{v}$ dieses Raumes $\mathfrak{R}$, so erhält man sofort:

$$\text{(V.)} \quad \int_{\mathfrak{R}} \tau\, D\mathrm{v} = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathfrak{R}} [\mathfrak{L}\cos(n,x) + \mathfrak{M}\cos(n,y) + \mathfrak{N}\cos(n,z)]\, Do,$$

$$\text{(VI.)} \quad \int_{\mathfrak{R}} (\tau)\, D\mathrm{v} = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathfrak{R}} \frac{1}{\mu}[\mathfrak{L}\cos(n,x) + \mathfrak{M}\cos(n,y) + \mathfrak{N}\cos(n,z)]\, Do,$$

wo Do ein Oberflächenelement des Raumes $\mathfrak{R}$, und n die auf Do errichtete *äussere* Normale vorstellen.

Hat nun μ an der Oberfläche des Raumes $\mathfrak{R}$ allenthalben ein und denselben constanten Werth, so kann man in der Formel (VI.) den constanten Divisor μ *vor* das Integralzeichen setzen, und gelangt alsdann, durch Vergleichung der beiden Formeln (V.) und (VI.), zu folgendem Resultat:

$$\text{(VII.)} \qquad \int_{\mathfrak{R}} (\tau)\, D\mathrm{v} = \frac{1}{\mu}\int_{\mathfrak{R}} \tau\, D\mathrm{v}.$$

---

1) Die Nummern (I.), (II.), . . . (IX.) des gegenwärtigen Paragraphs correspondiren vollständig mit den Nummern (1.), (2.), . . . (9.) des § 8 Seite 268. Weiterhin aber sind die Wege dieser beiden Paragraphe von einander verschieden.

Diese Formel enthält folgenden Satz:

Innerhalb der den Weltraum erfüllenden Substanz sei irgend ein Raum $\mathfrak{R}$ abgegrenzt, und es sei völlig dahin gestellt, ob die Substanz innerhalb $\mathfrak{R}$ homogen oder unhomogen ist. Jedoch sei vorausgesetzt, dass der Magnetisirungscoefficient μ an der Oberfläche von $\mathfrak{R}$ allenthalben ein und denselben constanten Werth besitzt:

Alsdann werden die innerhalb $\mathfrak{R}$ vorhandenen Quantiäten von wahrem und freiem Magnetismus nur durch den Factor μ sich von einander unterscheiden; dabei ist unter diesem μ jener constante Werth zu verstehen, den der Magnetisirungscoefficient an der Oberfläche des Raumes $\mathfrak{R}$ hat.

Wir wollen nun näher eingehen auf τ d. i. auf die *wahre* magnetische Dichtigkeit, und bedienen uns zu diesem Zweck der zweiten Gruppe der HERTZ'schen Differentialgleichungen. Diese Gruppe lautet folgendermassen [vgl. Seite 236 (22.), und (26.)]:

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} + (\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{N}_3)\,\alpha + (\mathfrak{L}\beta - \mathfrak{M}\alpha)_2 + (\mathfrak{L}\gamma - \mathfrak{N}\alpha)_3 = -\frac{1}{A}\left[\left(\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right)_2 - \left(\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\right)_3\right],$$

$$\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} + (\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{N}_3)\,\beta + (\mathfrak{M}\gamma - \mathfrak{N}\beta)_3 + (\mathfrak{M}\alpha - \mathfrak{L}\beta)_1 = -\frac{1}{A}\left[\left(\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\right)_3 - \left(\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right)_1\right],$$

$$\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t} + (\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{N}_3)\,\gamma + (\mathfrak{N}\alpha - \mathfrak{L}\gamma)_1 + (\mathfrak{N}\beta - \mathfrak{M}\gamma)_2 = -\frac{1}{A}\left[\left(\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\right)_1 - \left(\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\right)_2\right].$$

Differenzirt man diese drei Formeln nach x, y, z und addirt, so ergibt sich mit Rücksicht auf (I.):

$$4\pi\left[\frac{\partial \tau}{\partial t} + \tau_1\alpha + \tau_2\beta + \tau_3\gamma\right] + 4\pi\tau(\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3) = 0,$$

d. i.

$$\left[\frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial \tau}{\partial x}\alpha + \frac{\partial \tau}{\partial y}\beta + \frac{\partial \tau}{\partial z}\gamma\right] + \tau\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right) = 0;$$

wofür man [mit Hinblick auf Seite 226 (M_1)] auch schreiben kann:

(VIII.) $$\frac{d\tau}{dt} + \tau\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right) = 0.$$

An der betrachteten Stelle (x, y, z) mag nun ein kleines *substantielles Volumelement* Dv abgegrenzt werden. Alsdann ergibt sich aus (VIII.) durch Multiplication mit Dv:

$$\frac{d\tau}{dt} D\mathrm{v} + \tau\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right) D\mathrm{v} = 0,$$

oder [mit Rücksicht auf Seite 228 (P.)]:

$$\frac{d\tau}{dt} D\mathrm{v} + \tau\frac{d(D\mathrm{v})}{dt} = 0,$$

d. i.:

(IX.) $$\frac{d(\tau D\mathfrak{v})}{dt} = 0; \text{ —}$$

eine Formel, die folgenden Satz enthält:

Das Product $\tau D\mathfrak{v}$ besitzt für irgend ein substantielles Element $D\mathfrak{v}$ fortdauernd ein und denselben Werth. Mit andern Worten: Der wahre Magnetismus wird sich stets in solcher Weise bewegen, als wäre er mit den einzelnen substantiellen Theilchen unlöslich verbunden.

Dieser Satz (IX.) ist, wie aus seiner hier gegebenen Ableitung hervorgeht, ganz allgemein gültig, einerlei ob die betrachtete Substanz homogen oder anhomogen ist. Und es wird daher dieser Satz z. B. auch gelten für die sogenannten *Uebergangsschichten*. Nimmt man aber für $D\mathfrak{v}$ das scheibenförmige Element δDo einer solchen Uebergangsschicht (wo δ die Dicke der Uebergangsschicht, und Do das betreffende Flächenelement sein sollen), so erhält die Formel (IX.) folgende Gestalt:

$$\frac{d(\tau\delta Do)}{dt} = 0.$$

Hierfür aber kann man schreiben:

(IXa.) $$\frac{d(TDo)}{dt} = 0,$$

wo alsdann $T = \tau\delta$ die betreffende *Flächendichtigkeit* vorstellt. Diese Formel (IXa.) repräsentirt offenbar nur einen *Specialfall* obigen Satzes; sie sagt aus, dass die in einem Elemente einer Uebergangsschicht vorhandene Menge von wahrem Magnetismus fortdauernd *ein und dieselbe* bleibt. — Für unsere weiteren Untersuchungen wird es zweckmässig sein, die augenblicklichen Betrachtungen noch ein wenig weiter fortzusetzen, und zwar speciell für den Fall, dass die den Weltraum erfüllende Substanz sich in *völliger Ruhe* befindet.

Voraussetzung der substantiellen Ruhe. — Für diesen Fall bleiben die substantiellen Elemente $D\mathfrak{v}$ und Do ihrer Lage und Gestalt nach *constant:* sodass also in diesem Fall die Formeln (IX.) und (IXa.) übergehen in:

(A.) $$\frac{d\tau}{dt} = 0 \text{ und } \frac{dT}{dt} = 0.$$

Es werden also τ und T von der Zeit t unabhängig, und nur noch Functionen der Coordinaten sein:

(B.) $$\tau = f(x, y, z) \text{ und } T = F(x, y, z).$$

Welche Werthe haben nun diese Functionen?

Wir unterscheiden zwischen *temporär magnetischen* Körpern (wie Luft, weiches Eisen, Wismuth etc.) und zwischen *permanent magnetischen* Körpern (harter Stahl). Genauer ausgedrückt: Wir beschränken uns bei unsern Untersuchungen auf die durch diese Namen angedeuteten extremen, und eigentlich nur idealen Fälle.

Die temporär magnetischen Körper sind solche, die nur vorübergehend, nur zeitweise wahren Magnetismus in sich enthalten, also Körper, für welche es auch Zeiten giebt, in denen ihre magnetischen Dichtigkeiten τ und T allenthalben $= 0$ sind. Nach (B.) sind aber τ und T nur Functionen der Coordinaten, also von der Zeit ganz unabhängig. Folglich müssen sie, weil sie zu gewissen Zeiten $= 0$ sind, *fortdauernd* $= 0$ sein. Kurz, für die temporär magnetischen Körper gelten die Formeln:

(C.) $$\tau = 0 \quad \text{und} \quad T = 0.$$

D. h. die Formel $\tau = 0$ gilt für das Innere des temporär magnetischen Körpers; und die Formel $T = 0$ für die Uebergangsschicht zwischen je zwei solchen Körpern; so dass also in diesen Körpern und in ihren gegenseitigen Uebergangsschichten niemals und nirgends eine Spur von wahrem Magnetismus vorhanden sein kann.

Die permanent magnetischen Körper sind solche, in denen wirklich wahrer Magnetismus und zwar in unveränderlicher Vertheilung enthalten ist. Was die Art und Weise dieser unveränderlichen Vertheilung betrifft, so wollen wir diejenigen Vorstellungen acceptiren, welche Poisson in Betreff der von ihm schlechtweg als Magnetismus bezeichneten Materie uns hinterlassen hat. Nur wollen wir jene ausserordentlich vielen Magnetpole, die nach Poisson in irgend einem Volumelement eines permanent magnetischen Körpers enthalten sein sollen, nicht als mathematische Puncte, sondern als äusserst kleine *Kugeln* uns denken[1]), und annehmen, dass die Dichtigkeit τ des wahren Magnetismus in diesen einzelnen Kugeln (theils positive, theils negative) endliche

1) Diese ausserordentlich geringe Abänderung der Poisson'schen Vorstellungen (Ersetzung der punctuellen Pole durch kugelförmige Pole) dürfte hier wohl zum ersten Mal proponirt werden. Trotz ihrer scheinbaren Geringfügigkeit dürfte diese Abänderung von Bedeutung sein, und vielleicht dazu bestimmt sein, über manche Schwierigkeiten, mit denen man eben so lange wie vergeblich gekämpft hat, glücklich hinweg zu führen. Dabei ist es übrigens einerlei, ob man jene Pole als Kugeln oder als kleine Ellipsoide oder überhaupt als kleine Körper von beliebiger Gestalt sich denkt.

Werthe hat, während sie zwischen den Kugeln überall $= 0$ ist. Für einen permanent magnetischen Körper wird somit jene blos von den Coordinaten abhängende Function (B.):

(D.) $$\tau = f(x, y, z)$$

als eine *abtheilungsweise stetige* Function zu bezeichnen sein.

Auch werden wir mit Poisson annehmen, dass in einem permanent magnetischen Körper stets eben so viel positiver wie negativer Magnetismus enthalten ist; so dass also die Formel gilt:

(E.) $$\int_{\mathfrak{S}} \tau\, D\mathrm{v} = 0\,,$$

die Integration ausgedehnt gedacht über alle Volumelemente des Körpers; dieser permanent magnetische Körper (etwa ein Stahlmagnet) ist hier mit $\mathfrak{S}$ bezeichnet zu denken.

Auch werden wir der Poisson'schen Vorstellung beipflichten, dass diese Formel (E.) nicht nur für den ganzen Körper $\mathfrak{S}$, sondern ebenso auch für jedwegen *Theil* $\mathfrak{T}$ desselben Gültigkeit hat, so dass also

(F.) $$\int_{\mathfrak{T}} \tau\, D\mathrm{v} \text{ ebenfalls } = 0$$

ist, wie klein der Theil $\mathfrak{T}$ auch sein mag, falls nur noch die Anzahl der in ihm enthaltenen (kugelförmigen) Magnetpole als eine ausserordentlich grosse angesehen werden darf.

Wir denken uns jetzt den permanent magnetischen Körper $\mathfrak{S}$ ringsum von Luft umgeben. Ebenso wie im Innern von $\mathfrak{S}$ das τ eine unveränderliche Function der Coordinaten ist, ebenso wird Gleiches auch gelten von der zwischen dem Körper $\mathfrak{S}$ und der Luft vorhandenen Uebergangsschicht, d. h. von dem dieser Uebergangsschicht zugehörigen T. Was diese beiden unveränderlichen Functionen

(G.) $$\tau = f(x, y, z) \quad \text{und} \quad T = F(x, y, z)$$

anbelangt, so wird die erstere (wie schon erwähnt) *abtheilungsweise stetig, also überall endlich* sein; und ebenso wird auch die letztere wenigstens *überall endlich* sein.

Bemerkung. — Wahrscheinlich wird diese letztere Function $T = F(x, y, z)$ überall $= 0$ sein, oder wenigstens von solcher Beschaffenheit sein, dass das über jedweden *Theil* $\mathfrak{T}$ der Oberfläche ausgedehnte Integral

(H.) $$\int_{\mathfrak{T}} T\, Do = 0 \quad .$$

ist, falls nur die Dimensionen dieses Theiles $\mathfrak{T}$ nicht gar zu klein sind.

Immerhin aber dürfte es, der grössern Sicherheit willen, gut sein, den eigentlichen Werth dieser unveränderlichen Function $T = F(x, y, z)$ einstweilen *in suspenso* zu lassen. Im weitern Verlauf unserer Untersuchungen wird es uns ja in jedem Augenblick frei stehen, dieser Function $T = F(x, y, z)$ je nach Bedarf, irgend einen *bestimmten* Werth, also z. B. auch den Werth *Null* beizulegen.

§ 11.

Ueber die magnetische Vertheilung in einem System von Körpern, die theils permanentmagnetischer, theils temporärmagnetischer Natur sind.

Die den Weltraum erfüllende Substanz sei in *Ruhe* und überhaupt *völlig unbeweglich*. Und zwar mag dieselbe aus *Luft* bestehen, innerhalb deren (wie Inseln) ein *unveränderlicher Stahlmagnet* und irgend eine *weiche Eisenmasse* sich vorfinden. Dabei mögen alle drei Körper, abgesehen von ihren gegenseitigen Uebergangsschichten, als völlig *homogen* angesehen werden; so dass also der Magnetisirungscoefficient μ für jeden der drei Körper eine *Constante* ist. Zwischen diesen drei Constanten werden stetig Verbindungen durch diejenigen Werthe hergestellt, welche μ in den Uebergangsschichten besitzt. U. s. w.

Im Innern, respective an der Oberfläche des permanenten Stahlmagneten ist nun $\tau = f(x, y, z)$ und $T = F(x, y, z)$ wo $f(x, y, z)$ und $F(x, y, z)$ *unveränderliche Functionen* vorstellen [vgl. (G.) Seite 285]. Ferner wird innerhalb der Luft $\tau = 0$, innerhalb des Eisens ebenfalls $\tau = 0$, und an der Oberfläche des Eisens ebenfalls $T = 0$ sein [vgl. (C.) Seite 284]. Dies zusammenstellend erhalten wir folgende Tabelle, in welcher der Stahlmagnet, die Luft und das Eisen respective mit $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{E}$ bezeichnet sind.

(1.)

Stahlmagnet $\mathfrak{S}$	a. d. Grenze	*Luft* $\mathfrak{L}$	a. d. Grenze	*Eisen* $\mathfrak{E}$
$\tau = f(x, y, z)$	$T = F(x, y, z)$	$\tau = 0$	$T = 0$	$\tau = 0$

All' diese Angaben beziehen sich auf den *wahren* Magnetismus. Was den *freien* Magnetismus anbelangt, so können wir Gebrauch machen von dem allgemeinen Satz (IV.) Seite 281. Zufolge dieses Satzes ist im Innern des Stahlmagneten: $(\tau) = \frac{\tau}{\mu}$, also, falls man

für τ die in (1.) angegebenen Werthe substituirt, $(\tau) = \frac{f(x, y, z)}{\mu}$. Nach eben demselben Satz ergiebt sich in der Luft: $(\tau) = 0$, und im Eisen ebenfalls $(\tau) = 0$; so dass also die Tabelle (1.) folgendermassen zu vervollständigen ist[1]):

(2.)

μ		μ_0		μ_1
Stahlmagnet $\mathfrak{S}$	a. d. Grenze	*Luft* $\mathfrak{L}$	a. d. Grenze	*Eisen* $\mathfrak{E}$
$\tau = f(x, y, z)$	$T = F(x, y, z)$	$\tau = 0$	$T = 0$	$\tau = 0$
$(\tau) = \frac{f(x, y, z)}{\mu}$	$(T) = ?$	$(\tau) = 0$	$(T) = ?$	$(\tau) = 0$

Es ist also Alles bekannt, bis auf die Grössen (T), (T). Zur näheren Bestimmung dieser beiden Unbekannten (T), (T) können wir nun einen ähnlichen Weg einschlagen, wie im vorletzten Paragraph bei den dortigen Untersuchungen über die elektrische Vertheilung. Dabei wird Gebrauch zu machen sein von den allgemeinen Formeln (I.), (II.) und (V.), (VI.) Seite 281, d. i. von den Formeln:

(3) $$4\pi\tau = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial z},$$

(4.) $$4\pi(\tau) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathfrak{L}}{\mu} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{M}}{\mu} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{N}}{\mu},$$

und:

(5.) $$4\pi\int_{\mathfrak{R}} \tau\, Dv = \int_{\mathfrak{R}} [\mathfrak{L}\cos(n, x) + \mathfrak{M}\cos(n, y) + \mathfrak{N}\cos(n, z)]\, Do,$$

(6.) $$4\pi\int_{\mathfrak{R}} (\tau)\, Dv = \int_{\mathfrak{R}} \frac{1}{\mu}[\mathfrak{L}\cos(n, x) + \mathfrak{M}\cos(n, y) + \mathfrak{N}\cos(n, z)]\, Do;$$

die beiden letzten Formeln beziehen sich auf einen ganz *beliebig* construirten Raum $\mathfrak{R}$; dabei ist Dv ein Volum-, und Do ein Oberflächenelement dieses Raumes $\mathfrak{R}$; endlich n die auf Do errichtete *äussere* Normale.

Denken wir uns nun (ebenso wie im vorletzten Paragraph) die Uebergangsschichten in lauter kleine *scheibenförmige Elemente* zerlegt, und betrachten wir unter diesen scheibenförmigen Elementen zunächst diejenigen, welche der zwischen dem Stahlmagneten und der Luft vorhandenen Uebergangsschicht angehören,

1) Was die *oberste Zeile* dieser Tabelle anbelangt, so sollen daselbst unter μ, μ_0 und μ_1 die constanten Magnetisirungscoefficienten des homogenen *Stahlmagneten*, der homogenen *Luft* und des homogenen *Eisens* verstanden werden.

so erhalten wir, durch Anwendung der Formeln (5.), (6.) auf den Innenraum $\mathfrak{R}$ eines solchen Elementes, folgende Gleichungen:

$$(7.)\quad 4\pi T Do = \left\{ \begin{array}{l} +[\mathfrak{L}\cos(n,x)+\mathfrak{M}\cos(n,y)+\mathfrak{N}\cos(n,z)] \\ +[\mathfrak{L}_0\cos(n_0,x)+\mathfrak{M}_0\cos(n_0,y)+\mathfrak{N}_0\cos(n_0,z)] \end{array} \right\} Do,$$

$$(8.)\quad 4\pi(T) Do = \left\{ \begin{array}{l} +\frac{1}{\mu}[\mathfrak{L}\cos(n,x)+\mathfrak{M}\cos(n,y)+\mathfrak{N}\cos(n,z)] \\ +\frac{1}{\mu_0}[\mathfrak{L}_0\cos(n_0,x)+\mathfrak{M}_0\cos(n_0,y)+\mathfrak{N}_0\cos(n_0,z)] \end{array} \right\} Do.$$

Hier bezeichnet Do irgend ein Element der Stahlmagnetoberfläche. Ferner beziehen sich n, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, μ auf den Stahlmagnet, und n_0, $\mathfrak{L}_0$, $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{N}_0$, μ_0 auf die Luft; der Art, dass die Normale n in den Stahlmagneten, hingegen die Normale n_0 in die Luft hineingeht.

Betrachten wir andererseits diejenigen scheibenförmigen Elemente, welche der zwischen dem Eisen und der Luft vorhandenen Uebergangsschicht angehören, so gelangen wir, durch Anwendung der Formeln (5.), (6.) auf ein solches Element, zu folgenden Gleichungen:

$$(9.)\quad 4\pi T Do = \left\{ \begin{array}{l} +[\mathfrak{L}_1\cos(n_1,x)+\mathfrak{M}_1\cos(n_1,y)+\mathfrak{N}_1\cos(n_1,z)] \\ +[\mathfrak{L}_0\cos(n_0,x)+\mathfrak{M}_0\cos(n_0,y)+\mathfrak{N}_0\cos(n_0,z)] \end{array} \right\} Do,$$

$$(10.)\quad 4\pi(T) Do = \left\{ \begin{array}{l} +\frac{1}{\mu_1}[\mathfrak{L}_1\cos(n_1,x)+\mathfrak{M}_1\cos(n_1,y)+\mathfrak{N}_1\cos(n_1,z)] \\ +\frac{1}{\mu_0}[\mathfrak{L}_0\cos(n_0,x)+\mathfrak{M}_0\cos(n_0,y)+\mathfrak{N}_0\cos(n_0,z)] \end{array} \right\} Do.$$

Hier bezeichnet Do irgend ein Element der Eisenoberfläche. Ferner beziehen sich rechter Hand die mit den Indices 1 und 0 versehenen Buchstaben respective auf Eisen und Luft; der Art, dass z. B. die Normale n_1 in das Eisen, hingegen die Normale n_0 in die Luft hineingeht.

Im Ganzen sind die Betrachtungen des gegenwärtigen Paragraphs nur vorbereitender Natur. Sie werden uns aber später, wenn wir das Problem der Berechnung der beiden Unbekannten (T), (T) von neuem aufnehmen, von wesentlichem Nutzen sein.

§. 12.

Die Hertz'schen Differentialgleichungen werden einer gewissen Transfiguration unterworfen.

Die erste Gruppe der Hertz'schen Differentialgleichungen [Seite 236 (21.), (22.)] lautet:

$$(1.)\quad\begin{cases}\dfrac{\varDelta\mathfrak{X}}{dt}=\dfrac{1}{A}\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\mathfrak{N}}{\mu}-\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\mathfrak{M}}{\mu}\right)-4\pi u\,,\\[2mm]\dfrac{\varDelta\mathfrak{Y}}{dt}=\dfrac{1}{A}\left(\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\mathfrak{L}}{\mu}-\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\mathfrak{N}}{\mu}\right)-4\pi v\,,\\[2mm]\dfrac{\varDelta\mathfrak{Z}}{dt}=\dfrac{1}{A}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\mathfrak{M}}{\mu}-\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\mathfrak{L}}{\mu}\right)-4\pi w\,,\end{cases}$$

während die zweite Gruppe jener Gleichungen folgende Gestalt besitzt:

$$(2.)\quad\begin{cases}\dfrac{\varDelta\mathfrak{L}}{dt}=-\dfrac{1}{A}\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}-\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\right),\\[2mm]\dfrac{\varDelta\mathfrak{M}}{dt}=-\dfrac{1}{A}\left(\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}-\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right),\\[2mm]\dfrac{\varDelta\mathfrak{N}}{dt}=-\dfrac{1}{A}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}-\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\right).\end{cases}$$

Dabei haben z. B. $\varDelta\mathfrak{X}$ und $\varDelta\mathfrak{L}$ [vgl. Seite 236 (24.) und (26.)] folgende Bedeutungen:

$$(3.)\quad\frac{\varDelta\mathfrak{X}}{dt}=\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t}+\left(\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y}+\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z}\right)\alpha+\frac{\partial(\mathfrak{X}\beta-\mathfrak{Y}\alpha)}{\partial y}+\frac{\partial(\mathfrak{X}\gamma-\mathfrak{Z}\alpha)}{\partial z},$$

$$(4.)\quad\frac{\varDelta\mathfrak{L}}{dt}=\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial t}+\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial y}+\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial z}\right)\alpha+\frac{\partial(\mathfrak{L}\beta-\mathfrak{M}\alpha)}{\partial y}+\frac{\partial(\mathfrak{L}\gamma-\mathfrak{N}\alpha)}{\partial z}.$$

Es handelt sich nun hier um eine gewisse Umgestaltung dieser Differentialgleichungen (1.), (2.).

Wir markiren irgend einen Raumpunct (x_1, y_1, z_1), und bilden mit Bezug auf diesen die Ausdrücke:

$$(5.)\quad U_1=\int\frac{\mathfrak{X}}{4\pi\varepsilon}\frac{Dv}{r},\quad V_1=\int\frac{\mathfrak{Y}}{4\pi\varepsilon}\frac{Dv}{r},\quad W_1=\int\frac{\mathfrak{Z}}{4\pi\varepsilon}\frac{Dv}{r},$$

die Integrationen ausgedehnt gedacht über alle Volumelemente Dv des ganzen unendlichen Raumes; dabei soll r der Abstand eines solchen Elementes Dv vom Puncte (x_1, y_1, z_1) sein. Falls es beliebt, kann man offenbar diese Ausdrücke ansehen als gewisse auf jenen Punct (x_1, y_1, z_1) ausgeübte Potentiale, herrührend von drei fingirten Materien, die mit den Dichtigkeiten $\frac{\mathfrak{X}}{4\pi\varepsilon}$, $\frac{\mathfrak{Y}}{4\pi\varepsilon}$, $\frac{\mathfrak{Z}}{4\pi\varepsilon}$ im Raume ausgebreitet sind.

Wir wollen zuvörderst die Ableitungen dieser Ausdrücke U_1, V_1, W_1 nach x_1, y_1, z_1 einer genaueren Betrachtung unterwerfen. Aus (5.) folgt sofort:

$$(\alpha.)\quad\frac{\partial U_1}{\partial x_1}=\int\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_1}\frac{\mathfrak{X}}{4\pi\varepsilon}\,Dv;$$

wofür man, weil die Ableitungen von $\frac{1}{r}$ nach x und nach x_1 entgegengesetzte Werthe haben, auch schreiben kann:

$$(\beta.)\qquad \frac{\partial U_1}{\partial x_1} = -\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\mathfrak{X}}{4\pi\varepsilon} D\text{v}.$$

Dieser Formel aber kann man folgende Gestalt geben:

$$(\gamma.)\qquad \frac{\partial U_1}{\partial x_1} = -\int \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\frac{\mathfrak{X}}{4\pi\varepsilon}\right) \cdot D\text{v} + \int \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{X}}{4\pi\varepsilon}\right) \cdot D\text{v};$$

und hieraus folgt, falls man das erste Integral einer bekannten Green'schen Transformation unterwirft:

$$(\delta.)\qquad \frac{\partial U_1}{\partial x_1} = -\int \left(\frac{1}{r}\frac{\mathfrak{X}}{4\pi\varepsilon}\right) \cos(n, x)\, Do + \int \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{X}}{4\pi\varepsilon}\right) \cdot D\text{v},$$

wo alsdann das erste Integral ausgedehnt zu denken ist über alle Elemente Do einer den ganzen unendlichen Raum umschliessenden Fläche; dabei bezeichnet n die auf Do errichtete äussere Normale. Das in Rede stehende Oberflächenintegral kann man, weil ε im Unendlichen constant[1]) ist, auch so schreiben

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int \frac{\mathfrak{X}}{r} \cos(n, x)\, Do;$$

und es wird daher dieser Integral $= 0$ sein. Denn $\mathfrak{X}$ ist im Unendlichen von der Ordnung $\left(\frac{1}{\varrho}\right)^2$, [vgl. Seite 266], wo ϱ den Abstand des unendlich fernen Elementes Do vom Anfangspunct vorstellt [vgl. (1.) Seite 259]; woraus sofort folgt, dass der Quotient $\frac{\mathfrak{X}}{r}$ im Unendlichen von der Ordnung $\left(\frac{1}{\varrho}\right)^3$ ist. *Q. e. d.*

Solches constatirt, reducirt sich die Formel ($\delta.$) auf:

$$(\varepsilon.)\qquad \frac{\partial U_1}{\partial x_1} = \int \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{X}}{4\pi\varepsilon}\right) \cdot D\text{v}.$$

In analoger Art wird man offenbar die Ableitungen von U_1 nach y_1 und z_1, und ebenso auch die Ableitungen der Ausdrücke V_1, W_1 behandeln können; so dass man also zu folgendem Formelsystem gelangt:

$$(6.)\quad \begin{cases} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} = \int \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{X}}{4\pi\varepsilon}\right)\frac{D\text{v}}{r}, \\ \frac{\partial U_1}{\partial y_1} = \int \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{X}}{4\pi\varepsilon}\right)\frac{D\text{v}}{r}, \\ \frac{\partial U_1}{\partial z_1} = \int \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{X}}{4\pi\varepsilon}\right)\frac{D\text{v}}{r}, \end{cases} \begin{cases} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} = \int \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{Y}}{4\pi\varepsilon}\right)\frac{D\text{v}}{r}, \\ \frac{\partial V_1}{\partial y_1} = \int \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{Y}}{4\pi\varepsilon}\right)\frac{D\text{v}}{r}, \\ \frac{\partial V_1}{\partial z_1} = \int \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{Y}}{4\pi\varepsilon}\right)\frac{D\text{v}}{r}, \end{cases} \begin{cases} \frac{\partial W_1}{\partial x_1} = \int \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{Z}}{4\pi\varepsilon}\right)\frac{D\text{v}}{r}. \\ \frac{\partial W_1}{\partial y_1} = \int \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{Z}}{4\pi\varepsilon}\right)\frac{D\text{v}}{r}. \\ \frac{\partial W_1}{\partial z_1} = \int \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{Z}}{4\pi\varepsilon}\right)\frac{D\text{v}}{r}. \end{cases}$$

---

1) Es ist ε im Unendlichen *constant*, weil die zu betrachtende Substanz im Unendlichen aus homogener Luft besteht. Gleiches gilt von μ. Vgl. Seite 259.

Um unser eigentliches Ziel zu erreichen, bedienen wir uns jetzt der *identischen* Gleichung:

$$(7.)\qquad -\left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 U_1}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2 U_1}{\partial z_1^2}\right)=-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1}+\frac{\partial V_1}{\partial y_1}+\frac{\partial W_1}{\partial z_1}\right)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\partial V_1}{\partial x_1}-\frac{\partial U_1}{\partial y_1}\right)+\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{\partial W_1}{\partial x_1}-\frac{\partial U_1}{\partial z_1}\right).$$

Aus dieser folgt, mit Hinblick auf (5.) sofort:

$$(8.)\quad \frac{\mathfrak{X}_1}{\varepsilon_1}=-\frac{\partial}{\partial x_1}\underbrace{\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1}+\frac{\partial V_1}{\partial y_1}+\frac{\partial W_1}{\partial z_1}\right)}_{\varphi_1}+\frac{\partial}{\partial y_1}\underbrace{\left(\frac{\partial V_1}{\partial x_1}-\frac{\partial U_1}{\partial y_1}\right)}_{\Gamma_1}+\frac{\partial}{\partial z_1}\underbrace{\left(\frac{\partial W_1}{\partial x_1}-\frac{\partial U_1}{\partial z_1}\right)}_{B_1}.$$

Was die hier auftretenden Binome B_1, Γ_1, und das Trinom φ_1 anbelangt, so ist nach (6.):

$$\varphi_1=\int\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right)\frac{D\mathsf{v}}{r},$$
$$\Gamma_1=\int\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\right)\frac{D\mathsf{v}}{r},$$
$$B_1=\int\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}-\frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\right)\frac{D\mathsf{v}}{r}.$$

Das erste dieser drei Integrale erlangt aber mit Rücksicht auf die bekannte Formel [Seite 268]:

$$(9.)\qquad (\sigma)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right),$$

folgende Gestalt:

$$(10.)\qquad \varphi_1=\int\frac{(\sigma)\,D\mathsf{v}}{r};$$

während andererseits Γ_1 und B_1 mit Rücksicht auf (2.) die Werthe erhalten:

$$(11.)\qquad \Gamma_1=-\frac{A}{4\pi}\int\frac{\Delta\mathfrak{N}}{dt}\frac{D\mathsf{v}}{r},$$

$$(12.)\qquad B_1=+\frac{A}{4\pi}\int\frac{\Delta\mathfrak{M}}{dt}\frac{D\mathsf{v}}{r}.$$

Substituirt man diese Werthe von B_1, Γ_1 in der Gleichung (8.), so erhält man die erste Formel folgenden Systems:

$$(\mathrm{I}.)\qquad \begin{cases}\dfrac{\mathfrak{X}_1}{\varepsilon_1}=-\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}-\dfrac{A}{4\pi}\left[\dfrac{\partial}{\partial y_1}\displaystyle\int\frac{\Delta\mathfrak{N}}{dt}\frac{D\mathsf{v}}{r}-\dfrac{\partial}{\partial z_1}\displaystyle\int\frac{\Delta\mathfrak{M}}{dt}\frac{D\mathsf{v}}{r}\right],\\[2ex] \dfrac{\mathfrak{Y}_1}{\varepsilon_1}=-\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y_1}-\dfrac{A}{4\pi}\left[\dfrac{\partial}{\partial z_1}\displaystyle\int\frac{\Delta\mathfrak{L}}{dt}\frac{D\mathsf{v}}{r}-\dfrac{\partial}{\partial x_1}\displaystyle\int\frac{\Delta\mathfrak{N}}{dt}\frac{D\mathsf{v}}{r}\right],\\[2ex] \dfrac{\mathfrak{Z}_1}{\varepsilon_1}=-\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial z_1}-\dfrac{A}{4\pi}\left[\dfrac{\partial}{\partial x_1}\displaystyle\int\frac{\Delta\mathfrak{M}}{dt}\frac{D\mathsf{v}}{r}-\dfrac{\partial}{\partial y_1}\displaystyle\int\frac{\Delta\mathfrak{L}}{dt}\frac{D\mathsf{v}}{r}\right],\end{cases}$$

dessen übrige Formeln in analoger Weise zu erhalten sind. Hier hat φ_1 [vgl. (10.)] die Bedeutung:

$$(\mathrm{I}^*.)\qquad \varphi_1=\int\frac{(\sigma)\,D\mathsf{v}}{r};$$

so dass also dieses φ_1 das NEWTON'sche Potential aller im ganzen unendlichen Raum vorhandenen freien Elektricität in Bezug auf den Punct (x_1, y_1, z_1) vorstellt.

Ebenso, wie wir vorhin, in (5.), gewisse Potentiale U_1, V_1, W_1 gebildet haben auf Grund der $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, — genau ebenso werden wir nun andererseits gewisse Potentiale bilden können auf Grund der $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$:

$$U_1 = \int \frac{\mathfrak{L}}{4\pi\mu} \frac{Dv}{r}, \quad V_1 = \int \frac{\mathfrak{M}}{4\pi\mu} \frac{Dv}{r}, \quad W_1 = \int \frac{\mathfrak{N}}{4\pi\mu} \frac{Dv}{r}.$$

Auf diese Potentiale werden wir alsdann wiederum die identische Gleichung (7.) anwenden können. U. s. w. Kurz, wir übersehen leicht, dass wir in solcher Weise, unter Anwendung der allgemeinen Formel [Seite 281]:

$$(\tau) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathfrak{L}}{\mu} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{M}}{\mu} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{N}}{\mu}\right),$$

zu folgenden mit (I.) analogen Gleichungen gelangen:

$$(\mathrm{II.})\quad \begin{cases} \dfrac{\mathfrak{L}_1}{\mu_1} = -\dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \dfrac{A}{4\pi}\left[\dfrac{\partial}{\partial y_1}\displaystyle\int\left(4\pi w + \dfrac{\Delta \mathfrak{Z}}{dt}\right)\dfrac{Dv}{r} - \dfrac{\partial}{\partial z_1}\displaystyle\int\left(4\pi v + \dfrac{\Delta \mathfrak{Y}}{dt}\right)\dfrac{Dv}{r}\right], \\ \dfrac{\mathfrak{M}_1}{\mu_1} = -\dfrac{\partial \psi_1}{\partial y_1} + \dfrac{A}{4\pi}\left[\dfrac{\partial}{\partial z_1}\displaystyle\int\left(4\pi u + \dfrac{\Delta \mathfrak{X}}{dt}\right)\dfrac{Dv}{r} - \dfrac{\partial}{\partial x_1}\displaystyle\int\left(4\pi w + \dfrac{\Delta \mathfrak{Z}}{dt}\right)\dfrac{Dv}{r}\right], \\ \dfrac{\mathfrak{N}_1}{\mu_1} = -\dfrac{\partial \psi_1}{\partial z_1} + \dfrac{A}{4\pi}\left[\dfrac{\partial}{\partial x_1}\displaystyle\int\left(4\pi v + \dfrac{\Delta \mathfrak{Y}}{dt}\right)\dfrac{Dv}{r} - \dfrac{\partial}{\partial y_1}\displaystyle\int\left(4\pi u + \dfrac{\Delta \mathfrak{X}}{dt}\right)\dfrac{Dv}{r}\right], \end{cases}$$

wo ψ_1 die Bedeutung hat:

$$(\mathrm{II}^*.)\qquad \psi_1 = \int \frac{(\tau)\, Dv}{r};$$

sodass also dieses ψ_1 zu bezeichnen sein wird als das NEWTON'sche Potential von allem im ganzen unendlichen Raume vorhandenem freien Magnetismus in Bezug auf den Punct (x_1, y_1, z_1).

Die hier erhaltenen Formeln (I.), (II.) werden wir bezeichnen dürfen als eine *Transformation* oder *Transfiguration* der ursprünglichen HERTZ'schen Differentialgleichungen (1.), (2.).

Specieller Fall. — Befindet sich die betrachtete Substanz in *Ruhe*, sind also die α, β, γ überall $= 0$, so sind nach (3.), (4.) die Grössen

$$\frac{\Delta \mathfrak{X}}{dt}, \ \frac{\Delta \mathfrak{L}}{dt}, \text{ etc. identisch mit } \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}, \ \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t}, \text{ etc.};$$

sodass also in diesem Fall die ursprünglichen HERTZ'schen Gleichungen (1.), (2.) lauten:

(1a.) $$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} = \frac{1}{A}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{N}}{\mu} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{M}}{\mu}\right) - 4\pi u, \quad \text{etc. etc.},$$

(2a.) $$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} = -\frac{1}{A}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\right), \quad \text{etc. etc.},$$

während andererseits die transfigurirten Gleichungen (I.), (II.) folgende Gestalt annehmen werden:

(Ia.) $$\frac{\mathfrak{X}_1}{\varepsilon_1} = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} - \frac{A}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial y_1}\int \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t}\frac{D\mathsf{v}}{r} - \frac{\partial}{\partial z_1}\int \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t}\frac{D\mathsf{v}}{r}\right], \quad \text{etc. etc.}$$

(IIa.) $$\frac{\mathfrak{L}_1}{\mu_1} = -\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{A}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial y_1}\int\left(4\pi w + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}\right)\frac{D\mathsf{v}}{r} - \frac{\partial}{\partial z_1}\int\left(4\pi v + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t}\right)\frac{D\mathsf{v}}{r}\right], \quad \text{etc.}$$

Weitere Specialisirung. — Befindet sich die betrachtete Substanz in Ruhe, und setzt man überdies noch voraus, dass der in ihr vorhandene elektromagnetische Zustand ein *stationärer* ist, so werden die Ableitungen

$$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}, \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t}, \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} \text{ und } \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t}, \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t}, \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t}$$

allenthalben $= 0$ sein. Hierdurch gehen (1a.), (2a) über in:

(1b.) $$0 = \left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{N}}{\mu} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{M}}{\mu}\right) - 4\pi A u, \quad \text{etc. etc.},$$

(2b.) $$0 = \left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\right), \quad \text{etc. etc.};$$

während gleichzeitig die Formeln (Ia.), (IIa.) die Gestalt erhalten:

(Ib.) $$\frac{\mathfrak{X}_1}{\varepsilon_1} = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, \quad \text{etc. etc.}$$

(IIb.) $$\frac{\mathfrak{L}_1}{\mu_1} = -\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + A\left[\frac{\partial}{\partial y_1}\int \frac{w\,D\mathsf{v}}{r} - \frac{\partial}{\partial z_1}\int \frac{v\,D\mathsf{v}}{r}\right], \quad \text{etc. etc.}$$

Noch weitergehende Specialisirung. — Ist endlich jener elektromagnetische Zustand der betrachteten ruhenden Substanz nicht nur ein stationärer, sondern geradezu ein *statischer*, so sind die

$$u, v, w$$

überall $= 0$. Hierdurch gehen die Gleichungen (1b.), (2b.) über in:

(1c.) $$0 = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{N}}{\mu} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{M}}{\mu}, \quad \text{etc. etc.},$$

(2c.) $$0 = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}, \quad \text{etc. etc.};$$

während die Gleichungen (Ib.), (IIb.) folgende Gestalt erhalten:

(Ic.) $$\frac{\mathfrak{X}_1}{\varepsilon_1} = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, \quad \text{etc. etc.},$$

(IIc.) $$\frac{\mathfrak{L}_1}{\mu_1} = -\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}, \quad \text{etc. etc.}$$

Selbstverständlich besitzen φ_1 und ψ_1 in allen diesen Specialfällen stets die in (I*.), (II*) angegebenen Bedeutungen; und die beiden letzten Formeln (Ic.), (IIc.) liefern daher folgenden Satz:

Befindet sich die im Weltraum vorhandene Substanz in Ruhe, und zugleich auch im elektromagnetischen Gleichgewicht, so werden die elektrischen und magnetischen Zustandscomponenten der Substanz sofort angebbar sein, falls nur die Vertheilung der freien Elektricität und die Vertheilung des freien Magnetismus allenthalben bekannt sind.

Bezeichnet man nämlich die NEWTON'*schen Potentiale dieser freien Elektricität und dieses freien Magnetismus in Bezug auf irgend einen Punct* (x_1, y_1, z_1) *mit* φ_1 *und* ψ_1, *so werden die elektrischen und magnetischen Zustandscomponenten der Substanz in diesem Puncte* (x_1, y_1, z_1) *folgende Werthe besitzen:*

$$(\text{p.})\qquad \mathfrak{X}_1 = -\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, \quad \mathfrak{Y}_1 = -\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1}, \quad \mathfrak{Z}_1 = -\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1},$$

$$(\text{q.})\qquad \mathfrak{L}_1 = -\mu_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}, \quad \mathfrak{M}_1 = -\mu_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1}, \quad \mathfrak{N}_1 = -\mu_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial z_1},$$

wo ε_1 *und* μ_1 *die Werthe des Dielektricitäts- und Magnetisirungscoefficienten der Substanz in jenem Puncte* (x_1, y_1, z_1) *vorstellen.*

§ 13.

Ueber die elektromagnetische Energie E.

Zur Abkürzung sei gesetzt:

$$(1.)\qquad \mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2 = \mathfrak{R}^2 \quad \text{und} \quad \mathfrak{L}^2 + \mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2 = \mathfrak{J}^2.$$

Wir wollen nun bei den folgenden Betrachtungen die den Weltraum erfüllende Substanz in *beliebiger Bewegung* uns denken, und demgemäss unsere Betrachtungen sich anschliessen lassen an die allgemeinen HERTZ'schen Gleichungen (21.), (22.) Seite 236. Nach jenen Gleichungen ist z. B.:

$$(2.)\qquad \frac{\Delta \mathfrak{X}}{dt} = \frac{1}{A}\left[\left(\frac{\mathfrak{N}}{\mu}\right)_2 - \left(\frac{\mathfrak{M}}{\mu}\right)_3\right] - 4\pi u,$$

$$(3.)\qquad \frac{\Delta \mathfrak{L}}{dt} = -\frac{1}{A}\left[\left(\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right)_2 - \left(\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\right)_3\right],$$

wo $\Delta\mathfrak{X}$, $\Delta\mathfrak{L}$ [vgl. (23.), (25.) Seite 236] folgende Bedeutungen haben:

$$(4.)\qquad \frac{\Delta \mathfrak{X}}{dt} = \frac{d\mathfrak{X}}{dt} + \mathfrak{X}(\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3) - (\mathfrak{X}\alpha_1 + \mathfrak{Y}\alpha_2 + \mathfrak{Z}\alpha_3),$$

$$(5.)\qquad \frac{\Delta \mathfrak{L}}{dt} = \frac{d\mathfrak{L}}{dt} + \mathfrak{L}(\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3) - (\mathfrak{L}\alpha_1 + \mathfrak{M}\alpha_2 + \mathfrak{N}\alpha_3).$$

Nach (2.), (4.) wird daher z. B. die erste Gruppe der HERTZschen Gleichungen folgendermassen darstellbar sein:

$$\begin{array}{l|l}
\frac{d\mathfrak{X}}{dt} + \mathfrak{X}(\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3) - (\mathfrak{X}\alpha_1 + \mathfrak{Y}\alpha_2 + \mathfrak{Z}\alpha_3) = \frac{1}{A}\left[\left(\frac{\mathfrak{N}}{\mu}\right)_2 - \left(\frac{\mathfrak{M}}{\mu}\right)_3\right] - 4\pi u, & \frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}Dv \\
\frac{d\mathfrak{Y}}{dt} + \mathfrak{Y}(\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3) - (\mathfrak{X}\beta_1 + \mathfrak{Y}\beta_2 + \mathfrak{Z}\beta_3) = \frac{1}{A}\left[\left(\frac{\mathfrak{L}}{\mu}\right)_3 - \left(\frac{\mathfrak{N}}{\mu}\right)_1\right] - 4\pi v, & \frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}Dv \\
\frac{d\mathfrak{Z}}{dt} + \mathfrak{Z}(\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3) - (\mathfrak{X}\gamma_1 + \mathfrak{Y}\gamma_2 + \mathfrak{Z}\gamma_3) = \frac{1}{A}\left[\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mu}\right)_1 - \left(\frac{\mathfrak{L}}{\mu}\right)_2\right] - 4\pi w. & \frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}Dv.
\end{array}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit den beigesetzten Factoren, und addirt, so erhält man unter Anwendung der in (1.) angegebenen Abkürzung $\mathfrak{R}$ sofort:

$$(6.)\qquad \frac{1}{2\varepsilon}\frac{d\mathfrak{R}^2}{dt}Dv + \frac{2\mathfrak{R}^2(\alpha_1+\beta_2+\gamma_3)}{2\varepsilon}Dv - \frac{2[\mathfrak{X}^2\alpha_1 + \mathfrak{X}\mathfrak{Y}(\alpha_2+\beta_1) + ..]}{2\varepsilon}Dv =$$
$$= \frac{1}{A}\left\{\left[\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mu}\right)_1 - \frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\left(\frac{\mathfrak{N}}{\mu}\right)_1\right] + \cdots\right\}Dv - \frac{4\pi(u\mathfrak{X} + v\mathfrak{Y} + w\mathfrak{Z})}{\varepsilon}Dv.$$

Das erste Glied linker Hand ist aber

$$= \frac{1}{2\varepsilon}\frac{d(\mathfrak{R}^2 Dv)}{dt} - \frac{\mathfrak{R}^2}{2\varepsilon}\frac{d(Dv)}{dt},$$

also mit Rücksicht auf (P.) Seite 228

$$= \frac{1}{2\varepsilon}\frac{d(\mathfrak{R}^2 Dv)}{dt} - \frac{\mathfrak{R}^2(\alpha_1+\beta_2+\gamma_3)}{2\varepsilon}Dv.$$

Substituirt man dies in der Formel (6.), und dividirt man überdies die ganze Formel noch durch 4π, so erhält man sofort:

$$(7.)\qquad \frac{1}{8\pi\varepsilon}\frac{d(\mathfrak{R}^2 Dv)}{dt} + \frac{\mathfrak{R}^2(\alpha_1+\beta_2+\gamma_3) - 2[\mathfrak{X}^2\alpha_1 + \mathfrak{X}\mathfrak{Y}(\alpha_2+\beta_1) + \cdots]}{8\pi\varepsilon}Dv =$$
$$= \frac{1}{4\pi A}\left\{\left[\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mu}\right)_1 - \frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\left(\frac{\mathfrak{N}}{\mu}\right)_1\right] + \cdots\right\}Dv - \frac{u\mathfrak{X} + v\mathfrak{Y} + w\mathfrak{Z}}{\varepsilon}Dv.$$

Nun ist Dv irgend ein bestimmtes substantielles Volumelement. Und das einem solchen Element zugehörige ε bleibt, nach unserer ein für alle mal gemachten (allerdings nur approximativen) Voraussetzung [vgl. Seite 227], im Laufe der Zeit fortdauernd *ein und dasselbe*. Demgemäss ist das erste Glied links in (7.) auch so darstellbar:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathfrak{R}^2 Dv}{8\pi\varepsilon}\right).$$

Integrirt man nun die Formel (7.), nachdem diese kleine Abänderung in ihr vorgenommen ist, über alle substantiellen

Volumelemente Dv des ganzen unendlichen Raumes, so erhält man:

$$(8.)\quad \frac{d}{dt}\int \frac{\mathfrak{R}^2 Dv}{8\pi\varepsilon} + \int \frac{\mathfrak{R}^2(\alpha_1+\beta_2+\gamma_3) - 2[\mathfrak{X}^2\alpha_1 + \mathfrak{X}\mathfrak{Y}(\alpha_2+\beta_1)+\cdots]}{8\pi\varepsilon} Dv =$$
$$= \frac{1}{4\pi A}\int\left\{\left[\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mu}\right)_1 - \frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\left(\frac{\mathfrak{N}}{\mu}\right)_1\right] + \cdots\right\} Dv - \int \frac{u\mathfrak{X}+v\mathfrak{Y}+w\mathfrak{Z}}{\varepsilon} Dv.$$

Das erste Glied links in dieser Formel ist nichts Anderes als der zeitliche Differentialquotient der elektrischen Energie E_e [vgl. (B.) Seite 220]. Führt man daher die Abkürzungen ein:

$$(9.)\quad \begin{cases} p_{11} = \dfrac{2\mathfrak{X}^2 - \mathfrak{R}^2}{8\pi\varepsilon}, \\ p_{22} = \dfrac{2\mathfrak{Y}^2 - \mathfrak{R}^2}{8\pi\varepsilon}, \\ p_{33} = \dfrac{2\mathfrak{Z}^2 - \mathfrak{R}^2}{8\pi\varepsilon}, \end{cases} \qquad \begin{cases} p_{23} = \dfrac{2\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}}{8\pi\varepsilon}, \\ p_{31} = \dfrac{2\mathfrak{Z}\mathfrak{X}}{8\pi\varepsilon}, \\ p_{12} = \dfrac{2\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}{8\pi\varepsilon}, \end{cases}$$

und beachtet man, dass α_1, α_2 etc. für $\frac{\partial\alpha}{\partial x}$, $\frac{\partial\alpha}{\partial y}$ etc. stehen, so gewinnt die *linke Seite* der Formel (8.) — sie mag für den Augenblick mit L bezeichnet werden — folgende Gestalt:

$$(10.)\quad L = \frac{d\mathsf{E}_e}{dt} - \int\Big[\Big(p_{11}\frac{\partial\alpha}{\partial x} + p_{12}\frac{\partial\beta}{\partial x} + p_{13}\frac{\partial\gamma}{\partial x}\Big) + \Big(p_{21}\frac{\partial\alpha}{\partial y} + p_{22}\frac{\partial\beta}{\partial y} + p_{23}\frac{\partial\gamma}{\partial y}\Big) +$$
$$+ \Big(p_{31}\frac{\partial\alpha}{\partial z} + p_{32}\frac{\partial\beta}{\partial z} + p_{33}\frac{\partial\gamma}{\partial z}\Big)\Big] Dv.$$

Was den ersten Theil des vorstehenden Integrals betrifft, so ist offenbar:

$$(\alpha.)\quad \int\Big(p_{11}\frac{\partial\alpha}{\partial x}\Big) Dv = \int \frac{\partial(p_{11}\alpha)}{\partial x} Dv - \int \alpha\frac{\partial p_{11}}{\partial x} Dv,$$

oder mittelst einer bekannten Green'schen Transformation:

$$(\beta.)\quad \int\Big(p_{11}\frac{\partial\alpha}{\partial x}\Big) Dv = \int p_{11}\alpha\cos(n,x)\, Do - \int \alpha\frac{\partial p_{11}}{\partial x} Dv,$$

wo das erste Integral rechter Hand ausgedehnt zu denken ist über alle Elemente Do einer den ganzen unendlichen Raum umschliessenden Fläche; dabei bezeichnet n die äussere Normale eines solchen Elementes Do. Dieses Flächenintegral

$$(\gamma.)\quad \int p_{11}\alpha\cos(n,x)\, Do$$

verschwindet nun aber, weil die $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ [vgl. Seite 266] im Unendlichen von der Ordnung $\left(\frac{1}{\varrho}\right)^2$ sind, und weil daher die p_{kj} (9.)

im Unendlichen von der Ordnung $\left(\frac{1}{\varrho}\right)^4$ sind.[1]) Demgemäss reducirt sich also die Formel (β.) auf

$$(\delta.)\qquad \int\left(p_{11}\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)Dv = -\int\alpha\frac{\partial p_{11}}{\partial x}Dv.$$

Transformirt man nun sämmtliche Theile des Integrals (10.) nach Maassgabe dieser Formel (δ.), so erhält man:

$$(11.)\; L = \frac{d\mathsf{E}_e}{dt} + \int\Big[\Big(\alpha\frac{\partial p_{11}}{\partial x} + \beta\frac{\partial p_{12}}{\partial x} + \gamma\frac{\partial p_{13}}{\partial x}\Big) + \Big(\alpha\frac{\partial p_{21}}{\partial y} + \beta\frac{\partial p_{22}}{\partial y} + \gamma\frac{\partial p_{23}}{\partial y}\Big) + $$
$$+ \Big(\alpha\frac{\partial p_{31}}{\partial z} + \beta\frac{\partial p_{32}}{\partial z} + \gamma\frac{\partial p_{33}}{\partial z}\Big)\Big]Dv,$$

wofür man auch schreiben kann:

$$(12.)\qquad L = \frac{d\mathsf{E}_e}{dt} + \int(p^{(1)}\alpha + p^{(2)}\beta + p^{(3)}\gamma)\,Dv,$$

wo alsdann $p^{(1)}$, $p^{(2)}$, $p^{(3)}$ Abbreviaturen sind für folgende Ausdrücke:

$$(13.)\qquad \begin{cases} p^{(1)} = \dfrac{\partial p_{11}}{\partial x} + \dfrac{\partial p_{12}}{\partial y} + \dfrac{\partial p_{13}}{\partial z}, \\ p^{(2)} = \dfrac{\partial p_{21}}{\partial x} + \dfrac{\partial p_{22}}{\partial y} + \dfrac{\partial p_{23}}{\partial z}, \\ p^{(3)} = \dfrac{\partial p_{31}}{\partial x} + \dfrac{\partial p_{32}}{\partial y} + \dfrac{\partial p_{33}}{\partial z}. \end{cases}$$

Substituiren wir nun schliesslich in unserer eigentlichen Hauptformel (8.), *an Stelle ihrer linken Seite L, den Ausdruck* (12.), *so erhalten wir:*

$$(14.)\qquad \frac{d\mathsf{E}_e}{dt} + \int(p^{(1)}\alpha + p^{(2)}\beta + p^{(3)}\gamma)\,Dv =$$
$$= \frac{1}{4\pi A}\int\Big\{\Big[\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\Big(\frac{\mathfrak{M}}{\mu}\Big)_1 - \frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\Big(\frac{\mathfrak{N}}{\mu}\Big)_1\Big] + \cdots\Big\}\,Dv - \int\frac{u\mathfrak{X} + v\mathfrak{Y} + w\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\,Dv,$$

wo alsdann $p^{(1)}$, $p^{(2)}$, $p^{(3)}$ *Abbreviaturen sind, definirt durch* (13.) *und* (9.)

In ganz analoger Weise ist nun andererseits auch die *zweite* Gruppe der Hertz'schen Gleichungen behandelbar. Diese lautet nach (3.), (5.) folgendermassen:

$$\frac{d\mathfrak{L}}{dt} + \mathfrak{L}(\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3) - (\mathfrak{L}\alpha_1 + \mathfrak{M}\alpha_2 + \mathfrak{N}\alpha_3) = -\frac{1}{A}\Big[\Big(\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\Big)_2 - \Big(\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\Big)_3\Big], \quad \Big|\; \frac{\mathfrak{L}}{\mu}\,Dv$$
$$\frac{d\mathfrak{M}}{dt} + \mathfrak{M}(\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3) - (\mathfrak{L}\beta_1 + \mathfrak{M}\beta_2 + \mathfrak{N}\beta_3) = -\frac{1}{A}\Big[\Big(\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\Big)_3 - \Big(\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\Big)_1\Big], \quad \Big|\; \frac{\mathfrak{M}}{\mu}\,Dv$$
$$\frac{d\mathfrak{N}}{dt} + \mathfrak{N}(\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3) - (\mathfrak{L}\gamma_1 + \mathfrak{M}\gamma_2 + \mathfrak{N}\gamma_3) = -\frac{1}{A}\Big[\Big(\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\Big)_1 - \Big(\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\Big)_2\Big], \quad \Big|\; \frac{\mathfrak{N}}{\mu}\,Dv.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit den beigesetzten Factoren,

---

1) Zu beachten ist, dass ε im Unendlichen constant ist. Vgl. die Note Seite 290.

und addirt, so erhält man, unter Anwendung der in (1.) angegebenen Abkürzung $\mathfrak{J}$, sofort:

$$(15.)\quad \frac{1}{2\mu}\frac{d\mathfrak{J}^2}{dt}\,D\mathrm{v} + \frac{2\mathfrak{J}^2(\alpha_1+\beta_2+\gamma_3)}{2\mu}\,D\mathrm{v} - \frac{2[\mathfrak{L}^2\alpha_1+\mathfrak{L}\mathfrak{M}(\alpha_2+\beta_1)+\cdots]}{2\mu}\,D\mathrm{v} =$$
$$= -\frac{1}{A}\left\{\left[\frac{\mathfrak{N}}{\mu}\left(\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\right)_1 - \frac{\mathfrak{M}}{\mu}\left(\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right)_1\right] + \cdots\right\} D\mathrm{v}.$$

Diese Formel (15.) kann nun, wie leicht zu übersehen ist, Schritt für Schritt in genau derselben Weise behandelt werden, wie vorhin die Formel (6.) behandelt wurde. In solcher Weise gelangt man alsdann, unter Anwendung der Abbreviaturen:

$$(16.)\quad \begin{cases} q_{11} = \dfrac{2\mathfrak{L}^2-\mathfrak{J}^2}{8\pi\mu}, \\ q_{22} = \dfrac{2\mathfrak{M}^2-\mathfrak{J}^2}{8\pi\mu}, \\ q_{33} = \dfrac{2\mathfrak{N}^2-\mathfrak{J}^2}{8\pi\mu}, \end{cases} \qquad \begin{cases} q_{23} = \dfrac{2\mathfrak{M}\mathfrak{N}}{8\pi\mu}, \\ q_{31} = \dfrac{2\mathfrak{N}\mathfrak{L}}{8\pi\mu}, \\ q_{12} = \dfrac{2\mathfrak{L}\mathfrak{M}}{8\pi\mu}, \end{cases}$$

und

$$(17.)\quad \begin{cases} q^{(1)} = \dfrac{\partial q_{11}}{\partial x} + \dfrac{\partial q_{12}}{\partial y} + \dfrac{\partial q_{13}}{\partial z}, \\ q^{(2)} = \dfrac{\partial q_{21}}{\partial x} + \dfrac{\partial q_{22}}{\partial y} + \dfrac{\partial q_{23}}{\partial z}, \\ q^{(3)} = \dfrac{\partial q_{31}}{\partial x} + \dfrac{\partial q_{32}}{\partial y} + \dfrac{\partial q_{33}}{\partial z}, \end{cases}$$

zu *folgender mit* (14.) *parallel stehender Formel*:

$$(18.)\quad \frac{d\mathsf{E}_m}{dt} + \int (q^{(1)}\alpha + q^{(2)}\beta + q^{(3)}\gamma)\,D\mathrm{v} =$$
$$= -\frac{1}{4\pi A}\int\left\{\left[\frac{\mathfrak{N}}{\mu}\left(\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\right)_1 - \frac{\mathfrak{M}}{\mu}\left(\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right)_1\right] + \cdots\right\} D\mathrm{v},$$

in welcher E_m [*vgl.* (B.) *Seite* 220] *die magnetische Energie vorstellt.*

Die ganze Energie E der den Weltraum erfüllenden Substanz hat den Werth [vgl. (B.) Seite 220]:

$$(19.)\quad \mathsf{E} = \mathsf{E}_e + \mathsf{E}_m.$$

Durch Addition der Formel (14.) und (18.) erhält man daher:

$$(20.)\quad \frac{d\mathsf{E}}{dt} + \int (p^{(1)}\alpha + p^{(2)}\beta + p^{(3)}\gamma)\,D\mathrm{v} + \int (q^{(1)}\alpha + q^{(2)}\beta + q^{(3)}\gamma)\,D\mathrm{v} =$$
$$= \frac{1}{4\pi A}\int\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\frac{\mathfrak{M}}{\mu} - \frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\frac{\mathfrak{N}}{\mu}\right) + \cdots\right\} D\mathrm{v} - \int \frac{u\mathfrak{X}+v\mathfrak{Y}+w\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\,D\mathrm{v}.$$

Das erste Integral in der letzten Zeile lautet, ausführlicher geschrieben, folgendermassen:

$$F = \int\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{Z}\mathfrak{M}-\mathfrak{Y}\mathfrak{N}}{\varepsilon\mu}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{X}\mathfrak{N}-\mathfrak{Z}\mathfrak{L}}{\varepsilon\mu}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{Y}\mathfrak{L}-\mathfrak{X}\mathfrak{M}}{\varepsilon\mu}\right)\right\} D\mathrm{v},$$

und verwandelt sich also mittelst einer bekannten GREEN'schen Transformation in:

$$F = \int \frac{(\mathfrak{Z}\mathfrak{M} - \mathfrak{Y}\mathfrak{N}) \cos(n, x) + (\mathfrak{X}\mathfrak{N} - \mathfrak{Z}\mathfrak{L}) \cos(n, y) + (\mathfrak{Y}\mathfrak{L} - \mathfrak{X}\mathfrak{M}) \cos(n, z)}{\varepsilon \mu} Do,$$

die gegenwärtige Integration ausgedehnt gedacht über alle Elemente Do einer den ganzen unendlichen Raum umschliessenden Fläche. Nun sind aber die $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ im Unendlichen von der Ordnung $\left(\frac{1}{\varrho}\right)^2$ [vgl. Seite 266]. Folglich[1]) wird das vorstehende Integral F *verschwinden*; sodass also die Formel (20.) sich reducirt auf

$$(21.) \quad \frac{dE}{dt} + \underbrace{\int (p^{(1)}\alpha + p^{(2)}\beta + p^{(3)}\gamma)\, D\mathrm{v}}_{P} + \underbrace{\int (q^{(1)}\alpha + q^{(2)}\beta + q^{(3)}\gamma)\, D\mathrm{v}}_{Q} =$$
$$= - \int \frac{u\mathfrak{X} + v\mathfrak{Y} + w\mathfrak{Z}}{\varepsilon} D\mathrm{v}.$$

Hier mögen die beiden Integrale linker Hand für den Augenblick mit P und Q bezeichnet werden. P ist, ebenso wie die $p^{(h)}$ und p_{hj} [vgl. (13.) und (9.)], abhängig vom augenblicklichen *elektrischen Zustande* der den Weltraum erfüllenden Substanz; während andererseits Q, ebenso wie die $q^{(h)}$ und q_{hj} [vgl. (17.), (16.)], vom augenblicklichen *magnetischen Zustande* der Substanz abhängen.

Was nun ferner das Integral *rechter Hand* in (21.) anbelangt, so sei erinnert an die allgemeinen Strömungsgleichungen (29.) Seite 237:

$$(22.) \quad \begin{cases} u = \lambda\left(\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} + X'\right), \\ v = \lambda\left(\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} + Y'\right), \\ w = \lambda\left(\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} + Z'\right), \end{cases} \quad \text{d. i.} \quad \begin{cases} \frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} = \frac{u}{\lambda} - X', \\ \frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} = \frac{v}{\lambda} - Y', \\ \frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} = \frac{w}{\lambda} - Z'. \end{cases}$$

Durch die Substitution dieser Werthe der Quotienten $\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}, \frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}, \frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}$ erhält jenes Integral folgende Gestalt:

$$(23.) \quad \int \frac{u\mathfrak{X} + v\mathfrak{Y} + w\mathfrak{Z}}{\varepsilon} D\mathrm{v} = \int \frac{u^2 + v^2 + w^2}{\lambda} D\mathrm{v} - \int (X'u + Y'v + Z'w)\, D\mathrm{v}.$$

Dies in (21.) eingesetzt, erhält man sofort:

$$(24.) \quad \frac{dE}{dt} + P + Q = - \int \frac{u^2 + v^2 + w^2}{\lambda} D\mathrm{v} + \int (X'u + Y'v + Z'w)\, D\mathrm{v},$$

1) Zu beachten ist, dass ε und μ im Unendlichen *constant* sind. Vgl. die Note Seite 290.

eine Formel, die man auch so schreiben kann:

$$(25.)\ d\mathsf{E} + (dt)\int\frac{u^2+v^2+w^2}{k}D\mathrm{v} = (dt)\int(X'u + Y'v + Z'w)\,D\mathrm{v} - (P+Q)\,dt.$$

Hier bezeichnet offenbar $d\mathsf{E}$ den Zuwachs der *Energie* E während der Zeit dt. Und ebenso ist auch das Integral linker Hand von einfacher Bedeutung; denn es repräsentirt (inclusive des Factors dt) diejenige *Wärmemenge*, welche nach dem Joule'*schen* Gesetz in der betrachteten Substanz infolge der elektrischen Strömungen u, v, w während der Zeit dt sich entwickelt.

Was ferner die rechte Seite der Formel (25.) anbelangt, so sind X', Y', Z' die auf die Substanz einwirkenden *fremden* elektromotorischen Kräfte [vgl. Seite 221]. Und das Integral rechter Hand wird daher (inclusive des Factors dt) diejenige *elektromotorische Arbeit* repräsentiren, welche von allen diesen fremden Kräften während der Zeit dt verrichtet wird. Von ganz unbekannter Bedeutung ist hingegen das *letzte Glied* $(P+Q)\,dt$ der Formel (25.). Wir werden im folgenden Paragraph über dieses Glied nähere Auskunft zu gewinnen suchen.

§ 14.

Ueber das Princip der Energie.

Die zu betrachtende Substanz haben wir im letzten Paragraph in *beliebiger Bewegung* uns gedacht. Die *ganze Energie* dieser Substanz besteht daher aus zwei Theilen, nämlich erstens aus ihrer mit E bezeichneten elektromagnetischen Energie, und zweitens aus ihrer gewöhnlichen Bewegungsenergie, die in üblicher Weise mit T bezeichnet werden mag. Diese Bewegungsenergie oder lebendige Kraft T hat bekanntlich den Werth

$$(26.)\qquad \mathsf{T} = \int\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{2}\,q\,D\mathrm{v},$$

die Integration ausgedehnt gedacht über alle substantiellen Volumelemente $D\mathrm{v}$ der betrachteten Substanz; dabei bezeichnet q die Dichtigkeit; sodass also $q\,D\mathrm{v}$ die in dem substantiellen Volumelement $D\mathrm{v}$ enthaltene *gewöhnliche träge Masse* vorstellt.

Die Bewegung dieser trägen Masse $q\,D\mathrm{v}$ wird im Allgemeinen stattfinden unter dem Einfluss folgender *ponderomotorischen Kräfte*:

$$(27.)\quad \begin{cases} (\Xi_e + \Xi_m + \Xi^f)\, Dv, \\ (H_e + H_m + H^f)\, Dv, \\ (Z_e + Z_m + Z^f)\, Dv, \end{cases}$$

Hier sollen $\Xi_e Dv$, $H_e Dv$, $Z_e Dv$ und $\Xi_m Dv$, $H_m Dv$, $Z_m Dv$ diejenigen *uns noch völlig unbekannten* ponderomotorischen Kräfte vorstellen, welche die ganze betrachtete Substanz, vermöge ihres augenblicklichen elektrischen und vermöge ihres augenblicklichen magnetischen Zustandes, auf das substantielle Element Dv ausübt. Andererseits sollen unter $\Xi^f Dv$, $H^f Dv$, $Z^f Dv$ irgend welche *fremde* auf Dv einwirkende ponderomotorische Kräfte verstanden sein, die zum Theil z. B. von der Schwere oder irgend welchen Gravitationen (Fernwirkungen) herrühren können [vgl. die Note Seite 221].

Nach dem bekannten Princip der lebendigen Kraft wird die lebendige Kraft T der betrachteten Substanz während des Zeitelementes dt um eben so viel zunehmen, als die Arbeit beträgt, welche während dieser Zeit dt von allen auf die Substanz einwirkenden ponderomotorischen Kräften verrichtet wird. Repräsentiren nun also, wie wir voraussetzen, die Ausdrücke (27.) *sämmtliche* ponderomotorischen Kräfte, die auf das substantielle Volumelement Dv überhaupt einwirken, so wird der soeben ausgesprochene Satz analytisch dargestellt sein durch folgende Formel:

$$(28.)\quad dT = (dt)\int(\Xi_e\alpha + H_e\beta + Z_e\gamma)\, Dv + (dt)\int(\Xi_m\alpha + H_m\beta + Z_m\gamma)\, Dv \\ + (dt)\int(\Xi^f\alpha + H^f\beta + Z^f\gamma)\, Dv,$$

die Integrationen ausgedehnt gedacht über alle substantiellen Volumelemente Dv der betrachteten Substanz; dabei repräsentiren α, β, γ (wie gewöhnlich) die augenblicklichen Geschwindigkeitscomponenten eines solchen substantiellen Elementes Dv. Die rechte Seite der Formel (28.) wird zu bezeichnen sein als die Summe der während der Zeit dt auf sämmtliche Elemente Dv ausgeübten *ponderomotorischen Arbeiten*.

Addirt man zur Formel (28.) die vorhin erhaltene Formel (25):

$$(29.)\quad dE + (dt)\int\frac{u^2+v^2+w^2}{\lambda}\, Dv \\ = (dt)\int(X^f u + Y^f v + Z^f w)\, Dv - (P+Q)\, dt,$$

so erhält man:

$$(30.)\quad d(\mathsf{T}+\mathsf{E}) + (dt)\int \frac{u^2+v^2+w^2}{\lambda}\,Dv =$$

$$= \begin{Bmatrix} +(dt)\int(\Xi'\alpha+\cdots)\,Dv + (dt)\int(X'u+\cdots)\,Dv \\ +(dt)\int(\Xi_e\alpha+\cdots)\,Dv - P\,dt \\ +(dt)\int(\Xi_m\alpha+\cdots)\,Dv - Q\,dt \end{Bmatrix};$$

hier besteht die linke Seite aus dem der Zeit dt entsprechenden Zuwachs der *ganzen Energie* $\mathsf{T}+\mathsf{E}$, und aus der während der Zeit dt sich entwickelnden Wärmemenge.

Um diese Formel (30.) weiter discutiren zu können, wird es nöthig sein, einige allgemeine Bemerkungen voranzuschicken. Betrachtet man in der analytischen Mechanik ein System von zwei Puncten m_1, m_2 und überdies noch einen dritten Punct m_0 (etwa Erde, Mond und Sonne), *und bezeichnet man die Energie des Systems* m_1, m_2 mit E, so wird für jedes Zeitelement die Formel stattfinden:

$$(\alpha.)\qquad dE = (dL_1^2 + dL_2^1) + (dL_1^0 + dL_2^0),$$

wo dE den Zuwachs der Energie E während der Zeit dt vorstellt, während andererseits unter dL_j^k, die während dieser Zeit vom Puncte m_k auf den Punct m_j (vermöge ihrer gegenseitigen Anziehung) ausgeübte Arbeit vorstellt. — Mit genau demselben Recht aber kann man für den Zuwachs dE auch folgende einfachere Formel hinstellen:

$$(\beta.)\qquad dE = dL_1^0 + dL_2^0.$$

Beide Formeln (α.) und (β.) sind völlig gleichberechtigt; nur hat in ihnen der Buchstabe E verschiedene Bedeutungen. Adoptirt man nämlich die Formel (α.), so versteht man unter E diejenige Energie, welche die Puncte m_1, m_2 nur in Folge ihres augenblicklichen *Bewegungszustandes* haben. Adoptirt man hingegen die Formel (β.), so versteht man dabei unter E diejenige Energie, welche die Puncte m_1, m_2 theils in Folge ihres *Bewegungszustandes*, theils aber auch in Folge ihres *gegenseitigen Anziehungszustandes* besitzen.

Hieraus geht hervor, dass das Wort Energie, je nach unserm augenblicklichen Belieben, in sehr verschiedener Bedeutung gebraucht werden kann, und ferner, dass man bei Aufstellung der Energieformel solche Arbeiten, die eine unmittelbare Folge der in der Energie bereits berücksichtigten Zustände sind, nicht noch be-

sonders in Rechnung zu bringen hat; wie z. B. in der Formel (β.) die Arbeiten dL_1^2 und dL_2^1 fortgelassen werden mussten, weil sie eine unmittelbare Folge des dort in der Energie schon mit berücksichtigten Anziehungszustandes sind.

In unserem Falle hat nun die Energie $\mathsf{T} + \mathsf{E}$ den Wert

$$(31.)\qquad \mathsf{T} + \mathsf{E} = \mathsf{T} + \mathsf{E}_e + \mathsf{E}_m .$$

Es ist also [vgl. (26.)]:

$$(32.)\qquad \mathsf{T} + \mathsf{E} = \int \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{2} q\, D\mathrm{v} + \int \frac{\mathfrak{R}^2}{8\pi\varepsilon} D\mathrm{v} + \int \frac{\mathfrak{Z}^2}{8\pi\mu} D\mathrm{v} ,$$

oder ausführlicher geschrieben:

$$(33.)\qquad \mathsf{T} + \mathsf{E} = \int \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{2} q\, D\mathrm{v} + \int \frac{\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2}{8\pi\varepsilon} D\mathrm{v} + \int \frac{\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2}{8\pi\mu} D\mathrm{v} .$$

Demgemäss sind in dieser Energie $\mathsf{T} + \mathsf{E}$ berücksichtigt: der augenblickliche *Bewegungszustand* (α, β, γ) der betrachteten Substanz, ferner ihr augenblicklicher *elektrischer Zustand* ($\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$) und endlich ihr augenblicklicher *magnetischer Zustand* ($\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$). Eine unmittelbare Folge dieser Zustände sind aber nach unserer Anschauungsweise die ponderomotorischen Kräfte Ξ_e, H_e, Z_e, Ξ_m, H_m, Z_m und die elektromotorischen Kräfte $X = \frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}$, $Y = \frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}$, $Z = \frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}$. Bei der Aufstellung der Energieformel sind daher die Arbeiten dieser Kräfte Ξ_e, H_e, Z_e, Ξ_m, H_m, Z_m, X, Y, Z fortzulassen, also nur allein die Arbeiten der Kräfte Ξ', H', Z' und X', Y', Z' in Rechnung zu bringen; so dass also die Energieformel folgendermassen lauten wird:

$$d(\mathsf{T} + \mathsf{E}) = (dt)\int (\Xi'\alpha + \mathsf{H}'\beta + \mathsf{Z}'\gamma)\, D\mathrm{v} + (dt)\int (X'u + Y'v + Z'w)\, D\mathrm{v} ;$$

wobei allerdings noch eine Correction anzubringen ist mit Rücksicht auf die entwickelte Wärme. Während des Zeitelementes entwickelt sich nämlich, nach dem Joule'schen Satz, in der Substanz die Wärmemenge:

$$(dt)\int \frac{u^2 + v^2 + w^2}{\lambda} D\mathrm{v} ;$$

und diese Wärmemenge wird daher (nach dem allgemeinen Satz über die Aequivalenz von Arbeit und Wärme) auf der rechten Seite unserer Formel in Abzug zu bringen, oder auf ihrer linken Seite hinzu zu addiren sein; so dass man also schliesslich erhält:

$$(34.)\qquad d(\mathsf{T} + \mathsf{E}) + (dt)\int \frac{u^2 + v^2 + w^2}{\lambda} D\mathrm{v} = (dt)\int (\Xi'\alpha + \cdots)\, D\mathrm{v} + (dt)\int (X'u + \cdots)\, D\mathrm{v} .$$

Vergleicht man jetzt endlich dieses Resultat (34.) mit dem vorhin erhaltenen Resultat (30.), so erkennt man sofort, dass der Ausdruck

$$(35)\qquad \begin{Bmatrix} +(dt)\int(\Xi_e\alpha+\mathrm{H}_e\beta+\mathrm{Z}_e\gamma)\,Dv-Pdt \\ +(dt)\int(\Xi_m\alpha+\mathrm{H}_m\beta+\mathrm{Z}_m\gamma)\,Dv-Qdt \end{Bmatrix}$$

gleich *Null* sein muss. Nun haben wir aber bereits hervorgehoben [vgl. (21.) und die unmittelbar auf (21.) folgenden Zeilen], dass der Ausdruck P (ebenso wie die Ξ_e, H_e, Z_e) nur allein vom *elektrischen* Zustande abhängt, und dass andererseits der Ausdruck Q (ebenso wie die Ξ_m, H_m, Z_m) nur allein vom *magnetischen* Zustande abhängt. Aus dem Verschwinden des Ausdruckes (35.) folgt daher, dass jede seiner beiden Zeilen für sich $= 0$ sein muss. Somit gelangen wir, indem wir für P und Q ihre eigentlichen Bedeutungen (21.) substituiren, zu folgenden beiden Gleichungen:

$$(36.)\qquad \begin{cases} \int(\Xi_e\alpha+\mathrm{H}_e\beta+\mathrm{Z}_e\gamma)\,Dv-\int(p^{(1)}\alpha+p^{(2)}\beta+p^{(3)}\gamma)\,Dv=0, \\ \int(\Xi_m\alpha+\mathrm{H}_m\beta+\mathrm{Z}_m\gamma)\,Dv-\int(q^{(1)}\alpha+q^{(2)}\beta+q^{(3)}\gamma)\,Dv=0. \end{cases}$$

Fasst man irgend ein bestimmtes substantielles Volumelement Dv ins Auge, so wird man durch passende Regulirung jener auf die Substanz einwirkenden fremden ponderomotorischen Kräfte Ξ', H', Z' dafür sorgen können, dass dieses Element Dv während der Zeit *dt beliebig vorgeschriebene* Geschwindigkeitscomponenten α, β, γ besitzt. In den Formeln (36.) müssen daher für jedwedes Dv die Coefficienten von α, β, γ einzeln $= 0$ sein.[1]) D. h. es müssen für jedwedes Dv die Gleichungen stattfinden:

$$(37.)\qquad \begin{cases} \Xi_e\,Dv=p^{(1)}\,Dv, \quad \mathrm{H}_e\,Dv=p^{(2)}\,Dv, \quad \mathrm{Z}_e\,Dv=p^{(3)}\,Dv, \\ \Xi_m\,Dv=q^{(1)}\,Dv, \quad \mathrm{H}_m\,Dv=q^{(2)}\,Dv, \quad \mathrm{Z}_m\,Dv=q^{(3)}\,Dv. \end{cases}$$

Substituirt man hier für $p^{(1)}$, $p^{(2)}$, $p^{(3)}$ und $q^{(1)}$, $q^{(2)}$, $q^{(3)}$ ihre eigentlichen Bedeutungen [(9.), (13.) und (16.), (17.)], so gelangt man zu folgendem Resultat:

---

1) Dieser Schluss ist wohl eigentlich nur dann zulässig, wenn in den Formeln (36.) die Coefficienten der α, β, γ von diesen Grössen α, β, γ *unabhängig* sind; was z. B. der Fall sein wird, wenn die α, β, γ unendlich klein sind (weil man alsdann ihre höheren Potenzen fortlassen darf). Kurz man sieht, dass der Uebergang von (36.) zu (37.) eigentlich nur erlaubt sein wird für den Fall der *substantiellen Ruhe*.

Die betrachtete, im Allgemeinen in irgend welcher Bewegung begriffene Substanz wird auf ihre einzelnen substantiellen Volumelemente $D\mathrm{v}$ *gewisse ponderomotorische Kräfte ausüben, die zum Theil elektrischen, zum Theil magnetischen Ursprungs sind. Und zwar besitzen die ponderomotorischen Kräfte* $\Xi_e D\mathrm{v}$, $\mathsf{H}_e D\mathrm{v}$, $\mathsf{Z}_e D\mathrm{v}$, *mit denen die Substanz, vermöge ihres elektrischen Zustandes* $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ *auf das Element* $D\mathrm{v}$ *einwirkt, folgende Werthe:*

$$(38.)\qquad \begin{cases} \Xi_e D\mathrm{v} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2\mathfrak{X}^2 - \mathfrak{R}^2}{8\pi\varepsilon}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}{8\pi\varepsilon}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2\mathfrak{X}\mathfrak{Z}}{8\pi\varepsilon}\right)\right] D\mathrm{v}, \\ \mathsf{H}_e D\mathrm{v} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2\mathfrak{Y}\mathfrak{X}}{8\pi\varepsilon}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2\mathfrak{Y}^2 - \mathfrak{R}^2}{8\pi\varepsilon}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}}{8\pi\varepsilon}\right)\right] D\mathrm{v}, \\ \mathsf{Z}_e D\mathrm{v} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2\mathfrak{Z}\mathfrak{X}}{8\pi\varepsilon}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2\mathfrak{Z}\mathfrak{Y}}{8\pi\varepsilon}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2\mathfrak{Z}^2 - \mathfrak{R}^2}{8\pi\varepsilon}\right)\right] D\mathrm{v}, \end{cases}$$

wo $\mathfrak{R}^2 = \mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2$ *ist.*

Andererseits werden diejenigen ponderomotorischen Kräfte $\Xi_m D\mathrm{v}$, $\mathsf{H}_m D\mathrm{v}$, $\mathsf{Z}_m D\mathrm{v}$, *welche die Substanz, vermöge ihres magnetischen Zustandes* $(\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N})$, *auf* $D\mathrm{v}$ *ausübt, folgende Werthe haben:*

$$(39.)\qquad \begin{cases} \Xi_m D\mathrm{v} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2\mathfrak{L}^2 - \mathfrak{J}^2}{8\pi\mu}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2\mathfrak{L}\mathfrak{M}}{8\pi\mu}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2\mathfrak{L}\mathfrak{N}}{8\pi\mu}\right)\right] D\mathrm{v}, \\ \mathsf{H}_m D\mathrm{v} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2\mathfrak{M}\mathfrak{L}}{8\pi\mu}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2\mathfrak{M}^2 - \mathfrak{J}^2}{8\pi\mu}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2\mathfrak{M}\mathfrak{N}}{8\pi\mu}\right)\right] D\mathrm{v}, \\ \mathsf{Z}_m D\mathrm{v} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2\mathfrak{N}\mathfrak{L}}{8\pi\mu}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2\mathfrak{N}\mathfrak{M}}{8\pi\mu}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2\mathfrak{N}^2 - \mathfrak{J}^2}{8\pi\mu}\right)\right] D\mathrm{v}, \end{cases}$$

wo $\mathfrak{J}^2 = \mathfrak{L}^2 + \mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2$ *ist.*

Solches constatirt, sei zunächst bemerkt, dass die Gleichungen (36.), unter Anwendung der in (21.) eingeführten Abkürzungen P, Q, folgendermassen lauten:

$$\begin{cases} \int(\Xi_e\alpha + \mathsf{H}_e\beta + \mathsf{Z}_e\gamma)\, D\mathrm{v} - P = 0, \\ \int(\Xi_m\alpha + \mathsf{H}_m\beta + \mathsf{Z}_m\gamma)\, D\mathrm{v} - Q = 0. \end{cases}$$

Substituirt man die hieraus für P, Q entspringenden Werthe in (28.), (29.), und setzt man dabei zugleich der Kürze willen:

$$(40.)\qquad \Xi_e + \Xi_m = \Xi, \qquad \mathsf{H}_e + \mathsf{H}_m = \mathsf{H}, \qquad \mathsf{Z}_e + \mathsf{Z}_m = \mathsf{Z},$$

so erhält man sofort:

$$\begin{cases} d\mathsf{T} = (dt)\int(\Xi\alpha + \cdots)\, D \quad + (dt)\int(\Xi'\alpha + \cdots)\, D\mathrm{v}, \\ d\mathsf{E} + (dt)\int\frac{u^2 + v^2 + w^2}{\lambda}\, D\mathrm{v} = -(dt)\int(\Xi\alpha + \cdots)\, D\mathrm{v} + (dt)\int(X'u + \cdots)\, D\mathrm{v}. \end{cases}$$

Bezeichnet man die letzten Integrale rechter Hand (die mit dem obern Index f versehen sind), inclusive des Factors (dt) kurzweg mit dL_p^f und dL_e^f; so gelangt man zu folgendem Satz:

Für die von uns betrachtete, im Allgemeinen in irgend welcher Bewegung begriffene Substanz gelten, mit Bezug auf jedwedes Zeitelement dt, folgende Formeln:

$$\begin{cases} dT = (dt)\int(\Xi\alpha + H\beta + Z\gamma)\,Dv + dL_p^f\,, & (41.) \\ dE + (dt)\int\frac{u^2+v^2+w^2}{\lambda}\,Dv = -(dt)\int(\Xi\alpha+H\beta+Z\gamma)\,Dv + dL_e^f\,; & (42.) \end{cases}$$

woraus durch Addition folgt:

$$(43.)\qquad d(T+E) + (dt)\int\frac{u^2+v^2+w^2}{\lambda}\,Dv = dL_p^f + dL_e^f\,.$$

Dabei bezeichnen dT und dE die der Zeit dt entsprechenden Zuwüchse der gewöhnlichen lebendigen Kraft T und der elektromagnetischen Energie E [vgl. (31.), (32.), (33.)]. Ferner repräsentirt das Integral

$$(44.)\qquad (dt)\int\frac{u^2+v^2+w^2}{\lambda}\,Dv$$

die während der Zeit dt in der Substanz sich entwickelnde Wärmemenge.

Andererseits haben die Ξ, H, Z die Bedeutungen (40.):

$$(45.)\qquad \Xi = \Xi_e + \Xi_m\,,\qquad H = H_e + H_m\,,\qquad Z = Z_e + Z_m\,,$$

wo Ξ_e, H_e, Z_e und Ξ_m, H_m, Z_m die in (38.), (39.) *besprochenen ponderomotorischen Kräfte vorstellen. Endlich bezeichnen dL_p^f und dL_e^f die während der Zeit dt von irgend welchen fremden Kräften auf die Substanz ausgeübte ponderomotorische und elektromotorische Arbeit; die analytischen Ausdrücke dieser Arbeiten lauten:*

$$(46.)\qquad \begin{cases} dL_p^f = (dt)\int(\Xi^f\alpha + H^f\beta + Z^f\gamma)\,Dv\,, \\ dL_e^f = (dt)\int(X^f u + Y^f v + Z^f w)\,Dv\,. \end{cases}$$

Befindet sich die betrachtete Substanz in *völliger Ruhe*, sind also die α, β, γ durchweg und fortdauernd $=0$, so wird nach (46.) auch $dL_p^f = 0$ sein.

Nimmt man nun überdies noch an, dass *keine* fremden elektromotorischen Kräfte einwirken, dass also die X^f, Y^f, Z^f ebenfalls $=0$ sind, so ist nach (46.) auch $dL_e^f = 0$; so dass alsdann also die allgemeinen Formeln (41.), (42.) sich reduciren auf:

$$\begin{cases} dT = 0\,, & (47). \\ dE + (dt)\int\frac{u^2+v^2+w^2}{\lambda}\,Dv = 0\,. & (48.) \end{cases}$$

Gleichzeitig wird in diesem Fall [vgl. (31.), (32.), (33.)] E den Werth haben:

(49.) $$\mathsf{E} = \int \left(\frac{\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2}{8\pi\varepsilon} + \frac{\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2}{8\pi\mu} \right) D\mathrm{v}\,.$$

Diese stets positive Grösse E wird nun aber zufolge der Formel (48):

(50.) $$\frac{d\mathsf{E}}{dt} = -\int \frac{u^2 + v^2 + w^2}{\lambda} D\mathrm{v}$$

in fortdauerndem Abnehmen begriffen sein. Und bei diesem unaufhörlichen Abnehmen wird sie, weil sie ihrer Natur nach stets positiv zu bleiben gezwungen ist, gegen irgend eine bestimmte, oberhalb 0 gelegene Grenze convergiren. Diese Grenze wirklich erreicht gedacht, wird sie alsdann weiterhin constant bleiben; woraus, mittelst der Formel (50.) folgt, dass die u, v, w weiterhin $= 0$ bleiben werden. Also folgender Satz:

(51.) *Sind in der ruhenden Substanz zu Anfang irgend welche elektrische Strömungen u, v, w vorhanden, so werden dieselben, falls keine fremden elektromotorischen Kräfte thätig sind, stets nach einiger Zeit erlöschen.*

Dabei bleibt allerdings noch fraglich, ob von jenem Augenblick an, wo diese u, v, w erlöschen, die elektrischen und magnetischen Zustände ($\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$) und ($\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$) der Substanz *constant* bleiben werden, oder ob dieselben, trotz des Erlöschens der u, v, w, noch weiter sich zu ändern im Stande sind. Bekannt ist nur, dass E von jenem Augenblick ab constant bleibt.

Allerdings kann man zur Aufklärung über den schliesslich eintretenden *elektrischen* Zustand ($\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$) die allgemeinen Strömungsgleichungen Seite 237 (29.) heranziehen, welche hier [wo die fremden elektromotorischen Kräfte X', Y', Z' alle $= 0$ gedacht sind; vgl. die Zeilen zwischen (46.) und (47.)], respective in den Conductoren und Isolatoren folgende Gestalten annehmen:

(52.)

in den Conductoren	in den Isolatoren
$\varepsilon u = \lambda\mathfrak{X}$,	$\varepsilon u = 0$,
$\varepsilon v = \lambda\mathfrak{Y}$,	$\varepsilon v = 0$,
$\varepsilon w = \lambda\mathfrak{Z}$,	$\varepsilon w = 0$.

Diese Formeln aber geben, wie wir sehen, über die $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ nur Aufschluss in den *Conductoren;* sie zeigen, dass in diesen die $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ nach dem Erlöschen der elektrischen Strömungen überall $= 0$ sein werden; und wir bleiben also im Unklaren über die schliesslichen Werthe dieser Grössen in den *Isolatoren.*

§ 15.

Ueber das Princip der Gleichheit der Action und Reaction.

Es entsteht die Frage, ob die durch den augenblicklichen elektrischen Zustand der Substanz provocirten *ponderomotorischen Kräfte* $\Xi_e Dv$, $H_e Dv$, $Z_e Dv$ dem allgemeinen Princip der Gleichheit der Action und Reaction entsprechen. Ich werde im Folgenden zeigen, dass solches der Fall ist; wenigstens werde ich nachweisen, dass diese Kräfte den sechs Gleichungen

$$(51.)\quad \begin{cases} \int \Xi_e Dv = 0, \\ \int H_e Dv = 0, \\ \int Z_e Dv = 0, \end{cases} \qquad (52.)\quad \begin{cases} \int (yZ_e - zH_e)\, Dv = 0, \\ \int (z\Xi_e - xZ_e)\, Dv = 0, \\ \int (xH_e - y\Xi_e)\, Dv = 0 \end{cases}$$

Genüge leisten, die Integrationen ausgedehnt gedacht über alle Volumelemente Dv des ganzen unendlichen Raumes.

Beweis der Gleichungen (51.). — Setzt man, ebenso wie früher, zur augenblicklichen Abkürzung:

$$(\alpha.)\quad \begin{cases} p_{11} = \dfrac{2\mathfrak{X}^2 - \mathfrak{R}^2}{8\pi\varepsilon}, \\ p_{22} = \dfrac{2\mathfrak{Y}^2 - \mathfrak{R}^2}{8\pi\varepsilon}, \\ p_{33} = \dfrac{2\mathfrak{Z}^2 - \mathfrak{R}^2}{8\pi\varepsilon}, \end{cases} \qquad \begin{cases} p_{23} = \dfrac{2\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}}{8\pi\varepsilon}, \\ p_{31} = \dfrac{2\mathfrak{Z}\mathfrak{X}}{8\pi\varepsilon}, \\ p_{12} = \dfrac{2\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}{8\pi\varepsilon}, \end{cases}$$

wo $\mathfrak{R}^2 = \mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2$ ist, so lauten die Werthe der in Rede stehenden Kräfte [vgl. (38.)] folgendermassen:

$$(\beta.)\quad \begin{cases} \Xi_e Dv = \left(\dfrac{\partial p_{11}}{\partial x} + \dfrac{\partial p_{12}}{\partial y} + \dfrac{\partial p_{13}}{\partial z}\right) Dv, \\ H_e Dv = \left(\dfrac{\partial p_{21}}{\partial x} + \dfrac{\partial p_{22}}{\partial y} + \dfrac{\partial p_{23}}{\partial z}\right) Dv, \\ Z_e Dv = \left(\dfrac{\partial p_{31}}{\partial x} + \dfrac{\partial p_{32}}{\partial y} + \dfrac{\partial p_{33}}{\partial z}\right) Dv. \end{cases}$$

Zugleich sei daran erinnert, dass die elektrischen Zustandscomponenten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ im Unendlichen von der Ordnung $\left(\frac{1}{\varrho}\right)^2$ sind [vgl. Seite 266]. Hieraus folgt, dass die in $(\alpha.)$ aufgeführten Grössen p_{hj} im Unendlichen von der Ordnung $\left(\frac{1}{\varrho}\right)^4$ sein werden.[1])

1) Dabei ist zu beachten, dass ε im Unendlichen *constant* ist. Vgl. die Note Seite 290.

Dies vorangeschickt, integriren wir jetzt die erste der Formeln (β.) über alle Volumelemente $D\mathrm{v}$ des ganzen unendlichen Raumes, und erhalten in solcher Weise, unter Anwendung einer bekannten Green'schen Transformation:

$$(\gamma.) \qquad \int \Xi_e D\mathrm{v} = \int [p_{11}\cos(n,x) + p_{12}\cos(n,y) + p_{13}\cos(n,z)]\, Do,$$

die Integration rechter Hand ausgedehnt gedacht über alle Flächenelemente Do einer den ganzen unendlichen Raum umschliessenden Fläche; dabei bezeichnet n die äussere Normale eines solchen Elementes Do. Man kann sich diese Fläche etwa als eine Kugelfläche vorstellen, die um den Anfangspunkt des Coordinatensystems mit einem unendlich grossen Radius ϱ beschrieben ist. Alsdann aber erkennt man sofort, dass der Werth des in Rede stehenden Flächenintegrals $= 0$ sein muss, weil die p_{kj} (wie soeben bemerkt wurde) im Unendlichen von der Ordnung $\left(\frac{1}{\varrho}\right)^4$ sind. Somit folgt aus (γ.):

$$(\delta.) \qquad \int \Xi_e D\mathrm{v} = 0.$$

Q. e. d.

Beweis der Gleichungen (52.). — Aus (β.) erhält man sofort:

$$(y\mathsf{Z}_e - z\mathsf{H}_e)\,D\mathrm{v} = \left[\left(y\frac{\partial p_{31}}{\partial x} - z\frac{\partial p_{21}}{\partial x}\right) + \left(y\frac{\partial p_{32}}{\partial y} - z\frac{\partial p_{22}}{\partial y} + p_{32}\right) + \right.$$
$$\left. + \left(y\frac{\partial p_{33}}{\partial z} - z\frac{\partial p_{23}}{\partial z} - p_{23}\right)\right] D\mathrm{v};$$

denn die hier zugefügten Glieder $+ p_{32}$ und $- p_{23}$ zerstören sich gegenseitig. Nun aber kann man diese Formel offenbar auch so schreiben:

$$(\varepsilon.) \quad (y\mathsf{Z}_e - z\mathsf{H}_e)\,D\mathrm{v} = \left[\frac{\partial(yp_{31} - zp_{21})}{\partial x} + \frac{\partial(yp_{32} - zp_{22})}{\partial y} + \frac{\partial(yp_{33} - zp_{23})}{\partial z}\right] D\mathrm{v};$$

und hieraus ergiebt sich durch Integration über den ganzen unendlichen Raum und unter Anwendung der Green'schen Transformation:

$$(\zeta.) \qquad \int (y\mathsf{Z}_e - z\mathsf{H}_e)\,D\mathrm{v} =$$
$$= \int [(yp_{31} - zp_{21})\cos(n,x) + (yp_{32} - zp_{22})\cos(n,y) + (yp_{33} - zp_{23})\cos(n,z)]\, Do,$$

wo Do und n dieselben Bedeutungen haben wie in (γ.). Die p_{kj} sind im Unendlichen von der Ordnung $\left(\frac{1}{\varrho}\right)^4$. In der Formel ($\zeta$.) werden daher die Coefficienten von $\cos(n,x)$, $\cos(n,y)$, $\cos(n,z)$

im Unendlichen von der Ordnung $\left(\frac{1}{\varrho}\right)^3$ sein. Folglich wird das vorstehende Flächenintegral = 0 sein; so dass also die Formel (ζ.) sich reducirt auf:

$$(\eta.) \qquad \int (y Z_e - z H_e)\, Dv = 0.$$

Q. e. d.[1])

§ 16.

Das elektrostatische Problem für einen Isolator und einen Conductor, beide von Luft umgeben gedacht.

Wollte man das elektrostatische Problem für zwei von Luft umgebene Conductoren betrachten, so würde die Maxwell-Hertz'sche Theorie für diese beiden Körper zu Resultaten führen, die mit denen der Poisson'schen Theorie in *Uebereinstimmung* sind, wenigstens bis auf gewisse constante Factoren, die identisch sind mit dem Dielektricitätscoefficienten der Luft.

Absichtlich werde ich daher hier den Fall in Betracht ziehen, dass von den beiden Körpern der eine ein *Isolator* und nur der andere ein *Conductor* ist; denn in diesem Fall wird sich zwischen den Resultaten der Maxwell-Hertz'schen, und der Poisson'schen Theorie eine *wesentliche Verschiedenheit* herausstellen. Ausserdem liegt dieser Fall gewissermassen im Mittelpunct des zu untersuchenden Gebietes, indem man von ihm aus leicht zu übersehen im Stande ist, wie die Dinge sich gestalten für beliebig viele Isolatoren, oder für beliebig viele Conductoren, oder auch für ein System von Körpern, welches theils aus Isolatoren, theils aus Conductoren besteht.

Um jene *wesentliche Verschiedenheit* gegenüber der Poisson'schen Theorie deutlich übersehen zu können, dürfte es zweckmässig sein, successive zuerst diese Poisson'sche Theorie, und sodann erst die Maxwell-Hertz'sche Theorie in Betracht zu ziehen.

Die Poisson'sche Theorie. — Ebenso, wie früher, betrachten wir eine gegebene *Schellackmasse* $\mathfrak{S}$ und irgend einen *Conductor* $\mathfrak{C}$, beide Körper fest aufgestellt, und umgeben von Luft $\mathfrak{L}$. Sowohl im Innern wie an der Oberfläche des Schellacks $\mathfrak{S}$ seien irgend welche *unbewegliche* Quantitäten freier Elektricität vorhanden,

1) Die Formeln (51), (52) sind hier nur bewiesen für die Kräfte Ξ_e, H_e, Z_e. Doch übersieht man sofort, dass genau dieselben Formeln auch gelten werden für die Kräfte Ξ_m, H_m, Z_m.

während gleichzeitig der Conductor $\mathfrak{C}$ von Hause aus mit irgend welchem Quantum (E_1) freier Elektricität geladen ist, die sich in seinem Innern nach Belieben bewegen kann. Ueberdies betrachten wir die umgebende Luft $\mathfrak{L}$ als einen absoluten Isolator und als völlig unelektrisch.

Nach Eintritt des elektrischen Gleichgewichtszustandes wird alsdann die im Conductor $\mathfrak{C}$ enthaltene Elektricitätsmenge (E_1) an seiner Oberfläche abgelagert sein, in Gestalt einer unendlich dünnen elektrischen Schicht. Und wir werden daher, im Sinne Poisson's, nach Eintritt des elektrischen Gleichgewichtszustandes, an Stelle des complicirten Schemas (4.) Seite 277, folgendes einfachere Bild vor uns haben:

(I.)

im Schellack $\mathfrak{S}$	a. d. Grenze	*in der Luft* $\mathfrak{L}$	a. d. Grenze	*im Conductor* $\mathfrak{C}$
$(\sigma) = \mathfrak{f}(x,y,z)$	$(S) = \mathfrak{F}(x,y,z)$	$(\sigma) = 0$	$(S) = ?$	$(\sigma) = 0$

Dabei sind unter (σ) und (S) die freien elektrischen räumlichen Dichtigkeiten und die freien elektrischen Flächendichtigkeiten im Sinne Poisson's zu verstehen. Im Innern und an der Oberfläche des Schellacks sind (σ) und (S) in unveränderlicher Weise gegeben, als bestimmte Functionen der Coordinaten. Ferner ist (σ) in der Luft und im Innern des Conductors überall $= 0$. *Unbekannt* hingegen ist das (S) auf der Conductoroberfläche. Bildet man daher das Potential φ aller überhaupt vorhandenen freien Elektricität in Bezug auf irgend welchen Raumpunct:

(II.)
$$\varphi = \int_{\mathfrak{S}} \frac{(\sigma) Dv}{r} + \int_{\mathfrak{S}} \frac{(S) Do}{r} + \int_{\mathfrak{C}} \frac{(S) Do}{r},$$

so sind in diesem Ausdruck die Dichtigkeiten (σ), (S) des ersten und zweiten Integrals *gegeben;* sodass nur allein die Dichtigkeit (S) des dritten Integrals *unbekannt* ist.

Diese unbekannte Dichtigkeit (S) auf der Conductoroberfläche wird nun, falls man sich in die Poisson'sche Theorie hineinversetzt, in solcher Weise zu bestimmen sein, dass das Potential φ im Innern des Conductors allenthalben constant ist, und dass überdiess die Gesammtmasse der auf der Conductoroberfläche vorhandenen elektrischen Belegung ebenso gross ist wie die dem Conductor von Hause aus zuertheilte elektrische Ladung (E_1). Die erste Anforderung lautet also:

(III.)
$$\varphi = K, \text{ innerhalb } \mathfrak{C},$$

wo K eine noch *unbekannte* Constante vorstellt. Andererseits lautet die zweite Anforderung:

$$\text{(IV.)} \qquad \int_{\mathfrak{C}} (S)\, Do = (E_1),$$

wo (E_1) *gegeben* ist. Uebrigens ist nach (II.) und (III.) auf der Conductoroberfläche:

$$\text{(V.)} \qquad -4\pi(S) = \frac{\partial \varphi}{\partial n_0},$$

wo n_0 die äussere Normale der Conductoroberfläche vorstellt; wie sich solches aus einem bekannten allgemeinen Satze sofort ergiebt; sodass man also jene zweite Anforderung (IV.) auch so schreiben kann:

$$\text{(VI.)} \qquad \int_{\mathfrak{C}} \frac{\partial \varphi}{\partial n_0}\, Do = -4\pi(E_1).$$

Nach bekannter Methode kann man nun zeigen, dass diese beiden Anforderungen (III.) und (VI.) zur Bestimmung des Potentials φ völlig ausreichend sind. Hat man aber φ berechnet, so ergiebt sich alsdann die unbekannte Dichtigkeit (S) auf der Conductoroberfläche sofort durch Anwendung der Formel (V.).

Bei der MAXWELL-HERTZ'schen Theorie liegen die Dinge sehr viel complicirter, — schon deswegen, weil hier statt der *einen* Unbekannten (S) nothwendigerweise *zwei* Unbekannte (S), (S) in Betracht kommen; — wie man solches aus den folgenden Betrachtungen ersehen wird.

Die Maxwell-Hertz'sche Theorie. — Wir haben es hier zu thun mit dem elektromagnetischen Gleichgewichtszustande. Und für diesen besitzen die HERTZ'schen Differentialgleichungen folgende Gestalt [vgl. Seite 293 (1 c.), (2 c.)]:

$$(1.)\ \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} - \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} - \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} - \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} = 0, \end{cases} \qquad (2.)\ \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\mathfrak{N}}{\mu} - \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\mathfrak{M}}{\mu} = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\mathfrak{L}}{\mu} - \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\mathfrak{N}}{\mu} = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\mathfrak{M}}{\mu} - \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\mathfrak{L}}{\mu} = 0. \end{cases}$$

Auch ist zu bemerken, dass diese Gleichungen in ihrer *transfigurirten* Gestalt folgendermassen lauten [vgl. Seite 293 (Ic), (IIc.)]:

$$(3.)\ \begin{cases} \mathfrak{X} = -\varepsilon\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}, \\[2mm] \mathfrak{Y} = -\varepsilon\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}, \\[2mm] \mathfrak{Z} = -\varepsilon\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}, \end{cases} \qquad (4.)\ \begin{cases} \mathfrak{L} = -\mu\dfrac{\partial \psi}{\partial x}, \\[2mm] \mathfrak{M} = -\mu\dfrac{\partial \psi}{\partial y}, \\[2mm] \mathfrak{N} = = \mu\dfrac{\partial \psi}{\partial z}, \end{cases}$$

wo alsdann φ das Potential aller freien Elektricität in Bezug auf den Punct (x, y, z) vorstellt, während ψ das Potential von allem freien Magnetismus in Bezug auf diesen Punct bezeichnet.

Die Formelsysteme (1.), (3.) sind offenbar ganz unabhängig von den Systemen (2.), (4.). Wir können somit die letztern ganz bei Seite setzen, und uns nur allein mit den Systemen (1.), (3.) beschäftigen.

Für den hier zu betrachtenden Fall ($\mathfrak{S}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{C}$) haben wir nun [nach Seite 277 (4.), (6.)] folgendes Schema[1]):

(5.)

ε		ε_0		ε_1
im Schellack $\mathfrak{S}$	a. d. Grenze	*in der Luft* $\mathfrak{L}$	a. d. Grenze	*im Conductor* $\mathfrak{C}$
$\sigma = f(x, y, z)$	$S = F(x, y, z)$	$\sigma = 0$	$S = \varepsilon_0 (S)$	$\sigma = 0$
$(\sigma) = \frac{f(x, y, z)}{\varepsilon}$	$(S) = ?$	$(\sigma) = 0$	$(S) = ?$	$(\sigma) = 0$

Die hier auftretenden Functionen $f(x, y, z)$, $F(x, y, z)$ sind, ebenso wie die Constanten ε, ε_0, ε_1 von Hause aus gegeben [vgl. Seite 277]; und es sind also im Ganzen nur *zwei Unbekannte* vorhanden, nämlich (S) und (S), die freien elektrischen Dichtigkeiten auf der Schellack- und auf der Conductoroberfläche. Uebrigens ist bekannt, dass die der letztern Fläche zugehörige Dichtigkeit (S) der Formel

(6.) $$\int_{\mathfrak{C}} (S)\, Do = \frac{E_1}{\varepsilon_0}$$

zu entsprechen hat [vgl. Seite 280 (18.)]. — Im Auge zu behalten sind folgende theils jetzt, theils schon früher eingeführte Bezeichnungen:

(7.)
- E_1 ist die dem Conductor von Hause aus mitgetheilte Menge wahrer Elektricität;
- ε, ε_0 und ε_1 sind die constanten Dielektricitätscoefficienten des Schellacks-, der Luft und des Conductors;
- Dementsprechend sind n und n_1 die *inneren* Normalen der Schellackoberfläche und der Conductoroberfläche; während unter n_0 die *äusseren* (in die Luft hineingehenden) Normalen dieser Flächen zu verstehen sind.

Was nun die Lösung des Problems, d. i. die Berechnung der beiden Unbekannten (S), (S) *anbelangt*, so bilden wir zunächst das Potential φ aller überhaupt vorhandenen freien Elektricität in

1) In der vorletzten Colonne des Schemas ist hier notirt: $S = \varepsilon_0 (S)$. Es ist dies geschehen auf Grund der Formel (6.) Seite 278.

Bezug auf irgend welchen Raumpunct (x, y, z). Dasselbe wird nach (5.) lauten:

$$(8.) \qquad \varphi = \int_{\mathfrak{S}} \frac{(\sigma) Dv}{r} + \int_{\mathfrak{S}} \frac{(S) Do}{r} + \int_{\mathfrak{C}} \frac{(S) Do}{r};$$

und die elektrischen Zustandscomponenten der betrachteten (aus Schellack, Luft und Conductor bestehenden) Substanz werden alsdann in jenem Raumpunct (x, y, z) die Werthe (3.) besitzen:

$$(9.) \qquad \mathfrak{X} = -\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \mathfrak{Y} = -\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \mathfrak{Z} = -\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

wo $\varepsilon = \varepsilon, \varepsilon_0, \varepsilon_1$ ist, jenachdem jener Punct (x, y, z) im Schellack, in der Luft oder im Conductor liegt.

Nach einem allgemeinen Satz [Seite 275 (16.)] sind nun $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ im Innern des Conductors überall $= 0$. Somit ergiebt sich aus (9.), dass φ im Innern des Conductors überall *constant* ist:

$$(10.) \qquad \varphi = K, \text{ innerhalb } \mathfrak{C},$$

wo allerdings das K eine noch ganz *unbekannte* Constante vorstellt.

Ferner ist zu beachten, dass die in (5.) angegebenen Flächendichtigkeiten S, S und (S), (S) zum Potentiale φ in einfachen Beziehungen stehen. Substituirt man nämlich die Werthe (9.) in den Formeln Seite 279 (11.), (12.), so erhält man:

$$(11.) \qquad \left\{\begin{aligned} 4\pi S &= -\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial n_0} \\ 4\pi (S) &= -\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{\partial \varphi}{\partial n_0} \end{aligned}\right\} \text{ auf der Schellackoberfläche;}$$

und substituirt man ferner jene Werthe in den beiden Formeln Seite 280 (13.) (14.), so ergiebt sich:

$$(12.) \qquad \left\{\begin{aligned} 4\pi S &= -\varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial n_0} \\ 4\pi (S) &= -\frac{\partial \varphi}{\partial n_0} \end{aligned}\right\} \text{ auf der Conductoroberfläche;}$$

wodurch z. B. die Gleichung (6.) übergeht in:

$$(13.) \qquad \int_{\mathfrak{C}} \frac{\partial \varphi}{\partial n_0} Do = -\frac{4\pi E_1}{\varepsilon_0}.$$

Von den vier Gleichungen (11.), (12.) ist eigentlich nur allein die *erste* unmittelbar brauchbar zur Berechnung des Potentials φ; denn nur in ihr ist die linke Seite bekannt, nämlich $= 4\pi F(x, y, z)$, nach (5.); während die linken Seiten der drei andern Gleichungen unbekannt sind, wie ebenfalls aus (5.) zu ersehen ist. Nimmt man hinzu, was sonst noch zur Berechnung des Potentials φ als brauchbar erscheint, so gelangt man zu folgendem Resultat:

Das Potential (8.):

(14.) $$\varphi = \int\limits_{\mathfrak{S}} \frac{(\sigma) Dv}{r} + \int\limits_{\mathfrak{S}} \frac{(S) Do}{r} + \int\limits_{\mathfrak{C}} \frac{(S) Do}{r}$$

ist [*vrgl.* (5.)] *mit der gegebenen Dichtigkeit* $(\sigma) = \frac{f(x,y,z)}{\varepsilon}$ *und mit den beiden unbekannten Dichtigkeiten* (S), (S) *behaftet — Dieses Potential* φ *muss nun der Anforderung* (10.) *entsprechen:*

(15.) $\varphi = K$, *innerhalb des Conductors,*

wo K *eine unbekannte Constante vorstellt. Ferner muss dasselbe der Anforderung* (13.) *entsprechen:*

(16.) $$\int\limits_{\mathfrak{C}} \frac{\partial \varphi}{\partial n_{\mathfrak{s}}} Do = -\frac{4\pi E_1}{\varepsilon_0},$$

wo rechter Hand eine gegebene Constante steht. Endlich muss dasselbe der in (11.) *angegebenen Anforderung entsprechen:*

(17.) $\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial n_0} = -4\pi S$, *auf der Schellackoberfläche,*

wo S *eine gegebene Function der Coordinaten vorstellt. Diese gegebene Function ist in* (5.) *mit* $F(x, y, z)$ *bezeichnet.*

Ohne sonderliche Schwierigkeiten lässt sich nun zeigen, dass das Potential φ durch diese Anforderungen *eindeutig bestimmt ist.* Um Solches darzuthun, nehmen wir einstweilen an, es existirten *zwei* diesen Anforderungen entsprechende Potentiale: φ' und φ''. Sie mögen lauten:

(α.) $$\begin{cases} \varphi' = \int\limits_{\mathfrak{S}} \frac{(\sigma) Dv}{r} + \int\limits_{\mathfrak{S}} \frac{(S)' Do}{r} + \int\limits_{\mathfrak{C}} \frac{(S)' Do}{r}, \\ \varphi'' = \int\limits_{\mathfrak{S}} \frac{(\sigma) Dv}{r} + \int\limits_{\mathfrak{S}} \frac{(S)'' Do}{r} + \int\limits_{\mathfrak{C}} \frac{(S)'' Do}{r}; \end{cases}$$

sodass also in diesen Potentialen φ' und φ'' die beiden Unbekannten (S), (S) resp. mit $(S)'$, $(S)'$ und $(S)''$, $(S)''$ bezeichnet sind.

Es sei nun $\varphi' - \varphi'' = \Phi$. Alsdann ist nach (α.):

(β.) $$\Phi = \varphi' - \varphi'' = \int\limits_{\mathfrak{S}} \frac{[(S)' - (S)''] Do}{r} + \int\limits_{\mathfrak{C}} \frac{[(S)' - (S)''] Do}{r}.$$

Nach (15.) müssen φ' und φ'' im Innern des Conductors constant sein. Bezeichnet man diese beiden Constanten mit K' und K'', so ergiebt sich:

(γ.) $\Phi = K' - K''$, innerhalb $\mathfrak{C}$.

Ferner müssen φ' und φ'' beide der Formel (16.) entsprechen. Somit ergiebt sich für ihre Differenz Φ die Gleichung:

$$(\delta.) \qquad \int\limits_{\mathfrak{C}} \frac{\partial \Phi}{\partial n_0} Do = 0.$$

Endlich müssen φ' und φ'' beide der Anforderung (17.) Genüge leisten. Somit ergiebt sich für ihre Differenz Φ folgende Formel:

$$(\varepsilon.) \qquad \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial n} + \varepsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial n_0} = 0, \text{ auf der Schellackoberfläche.}$$

Wir betrachten jetzt die über alle Volumelemente Dv des Schellacks und der Luft ausgedehnten Integrale

$$(\zeta.) \qquad \int\limits_{\mathfrak{S}} \Box \Phi \cdot Dv \text{ und } \int\limits_{\mathfrak{L}} \Box \Phi \cdot Dv,$$

wo $\Box \Phi$ die Bedeutung haben soll:

$$(\eta.) \qquad \Box \Phi = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2.$$

Diese Integrale (ζ.) sind nach bekannten GREEN'schen Sätzen in Oberflächenintegrale verwandelbar; und zwar erhält man in solcher Weise:

$$\int\limits_{\mathfrak{S}} \Box \Phi \cdot Dv = -\int\limits_{\mathfrak{S}} \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} Do,$$

$$\int\limits_{\mathfrak{L}} \Box \Phi \cdot Dv = -\int\limits_{\mathfrak{S}} \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n_0} Do - \int\limits_{\mathfrak{C}} \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n_0} Do,$$

wo n und n_0 die in (7.) angegebenen Bedeutungen besitzen. Multiplicirt man die beiden letzten Gleichungen mit den Constanten ε und ε_0, und addirt, so erhält man sofort:

$$\varepsilon \int\limits_{\mathfrak{S}} \Box \Phi \cdot Dv + \varepsilon_0 \int\limits_{\mathfrak{L}} \Box \Phi \cdot Dv = -\int\limits_{\mathfrak{S}} \Phi \left(\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial n} + \varepsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial n_0}\right) Do - \varepsilon_0 \int\limits_{\mathfrak{C}} \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n_0} Do,$$

also mit Hinblick auf (ε.) und (γ.):

$$\varepsilon \int\limits_{\mathfrak{S}} \Box \Phi \cdot Dv + \varepsilon_0 \int\limits_{\mathfrak{L}} \Box \Phi \, Dv = 0 - \varepsilon_0 (K' - K'') \int\limits_{\mathfrak{C}} \frac{\partial \Phi}{\partial n_0} Do,$$

oder mit Hinblick auf (δ.):

$$(\vartheta.) \qquad \varepsilon \int\limits_{\mathfrak{S}} \Box \Phi \cdot Dv + \varepsilon_0 \int\limits_{\mathfrak{L}} \Box \Phi \, Dv = 0;$$

und hieraus ergiebt sich sofort [vgl. (η.)], dass Φ eine *Constante* sein muss[1]), sowohl im Schellack, wie in der Luft. Auch wissen wir bereits, direct aus (γ.), dass Φ im Conductor ebenfalls eine

---

1) Es ist zu beachten, dass die in (ϑ.) enthaltenen Constanten ε und ε_0 *positiv* sind. Nach den Vorstellungen von HERTZ ist nämlich das der Luft zugehörige $\varepsilon_0 = 1$. Und die Dielektricitätscoefficienten aller übrigen Substanzen sind alsdann > 1. [Vgl. HERTZ' Ges. Werke, Bd. 2 Seite 239].

Constante ist. Nun ist aber Φ, nach (β.), das Potential zweier Oberflächenbelegungen. Folglich müssen jene drei Constanten untereinander identisch sein.

Das Potential Φ jener beiden Oberflächenbelegungen hat also im ganzen unendlichen Raume allenthalben ein und denselben constanten Werth. Folglich muss es (weil es seiner Natur nach im Unendlichen verschwindet) allenthalben $= 0$ sein. Hieraus aber folgt weiter (weil $\Phi = \varphi' - \varphi''$ ist), dass φ' und φ'' allenthalben einander gleich sind. Folglich giebt es nur *ein* Potential φ, welches den Formeln (14.), (15.), (16.), (17.) entspricht. — *Q. e. d.*

Das Potential φ wird also durch die Formeln (14.), (15.), (16.), (17.) *eindeutig bestimmt sein. Denkt man sich aber φ mittelst dieser Formeln wirklich berechnet, so ergeben sich alsdann die beiden in* (5.) *enthaltenen Unbekannten* (S), (S) *mittelst der in* (11.), (12.) *notirten Gleichungen:*

$$(18.) \qquad -4\pi(S) = \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \frac{\partial \varphi}{\partial n_0}, \quad \textit{auf der Schellackoberfläche,}$$

$$(19.) \qquad -4\pi(S) = \frac{\partial \varphi}{\partial n_0}, \quad \textit{auf der Conductoroberfläche.}$$

Die Resultate der MAXWELL-HERTZ'schen Theorie sind also dargestellt durch die Formeln (14.), (15.), (16.), (17.) und (18.), (19.) Vergleicht man aber diese Resultate mit den zu Anfang des gegenwärtigen Paragraphs angegebenen Resultaten der POISSON'schen Theorie, d. i. mit den dortigen Formeln (II.), (III.), (IV.), (V.), (VI.), so sieht man sofort, dass diese beiderlei Resultate *wesentlich von einander verschieden* sind. So z. B. handelt es sich bei der MAXWELL-HERTZ'schen Theorie um die Bestimmung *zweier* unbekannten Belegungen (S), (S); während bei der POISSON'schen Theorie nur *eine* unbekannte Belegung (S) zu berechnen ist.

Solches constatirt, wollen wir nun die Entwicklung der MAXWELL-HERTZ'schen Theorie noch ein wenig weiter fortsetzen. — Nach (5.) findet auf der Conductoroberfläche zwischen den Flächendichtigkeiten S und (S) die Beziehung statt: $S = \varepsilon_0(S)$. Und dieselbe Beziehung wird also auch stattfinden zwischen den betreffenden Elektricitätsmengen. *Sind also, was mit der bisherigen Bezeichnung in Einklang steht, E_1 und (E_1) die auf der Conductoroberfläche vorhandenen Mengen wahrer und freier Elektricität, so wird*

$$(20.) \qquad E_1 = \varepsilon_0(E_1)$$

sein.

Es fragt sich nun, ob vielleicht eine analoge einfache Relation auch für den *Schellack* stattfindet. Um hierauf näher einzugehen, benutzen wir die beiden Formeln (11.):

$$(21.)\qquad \left\{\begin{aligned} -4\pi S &= \varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial n}+\varepsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial n_0}\\ -4\pi(S) &= \frac{\partial\varphi}{\partial n}+\frac{\partial\varphi}{\partial n_0}\end{aligned}\right\}\ \text{auf der Schellackoberfläche;}$$

aus denen, durch Elimination von $\frac{\partial\varphi}{\partial n_0}$, sich ergiebt:

$$(22.)\qquad S-\varepsilon_0(S)=\frac{\varepsilon_0-\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial n},\ \text{auf der Schellackoberfläche.}$$

Integrirt man diese letzte Gleichung über alle Elemente Do der Schellackoberfläche, so erhält man sofort:

$$(23.)\qquad \int\limits_{\mathfrak{S}} S\,Do-\varepsilon_0\int\limits_{\mathfrak{S}}(S)\,Do=\frac{\varepsilon_0-\varepsilon}{4\pi}\int\limits_{\mathfrak{S}}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,Do.$$

Das Potential φ (14.) rührt her von der im Innern des Schellacks vorhandenen freien Elektricität, sowie auch von denjenigen freien Elektricitäten, die auf der Schellackoberfläche und auf der Conductoroberfläche sich vorfinden. Construirt man daher im Innern der Schellackmasse irgend eine geschlossene Oberfläche Ω, so wird das über alle Elemente Do dieser Fläche Ω ausgedehnte Integral

$$\int\limits_{\Omega}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,Do,$$

nach bekanntem Satze, gleich sein der innerhalb Ω vorhandenen Menge freier Elektricität, selbige noch multiplizirt mit 4π; vorausgesetzt, dass man unter n die auf Do errichtete *innere* Normale versteht. Man erhält also:

$$\int\limits_{\Omega}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,Do=4\pi\int\limits_{\Omega}(\sigma)\,D\mathrm{v}.$$

Lässt man jetzt die Fläche Ω sich mehr und mehr erweitern, bis sie schliesslich mit der Schellackoberfläche zusammenfällt, oder wenigstens derselben unendlich nahe kommt, so verwandelt sich die letzte Formel in:

$$\int\limits_{\mathfrak{S}}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,Do=4\pi\int\limits_{\mathfrak{S}}(\sigma)\,D\mathrm{v}$$

Dies in der Gleichung (23.) substituirt, erhält man sofort:

$$(24.)\qquad \int\limits_{\mathfrak{S}} S\,Do-\varepsilon_0\int\limits_{\mathfrak{S}}(S)\,Do=(\varepsilon_0-\varepsilon)\int\limits_{\mathfrak{S}}(\sigma)\,D\mathrm{v},$$

oder etwas anders geordnet:

$$(25.)\qquad \int\limits_{\mathfrak{S}} S\,Do + \int\limits_{\mathfrak{S}} \varepsilon(\sigma)\,Dv = \varepsilon_0\Big[\int\limits_{\mathfrak{S}} (S)\,Do + \int\limits_{\mathfrak{S}} (\sigma)\,Dv\Big].$$

Nun ist aber [vgl. den allgemeinen Satz Seite 269 (4.)] im Innern des Schellacks: $\varepsilon(\sigma) = \sigma$. Somit geht die Formel (25.) über in:

$$(26.)\qquad \int\limits_{\mathfrak{S}} S\,Do + \int\limits_{\mathfrak{S}} \sigma\,Dv = \varepsilon_0\Big[\int\limits_{\mathfrak{S}} (S)\,Do + \int\limits_{\mathfrak{S}} (\sigma)\,Dv\Big].$$

Bezeichnet man die Gesammtmenge aller auf und in dem Schellack vorhandenen **wahren** *Elektricität mit E, und andererseits die Gesammtmenge aller auf und in dem Schellack vorhandenen* **freien** *Elektricität mit (E), so kann man diese Formel (26.) offenbar auch so schreiben:*

$$(27.)\qquad E = \varepsilon_0(E);$$

und das ist ohne Zweifel das Analogon zu jener für den Conductor geltenden Relation (20.).

Uebrigens hätte man zu diesen Relationen (20.) und (27.) auf einfacherem Wege gelangen können. In der That können dieselben angesehen werden als ein unmittelbarer Ausfluss aus dem allgemeinen Satze Seite 269 (unten).

§ 17.

Es wird gezeigt, dass freie Elektricität an Stellen auftreten kann, an denen keine Spur von wahrer Elektricität sich vorfindet.

Um Solches zu zeigen, bringen wir die Betrachtungen des vorigen Paragraphs auf einen *speciellen Fall* in Anwendung, indem wir annehmen, dass die dort vorgeschriebenen Functionen $f(x, y, z)$ und $F(x, y, z)$ identisch $= 0$ sind, also annehmen, dass die dem Schellack von Hause aus mitgetheilten *wahren* Elektricitätsmengen durchweg $= 0$ sind; sodass also das dortige Schema (5.) Seite 313 sich reducirt auf:

(1.)

ε		ε_0		ε_1
im Schellack $\mathfrak{S}$	a. d. Grenze	*in der Luft* $\mathfrak{L}$	a. d. Grenze	*im Conductor* $\mathfrak{C}$
$\sigma = 0$	$S = 0$	$\sigma = 0$	$S = \varepsilon_0(S)$	$\sigma = 0$
$(\sigma) = 0$	$(S) = ?$	$(\sigma) = 0$	$(S) = ?$	$(\sigma) = 0$

Ueberträgt man nun die allgemeinen Resultate des vorigen Paragraphs auf den gegenwärtigen Fall, so hat man zu sagen [vgl. Seite 315 (14.), (15.), (16.), (17.)]: *Das elektrische Potential*

$$\varphi = \int_{\mathfrak{S}} \frac{(S) Do}{r} + \int_{\mathfrak{C}} \frac{(S) Do}{r} \tag{2.}$$

muss der Anforderung entsprechen:

$$\varphi = K, \text{ innerhalb des Conductors,} \tag{3.}$$

wo K eine noch ***unbekannte*** *Constante ist. Ferner muss dasselbe der Anforderung entsprechen:*

$$\int_{\mathfrak{C}} \frac{\partial \varphi}{\partial n_0} Do = -\frac{4\pi E_1}{\varepsilon_0}, \tag{4.}$$

wo rechter Hand eine gegebene Constante steht. Endlich muss dasselbe der Anforderung entsprechen:

$$\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial n_0} = 0, \text{ auf der Schellackoberfläche.} \tag{5.}$$

Sodann hat man [nach Seite 317 (18.), (19.)] hinzuzufügen: *Das Potential φ ist durch die Formeln (2.), (3.), (4.), (5.)* ***eindeutig bestimmt.*** *Und wird das Potential φ auf Grund dieser Formeln wirklich berechnet gedacht, so werden alsdann die Werthe der beiden in (1.) enthaltenen Unbekannten (S), (S) leicht zu finden sein mittelst folgender Gleichungen:*

$$-4\pi(S) = \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \frac{\partial \varphi}{\partial n_0}, \text{ auf der Schellackoberfläche,} \tag{6.}$$

$$-4\pi(S) = \frac{\partial \varphi}{\partial n_0}, \text{ auf der Conductoroberfläche.} \tag{7.}$$

Von Wichtigkeit sind ferner die am Schlusse des vorigen Paragraphs enthaltenen Resultate. Substituirt man in der Formel (26.) Seite 319 für S, σ, etc. die in (1.) notirten Werthe, so erhält man sofort:

$$0 + 0 = \varepsilon_0 \left[\int_{\mathfrak{S}} (S) Do + 0 \right],$$

d. i.

$$\int_{\mathfrak{S}} (S) Do = 0. \tag{8.}$$

Die Gesammtmasse der auf der Schellackoberfläche ausgebreiteten ***freien Elektricität*** *wird also $= 0$ sein*

Endlich ist nach (1.):

$$S = \varepsilon_0 (S), \text{ auf der Conductoroberfläche;}$$

woraus durch Integration sich ergiebt:

$$(9.) \qquad \int_{\mathfrak{C}} S\,Do = \varepsilon_0 \int_{\mathfrak{C}} (S)\,Do;$$

sodass also die auf der Conductoroberfläche ausgebreiteten Quantitäten wahrer und freier Elektricität Werthe besitzen, die nur durch den Factor ε_0 *sich von einander unterscheiden;* — was offenbar nur eine Wiederholung des im vorigen Paragraph enthaltenen Resultates (20.) Seite 317 ist.

Um die Hauptsache hervorzuheben: Zur Zeit des betrachteten Gleichgewichtszustandes ist die Schellackoberfläche mit einer unendlich dünnen Schicht *freier* Elektricität bedeckt, deren Flächendichtigkeit (S) nach (6.) den Werth hat:

$$(10.) \qquad (S) = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} + \frac{\partial \varphi}{\partial n_0}\right).$$

Von *wahrer* Elektricität ist indessen weder auf dieser Fläche selbst, noch in ihrer Nachbarschaft, auch nur eine Spur zu entdecken; wie solches unmittelbar aus (1.) zu ersehen ist. *Hiermit ist dargethan, dass freie Elektricität an Stellen auftreten kann, an denen keine Spur von wahrer Elektricität sich vorfindet, also die Richtigkeit derjenigen Behauptung erwiesen, von welcher in der Ueberschrift dieses Paragraphs die Rede war.*

Bemerkung. — Dieser Beweisführung könnte man entgegensetzen, dass der Ausdruck (10.) vielleicht $= 0$ sein könne. Dann aber müsste ein Potential φ existiren, welches nicht nur den Formeln (2.), (3.), (4.), (5.) entspricht, sondern für welches überdies auch noch jener Ausdruck (10.) gleich *Null* sein müsste; sodass sich alsdann also für φ im Ganzen folgende fünf Formeln ergeben würden:

$$(\alpha.) \qquad \varphi = \int_{\mathfrak{S}} \frac{(S)\,Do}{r} + \int_{\mathfrak{C}} \frac{(S)\,Do}{r},$$

$$(\beta.) \qquad \varphi = K, \text{ innerhalb des Conductors,}$$

$$(\gamma.) \qquad \int_{\mathfrak{C}} \frac{\partial \varphi}{\partial n_0}\,Do = G,$$

$$\left.\begin{aligned} (\delta.) \qquad & \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial n_0} = 0, \\ (\varepsilon.) \qquad & \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \frac{\partial \varphi}{\partial n_0} = 0, \end{aligned}\right\} \text{ auf der Schellackoberfläche,}$$

wo G, ε, ε_0 *gegebene* Constanten sind, während K eine noch *unbekannte* Constante vorstellt.

Im Allgemeinen aber werden diese fünf Formeln einander *widersprechen*; d. h. man wird im Allgemeinen die in (α.) enthaltenen Flächendichtigkeiten (S), (S) nicht so einzurichten im Stande sein, dass das Potential φ den Anforderungen (β.), (γ.), (δ.), (ε.) entspricht. — Ich sage „im Allgemeinen"; denn in speciellen Fällen wird solches in der That gelingen; so z. B., wenn $\varepsilon = \varepsilon_0$ ist, und infolgedessen alsdann die beiden Formeln (δ.) und (ε.) sich auf nur *eine* Formel reduciren.

Jener gegen unsere Beweisführung erhobene Einwand betrifft also nur ganz specielle Fälle. Unsere Behauptung, dass *freie* Elektricität an Stellen auftreten kann, an denen keine Spur von *wahrer* Elektricität sich vorfindet, wird daher durch jenen Einwand in keiner Weise erschüttert.

Leicht übersieht man nun wohl, auf Grund der hier angestellten Betrachtungen, dass auch der umgekehrte Satz gilt, *dass nämlich wahre Elektricität an Stellen auftreten kann, an denen keine Spur von freier Elektricität zu entdecken ist.*

§ 18.

Es wird gezeigt, dass der im vorletzten Paragraph gegenüber der Poisson'schen Theorie zu Tage getretene Widerspruch in einem gewissen speciellen Falle verschwindet.

Der specielle Fall, von dem hier die Rede sein soll, besteht in der Annahme, dass die Dielektricitätscoefficienten ε und ε_0 des Schellacks und der Luft *einander gleich* sind. — Um näher auf die Dinge einzugehen, sei erinnert an das Schema Seite 313 (5.):

(1.)

ε		ε_0		ε_1
im Schellack $\mathfrak{S}$	a. d. Grenze	*in der Luft* $\mathfrak{L}$	a. d. Grenze	*im Conductor* $\mathfrak{C}$
$\sigma = f(x,y,z)$	$S = F(x,y,z)$	$\sigma = 0$	$S = \varepsilon_0(S)$	$\sigma = 0$
$(\sigma) = \frac{f(x,y,z)}{\varepsilon}$	$(S) = ?$	$(\sigma) = 0$	$(S) = ?$	$(\sigma) = 0$

sowie an die zur Bestimmung des Potentials φ dienenden Formeln Seite 315 (14.), (15.), (16.), (17.):

(2.) $$\varphi = \int_{\mathfrak{S}} \frac{(\sigma) Dv}{r} + \int_{\mathfrak{S}} \frac{(S) Do}{r} + \int_{\mathfrak{C}} \frac{(S) Do}{r},$$

(3.) $$\varphi = K, \text{ innerhalb des Conductors,}$$

(4.) $$\int_{\mathfrak{C}} \frac{\partial \varphi}{\partial n_0} Do = -4\pi(E_1),$$

(5.) $$\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial n_0} = -4\pi S, \text{ auf der Schellackoberfläche;}$$

hier ist in (4.), an Stelle der Constanten E_1, die Constante (E_1) eingeführt worden, mittelst der Gleichung (20.) Seite 317.

Infolge unsrer augenblicklichen Annahme: $\varepsilon = \varepsilon_0$, geht die Formel (5.) über in

(6.) $$\frac{\partial \varphi}{\partial n} + \frac{\partial \varphi}{\partial n_J} = -\frac{4\pi S}{\varepsilon_0}, \text{ auf der Schellackoberfläche.}$$

Dieses Binom ist aber, wie aus der Formel (2.) sofort hervorgeht, $= -4\pi(S)$, wo (S) die Flächendichtigkeit der freien Elektricität auf der Schellackoberfläche vorstellt. Somit geht die Gleichung (6.) über in:

(7.) $$(S) = \frac{S}{\varepsilon_0}, \text{ auf der Schellackoberfläche.}$$

Nun ist aber nach (1.) das S auf der Schellackoberfläche *von Hause aus in bestimmter Weise gegeben.* Gleiches gilt daher nach (7.) auch von dem dortigen (S). Von den beiden in (2.) auftretenden Dichtigkeiten (S), (S) auf der Schellackoberfläche und auf der Conductoroberfläche ist daher im gegenwärtigen Fall nur allein *die letztere* unbekannt.

Nachdem die Formel (5.) zu dieser Erkenntniss geführt und in solcher Weise ihre Dienste geleistet hat, können wir dieselbe nun weiterhin fortlassen.

Wir haben alsdann zur Bestimmung des Potentials φ nur noch die *drei Formeln* (2.), (3.), (4.); gleichzeitig aber haben wir alsdann in diesem Potential φ (2.); nur noch *eine* unbekannte Dichtigkeit, d. i. die Dichtigkeit (S) auf der Conductoroberfläche.

Solches constatirt, erkennen wir jetzt aber sofort, dass die in Rede stehenden drei Formeln (2.), (3.), (4.) *identisch sind mit den Formeln der* Poisson'*schen Theorie,* nämlich mit (II.), (III.), (VI.) Seite 311, 312. — *Q. e. d.*

§ 19.

Die ponderomotorischen Kräfte elektrostatischen Ursprungs.

Wir halten fest an unsern bisherigen Vorstellungen, nur mit dem Unterschiede, dass wir uns jetzt, an Stelle des Schellacks und des Conductors, beliebig viele Isolatoren und beliebig viele Conductoren denken wollen. Ebenso wie vorhin in jenen beiden Körpern, ebenso sollen jetzt in all' diesen beliebig vielen Körpern, irgend welche Quantitäten von wahrer Elektricität on Hause aus vorhanden sein, die selbstverständlich in den Isolatoren als festsitzend, in den Conductoren hingegen als freibeweglich anzusehen sind.

Es sei nun Dv, mit den Coordinaten x, y, z. irgend ein unendlich kleines substantielles Volumelement, welches nach Belieben der Luft oder einem jener Körper angehören kann. Nach Eintritt des *elektromagnetischen Gleichgewichtszustandes* wird alsdann der in Dv vorhandene elektrische Zustand folgende Componenten besitzen:

$$(1.)\qquad \mathfrak{X} = -\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad \mathfrak{Y} = -\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad \mathfrak{Z} = -\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

wo ε den dortigen Werth des Dielektricitätscoefficienten vorstellt, während unter φ das Potential aller überhaupt vorhandenen freien Elektricität in Bezug auf den Punct (x, y, z) zu verstehen ist. [Vgl. (3.) Seite 312].

Die ganze den unendlichen Raum erfüllende Substanz besteht aus den genannten Körpern (Isolatoren und Conductoren) und aus der sie umgebenden Luft. Und die ponderomotorischen Kräfte, welche diese ganze Substanz *vermöge ihres elektrischen Zustandes*. auf das substantielle Element $Dv(x, y, z)$ ausübt, mögen mit $\Xi_e Dv$, $H_e Dv$, $Z_e Dv$ bezeichnet sein. Alsdann ist z. B. [vgl. (38.) Seite 305]:

$$(2.)\qquad \Xi_e Dv = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2\mathfrak{X}^2 - (\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2)}{8\pi\varepsilon}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}{8\pi\varepsilon}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2\mathfrak{X}\mathfrak{Z}}{8\pi\varepsilon}\right)\right] Dv.$$

Integrirt man diese Formel über alle Volumelemente Dv eines beliebig abgegrenzten Raumes Ω, so erhält man mittelst einer bekannten GREEN'schen Transformation:

$$\int\limits_\Omega \Xi_e Dv = \int\limits_\Omega \left[\left(\frac{2\mathfrak{X}^2 - (\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2)}{8\pi\varepsilon}\right) a + \left(\frac{2\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}{8\pi\varepsilon}\right) b + \left(\frac{2\mathfrak{X}\mathfrak{Z}}{8\pi\varepsilon}\right) c\right] Do,$$

oder besser geordnet:

$$(3.)\qquad \int\limits_\Omega \Xi_e Dv = \int\limits_\Omega \frac{2\mathfrak{X}(\mathfrak{X}a + \mathfrak{Y}b + \mathfrak{Z}c) - (\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2)a}{8\pi\varepsilon} Do,$$

die Integration rechts ausgedehnt gedacht über alle Oberflächenelemente Do des Raumes Ω; dabei sind a, b, c die Richtungscosinus der auf Do errichteten *äusseren* Normale.

Der Ausdruck linker Hand in (3.) ist offenbar von einfacher physikalischer Bedeutung. Er repräsentirt diejenige ponderomotorische Kraft, welche in der Richtung der x Axe ausgeübt wird auf das *ganze substantielle Volumen* Ω. Bezeichnet man diese Kraft kurzweg mit $\Xi_e\Omega$, so lautet die Formel (3.):

$$(4.)\qquad \Xi_e\Omega = \int\limits_\Omega \frac{2\mathfrak{X}(\mathfrak{X}a + \mathfrak{Y}b + \mathfrak{Z}c) - (\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2)a}{8\pi\varepsilon} Do.$$

Die auf das substantielle Volumen Ω in der Richtung der x Axe einwirkende ponderomotorische Kraft $\Xi_e\Omega$ kann also dadurch erhalten werden, dass man den Ausdruck

$$(5.)\qquad \frac{2\mathfrak{X}(\mathfrak{X}a+\mathfrak{Y}b+\mathfrak{Z}c)-(\mathfrak{X}^2+\mathfrak{Y}^2+\mathfrak{Z}^2)a}{8\pi\varepsilon}\,Do$$

bildet, und denselben integrirt über alle Oberflächenelemente Do jenes substantiellen Volumens Ω.

Je nach Umständen, werden wir bald von der Formel (2.), bald vom Satze (4.), (5.) Gebrauch machen, jenachdem jedesmal das Eine oder das Andere das bequemere ist. — Zwischen jedem Conductor und der umgebenden Luft, und ebenso auch zwischen jedem Isolator und der umgebenden Luft ist eine gewisse *Uebergangsschicht* vorhanden. Und bei der näheren Untersuchung der auf irgend ein *substantielles Volumelement* Dv einwirkenden ponderomotorischen Kraft wird es nun zweckmässig sein mehrere Fälle zu unterscheiden, jenachdem dieses Dv in homogener Substanz liegt, oder aber einer solchen Uebergangsschicht angehört, der eines Conductors oder der eines Isolators. Im Falle der Uebergangsschicht mag das Element Dv *scheibenförmig* gedacht werden, ebenso wie früher [vgl. Seite 279].

Beiläufige Bemerkung. — Die Dichtigkeit σ der *wahren* Elektricität hat bekanntlich den Werth [vgl. Seite 268 (1)]:

$$(\alpha.)\qquad 4\pi\sigma=\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y}+\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z},$$

und hieraus folgt durch Substitution der Werthe (1.):

$$(\beta.)\qquad -4\pi\sigma=\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right),$$

oder was dasselbe ist:

$$(\gamma.)\qquad -4\pi\sigma=\varepsilon\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)+\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right).$$

Andererseits ist die Dichtigkeit (σ) der sogenannten *freien* Elektricität sofort angebbar, falls man nur beachtet, dass φ das Potential derselben ist. Hieraus nämlich ergiebt sich sofort:

$$(\delta.)\qquad -4\pi(\sigma)=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2},$$

eine Formel, die man übrigens auch, durch Substitution der Werthe (1.), leicht erhalten kann aus der früheren Formel Seite 268 (2.).

Dies vorangeschickt, wollen wir jetzt *in der für $\Xi_e Dv$ geltenden Formel* (2.) die Werthe der $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ (1.) substituiren. Alsdann ergiebt sich sofort:

$$(\varepsilon.)\qquad 8\pi\cdot\Xi_e Dv=$$

$$=\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(2\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(2\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\right\}Dv.$$

Führt man aber hier die Differentiationen weiter aus, so gelangt man, mit Rücksicht auf $(\gamma.)$, zu folgender Formel:

$$(\zeta.)\qquad \Xi_\varepsilon Dv = -\left\{\frac{1}{8\pi}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]+\sigma\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right\}Dv,$$

die sich durch ihre Einfachheit einigermassen auszeichnet.

Erster Fall: Dv liegt in homogener Substanz. — Alsdann ist ε *constant;* sodass sich also aus (2.) durch Substitution der Werthe (1.) ergiebt:

$$\Xi_\varepsilon Dv = \frac{\varepsilon}{8\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left(2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\right\}Dv.$$

Der Ausdruck innerhalb der geschweiften Klammern ist

$$=2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}-\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right),$$

d. i.

$$=2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right).$$

Somit folgt:

$$(6.)\qquad \Xi_\varepsilon Dv = \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)Dv.$$

φ ist aber das Potential aller überhaupt vorhandenen *freien* Elektricität. Der in (6.) innerhalb der Klammern stehende Ausdruck ist daher $=-4\pi(\sigma)$, falls man nämlich (ebenso wie bisher) unter (σ) die Dichtigkeit der freien Elektricität versteht. Somit ergiebt sich:

$$(7.)\qquad \Xi_\varepsilon Dv = -\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot(\sigma)\,Dv;$$

was in gutem Einklang steht mit den Vorstellungen der POISSON'*schen Theorie.*

Besonders fällt ins Auge, dass die Kraft $\Xi_\varepsilon Dv$ *Null* sein wird, wenn das substantielle Element Dv der *Luft* oder dem *Innern eines Conductors* angehört, denn in beiden Fällen ist $(\sigma)=0$. Hingegen wird die in Rede stehende Kraft einen wirklichen Werth haben können, wenn Dv im *Innern eines Isolators* gedacht wird; denn hier kann (σ) irgend welchen positiven oder negativen Werth besitzen. [Man vgl. z. B. das Schema (4.) Seite 277].

Zweiter Fall: Es wird die Uebergangsschicht eines Conductors betrachtet; und Dv ist ein scheibenförmiges Element dieser Uebergangsschicht. — Diese kleine Scheibe Dv ist begrenzt zu denken von zwei gleich grossen und einander parallelen Flächenelementen Do, Do_0, und on einer ganz ausserordentlich schmalen gürtelförmigen Fläche. Dabei mag Do dem homogenen Metall, und

Do_0 der homogenen Luft zugehören. Die auf Do errichtete Normale n mit den Richtungscosinus a, b, c mag in das Innere des Conductors hineingehen. Andererseits mag die auf Do_0 errichtete Normale n_0 mit den Richtungscosinus a_0, b_0, c_0 in die Luft hineinlaufen; so dass also

$$(8.) \qquad a = -a_0, \quad b = -b_0, \quad c = -c_0$$

ist. — Um die auf diese kleine Scheibe Dv in der Richtung der x Axe einwirkende ponderomotorische Kraft $\Xi_e Dv$ zu finden, können wir uns nun des allgemeinen Satzes (4.), (5.) bedienen, indem wir für das dortige Volumen Ω das Volumen dieser kleinen Scheibe Dv nehmen. Wir erhalten in solcher Weise für jene Kraft $\Xi_e Dv$ ein über die Oberfläche der Scheibe D ausgedehntes Integral. Die Oberfläche der Scheibe Dv besteht aber nur aus den beiden Elementen Do, Do_0 und aus der ausserordentlich schmalen gürtelförmigen Fläche. Diese gürtelförmige Fläche ist [ebenso wie früher, vgl. Seite 279] zu vernachlässigen; so dass also die Anwendung des Satzes (4.), (5.) auf die kleine Scheibe Dv folgende Formel ergiebt:

$$(9.) \qquad \Xi_e Dv = \left\{ \begin{array}{l} + \dfrac{2\mathfrak{X}_0(\mathfrak{X}_0 a_0 + \mathfrak{Y}_0 b_0 + \mathfrak{Z}_0 c_0) - (\mathfrak{X}_0^2 + \mathfrak{Y}_0^2 - \mathfrak{Z}_0^2) a_0}{8\pi\varepsilon_0} Do_0 \\ + \dfrac{2\mathfrak{X}(\mathfrak{X} a + \mathfrak{Y} b + \mathfrak{Z} c) - (\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2) a}{8\pi\varepsilon} Do \end{array} \right\},$$

wo $\mathfrak{X}_0$, $\mathfrak{Y}_0$, $\mathfrak{Z}_0$ und $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ [vgl. (1.)] die Werthe haben:

$$(10.) \qquad \mathfrak{X}_0 = -\varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x_0}, \quad \mathfrak{Y}_0 = -\varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y_0}, \quad \mathfrak{Z}_0 = -\varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z_0},$$

$$(11.) \qquad \mathfrak{X} = -\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \mathfrak{Y} = -\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \mathfrak{Z} = -\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Hier beziehen sich x_0, y_0, z_0, ε_0 und x, y, z, ε respective auf den Fusspunct der Normale n_0 und auf den der Normale n. Nun ist aber das Potential φ im Innern des Conductors *constant*. Folglich sind die Grössen (11.) alle $= 0$; so dass also die Formel (9.) sich reducirt auf;

$$(12.) \qquad \Xi_e Dv = \frac{2\mathfrak{X}_0(\mathfrak{X}_0 a_0 + \mathfrak{Y}_0 b_0 + \mathfrak{Z}_0 c_0) - (\mathfrak{X}_0^2 + \mathfrak{Y}_0^2 + \mathfrak{Z}_0^2) a_0}{8\pi\varepsilon_0} Do_0.$$

n_0 ist die im Puncte (x_0, y_0, z_0) auf der Conductoroberfläche errichtete *äussere* Normale. Lässt man von diesem Puncte zwei zur Conductoroberfläche tangentiale und zu einander senkrechte Richtungen t_1 und t_2 ausgehen, so ist offenbar:

$$(13.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_0} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial n_0} a_0 + \dfrac{\partial\varphi}{\partial t_1} a_1 + \dfrac{\partial\varphi}{\partial t_2} a_2, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y_0} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial n_0} b_0 + \dfrac{\partial\varphi}{\partial t_1} b_1 + \dfrac{\partial\varphi}{\partial t_2} b_2, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial z_0} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial n_0} c_0 + \dfrac{\partial\varphi}{\partial t_1} c_1 + \dfrac{\partial\varphi}{\partial t_2} c_2, \end{cases}$$

wo a_1, b_1, c_1 und a_2, b_2, c_2 die Richtungscosinus der Tangenten t_1 und t_2 vorstellen; ebenso wie a_0, b_0, c_0 die Richtungscosinus der Normale n_0 sind. Nun ist aber das Potential φ im Innern und an der Oberfläche des Conductors *constant*. Demgemäss sind die Ableitungen $\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}$ und $\frac{\partial\varphi}{\partial t_2}$ beide $= 0$; und die Formeln (13.) reduciren sich daher auf

$$(14.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_0} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial n_0} a_0, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y_0} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial n_0} b_0, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial z_0} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial n_0} c_0, \end{cases}$$

woraus folgt:

$$(15.)\quad \begin{aligned} &\frac{\partial\varphi}{\partial x_0} a_0 + \frac{\partial\varphi}{\partial y_0} b_0 + \frac{\partial\varphi}{\partial z_0} c_0 = \frac{\partial\varphi}{\partial n_0}, \\ &\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z_0}\right)^2 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n_0}\right)^2. \end{aligned}$$

Nunmehr ergeben sich aus (10.), mit Rücksicht auf (14.), (15.), folgende Gleichungen:

$$\mathfrak{X}_0(\mathfrak{X}_0 a_0 + \mathfrak{Y}_0 b_0 + \mathfrak{Z}_0 c_0) = \varepsilon_0^2 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n_0}\right)^2 a_0,$$

$$\mathfrak{X}_0^2 + \mathfrak{Y}_0^2 + \mathfrak{Z}_0^2 = \varepsilon_0^2 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n_0}\right)^2;$$

wodurch die Formel (12.) übergeht in:

$$\Xi_e D\mathrm{v} = \varepsilon_0^2 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n_0}\right)^2 a_0 \frac{Do_0}{8\pi\varepsilon_0} = \varepsilon_0 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n_0}\right)^2 a_0 \frac{Do_0}{8\pi};$$

und hieraus endlich folgt mit Rücksicht auf die erste der Gleichungen (14.)

$$(16.)\quad \Xi_e D\mathrm{v} = \varepsilon_0 \frac{\partial\varphi}{\partial x_0} \frac{\partial\varphi}{\partial n_0} \frac{Do_0}{8\pi}.$$

Sind nun S und (S) die dem betrachteten Element zugehörigen elektrischen Flächendichtigkeiten, so ist bekanntlich [vgl. (2.) Seite 314]:

$$(17.)\quad \begin{cases} \varepsilon_0 \dfrac{\partial\varphi}{\partial n_0} = -4\pi S, \\ \quad\dfrac{\partial\varphi}{\partial n_0} = -4\pi(S). \end{cases}$$

Demgemäss kann man die Formel (16.) auch so schreiben:

$$(18.)\qquad \Xi_e\, Dv = \left(-\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}\right)\cdot S\, Do_0 .$$

oder auch so:

$$(19.)\qquad \Xi_e\, Dv = \left(-\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}\right)\cdot \varepsilon_0(S)\, Do_0 ;$$

was in gutem Einklang steht mit den Vorstellungen der Poisson'*schen Theorie.* Denn nach dieser Theorie würde in (18.), (19.) der vordere eingeklammerte Factor diejenige Kraft vorstellen, welche in der Richtung der x Axe auf die Conductoroberfläche einwirkt, bezogen auf die elektrische Masseneinheit.

Dritter Fall: Es wird die Uebergangsschicht eines Isolators betrachtet; und Dv ist ein scheibenförmiges Element dieser Uebergangsschicht. — Bedient man sich derselben Bezeichnungsweise, wie im vorigen Fall, so erhält man wiederum die Formeln (9.), (10.), (11.):

$$(20.)\qquad \Xi_e\, Dv = \begin{Bmatrix} + \dfrac{2\mathfrak{X}_0(\mathfrak{X}_0 a_0 + \mathfrak{Y}_0 b_0 + \mathfrak{Z}_0 c_0) - (\mathfrak{X}\mathfrak{F} + \mathfrak{Y}\mathfrak{G} + \mathfrak{Z}\mathfrak{H}) a_0}{8\pi\varepsilon_0}\, Do_0 \\ + \dfrac{2\mathfrak{X}(\mathfrak{X}a + \mathfrak{Y}b + \mathfrak{Z}c) - (\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2) a}{8\pi\varepsilon}\, Do \end{Bmatrix},$$

$$(21.)\qquad \mathfrak{X}_0 = -\varepsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial x_0},\quad \mathfrak{Y}_0 = -\varepsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial y_0},\quad \mathfrak{Z}_0 = -\varepsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial z_0},$$

$$(22.)\qquad \mathfrak{X} = -\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad \mathfrak{Y} = -\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad \mathfrak{Z} = -\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

und ebenso auch die Formeln (13.):

$$(23.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_0} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial n_0}a_0 + \dfrac{\partial\varphi}{\partial t_1}a_1 + \dfrac{\partial\varphi}{\partial t_2}a_2, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y_0} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial n_0}b_0 + \dfrac{\partial\varphi}{\partial t_1}b_1 + \dfrac{\partial\varphi}{\partial t_2}b_2, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial z_0} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial n_0}c_0 + \dfrac{\partial\varphi}{\partial t_1}c_1 + \dfrac{\partial\varphi}{\partial t_2}c_2. \end{cases}$$

Nur ist der Uebergang von (13.) zu (14.) hier *nicht* gestattet, weil das Potential φ im Innern und an der Oberfläche des Isolators *nicht* constant ist. Setzt man zur Abkürzung

$$(24.)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial t_1} = \Theta_1 \quad\text{und}\quad \frac{\partial\varphi}{\partial t_2} = \Theta_2,$$

so folgt aus (23.)

$$(25.)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}a_0 + \frac{\partial\varphi}{\partial y_0}b_0 + \frac{\partial\varphi}{\partial z_0}c_0 = \frac{\partial\varphi}{\partial n_0}, \\ &\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z_0}\right)^2 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n_0}\right)^2 + \Theta_1^2 + \Theta_2^2 . \end{aligned}$$

Dies vorangeschickt, ergeben sich jetzt aus (21.), mit Rücksicht auf (23.), (24.), (25.), folgende Gleichungen:

$$\mathfrak{X}_0(\mathfrak{X}_0 a_0 + \mathfrak{Y}_0 b_0 + \mathfrak{Z}_0 c_0) = \varepsilon_0^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n_0} a_0 + \Theta_1 a_1 + \Theta_2 a_2\right) \frac{\partial \varphi}{\partial n_0},$$

$$(\mathfrak{X}_0^2 + \mathfrak{Y}_0^2 + \mathfrak{Z}_0^2)\, a_0 = \varepsilon_0^2 \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n_0}\right)^2 + \Theta_1^2 + \Theta_2^2\right] a_0;$$

woraus folgt:

$$2\mathfrak{X}_0(\mathfrak{X}_0 a_0 + \mathfrak{Y}_0 b_0 + \mathfrak{Z}_0 c_0) - (\mathfrak{X}_0^2 + \mathfrak{Y}_0^2 + \mathfrak{Z}_0^2)\, a_0 =$$
$$= \varepsilon_0^2 \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n_0}\right)^2 - \Theta_1^2 - \Theta_2^2\right] a_0 + 2\varepsilon_0^2 \frac{\partial \varphi}{\partial n_0} (\Theta_1 a_1 + \Theta_2 a_2).$$

In dem Ausdruck (20.) wird daher die *erste Zeile* den Werth haben:

$$\varepsilon_0 \left\{\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n_0}\right)^2 - \Theta_1^2 - \Theta_2^2\right] a_0 + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial n_0} (\Theta_1 a_1 + \Theta_2 a_2)\right\} \frac{Do_0}{8\pi}.$$

Und in analoger Weise wird sich offenbar ergeben, dass die dortige *zweite Zeile* folgenden Werth besitzt:

$$\varepsilon \left\{\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)^2 - \Theta_1^2 - \Theta_2^2\right] a + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial n} (\Theta_1 a_1 + \Theta_2 a_2)\right\} \frac{Do}{8\pi},$$

wo $Do = Do_0$ ist, und $a = -a_0$ [vgl. (8.)]. Demgemäss erhält die Formel (20.), indem man das a durch $-a_0$ ersetzt, folgendes Aussehen:

$$(26.) \quad \Xi_e Dv = \left\{\begin{aligned} &\left[\varepsilon_0 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n_0}\right)^2 - \varepsilon \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)^2\right] a_0 - (\varepsilon_0 - \varepsilon)(\Theta_1^2 + \Theta_2^2)\, a_0 \\ &+ 2\left(\varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial n_0} + \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)(\Theta_1 a_1 + \Theta_2 a_2) \end{aligned}\right\} \frac{Do_0}{8\pi}.$$

Einer bedeutenden Vereinfachung dürfte diese Formel wohl nicht fähig sein, wohl aber einer gewissen Umgestaltung. Man kann nämlich statt $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial n_0}$ die dem betrachteten Element zugehörigen elektrischen Flächendichtigkeiten S, (S) einführen, mittelst der bekannten Gleichungen [gl. (11.) Seite 314]:

$$(27.) \quad \left\{\begin{aligned} &\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial n_0} = -4\pi S, \\ &\frac{\partial \varphi}{\partial n} + \frac{\partial \varphi}{\partial n_0} = -4\pi (S). \end{aligned}\right.$$

Alsdann gelangt man, was weiter auszuführen überflüssig sein würde, zu folgender Formel:

$$(28.) \quad \Xi_e Dv = \left[\left(\frac{2\pi[\varepsilon\varepsilon_0 (S)^2 - S^2]}{\varepsilon - \varepsilon_0} + \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)(\Theta_1^2 + \Theta_2^2)}{8\pi}\right) a_0 - S(\Theta_1 a_1 + \Theta_2 a_2)\right] Do_0$$

woraus z. B. für $S = 0$ sich ergeben würde:

$$(29.) \quad \Xi_e Dv = \left(\frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 (S)^2}{\varepsilon - \varepsilon_0} + \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)(\Theta_1^2 + \Theta_2^2)}{8\pi}\right) a_0 Do_0.$$

Diese Formeln (26.) *und* (28.), (29.), *in denen* Θ_1 *und* Θ_2 *die in* (24.) *angegebenen tangentialen Differentialquotienten repräsentiren, stehen der* Poisson'schen *Theorie völlig fremdartig gegenüber.*

§ 20.

Transformation des elektrostatischen Potentials.

Der Einfachheit willen beschränken wir uns auf den früher (Seite 310 ff.) behandelten speciellen Fall. Das dortige elektrostatische Potential lautet [vgl. Seite 314 (8.)]:

$$(1.) \qquad \varphi = \int\limits_{\mathfrak{S}}^{(\sigma)} \frac{Dv}{r} + \int\limits_{\mathfrak{S}}^{(S)} \frac{Do}{r} + \int\limits_{\mathfrak{C}}^{(S)} \frac{Do}{r};$$

und aus diesem Potential φ ergeben sich sofort die elektrischen Zustandscomponenten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ in jedwedem Punct (x, y, z) mittelst der Formeln [Seite 314 (9.)]:

$$(2.) \qquad \mathfrak{X} = -\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \mathfrak{Y} = -\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \mathfrak{Z} = -\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

wo ε den Werth des Dielektricitätscoefficienten in jenem Puncte (x, y, z) vorstellt. Wenn man in solcher Weise die $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ aus φ ableiten kann, — so ist daneben zu bemerken, dass man auch umgekehrt das φ durch die $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ auszudrücken vermag.

Um näher hierauf einzugehen, betrachten wir folgendes Integral:

$$(3.) \qquad J = \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) Dv,$$

selbiges ausgedehnt gedacht über alle Volumelemente Dv des *ganzen unendlichen Raumes*. Dabei sollen x, y, z die Coordinaten des Elementes Dv sein, während r den Abstand dieses Elementes von irgend einem beliebig markirten Raumpuncte (x_1, y_1, z_1) bezeichnet. Um die Vorstellung zu fixiren, denken wir uns den Punct (x_1, y_1, z_1) vorläufig *im Innern des Conductors* gelegen; auch beschreiben wir um diesen Punct (als Mittelpunct) eine vollständig innerhalb des Conductors gelegene äusserst kleine Kugel $\mathfrak{K}$ vom Radius ϱ.

Wir zerlegen nun das Integral J (3.), dem Schellack, der Luft und dem Conductor entsprechend, in drei Theile:

$$(4.) \qquad J = J_{\mathfrak{S}} + J_{\mathfrak{L}} + J_{\mathfrak{C}}.$$

Was den ersten dieser drei Theile betrifft, so ist offenbar:

$$J_{\mathfrak{S}} = \int\limits_{\mathfrak{S}} \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \cdots \right) Dv = \int\limits_{\mathfrak{S}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \cdots \right] Dv - \int\limits_{\mathfrak{S}} \frac{1}{r} \Delta \varphi \, Dv,$$

wo $\Delta\varphi$ den Laplace'schen Differentialausdruck vorstellt. Hieraus folgt nun weiter mittelst einer bekannten Green'schen Transformation:

$$(5.)\qquad J_{\mathfrak{S}} = -\int\limits_{\mathfrak{S}} \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,Do - \int\limits_{\mathfrak{S}} \frac{1}{r}\Delta\varphi\,D\mathrm{v},$$

das erste dieser Integrale ausgedehnt gedacht über alle Elemente Do der Schellackoberfläche; dabei repräsentirt n die auf Do errichtete *innere* Normale, in voller Uebereinstimmung mit den früher [Seite 313 (7.)] festgesetzten Bezeichnungen. Unter Anwendung jener Bezeichnungen erhält man nun ferner in ähnlicher Art:

$$(6.)\qquad J_{\mathfrak{L}} = -\int\limits_{\mathfrak{S}} \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n_0}\,Do - \int\limits_{\mathfrak{C}} \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n_0}\,Do - \int\limits_{\mathfrak{L}} \frac{1}{r}\Delta\varphi\,D\mathrm{v}.$$

Was endlich den *dritten Theil* $J_{\mathfrak{C}}$ betrifft, so ist zu beachten, dass $\frac{1}{r}$ *unstetig* ist in dem innerhalb des Raumes $\mathfrak{C}$ gelegenen Puncte (x_1, y_1, z_1). Demgemäss wird es gut sein, das Integral nicht sofort für den Raum $\mathfrak{C}$, sondern zuvörderst für den schaalenförmigen Raum $(\mathfrak{C} - \mathfrak{K})$ zu bilden. Alsdann ergiebt sich, analog mit (5.) und (6.):

$$J_{\mathfrak{C}-\mathfrak{K}} = -\int\limits_{\mathfrak{C}} \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n_1}\,Do - \int\limits_{\mathfrak{K}} \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial \varrho}\,Do - \int\limits_{\mathfrak{C}-\mathfrak{K}} \frac{1}{r}\Delta\varphi\,D\mathrm{v}.$$

Das mittlere von diesen drei Integralen (in welchem offenbar $r = \varrho$, d. i. gleich dem Radius der Kugel $\mathfrak{K}$ ist) verschwindet, wie man leicht übersieht, für $\varrho = 0$. Man gelangt daher, indem man die Kugel $\mathfrak{K}$ allmählich verschwinden lässt, zu folgender Formel:

$$(7.)\qquad J_{\mathfrak{C}} = -\int\limits_{\mathfrak{C}} \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n_1}\,Do - \int\limits_{\mathfrak{C}} \frac{1}{r}\Delta\varphi\,D\mathrm{v}.$$

Substituirt man jetzt in (4.) die Werthe (5.), (6.), (7.), so erhält man:

$$(8.)\qquad J = -\int\limits_{\mathfrak{S}} \frac{1}{r}\Delta\varphi\,D\mathrm{v} - \int\limits_{\mathfrak{L}} \frac{1}{r}\Delta\varphi\,D\mathrm{v} - \int\limits_{\mathfrak{C}} \frac{1}{r}\Delta\varphi\,D\mathrm{v}$$
$$-\int\limits_{\mathfrak{S}} \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n} + \frac{\partial\varphi}{\partial n_0}\right) Do - \int\limits_{\mathfrak{C}} \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial n_0}\right) Do.$$

Die Werthe der hier auftretenden drei Ausdrücke $\Delta\varphi$, sowie auch die Werthe der beiden Trinome

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} + \frac{\partial\varphi}{\partial n_0} \quad\text{und}\quad \frac{\partial\varphi}{\partial n_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial n_0}$$

sind aus der Formel (1.) ohne Weiteres abzulesen. Und durch Substitution dieser Werthe gewinnt alsdann die Gleichung (8.) folgende Gestalt:

$$(9.)\qquad J = 4\pi \int_{\mathfrak{S}}^{\bullet} \frac{(\sigma)\, D\mathrm{v}}{r} + 0 + 0 + 4\pi \int_{\mathfrak{S}}^{\bullet} \frac{(S)\, Do}{r} + 4\pi \int_{\mathfrak{C}}^{\bullet} \frac{(S)\, Do}{r}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist aber nach (1.) identisch mit $4\pi\varphi$. Somit folgt: $J = 4\pi\varphi$, d. i.

$$(10.)\qquad \varphi = \frac{1}{4\pi} J,$$

oder falls man für J seine eigentliche Bedeutung (3.) substituirt:

$$(11.)\qquad \varphi = \frac{1}{4\pi} \int^{\bullet} \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) D\mathrm{v},$$

oder endlich mit Rücksicht auf (2.):

$$(12.)\qquad \varphi = -\frac{1}{4\pi} \int^{\bullet} \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} \right) D\mathrm{v}.$$

Diese Formel (11.) oder (12.), in welcher die Integration über alle Volumelemente $D\mathrm{v}$ des ganzen unendlichen Raumes sich ausdehnt, liefert den Werth von φ in jenem vorhin markirten Puncte (x_1, y_1, z_1). Nachträglich übersieht man leicht, dass die Formeln (11.), (12.) ein und dieselben bleiben werden, mag nun der Punct (x_1, y_1, z_1) innerhalb des Conductors, oder innerhalb der Luft oder innerhalb des Schellacks gedacht werden.

Die Formel (12.) entspricht offenbar unserer zu Anfang des Paragraphs gemachten Voraussage; denn sie zeigt, *wie man das Potential φ durch die $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ auszudrücken im Stande ist.*

§ 21.

Das Problem der magnetischen Vertheilung für einen Stahlmagneten und für weiches Eisen, beide Körper von Luft umgeben gedacht.

Bei der Behandlung dieses Problemes sind die Resultate, die sich auf Grund der Maxwell-Hertz'schen Theorie ergeben, *wesentlich verschieden* von den Resultaten der Poisson'schen Theorie. Um solches deutlich zu erkennen, dürfte es zweckmässig sein, zuerst an die Poisson'sche Theorie kurz zu erinnern, und sodann erst zur Maxwell-Hertz'schen Theorie überzugehen.

Die Poisson'sche Theorie. — Der Stahlmagnet $\mathfrak{S}$ wird bei dieser Theorie, was seinen magnetischen Zustand betrifft, als völlig *unveränderlich* angesehen; sodass also das von ihm auf irgend einen Punct (x, y, z) ausgeübte magnetische Potential V, das sogenannte *inducirende Potential*, von Hause aus gegeben ist, als eine *völlig bestimmte und unveränderliche* Function der Coordinaten x, y, z:

$$\text{(I.)} \qquad V = V(x, y, z).$$

Es handelt sich nun um die Ermittelung desjenigen magnetischen Zustandes, welcher im weichen Eisen $\mathfrak{E}$ durch die Einwirkung jenes Potentiales V hervorgerufen wird. Die Frage nach der Beschaffenheit dieses magnetischen Zustandes zerfällt der Hauptsache nach in zwei Theile, nämlich erstens in die Berechnung der im Eisen $\mathfrak{E}$ *inducirten magnetischen Momente* α, β, γ, und zweitens in die Berechnung desjenigen Potentiales Q, welches vom Eisen $\mathfrak{E}$ seinerseits, nach Eintritt des in Rede stehenden magnetischen Zustandes, auf äussere und innere Puncte ausgeübt werden wird. Dieses Potential Q pflegt das *inducirte Potential* genannt zu werden. Wären die Momente α, β, γ bereits bekannt, so würde man das Potential Q sofort anzugeben im Stande sein. Es würde nämlich alsdann dasselbe für irgend einen, ausserhalb oder innerhalb $\mathfrak{E}$ gelegenen Punct (x, y, z) folgenden Werth haben:

$$\text{(II.)} \qquad Q = Q(x, y, z) = \int_{\mathfrak{E}} \left(\alpha \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \beta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) D\text{v},$$

die Integration ausgedehnt gedacht über alle Volumelemente $D\text{v}$ des Eisens $\mathfrak{E}$; dabei sind α, β, γ die an der Stelle des Elementes $D\text{v}$ vorhandenen magnetischen Momente, während r den Abstand dieses Elementes vom Puncte (x, y, z) bezeichnet.

Was nun die wirkliche Berechnung von α, β, γ, Q betrifft, so ist es zweckmässig zuerst Q, und sodann erst die α, β, γ ins Auge zu fassen.

Zur Berechnung von Q dient nach der Poisson'schen Theorie folgende Regel: Man breite auf der Oberfläche des Eisens $\mathfrak{E}$ eine Massenbelegung aus, von noch unbekannter Flächendichtigkeit (T), und bezeichne das Potential dieser Massenbelegung einstweilen mit Q:

$$\text{(III.)} \qquad Q = \int_{\mathfrak{E}} \frac{(T) Do}{r},$$

die Integration ausgedehnt gedacht über alle Oberflächenelemente *Do* des Eisens 𝔈. Sodann aber bestimme man jene Flächendichtigkeit (T) in solcher Art, dass an allen Stellen der Oberfläche des Eisens folgender Differentialgleichung Genüge geschieht:

$$\text{(IV.)} \qquad \left(\frac{\partial Q}{\partial n_0} + \frac{\partial Q}{\partial n_1}\right) + 4\pi\varkappa \frac{\partial(V+Q)}{\partial n_1} = 0,$$

wo $\varkappa$ eine der Substanz des Eisens eigenthümliche Constante vorstellt, während n_0 und n_1 die *äussere* und *innere* Normale der Eisenoberfläche vorstellen. Leicht lässt sich zeigen, dass durch diese Gleichung (IV.) jene Belegung (T), nebst ihrem Potential Q *eindeutig* bestimmt sind.[1]) Und das in solcher Art bestimmte Q ist alsdann nichts Anderes als das eigentlich gesuchte *inducirte Potential* Q.

Denkt man sich Q in solcher Weise wirklich berechnet, so ergeben sich alsdann die *inducirten Momente* α, β, γ für jedweden innerhalb 𝔈 gelegenen Punct (x, y, z) mittelst der Formeln:

$$\text{(V.)} \qquad \alpha = -\varkappa \frac{\partial(Q+V)}{\partial x}, \quad \beta = -\varkappa \frac{\partial(Q+V)}{\partial y}, \quad \gamma = -\varkappa \frac{\partial(Q+V)}{\partial z}.$$

In Betreff dieser Sätze, sowie auch in Betreff der Bezeichnungsweise (die mit der Poisson'schen Theorie nicht ganz übereinstimmt) verweise ich auf die Vorlesungen meines Vaters.[2]) — Uebrigens ist das Potential V (I.) an der Oberfläche von 𝔈, sowie auch beim Durchgang durch diese Fläche, *stetig*, mithin z. B.:

$$\text{(VI.)} \qquad \frac{\partial V}{\partial n_0} + \frac{\partial V}{\partial n_1} = 0.$$

Demgemäss kann man jenen zur Bestimmung von (S) und Q dienenden Gleichungen (III.), (IV.) folgende Gestalt geben:

$$\text{(VII.)} \qquad V + Q = V + \int_{\mathfrak{E}} \frac{(T)\,Do}{r},$$

$$\text{(VIII.)} \qquad \left(\frac{\partial(V+Q)}{\partial n_0} + \frac{\partial(V+Q)}{\partial n_1}\right) + 4\pi\varkappa \frac{\partial(V+Q)}{\partial n_1} = 0.$$

Setzt man endlich $V + Q = \psi$, sodass also ψ das sogenannte *magnetische Gesammtpotential* vorstellt, so gelangt man zu folgendem Satz:

---

1) Man vergl. z. B. C. Neumann: Hydrodynamische Untersuchungen. Leipzig, bei Teubner, 1883; daselbst Seite 275.

2) F. Neumann: Vorlesungen über die Theorie des Magnetismus. Leipzig, bei Teubner, 1881. In der Formel (III.) ist von mir die betreffende Flächendichtigkeit mit (T) bezeichnet, um in solcher Weise die spätere Vergleichung mit der Maxwell-Hertz'schen Theorie etwas bequemer zu machen.

Das magnetische Gesammtpotential ψ besitzt einen Werth von der Gestalt:

$$\text{(IX.)} \qquad \psi = V + \int_{\mathfrak{E}} \frac{(T)\,Do}{r},$$

wo V das von Hause aus gegebene inducirende Potential vorstellt, während (T) eine noch unbekannte Flächendichtigkeit bezeichnet. Zur vollständigen und eindeutigen Bestimmung dieser Flächendichtigkeit (T), sowie auch des Potentiales ψ, dient folgende Differentialgleichung:

$$\text{(X.)} \qquad (1 + 4\pi\varkappa)\frac{\partial \psi}{\partial n_1} + \frac{\partial \psi}{\partial n_0} = 0,$$

welche erfüllt sein muss in allen Puncten der Oberfläche des Eisens $\mathfrak{E}$. Hier haben $\varkappa$ und n_0 und n_1 die bei (IV.) *angegebenen Bedeutungen.*

Ist ψ in solcher Weise gefunden, so ergeben sich alsdann [vgl. (V.)] *die inducirten Momente α, β, γ mittelst der Formeln:*

$$\text{(XI.)} \qquad \alpha = -\varkappa\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \beta = -\varkappa\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \gamma = -\varkappa\frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

Wir haben es hier in der Poisson'schen Theorie also nur mit *einer* unbekannten Belegung (T) zu thun; während bei der Maxwell-Hertz'schen Theorie, zu welcher wir jetzt übergehen wollen, *zwei* unbekannte Belegungen (T), (T) in Betracht kommen werden.

Die Maxwell-Hertz'sche Theorie. — Der Ausgangspunct dieser Theorie liegt in den schon früher [Seite 312 (2.), (4.)] angegebenen Gleichungen:

$$\text{(1.)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\mathfrak{N}}{\mu} - \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\mathfrak{M}}{\mu} = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\mathfrak{L}}{\mu} - \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\mathfrak{N}}{\mu} = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\mathfrak{M}}{\mu} - \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\mathfrak{L}}{\mu} = 0, \end{cases} \qquad \text{(2.)} \quad \begin{cases} \mathfrak{L} = -\mu\dfrac{\partial \psi}{\partial x}, \\[2mm] \mathfrak{M} = -\mu\dfrac{\partial \psi}{\partial z}, \\[2mm] \mathfrak{N} = -\mu\dfrac{\partial \psi}{\partial z}, \end{cases}$$

wo ψ das Potential von allem *freien Magnetismus* in Bezug auf den Punct (x, y, z) vorstellt.

Für den hier zu betrachtenden Fall (Stahlmagnet $\mathfrak{S}$, Luft $\mathfrak{L}$, Eisen $\mathfrak{E}$) haben wir nun [nach Seite 287 (2.)] folgendes Schema:

(3.)

μ		μ_0		μ_1
Stahlmagnet $\mathfrak{S}$	a. d. Grenze	*Luft* $\mathfrak{L}$	a. d. Grenze	*Eisen* $\mathfrak{E}$
$\tau = f(x, y, z)$	$T = F(x, y, z)$	$\tau = 0$	$T = 0$	$\tau = 0$
$(\tau) = \dfrac{f(x, y, z)}{\mu}$	$(T) = ?$	$(\tau) = 0$	$(T) = ?$	$(\tau) = 0$

Hier sind also im Ganzen *zwei Unbekannte* vorhanden, nämlich (T) und (T), die Flächendichtigkeiten des *freien Magnetismus* auf der Oberfläche des Stahlmagnets $\mathfrak{S}$ und auf der des Eisens $\mathfrak{E}$. Noch sei daran erinnert,

(4.) dass μ, μ_0 und μ_1 die constanten Magnetisirungscoefficienten des Stahls, der Luft und des Eisens sein sollen;
dementsprechend sollen n und n_1 die *inneren* Normalen der Stahlmagnetoberfläche und der Eisenoberfläche vorstellen; während unter n_0 die *äusseren* (in die Luft hineingehenden) Normalen dieser Flächen zu verstehen sein werden.

Was nun die Lösung des Problems, d. i. die Berechnung der beiden Unbekannten (T), (T) *anbelangt*, so bilden wir zunächst das Potential ψ von allem überhaupt vorhandenen freien Magnetismus in Bezug auf irgend welchen Punct (x, y, z). Dasselbe wird nach (3.) lauten:

$$\psi = \int_{\mathfrak{S}} \frac{(\tau) D\nu}{r} + \int_{\mathfrak{S}} \frac{(T) Do}{r} + \int_{\mathfrak{E}} \frac{(T) Do}{r}; \tag{5.}$$

von ihm abhängig sind die magnetischen Zustandscomponenten $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ an der Stelle (x, y, z); es ist nämlich nach (2.);

$$\mathfrak{L} = -\mu \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \mathfrak{M} = -\mu \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \mathfrak{N} = -\mu \frac{\partial \psi}{\partial z}, \tag{6.}$$

wo $\mu = \mu$, μ_0, μ_1 ist, jenachdem der Punct $(x, y. z)$ im Stahlmagnet, in der Luft, oder im Eisen liegt.

Ferner ist zu beachten, dass die in (3.) angegebenen Flächendichtigkeiten T, T und (T), (T) zum Potentiale ψ in einfachen Beziehungen stehen. Substituirt man nämlich die Werthe (6.) in den Formeln Seite 288 (7.), (8.), so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} 4\pi T &= -\mu \frac{\partial \psi}{\partial n} - \mu_0 \frac{\partial \psi}{\partial n_0} \\ 4\pi (T) &= -\frac{\partial \psi}{\partial n} - \frac{\partial \psi}{\partial n_0} \end{aligned}\right\} \text{ auf der Stahlmagnetoberfläche;} \tag{7.}$$

und substituirt man ferner jene Werthe (6.) in den Formeln Seite 288 (9.), (10.), so ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} Null[1]) = 4\pi T &= -\mu_1 \frac{\partial \psi}{\partial n_1} - \mu_0 \frac{\partial \psi}{\partial n_0} \\ 4\pi (T) &= -\frac{\partial \psi}{\partial n_1} - \frac{\partial \psi}{\partial n_0} \end{aligned}\right\} \text{ auf der Eisenoberfläche.} \tag{8.}$$

Von den vier Gleichungen (7.), (8.) sind zur wirklichen Berechnung des Potentials ψ eigentlich nur die *erste* und *dritte* von

1) Das T auf der Eisenoberfläche ist nämlich $= 0$. [Vgl. (3.)].

wirklichem Nutzen; denn nur allein in diesen sind die linken Seiten bekannt. So z. B. ist in der *ersten* die linke Seite $4\pi T = 4\pi F(x, y, z)$, wo $F(x, y, z)$ eine von Hause aus gegebene Function vorstellt, [vgl. (3.)]; und in der *dritten* ist die linke Seite $= 0$.

Um die Hauptsache hervorzuheben: Das Potential ψ (5.):

$$(9.) \qquad \psi = \int_{\mathfrak{S}} \frac{(\tau) Dv}{r} + \int_{\mathfrak{S}} \frac{(T) Do}{r} + \int_{\mathfrak{E}} \frac{(T) Do}{r}$$

ist [vgl. (3.)] *mit der gegebenen Dichtigkeit* $(\tau) = \frac{f(x, y, z)}{\mu}$ *und mit den beiden unbekannten Dichtigkeiten* (T), (T) *behaftet. Dieses Potential* ψ *muss nun folgender Anforderung entsprechen* [vgl. (7.)]:

$$(10.) \qquad \mu \frac{\partial \psi}{\partial n} + \mu_0 \frac{\partial \psi}{\partial n_0} = -4\pi T, \text{ auf der Stahlmagnetoberfläche,}$$

wo $T = F(x, y, z)$ *eine gegebene Function der Coordinaten vorstellt*, [vgl. (3.)]. *Ferner muss das in Rede stehende Potential* ψ *auch folgender Anforderung entsprechen* [vgl. (8.)]:

$$(11.) \qquad \mu_1 \frac{\partial \psi}{\partial n_1} + \mu_0 \frac{\partial \psi}{\partial n_0} = 0, \text{ auf der Eisenoberfläche.}$$

Leicht lässt sich zeigen, dass das Potential ψ durch diese Anforderungen *eindeutig bestimmt* ist. Um solches zu beweisen, nehmen wir einstweilen an, es existirten *zwei* diesen Anforderungen entsprechende Potentiale: ψ' und ψ''. Sie mögen lauten:

$$(\alpha.) \qquad \begin{cases} \psi' = \int_{\mathfrak{S}} \frac{(\tau) Dv}{r} + \int_{\mathfrak{S}} \frac{(T)' Do}{r} + \int_{\mathfrak{E}} \frac{(T)' Do}{r}, \\ \psi'' = \int_{\mathfrak{S}} \frac{(\tau) Dv}{r} + \int_{\mathfrak{S}} \frac{(T)'' Do}{r} + \int_{\mathfrak{E}} \frac{(T)'' Do}{r}; \end{cases}$$

sodass also in diesen Potentialen ψ' und ψ'' die beiden Unbekannten (T), (T) resp. mit $(T)'$, $(T)'$ und $(T)''$, $(T)''$ bezeichnet sind.

Es werde nun gesetzt: $\psi' - \psi'' = \Psi$. Alsdann ist nach $(\alpha.)$:

$$(\beta.) \qquad \Psi = \psi' - \psi'' = \int_{\mathfrak{S}} \frac{[(T)' - (T)''] Do}{r} + \int_{\mathfrak{E}} \frac{[(T)' - (T)''] Do}{r}.$$

Auf der Oberfläche des Stahlmagnets und auf der Oberfläche des Eisens müssen ψ' und ψ'' der Anforderung (10.), resp. der Anforderung (11.) entsprechen. Somit ergeben sich für die Differenz $\Psi = \psi' - \psi''$ folgende Formeln:

$$(\gamma.) \qquad \mu \frac{\partial \Psi}{\partial n} + \mu_0 \frac{\partial \Psi}{\partial n_0} = 0, \text{ auf der Stahlmagnetoberfläche,}$$

$$(\delta.) \qquad \mu_1 \frac{\partial \Psi}{\partial n_1} + \mu_0 \frac{\partial \Psi}{\partial n_0} = 0, \text{ auf der Eisenoberfläche.}$$

Wir betrachten jetzt die über alle Volumelemente $D\mathrm{v}$ des Stahlmagnets, resp. der Luft und des Eisens ausgedehnten Integrale:

$$(\zeta.)\qquad \int\limits_{\mathfrak{S}} \square\Psi\cdot D\mathrm{v}\,,\quad \int\limits_{\mathfrak{L}} \square\Psi\cdot D\mathrm{v}\,,\quad \int\limits_{\mathfrak{E}} \square\Psi\cdot D\mathrm{v}\,,$$

wo $\square\Psi$ die Bedeutung haben soll:

$$(\eta.)\qquad \square\Psi = \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)^2.$$

Diese Integrale sind nach bekannten GREEN'schen Sätzen in Oberflächenintegrale verwandelbar. Und zwar erhält man in solcher Weise:

$$\int\limits_{\mathfrak{S}} \square\Psi\cdot D\mathrm{v} = -\int\limits_{\mathfrak{S}} \Psi\frac{\partial\Psi}{\partial n}\,Do\,,$$

$$\int\limits_{\mathfrak{L}} \square\Psi\cdot D\mathrm{v} = -\int\limits_{\mathfrak{S}} \Psi\frac{\partial\Psi}{\partial n_0}\,Do - \int\limits_{\mathfrak{E}} \Psi\frac{\partial\Psi}{\partial n_0}\,Do\,,$$

$$\int\limits_{\mathfrak{E}} \square\Psi\cdot D\mathrm{v} = \qquad\qquad -\int\limits_{\mathfrak{E}} \Psi\frac{\partial\Psi}{\partial n_1}\,Do\,,$$

wo n, n_0, n_1 die in (4.) angegebenen Bedeutungen haben. Multiplicirt man diese drei Gleichungen mit den Constanten μ, μ_0, μ_1 und addirt, so erhält man mit Rücksicht auf (γ.), (δ.), sofort:

$$(\vartheta.)\qquad \mu\int\limits_{\mathfrak{S}} \square\Psi\cdot D\mathrm{v} + \mu_0\int\limits_{\mathfrak{L}} \square\Psi\cdot D\mathrm{v} + \mu_1\int\limits_{\mathfrak{E}} \square\Psi\cdot D\mathrm{v} = 0;$$

und hieraus ergiebt sich sofort [vgl. (η.)], dass Ψ eine *Constante* sein muss[1]), sowohl im Stahlmagnet, wie in der Luft, wie auch im Eisen. Nun ist aber Ψ, nach (β.), das Potential zweier Oberflächenbelegungen. Folglich müssen jene drei Constanten unter einander identisch sein.

Das Potential Ψ (β.) jener beiden Oberflächenbelegungen hat also im ganzen unendlichen Raume allenthalben ein und denselben constanten Werth. Folglich muss es (weil es seiner Natur nach im Unendlichen verschwindet) allenthalben $= 0$ sein. Hieraus

---

1) Es ist zu beachten, dass die in (ϑ.) enthaltenen Constanten μ, μ_0, μ_1 alle *positiv* sind. Nach den gewöhnlichen Annahmen ist nämlich das der Luft zugehörige $\mu_0 = 1$; während die Magnetisirungscoefficienten μ aller übrigen Substanzen theils zwischen 0 und 1 liegen, theils grösser als 1 sind. Ersteres ist der Fall bei den diamagnetischen, letzteres bei den paramagnetischen Substanzen. [Vgl. HERTZ' Ges. Werke; Bd. 2, Seite 239]. Sollten etwa diamagnetische Substanzen existiren, *deren μ kleiner als 0 ist*, so würden diese von den nachfolgenden Untersuchungen ausgeschlossen sein.

folgt weiter (weil $\Psi = \psi' - \psi''$ ist), dass ψ' und ψ'' allenthalben einander gleich sind. Folglich giebt es nur *ein* Potential ψ, welches den Formeln (9.), (10.), (11.) entspricht. — *Q. e. d.*

Das Potential ψ ist also durch die Formeln (9.), (10.), (11.) *eindeutig bestimmt. Denkt man sich aber das Potential ψ mittelst dieser Formeln wirklich berechnet, so ergeben sich alsdann die beiden in* (3.) *enthaltenen Unbekannten* (T), (T) *mittelst der in* (7.), (8.) *notirten Gleichungen:*

(12.) $$-4\pi(T) = \frac{\partial \psi}{\partial n} + \frac{\partial \psi}{\partial n_0}, \quad \textit{auf der Stahlmagnetoberfläche,}$$

(13.) $$-4\pi(T) = \frac{\partial \psi}{\partial n_1} + \frac{\partial \psi}{\partial n_0}, \quad \textit{auf der Eisenoberfläche.}$$

Diese Resultate (9.), (10.), (11.) und (12.), (13.) der Maxwell-Hertz'schen Theorie sind offenbar *ganz ausserordentlich verschieden* von den zu Anfang des gegenwärtigen Paragraphs notirten Formeln (IX.), (X.) der Poisson'schen Theorie. So sind z. B. hier in der Maxwell-Hertz'schen Theorie *zwei* unbekannte Belegungen (T), (T) zu berechnen, während dort bei der Poisson'schen Theorie nur *eine* unbekannte Belegung (T) zu bestimmen war. Auch würde die in Rede stehende Verschiedenheit keineswegs fortfallen, falls man etwa [einer früher (Bemerkung Seite 285) ausgesprochenen Vermuthung nachgebend] das T in der Formel (10.) gleich Null setzen wollte.

Solches constatirt, mag nun zu den Formeln der Maxwell-Hertz'schen Theorie noch Einiges hinzugefügt werden. Nach (7.) ist:

(14.) $$\left\{\begin{aligned} -4\pi T &= \mu \frac{\partial \psi}{\partial n} + \mu_0 \frac{\partial \psi}{\partial n_0} \\ -4\pi(T) &= \frac{\partial \psi}{\partial n} + \frac{\partial \psi}{\partial n_0} \end{aligned}\right\} \text{ auf der Stahlmagnetoberfläche.}$$

Und auf Grund dieser beiden Gleichungen (14.) gelangt man leicht [vgl. auf Seite 318 den Uebergang von (21.) zu (26.)] zu folgender Formel:

(15.) $$\int_{\mathfrak{S}} T\,Do + \int_{\mathfrak{S}} \tau\,D\mathrm{v} = \mu_0 \left[\int_{\mathfrak{S}} (T)\,Do + \int_{\mathfrak{S}} (\tau)\,D\mathrm{v} \right].$$

Nun ist aber nach Seite 285 (E.):

(16.) $$\int_{\mathfrak{S}} \tau\,D\mathrm{v} = 0.$$

Auch ist [vgl. den allgemeinen Satz Seite 281 (IV.)] im Innern des Stahlmagnets: $\tau = \mu(\tau)$. Somit folgt aus (16.), dass das Integral

$$(17.) \qquad \int\limits_{\mathfrak{S}} (\tau)\, D\mathrm{v} \text{ ebenfalls } = 0$$

ist. Die Formel (15.) erlangt daher, mit Rücksicht auf (16.) und (17.), folgende einfache Gestalt:

$$(18.) \qquad \int\limits_{\mathfrak{S}} T\, Do = \mu_0 \int\limits_{\mathfrak{S}} (T)\, Do.$$

Die Gesammtmenge von allem auf der Stahlmagnetoberfläche vorhandenen wahren Magnetismus und die Gesammtmenge von allem auf dieser Oberfläche vorhandenem freien Magnetismus unterscheiden sich also von einander nur durch den Factor μ_0, wo μ_0 den constanten Magnetisirungscoefficienten der Luft vorstellt. Von jenen beiden Gesammtmengen ist übrigens die erste [vgl. die Bemerkung Seite 285] wahrscheinlich $= 0$; und Gleiches gilt daher auch von der zweiten.

Nun ist ferner nach (8.):

$$(19.) \qquad \left\{\begin{aligned} 0 = -4\pi T &= \mu_1 \frac{\partial \psi}{\partial n_1} + \mu_0 \frac{\partial \psi}{\partial n_0} \\ -4\pi (T) &= \frac{\partial \psi}{\partial n_1} + \frac{\partial \psi}{\partial n_0} \end{aligned}\right\} \text{ auf der Eisenoberfläche.}$$

Und ebenso, wie man von (14.) zu (15.) gelangt, in genau derselben Weise wird man, von (19.) aus, zu folgender Formel gelangen:

$$(20.) \qquad \int\limits_{\mathfrak{E}} T\, Do + \int\limits_{\mathfrak{E}} \tau\, D\mathrm{v} = \mu_0 \left[\int\limits_{\mathfrak{E}} (T)\, Do + \int\limits_{\mathfrak{E}} (\tau)\, D\mathrm{v} \right]$$

Im Innern des Eisens ist aber [nach (3.)]: $\tau = 0$ und ebenso $(\tau) = 0$. Demgemäss erhält man:

$$(21.) \qquad \int\limits_{\mathfrak{E}} T\, Do = \mu_0 \int\limits_{\mathfrak{E}} (T)\, Do, \text{ —}$$

eine Formel die völlig analog ist zur Formel (18.).

Endlich ist auf der Eisenoberfläche [nach (3.)] auch $T = 0$; sodass also die Formel (21.) übergeht in

$$(22.) \qquad \int\limits_{\mathfrak{E}} (T)\, Do = 0.$$

Auf der Eisenoberfläche wird also, wie schon in (3.) constatirt ist, keine Spur von wahrem Magnetismus vorhanden sein. Andererseits wird, nach (22.), die Gesammtmasse des auf dieser Oberfläche ausgebreiteten freien Magnetismus ebenfalls stets $= 0$ sein.

§ 22.

Es wird gezeigt, dass der im letzten Paragraph gegenüber der Poisson'schen Theorie zu Tage getretene Widerspruch in einem gewissen speciellen Fall verschwindet.

Der specielle Fall, von dem hier die Rede sein soll, besteht in der Annahme, dass die Magnetisirungscoefficienten μ und μ_0 des Stahlmagnets und der Luft *einander gleich* sind. — Dabei sei zuvörderst erinnert an das Schema Seite 336 (3.):

(1.)

μ		μ_0		μ_1
Stahlmagnet 𝔖	a. d. Grenze	*Luft* 𝔏	a. d. Grenze	*Eisen* 𝔈
$\tau = f(x,y,z)$	$T = F(x,y,z)$	$\tau = 0$	$T = 0$	$\tau = 0$
$(\tau) = \frac{f(x,y,z)}{\mu}$	$(T) = ?$	$(\tau) = 0$	$(T) = ?$	$(\tau) = 0$

sowie auch an die zur Bestimmung des Potentials ψ dienenden Formeln Seite 338 (9.), (10.), (11.):

(2.) $$\psi = \int_{\mathfrak{S}} \frac{(\tau)\, Dv}{r} + \int_{\mathfrak{S}} \frac{(T)\, Do}{r} + \int_{\mathfrak{E}} \frac{(T)\, Do}{r}$$

(3.) $$\mu \frac{\partial \psi}{\partial n} + \mu_0 \frac{\partial \psi}{\partial n_0} = -4\pi T, \text{ auf der Stahlmagnetoberfläche,}$$

(4.) $$\mu_1 \frac{\partial \psi}{\partial n_1} + \mu_0 \frac{\partial \psi}{\partial n_0} = 0, \text{ auf der Eisenoberfläche.}$$

Zufolge unserer augenblicklichen Annahme: $\mu = \mu_0$ geht die Formel (3.) über in:

(5.) $$\frac{\partial \psi}{\partial n} + \frac{\partial \psi}{\partial n_0} = -\frac{4\pi T}{\mu_0}, \text{ auf der Stahlmagnetoberfläche.}$$

Dieses Binom ist aber, wie aus (2.) hervorgeht, $= -4\pi(T)$, wo (T) die Flächendichtigkeit des freien Magnetismus auf der Oberfläche des Stahlmagneten vorstellt. Somit geht die Gleichung (5.) über in:

(6.) $$(T) = \frac{T}{\mu_0}, \text{ auf der Stahlmagnetoberfläche.}$$

Das T auf der Stahlmagnetoberfläche ist aber *von Hause aus* [vgl. (1.)] *in bestimmter Weise gegeben.* Gleiches gilt daher nach (6.) auch von dem dortigen (T). Von den beiden in (2.) auftretenden Dichtigkeiten (T), (T) ist daher im gegenwärtigen Falle die eine gegeben, und nur allein die andere unbekannt.

Nachdem die Formel (3.) zu dieser Erkenntniss geführt, und somit ihre Dienste geleistet hat, können wir sie nun weiterhin fortlassen.

Wir haben alsdann zur Bestimmung des Potentials ψ nur noch die *zwei Formeln* (2.), (4.); gleichzeitig haben wir alsdann aber in diesem Potential ψ (2.) nur noch *eine* unbekannte Dichtigkeit, d. i. die Dichtigkeit (T) auf der Eisenoberfläche.

Solches constatirt, erkennen wir jetzt sofort, dass die in Rede stehenden zwei Formeln (2.), (4.) *übereinstimmen mit den Formeln der* Poisson'*schen Theorie*, nämlich mit den Formeln (IX.), (X.) Seite 336, falls man nur $\mu_1 = 1 + 4\pi\varkappa$ und $\mu_0 = 1$ setzt.

Hertz hat offenbar die Divergenz der beiderlei Theorien im allgemeinen Fall, und ihre Uebereinstimmung in dem hier betrachteten Specialfall vollständig klar erkannt. Denn er hat, indem er von der Uebereinstimmung spricht, sich express auf den in Rede stehenden Specialfall beschränkt. In der That setzt er [Ges. Werke, Seite 240] ausdrücklich voraus, der betrachtete Stahl solle den Magnetisirungscoefficienten *Eins* besitzen, d. h. er solle *denselben* Magnetisirungscoefficienten haben wie das ihn umgebende Medium; denn diesem umgebenden Medium (Luft oder Aether) ist von Hertz ebenfalls der Magnetisirungscoefficient *Eins* zuertheilt worden.

Es mag ja sein, dass die Magnetisirungscoefficienten für harten Stahl und Luft wirklich einander *gleich* sind. Und dann würde der Fall: *Stahl, Luft, Eisen* in der That zu den Formeln (2.), (4.) führen, und also *mit der* Poisson'*schen Theorie in Einklang sein.*

Statt der Luft aber wird man doch wohl irgend ein anderes Medium nehmen können, dessen Magnetisirungscoefficient von dem des Stahls wesentlich *verschieden* ist. Und dann würde man bei Anwendung dieses Mediums, auf Grund der Maxwell-Hertz'schen Theorie, zu Resultaten gelangen, die von denen der Poisson'schen Theorie ganz verschieden sind; so dass also die Discordanz der beiden Theorien im Allgemeinen bestehen bleibt.

Bemerkungen. — Man könnte gegen meine Untersuchungen einwenden, dass Hertz die permanentmagnetischen Körper von seiner Theorie ausgeschlossen habe.

Das ist *nicht* der Fall. Denn Hertz sagt ausdrücklich [Ges. W. Bd. 2 Seite 240]:

Um diese Körper nicht ganz von der Theorie ausschliessen zu müssen[1]), ersetzen wir sie durch den jedesmal nächststehenden zweier Idealkörper, des *vollkommen weichen Eisens* und des *vollkommen harten Stahles.* Ersteres definiren wir als einen Körper, der unseren Gleichungen folgt, und für welchen μ einen sehr grossen Werth hat. Indem wir diesen Werth, je nach der Natur des behandelten

1) Ich citire hier *fast* wörtlich.

Problemes verschieden wählen[1]), erzielen wir eine weitere Annäherung. Den vollkommen harten Stahl definiren wir als einen unsern Gleichungen folgenden Körper von der Magnetisirungsconstante $\mu = 1$, in dessen Innern wahrer Magnetismus vorkommen kann in beliebiger Vertheilung, jedoch so, dass die Gesammtmenge des in jedem Stahlstück vorhandenen wahren Magnetismus von Null *nicht* abweicht.

§ 23.

Die ponderomotorischen Kräfte magnetischen Ursprungs.

Statt des Stahlmagneten und der Eisenmasse wollen wir jetzt beliebig viele, theils permanent-, theils temporär-magnetische Körper uns denken, alle umgeben von Luft. Es sei Dv, mit den Coordinaten x, y, z, ein substantielles Volumelement, welches nach Belieben der Luft oder einem dieser Körper angehören mag. Nach Eintritt des *elektromagnetischen Gleichgewichtszustandes* wird der in Dv vorhandene magnetische Zustand die Componenten besitzen:

$$(1.) \qquad \mathfrak{L} = -\mu \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \mathfrak{M} = -\mu \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \mathfrak{N} = -\mu \frac{\partial \psi}{\partial z},$$

wo μ den Magnetisirungscoefficienten vorstellt, während ψ dasjenige Potential vorstellt, welches von allem überhaupt vorhandenen *freien* Magnetismus auf den Punct (x, y, z) ausgeübt wird [vgl. (2.) Seite 336]:

Die ganze den unendlichen Raum erfüllende Substanz (welche nach unserer Vorstellung aus den genannten theils permanent-, theils temporär-magnetischen Körpern und der sie umgebenden Luft besteht) wird nun, *vermöge ihres augenblicklichen magnetischen Zustandes*, auf das substantielle Volumelement $Dv(x, y, z)$ eine gewisse ponderomotorische Kraft ausüben, die wir mit $\Xi_m Dv$, $H_m Dv$, $Z_m Dv$ bezeichnen wollen. Alsdann ist z. B. [vgl. (39.) Seite 305]:

$$(2.) \qquad \Xi_m Dv = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2\mathfrak{L}^2 - (\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2)}{8\pi\mu}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2\mathfrak{L}\mathfrak{M}}{8\pi\mu}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2\mathfrak{L}\mathfrak{N}}{8\pi\mu}\right)\right] Dv.$$

Von hier aus kann man nun Schritt für Schritt in genau derselben Weise wie früher auf Seite 324 operiren, wobei zunächst sich Formeln ergeben, die völlig analog sind mit den dortigen Formeln (3.), (4.), (5.). — Sodann aber werden, was die Lage des Elementes Dv betrifft, nicht wie damals *drei*, sondern nur *zwei* Fälle zu unterscheiden sein.

---

1) Diese Worte erscheinen (ganz abgesehen von den augenblicklichen Betrachtungen) einigermassen räthselhaft. Denn μ soll doch eine der Substanz eigenthümlich zugehörige Constante sein; und über den Werth einer solchen Constanten darf man doch nicht, je nach Umständen, bald so, bald so verfügen!

Erster Fall: $D\mathrm{v}$ liegt in homogener Substanz. — Alsdann ergiebt sich ebenso wie damals [vgl. Seite 326 (7.)]:

$$(3.)\qquad \Xi_m D\mathrm{v} = -\mu \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot (\tau)\, D\mathrm{v};$$

was in befriedigendem Einklang steht mit den Resultaten der POISSON*schen Theorie.*

Die einzelnen Magnetpole sind nach unserer Vorstellung nicht Puncte, sondern ausserordentlich kleine *Kugeln* [vgl. Seite 284]; und man kann, falls es beliebt, in der Formel (3.) das Element $D\mathrm{v}$ z. B. so sich construirt denken, dass es identisch ist mit einer solchen kleinen Kugel. In solcher Weise würde sich dann diejenige ponderomotorische Kraft ergeben, welche einwirkt auf den durch diese kleine Kugel repräsentirten Magnetpol.

Zweiter Fall: Es wird die Uebergangsschicht eines jener von Luft umgebenen Körper betrachtet; und $D\mathrm{v}$ ist ein scheibenförmiges Element dieser Uebergangsschicht. — Alsdann wird man Schritt für Schritt genau in derselben Weise, wie damals (Seite 329) im dritten Fall verfahren können, und dabei schliesslich zu folgender Formel gelangen:

$$(4.)\quad \Xi_m D\mathrm{v} = \left[\left(\frac{2\pi[\mu\mu_0(T)^2 - T^2]}{\mu-\mu_0} + \frac{(\mu-\mu_0)(\Theta_1^2+\Theta_2^2)}{8\pi}\right)\alpha_0 - T(\Theta_1\alpha_1 + \Theta_2\alpha_2)\right] Do_0,$$

die von der damaligen Formel (28.) Seite 330 nur dadurch sich unterscheidet, dass die dortigen Grössen ε, ε_0, S, (S) hier durch μ, μ_0, T, (T) ersetzt sind. Dabei bezeichnet μ den Magnetisirungscoefficienten des betrachteten Körpers, und μ_0 denjenigen der umgebenden Luft.

Gehört die Uebergangsschicht einem *temporär-magnetischen* Körper an, so ist $T = 0$ [vgl. (C.) Seite 284]; sodass alsdann also die Formel (4.) sich reducirt auf:

$$(5.)\qquad \Xi_m D\mathrm{v} = \left(\frac{2\pi\mu\mu_0(T)^2}{\mu-\mu_0} + \frac{(\mu-\mu_0)(\Theta_1^2+\Theta_2^2)}{8\pi}\right)\alpha_0 \cdot Do_0$$

Und wahrscheinlich wird diese selbe Formel (5.) auch dann noch gelten, wenn die Uebergangsschicht einem *permanent magnetischen* Körper zugehört. Denn auch in diesem Falle ist das T aller Wahrscheinlichkeit nach $= 0$. [Vgl. die Bemerkung Seite 285].

§ 24.

Transformation des magnetischen Potentials.

Aus dem magnetischen Potential [Seite 337 (5.)]:

$$(1.)\qquad \psi = \int\limits_{\mathfrak{J}} \frac{(\tau)\,D\mathrm{v}}{r} + \int\limits_{\mathfrak{J}} \frac{(T)\,Do}{r} + \int\limits_{\mathfrak{U}} \frac{(T)\,Do}{r}$$

ergeben sich ohne Weiteres die magnetischen Zustandscomponenten $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ mittelst der Formeln [Seite 337 (6.)]:

$$(2.)\qquad \mathfrak{L} = -\mu\frac{\partial\psi}{\partial x},\quad \mathfrak{M} = -\mu\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad \mathfrak{N} = -\mu\frac{\partial\psi}{\partial z}.$$

Man kann aber auch umgekehrt ψ ausdrücken durch die $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$. In der That gelangt man, in ganz ähnlicher Weise wie früher beim elektrischen Potential φ [vgl. Seite 333] zu folgender Formel:

$$(3.)\qquad \psi = +\frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)D\mathrm{v},$$

die Integration ausgedehnt gedacht über alle Volumelemente $D\mathrm{v}$ des *ganzen unendlichen Raumes*; dabei bezeichnet r den Abstand eines solchen Elementes $D\mathrm{v}$ von demjenigen Puncte, auf welchen das linker Hand stehende ψ sich beziehen soll. Substituirt man hier in (3.) auf der rechten Seite für $\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}, \frac{\partial\psi}{\partial z}$ ihre aus (2.) entspringenden Werthe, so erhält man:

$$(4.)\qquad \psi = -\frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\frac{\mathfrak{L}}{\mu} + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\frac{\mathfrak{M}}{\mu} + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\frac{\mathfrak{N}}{\mu}\right)D\mathrm{v};$$

und mittelst dieser Formel (4.) *ist also in der That das Potential* ψ *ausgedrückt durch die* $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$.

Aus der Formel (4.) dürfte ersichtlich sein, dass die magnetischen Zustandscomponenten $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ der Maxwell-Hertz'schen Theorie etwas *wesentlich Anderes* sind als die magnetischen Momente α, β, γ der Poisson'schen Theorie. Ich erwähne dieses Unterschieds, so beträchtlich er auch sein mag, hier nur ganz beiläufig. In der That glaube ich, dass man diesem Umstande keine besondere Bedeutung beizulegen hat. Denn sowohl jene Zustandscomponenten wie auch diese Momente sind rein idealer Natur, weder direct messbar, noch direct mit einander vergleichbar. Es sind ideale Vorstellungen, die an und für sich keiner weiteren Kritik unterliegen können. Vielmehr wird es nur allein *darauf* ankommen, dass die aus solchen idealen Vorstellungen resultirenden ponderomotorischen, elektrodynamischen und magnetischen Wirkungen mit der Erfahrung in Einklang sind.

Inhalts-Uebersicht.

Nachträgliche Bemerkungen.

In der vorliegenden Abhandlung haben d und ∂ ihre althergebrachten Bedeutungen [vgl. § 2, Seite 224—227]. Ferner ist die Charakteristik D in genau demselben Sinne gebraucht worden, wie in den F. NEUMANN'schen elektrodynamischen Abhandlungen. Endlich ist:

$$\Box = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 \quad \text{und} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Ausser diesen bekannten Charakteristiken D, d, ∂, $\Box$ und Δ ist in der vorliegenden Abhandlung eigentlich nur noch eine einzige *neue* Charakteristik anzutreffen, bezeichnet mit $\varDelta$.

Diese neue Charakteristik $\varDelta$ dient blos als *Abbreviatur*; auch kommt sie nur vor in den Verbindungen $\varDelta\mathfrak{X}$, $\varDelta\mathfrak{Y}$, $\varDelta\mathfrak{Z}$ und $\varDelta\mathfrak{L}$, $\varDelta\mathfrak{M}$, $\varDelta\mathfrak{N}$. Näheren Aufschluss über die Bedeutungen von $\varDelta\mathfrak{X}$ und $\varDelta\mathfrak{L}$ erhält man durch die Formeln (23.), (24.) Seite 236 und durch die Formeln (25.), (26.) Seite 237.

Der § 5 der vorliegenden Abhandlung enthält (wenn auch in etwas anderer Einkleidung) nur bekannte Dinge. Ich möchte daher bitten, diesen § 5 beim Lesen der Abhandlung einstweilen zu überschlagen und denselben überhaupt nur insoweit zu benutzen, als es zum Verständniss der weiter folgenden §§ erforderlich ist.

N.

BEOBACHTUNGEN ZUR GESCHICHTE DER NASEN- UND GAUMENBILDUNG BEIM MENSCHLICHEN EMBRYO

VON

WILHELM HIS.

Des XXVII. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

Nº III.

MIT 48 FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG
BEI B. G. TEUBNER
1901.

Vorgetragen für die Abhandlungen am 3. Juni 1901.
Das Manuscript eingeliefert am 30. Juli 1901.
Den letzten Bogen druckfertig erklärt am 29. Oktober 1901.

BEOBACHTUNGEN ZUR GESCHICHTE DER NASEN- UND GAUMENBILDUNG BEIM MENSCHLICHEN EMBRYO

VON

WILHELM HIS.

Schon seit manchen Jahren bewahre ich die Frontalschnitte eines menschlichen Embryo von 8 Wochen, den ich s. Z., vortrefflich fixirt, von Herrn Prof. Fr. MIESCHER-RUESCH erhalten hatte.[1]) Die Schnitte durch die Mundhöhle zeigen eine, besonders nach vorn hin stark ausgeprägte Schrägstellung der Zunge. Die Zungenspitze steht beinahe vertical, und deren rechter Rand drängt sich am Gaumenfortsatz vorbei bis zum unteren Theil der Nasenhöhle empor. Links steht der Gaumenfortsatz über der Zunge. Der Unterkiefer zeigt auf der linken Seite einen grubenförmigen Eindruck, in den der Daumen der linken Hand sich einpasst. Anlässlich einer anderweitigen Besprechung kam ich darauf, die Schnitte, bez. deren Photogramme, einem befreundeten jüngeren Chirurgen vorzulegen. Dieser hat sich lebhaft dafür interessirt. Das Präparat schien für ein mechanisches Verständniss der Wolfsrachenbildung einen Schlüssel bieten zu wollen, und wir entwarfen den Plan, es eingehender zu bearbeiten. Zu dem Zwecke habe ich mit Hilfe der Photogramme ein zehnfach vergrössertes Plattenmodell hergestellt (s. Figg. 47 u. 48 am Schluss dieses Aufsatzes). Indessen musste ich mich bald überzeugen, dass ich zum Verständniss der bezüglichen Verhältnisse einer erneuten Ueberarbeitung der frühen Stufen von Mund- und Gaumenbildung bedurfte. Dabei konnte ich, abgesehen von der bekannten Arbeit von E. DURSY, an eigene frühere Veröffentlichungen anknüpfen.[2]) Ich bin diesmal noch mehr in's Einzelne gegangen und habe gesucht durch reichliche Abbildungen meine Ergebnisse zu erläutern.

---

1) Anatomie menschl. Embryonen Heft III S. 239. Die Nackenlänge des Embryo betrug 22 mm. Die letzten Menses der gesunden Frau waren am 21. Febr. 1885, der Abortus, infolge von Ueberanstrengung, am 18. April erfolgt. Die Altersberechnung nach der zuerst ausgebliebenen Periode beträgt sonach 8 Wochen.

2) 1869: EMIL DURSY, Zur Entwickelungsgeschichte des Kopfes des Menschen und der höheren Wirbelthiere. Mit Atlas. Tübingen. 1885: HIS, Anatomie menschl. Embryonen Heft III S. 26—102 und 1892: Die Entwickelung der menschlichen u. thierischer Physiognomien. His Archiv 1892. S. 384.

Ein guter Theil meiner Abbildungen sind Constructionsbilder. Die Grundlage hierzu lieferten die auf grossen Blättern von Bromsilberpapier photographirten Schnittreihen. Ueber die Herstellung solcher Blätter, deren jedes bei 10 oder 15 facher Vergrösserung die sämmtlichen Schnitte eines Objectträgers enthält, habe ich mich bei früheren Anlässen ausgesprochen. Sie bilden eine Documentensammlung, die bei entsprechender Controlle durch die Originalschnitte sehr mannigfacher Verwerthung fähig ist. Man kann mit deren Hilfe die verschiedenen Organe, Herz, Gehirn, peripherische Nerven u. s. w. plastisch oder constructiv reproduciren. Die Reconstruction der Formen mittels des Zirkels wird, wie ich mich auch neuerdings wieder überzeugt habe, durch die Plattenmodellirung keineswegs entbehrlich gemacht. Sie giebt zwar weniger körperliche Bilder, als diese, aber sie erlaubt eine Uebereinanderlegung der verschiedenen im Modell sich deckenden Formgebilde, und sie gewährt die Möglichkeit sehr präciser Durcharbeitung. Ich pflege bei Constructionen einen Proportionalzirkel zu verwenden. Nach 10 fach vergrösserten Photogrammen lassen sich damit nach Wunsch 20 oder mehrfach vergrösserte Constructionsbilder entwerfen. Die Construction geschieht auf Linienpapier, das ich mir vom Lithographen mit Abständen je von 2 und von $1\frac{1}{2}$ mm habe anfertigen lassen.

Nachfolgend gebe ich das Verzeichniss der in diesem Aufsatz benutzten Embryonen:

Nl. Nackenlänge, SSl. Scheitelsteisslänge der Embryonen. Die unterstrichenen Zeitwerthe sind nach der zuletzt stattgehabten oder der zuerst ausgebliebenen Periode berechnet. Die übrigen Werthe sind Schätzungen durch Interpolation.

EB	3.1	mm Nl.	*2 Wochen*
Mj	3.2	„ „	
α	4	mm Nl.	*3 Wochen*
Lr	4.2	„ „	
Bl	4.25	„ „	
Oe	4.4	„ „	2te Hälfte
R	5	„ „	der 4ten Woche
Br 3	6.9	mm Nl.	
B	7	„ „	4 Wochen
Hoe	7	„ „	
A	7.5	„ „	
Hn	8	„ „	

Rg	9.1	mm Nl.	Anfang
Ru	9.1	„ „	der 5ten Woche
Pr	10	„ „	
Ko	10.2	„ „	
Ha	10.5	„ „	
N	10.9	„ „	Gegen Ende
Doed 1	11	„ „	der 5ten Woche
Br 2	11	„ „	
S 1	12.5	mm Nl.	Anfang
CR	13.6	„ „	der 6ten Woche
Sch	13.8	„ „	
Hg	14	„ „	

Fo	15.6	mm Nl.	6 Wochen		My	19(?)	mm Nl.	
Wi	15.6	" "			Dd	20(?)	" "	
Ob	15.8	" "			Mr	22	" "	8 Wochen
Lhs	17	mm Nl.	7 Woch. 2 Tage		Lo	29	mm SSl.	
Bu	17	" "			Re	31	" "	
So	17	" "						
Bo	17.5	" "			Dond 2	46	mm SSl.	
FM	17.8	" "	7 Wochen		Rbg	50	" "	3 Monate
Zw	18.5	" "			Pl	120	" "	

Die primären Anlagen der Nasenhöhle und des Mundrachenraumes.

Das in der Folge zu einem einheitlichen Ganzen verbundene Raumsystem der Nasen- und der Mundrachenhöhle geht ursprünglich aus vier getrennten Anlagen hervor, aus den beiden Nasen-



Fig. 1. Medianschnitt (Construction) von Embryo EB. 50fach. Das Gehirn ist noch unvollkommen geschlossen, die Rachenhaut unverletzt, das blinde Ende des Kopfdarmes und das Ende der Chorda liegen der Basis des Gehirnrohres unmittelbar an. Noch existirt keine Hypophysentasche; der Ort ihrer Bildung ist indessen zu bestimmen, er fällt in den Winkel, den die Rachenhaut mit der Kopfhaut bildet.

gruben, der Mundbucht und dem Kopfdarm. Die Nasengruben und die Mundbucht sind ectodermal, der Kopfdarm endodermal ausgekleidet. Mundbucht und Kopfdarm sind in früher Zeit durch

die zweischichtige REMAK'sche Rachenhaut geschieden. Die Nasengruben entwickeln sich als secundäre Bildungen jederseits über dem Eingang zur Mundbucht, und ihre Geschichte hängt innig zusammen mit der Geschichte der Stirnfortsätze, bez. der bei früherem Anlass als Schnauzenfalte bezeichneten Ectodermanlage.[1])

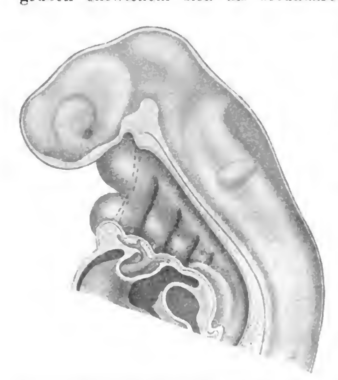


Fig. 2. Construction des Kopfes von Embryo Lr. Vergr. 35 fach. Copie von Taf. IX der Anat. menschl. Embr. Die Epidermisbekleidung hat sich vom Vorderhirn nur um weniges abgehoben. Die Chorda erreicht dessen Basis nicht mehr. Im Zwischenraum liegt schon der Anfang der Hypophysentasche. Der Ort der früheren Rachenhaut ist durch punktirte Linien angegeben.

Ursprünglich zieht sich die Ectodermbekleidung des Stirnwulstes, die Stirnhaube glatt über das rostrale Gehirnende hinweg, und ihr die Decke der Mundhöhle bildender Abschnitt geht ohne scharfe Grenze in die Rachenhaut über (Fig. 1, Fig. 2). In der Folge entwickelt sich von dieser Uebergangsstelle aus die zwischen Gehirn, Chordaende und Kopfdarm (SEESSEL'sche Tasche) sich eindrängende Hypophysentasche.



Fig 3. Gesicht von Embryo Hn. Vergr. 15 fach. Copie von Taf. XIII der Anat. menschl Embr. Die Figur zeigt die drei Stirnfortsätze und die von gewulsteten Rändern umgebenen Nasengruben.

An der Stirnhaube giebt sich jederseits die Voranlage der Nasengruben, das sogen. Nasenfeld, als zuerst flache, neben der rostralen Schlussstelle des Vorderhirns gelegene Verdickung des Hornblattes zu erkennen. Weiterhin hebt sich der Gesichtstheil der Stirnhaube als quere Falte (die Schnauzenfalte) vom Vorderhirn ab. Die in der Wand dieser Falte liegenden Nasenfelder vertiefen sich zu Gruben, und durch sie wird das Faltengebiet in drei Zonen, den mittleren und die seitlichen Stirnfortsätze

1) Entw. d. Physiognomien S. 397.

geschieden (Fig. 3). Die Basis der Schnauzenfalte ist in flachem Winkel gebogen, und sie reicht bis zum Hypophysenzugang. Sie zerfällt demnach in einen die Nasengruben umschliessenden und in einen dahinter gelegenen Abschnitt. Ersterer entspricht der Pars ethmoidalis, letzterer der Pars sphenoidalis des späteren Schädelgrundes. Im Profil gesehen hat die Schnauzenfalte die Gestalt eines unter das Gehirn von vorn hereingeschobenen Keiles. Sie

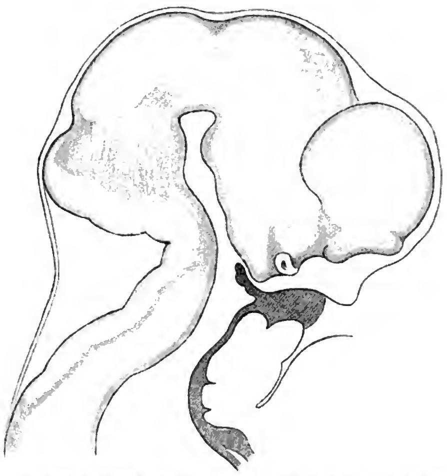


Fig. 4. Sagittalconstruction des Kopfes von Embryo IIa (Nl. 10,5 mm.) Vergr. 15fach. Die Riechgrube ist nicht eingezeichnet. Die Schnauzenfalte hebt sich von der Gehirnbasis als dreieckiges Profil ab. Der ethmoidale Abschnitt liegt dem Rhinencephalon an, der sphenoidale dem vorderen Rand des Hypothalamus

erreicht vorn ihre grösste Höhe; der sphenoidale Theil bleibt niedrig und er verläuft zugeschärft in der vorderen Wand der Hypophysentasche (Fig. 4).

Vom Beginn der 5. Woche ab schiebt sich der seitliche Stirnfortsatz jederseits über die Nasengrube hinweg und er wandelt sie in eine enge Spalte um. Der anfangs breite und durch eine tiefe Furche zweigetheilte mittlere Stirnfortsatz verschmälert sich in der Folge und wird zur Nasenscheidewand, die seitlichen Stirn-

fortsätze gehen in die Seitenwand der Nase über. Unterhalb der zuerst durchweg offenen Nasenspalten bildet sich durch Verwachsung der sich begegnenden Wandungen eine das Nasenloch von der Mundspalte trennende Querbrücke, der primitive Gaumen.

Die beiden Nasengruben liegen anfangs noch vor dem Eingang zur Mundbucht, und ihr längster Durchmesser steigt vor dieser schräg herab (Fig. 5). Ihre Stellung ändert sich in der Weise, dass ihr vorderer Abschnitt sich mehr und mehr senkt. Einer-



Fig. 5. Sagittalconstruction des Kopfes von Embryo Br 3 (Nl. 6,9 mm.) Vergr. 20fach. Das Choanenende der Nasengrube liegt noch vor der Mundhöhle. Die Grube ist weit offen. Die Schnauzenfalte ist noch sehr niedrig. Die Zungenanlage erst angedeutet.

seits wird die Decke der Grube bez. der Nasenhöhle von der wachsenden Hirnhemisphäre herabgedrängt, andererseits wird der Höhenunterschied zwischen dem vorderen und dem hinteren Abschnitte der Schnauzenfalte allmählich grösser. Das hintere Ende der Nasenhöhle wendet sich dabei dem Eingang der Mundhöhle zu. Von der Zungenspitze ist das Choanenende der Nasenhöhle anfangs noch weit entfernt. Es folgt die Zunge, nachdem sie sich zu Ende des ersten Monats aus der ventralen Wand des Kopfdarmes gebildet hat, dessen Richtung, sie kehrt ihre freie Fläche,

den Rücken sowohl wie die Wurzel, der dorsalen Wand zu, und die Spitze sieht nach oben, in der Richtung senkrecht zur Vorderhirnbasis (Fig. 6).

Das Hervortreten der Schnauzenfalte bedingt eine zunehmende Vertiefung des Mundraumes, zunächst seines Deckentheiles. Weiter-



Fig. 6. Sagittalconstruction von Embryo Ko (Nl 10,5 mm.) Vergr. 20fach. Die Nasenspalte ist vom seitlichen Stirnfortsatz bereits überlagert, die Verwachsung des primitiven Gaumens noch nicht vollzogen. Die Ausdehnung der Nasenspalte ist durch blassen Ton angegeben. Die Mundrachenhöhle und ihre im Mittelschnitt hervortretenden Nebenräume, die Hypophysentasche und die Schilddrüsenanlage, sind bei dieser und den nachfolgenden Figuren dunkel getont. Das äussere Nasenloch bildet die schräg abgestutzte Endfläche der Schnauzenfalte. Die Zunge erscheint mit der Spitze steil aufgerichtet.

hin wächst aber die Tiefenausdehnung auch des Bodens dadurch, dass Unterkiefer und Zungenspitze sich brustwärts senken. Der Zungenrücken stellt sich parallel zur Vorderhirnbasis und zum Längsdurchmesser der Nasenhöhle, und die ventralwärts sich kehrende Zungenspitze rückt unter den Choanen vorbei in den vorderen Theil des Mundraumes, in ein Gebiet, das ursprünglich der Mundbucht angehört hatte (Fig. 7—9). Wenn dies geschehen

ist, beginnt auch die Anlage des secundären Gaumens bestimmter sich bemerkbar zu machen.

Fassen wir die Verhältnisse der Mundbildung, soweit sie bis jetzt zur Sprache gebracht sind, nochmals zusammen, so besteht der Mundrachenraum genetisch aus zwei frei zusammenhängenden Abtheilungen, einer oberen und vorderen, der früheren Mundbucht,



Fig. 7. Sagittalconstruction des Kopfes von Embryo Ru (Nl. 9,1 mm). Vergr. 20fach. Die Verhältnisse sind denen von Fig. 8 ähnlich.

und einer unteren und hinteren, dem Endstück des Kopfdarmes. Beide Abschnitte verschieben sich schräg gegen einander, und sie enden, der vordere nach rückwärts, der hintere nach vorn zugeschärft. Die Nasenhöhlen schliessen sich, von aussen her kommend, dem oberen Theil des vorderen Mundraumes an, indem sie mit den primären Choanen in ihn übergehen. Der weitaus grössere Theil der späteren Mundrachenhöhle und vor allem das gesammte Zungengebiet entstammt dem Kopfdarm. Der Boden

entsteht aus der ursprünglich ventralen Wand des Kopfdarmes. In diese reichen die Enden der Schlundbogen hinein, die vorderen beiden fassen das Feld des Zungenkörpers zwischen sich, während

Fig. 8. Sagittalconstruction des Kopfes von Embryo Sch (Nl. 13,8 mm). Vergr. 20fach. Hier und bei allen folgenden Profilconstructionen ist die Nasenhöhle geöffnet und in ihrer Verbindung mit dem Mundraume dargestellt. Unterkiefer und Zunge haben sich schon etwas gesenkt, das Choanenende der Riechspalte fällt über die Zungenspitze.

die Zungenwurzel aus dem ventralen Ende des 2. und 3. Schlundbogens hervorgeht.

Die Rachenhaut, die das ectodermal bekleidete Gebiet der Mundbucht vom endodermalen Blindsack des Kopfdarmes scheidet,

schwindet bekanntlich schon sehr früh. Allein auch nachdem sie zerstört ist, sind die Grenzen beider Abschnitte annähernd zu

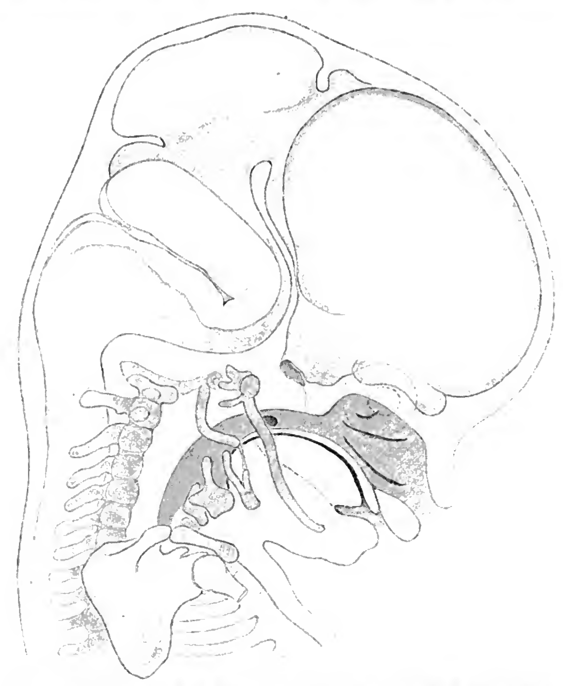


Fig. 9. Profilconstruction von Embryo Mr (Nl. 22 mm). Vergr. 10fach. Die knorplige Wirbelsaule, der Schultergürtel und die Knorpel des Visceralscelettes sind eingezeichnet. Die Nasenhohle und der Mundrachenraum sind dunkel gehalten, in ersterer sind die drei Muscheln angegeben. Der secundare Gaumen ist bei Embryo Mr auf der rechten Seite in seine definitive Lage eingerückt, d. h. er liegt über der Zunge und bildet den Boden der Nasenhohle, die Zeichnung zeigt ihn als hellen Streifen. Auf der andern Seite befindet sich die Gaumenplatte noch im Tiefstand neben der Zunge. Ihr freier unterer Rand ist in der Zeichnung durch Punktirung angegeben. Hinter dem als dunkler Fleck bezeichneten Tubeneingang treffen die beiden Linien des Hoch- und des Tiefstandes der secundären Gaumenplatten zusammen, ebenso erreichen sie nach vorn beide den primären Gaumen.

bestimmen, so lange die Hypophysentasche noch einen offenen Zugang hat. Die hintere Wand der letzteren bezeichnet die dorsale

Abgangsstelle der Rachenhaut, die ventrale Anheftung der letzteren liegt am Unterkieferfortsatz. Der Oberkieferfortsatz wird von der Rachenhaut schräg geschnitten, mit seinem freien Ende hilft er die Mundbucht begrenzen; sein der ersten Schlundtasche zugekehrter Abschnitt gehört der Seitenwand des Kopfdarmes an (s. o. Fig. 2). Histologisch entwickeln sich der ectodermal und der endodermal angelegte Abschnitt der Mundhöhle völlig übereinstimmend.

Die Bildung und Umgränzung der primären Nasenhöhle.

Ich komme nochmals auf die Riechgrube und auf deren Umbildung zur primären Nasenhöhle zurück, und ich knüpfe dabei an eine Zeichnung an, die ich s. Z. möglichst getreu nach Photographien eines 4 wöchentlichen menschlichen Embryos entworfen habe (Fig. 10). Die Grube ist noch weit offen, indessen zeigt sie bereits eine Reihe von Eigenthümlichkeiten, die auf die spätere Gestaltung zu beziehen sind. Der Rand hebt sich rüsselartig vom Stirntheil des Kopfes ab, und er ist im allgemeinen wulstig verdickt. Sein vorderer Abschnitt bildet einen geschwungenen Bogen, der obere ist langgestreckt und springt mit einer breiten Zacke gegen die Grube vor. Nach hinten schneidet eine schmale Furche in den Rand ein, und darunter folgt als kreisrundes, scharf umgrenztes Gebilde das Jacobson'sche Organ.

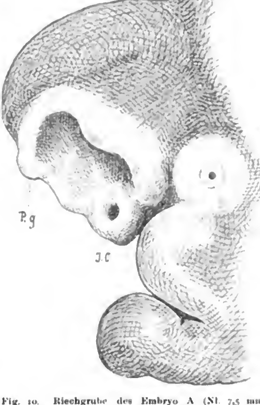


Fig. 10. Riechgrube des Embryo A (Nl. 7,5 mm) (s. Anat. menschl. Embr. III S. 40.) Vergr. 40fach. P. g. Processus globularis des mittleren Stirnfortsatzes. J. O. Jacobson'sches Organ.

In der beschriebenen Anlage ist die gesammte primäre Nasenhöhle vorgebildet, und es ist nicht schwer, in deren unfertigen Formen die Vorläufer der darauf folgenden wieder zu erkennen. Der vordere Endbogen des Grubenrandes wird zur Umgebung

des äusseren Nasenloches, d. h. zum freien Nasenrand. Die Zacke und die auf sie folgende Strecke werden zur Seitenwand der Nase und betheiligen sich an der Bildung des primären Gaumens. Die über dem Jacobson'schen Organe verlaufende Furche ist der Ort der primären Choane, und das Jacobson'sche Organ wird zu einem Bestandtheil der medialen Nasenwand. Die zur Zeit noch offen daliegende Grubenfläche wird zur Binnenfläche des primären Nasenraumes, und zwar der untere Theil zur medialen, der oben zur lateralen Wand. Der obere Rand der Riechgrube schiebt sich nämlich als seitlicher Stirnfortsatz über die Grube herab und diese wird dadurch zu einer seitwärts gedeckten Spalte (Fig. 11). Nach vorn, nach abwärts und nach hinten bleibt die Spalte anfangs noch offen und nur an ihrer dem Gehirn zugekehrten Kante ist sie von Anfang ab geschlossen. Diese Kante entspricht der späteren Regio olfactoria. Man kann auf dieser Entwicklungsstufe den Nasenraum mit dem Spaltraum vergleichen, der zwischen den zwei Flächen eines gefalteten Papierblattes oder noch besser zwischen den Deckeln eines Buches liegt, dessen Inhalt herausgerissen ist. Bei letzterem Vergleich entspricht der ausgeweitete Raum unter dem Buchrücken der Regio olfactoria der Nasenspalte. Denkt man sich die beiden Buchdeckel mit ihren langen Rändern verklebt, so bleiben zwei einander gegenüber stehende Zugänge zur zwischenliegenden Spalte übrig, die wir mit dem Nasenloch und der primären Choane vergleichen können. Von diesem etwas groben Bilde weichen die Verhältnisse der primären Nasenspalte darin ab, dass ihr oberer Rand in einer Bogenlinie verläuft, und

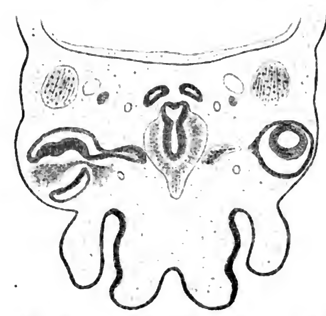


Fig. 11. Querschnitt durch das Gesicht von Embryo Ru (Nl 9,1 mm). Vergr. 30fach. Der Schnitt trifft das Rautenhirn, das obere Ende der Hypophysentasche, die Basis des Zwischenhirns und die Augenblasen. Links sieht man den Eintritt mesodermalen Gewebes durch die Augenspalte. Von Nerven sind das Ganglion Gasseri und der N. abducens, von Gefässen die A. carotis interna und die V. jugularis getroffen. Der die Nasenspalte überdeckende seitliche Stirnfortsatz ist durch die tiefe Augennasenrinne von der Verwölbung des Auges geschieden. Der breite mittlere Stirnfortsatz ist durch eine tiefe Furche getheilt.

dass sich vorübergehend ihre sämmtlichen Zugänge mit Inbegriff der äusseren Nasenlöcher durch Epithelmassen verschliessen.

Der Verschluss des primitiven Gaumens beginnt als epitheliale Verklebung der einander zugekehrten Spaltenwandungen. Weiterhin löst sich die verbindende Epithelplatte, und sie wird durch eine Mesenchymbrücke ersetzt. Nur soweit die letztere sich bildet, können wir von einem primitiven Gaumen reden, was dahinter folgt, gehört der primitiven Choane an. Wie F. Hochstetter hervorgehoben hat, so erstreckt sich der epitheliale Abschluss der Nasenspalte vorübergehend bis an deren hinteres Ende[1]) (Fig. 12—13).

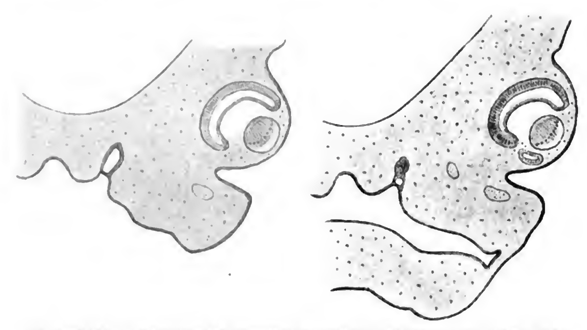


Fig. 12 und Fig. 13. Schnitte durch das Choanenende der Nasenspalte von Embryo N (Nl. 10,9 mm). Vergr 30fach. Bei Fig. 12 ist der Nasenraum durch eine quere Epithelplatte vom Mundraum getrennt, bei Fig 13 ist er bis auf eine enge Lichtung von Epithelmasse erfüllt. Medialwärts vom Eingang zur Nasenspalte liegt der zweigetheilte mittlere Stirnfortsatz, als Anlage des Septums, lateralwärts der Oberkieferfortsatz, mit der kantig hervortretenden Gaumenleiste.

Indessen halte ich es für unberechtigt, deshalb den Begriff der primären Choane fallen zu lassen. Mit demselben Recht müssten wir auch die vorderen Nasenlöcher leugnen, die während langer Zeit durch dicke Epithelzapfen verschlossen sind. Die transversale Zerreissung der niedrigen Epithelbrücken im Choanengebiet hat schon Hochstetter beschrieben, es kommt dabei zur Trennung eines medialen und eines lateralen Streifens. Im Gaumengebiet vollzieht

1) F. Hochstetter: Verh. d. anat. Ges. vom Jahre 1891 in München. S. 145 ff. Hochstetter's Abbildungen für die epitheliale Verklebung der Nasenhöhle decken sich zum Theil mit denen, die ich in der Anat. menschl. Embryonen (III. S. 48 Fig. 33c bis e) mitgetheilt habe.

sich die Trennung anders: hier bildet die epitheliale Naht eine hohe, zwischen die beiderseitigen Grenzflächen eingeschobene Platte, die dann weiterhin in eine dorsale und eine ventrale Hälfte zerreisst. Vorübergehend bleibt ein freier Zwischenraum zwischen den einander zugekehrten Mesenchymlippen, der dann aber bald durchwachsen wird (Fig. 14). Es ist dies ein Verwachsungsmodus, dem wir auch sonst bei epithelial bekleideten Gewebsschichten vielfach begegnen, so u. A. beim definitiven Gaumen (s. u. S. 384 u. 385 u. Figg. 42. 43). Die Durchwachsung des Anfangs mesenchymfreien Zwischenraumes geschieht in einzelnen Streifen, und so wird die Nahtlinie eine Zeit lang noch durch eine Reihenfolge von kleinen Lückenräumen gekennzeichnet (Fig. 15).



Fig. 14. Von demselben Embryo. Schnitt durch den in Bildung begriffenen primären Gaumen. Die Epithelverbindung zwischen Mund- und Nasenraum ist unterbrochen, das Mesenchymgewebe noch nicht verwachsen.

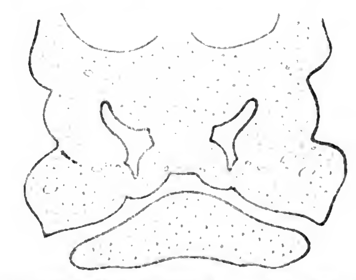


Fig. 15. Frontalschnitt durch das Gesicht von Embryo Fe (Nl. 15,6 mm). Vergr 20fach. Man sieht die Verbindung des mittleren Stirnfortsatzes mit dem Oberkieferfortsatz und des letzteren mit dem seitlichen Stirnfortsatz. Dagegen besteht noch keine Verbindung zwischen seitlichem und mittlerem Stirnfortsatz Die Nathstrecken sind noch von zahlreichen Lücken durchsetzt.

Bei Bildung des primitiven Gaumens verwachsen zuerst der Oberkieferfortsatz und der Processus globularis des mittleren Stirnfortsatzes. Der seitliche Stirnfortsatz bleibt vom mittleren anfangs noch getrennt (Fig. 15). Nachträglich legt er sich seitlich vom

Nasenloch mit seiner unteren Kante dem letzteren an, und der Oberkiefer wird vom Nasenloch abgedrängt.[1])

Zur näheren Erläuterung des Mitgetheilten verweise ich auf einige der mitgetheilten Constructions- und Schnittbilder. Fig. 16 und Fig. 17 geben die Frontalconstructionen zweier menschlicher Embryonen, Ru und Ko (Nl. 9,1 und 10,5 mm), bei Ru ist die Nasen-

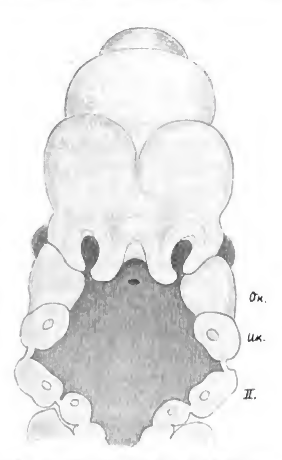


Fig. 16. Frontalconstruction von Gesicht und Mundrachenraum von Embryo Ru (Nl. 9,1 mm). Vergr. 20fach.

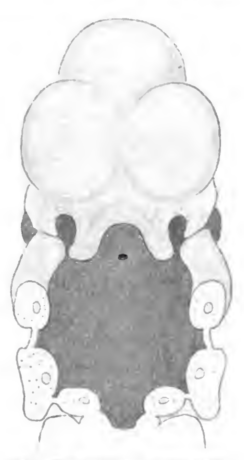


Fig. 17. Frontalconstruction der Nase und des Mundrachenraums von Embryo Ko (Nl. 10,2 mm). Vergr. 20fach. Die Riechspalte ist noch nicht geschlossen.

spalte zwar schon seitlich überdeckt, aber noch in ihrer gesammten Ausdehnung unverwachsen. Der Durchschnitt (Fig. 11) zeigt den mittleren Stirnfortsatz durch eine Furche in zwei

1) Hochstetter u. A. geben an, dass der Boden des Nasenloches vom seitl. Stirnfortsatz gebildet werde. Es scheint dies bei Thierembryonen mehr zuzutreffen, als bei menschlichen. Hier finde ich, dass der Boden des Nasenloches in jedenfalls überwiegendem Maasse vom Proc. globularis des mittleren Stirnfortsatzes gebildet wird, und dass die Begegnung des letzteren mit dem seitlichen mehr neben, als unter das Nasenloch zu liegen kommt. Man vergl. An. menschl. Embr. Taf. XIV, Fig. 8—9 u. den kleinen Aufsatz „Vogelschnabel u. Säugethierlippe" in Friedländer's Fortschritten der Medicin 1885. Bd. 3. Nr. 15.

Leisten getheilt. Er ragt über die seitlichen Stirnfortsätze etwas hervor, muss somit, wie dies Fig. 7 bestätigt, auch im Profil eine Strecke weit sichtbar sein. Die Epithelbekleidung der medialen Nasenwand ist etwas dicker, als die der lateralen. Auch bei Embryo Ko (Fig. 17) klafft die Nasenspalte noch in ihrer gesammten Länge.

In der Profilconstruction (Fig. 6) zeichnet sich der obere Rand der Spalte als eine ungleichmässig gebogene, in ihrem mittleren Abschnitt etwas abgeflachte Linie, deren hinteres Ende ziemlich steil gegen den Mundeingang abfällt.

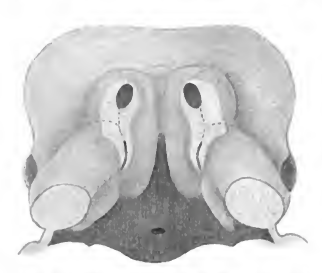


Fig. 18. Frontalconstruction der Nasenhöhle und des Mundrachenraums von Embryo N (Nl. 10,9 mm). Vergr. 20fach. Ich habe versucht, das Verhältniss der bereits geschlossenen Nasenhöhle zum primitiven Gaumen darzustellen. Die Nasenhöhle ist in ihrem längsten Durchmesser projicirt. Das Gesicht erscheint stark verkürzt. Die Nasenlöcher sind dunkel eingezeichnet, ebenso die Ausdehnung der primitiven, durch eine Epithelbrücke verschlossenen Choanen. Die Verwachsungslinie des durch Mesenchym verschlossenen primären Gaumens ist punktirt eingezeichnet, sie fällt zum Theil in den Bereich des seitlichen Stirnfortsatzes, zum Theil in den des Oberkieferfortsatzes, auch die Verbindung zwischen den letzteren beiden ist punktirt angegeben. Die primäre Choane fällt zwischen das hintere Ende des zur Zeit noch zweitheiligen mittleren Stirnfortsatzes und den Oberkieferfortsatz, höher als die vom letzteren abgehende Gaumenplatte. Da aus dem nach rückwärts niedrig werdenden und schliesslich schräg auslaufenden mittleren Stirnfortsatz das Septum narium bez. der Vomer hervorgeht, behauptet die primäre Choane von früh ab ihre Stellung neben der Anlage des letzteren. Auch bei Fig. 19 ist der Umfang der Nasenhöhle hell ausgespart.

In den nächstfolgenden Entwicklungsstufen erweitert sich der obere Abschnitt der Nasenspalte und baucht sich seitwärts aus, der untere Theil dagegen verengt sich bis zur Begegnung der sich gegenüber stehenden Epithelbekleidungen. Diese vereinigen sich, und so kommt es zur Bildung einer zuerst epithelialen, dann mesenchymatösen Gaumennaht zwischen seitlichem und mittlerem Stirnfortsatz. Hierfür sind oben (Fig. 12 bis 15) einige Abbildungen mitgetheilt worden. An der Frontalconstruction eines der 5. Woche angehörigen Embryos von 10.9 Nl. (Embryo N.) habe ich in Fig. 18 die Nasenhöhlen hell ausgespart, die mesenchymatöse Gaumennaht aber mit Punkten, die epitheliale Choanennaht mit dunklen Strichen eingezeichnet. Die Profilconstruction desselben Embryos zeigt das Choanenende der Nasenspalte bereits etwas tiefer in den Mundraum hineingeschoben und der emporgestiegenen Zungenspitze zugekehrt. Wie übrigens die Figur 18 zeigt, so liegt der

weitaus grössere Theil des Nasenraumes lateralwärts von der Nahtlinie.

Endlich gebe ich (Fig. 19) noch die Frontalconstruction der Nasenhöhle desselben Embryo S, von dem ein Theil der zugehörigen Schnitte s. Z. in der Anat. menschl. Emb. (III, S. 48. Fig. 33) mitgetheilt worden ist. Hier hat die epitheliale Verwachsung des primitiven Gaumens bereits begonnen, noch besteht indessen keine mesenchymatöse Verwachsung. Auch zeigen die Construction sowohl, als die Schnitte sehr schön, dass sich die Gaumennaht zunächst nur zwischen Oberkiefer und mittlerem Stirnfortsatz gebildet hat. Die untere Endzacke des seitlichen Stirnfortsatzes hat den Processus globularis des mittleren noch nicht erreicht.

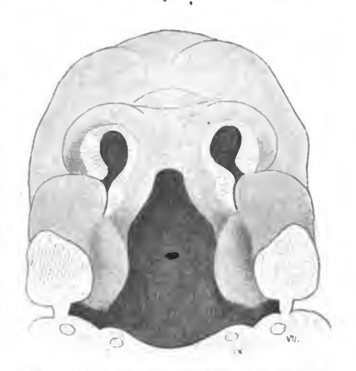


Fig. 19. Frontalconstruction des Kopfes von Embryo S 1 (Nl. 13,8 mm). Vergr. 15fach. Der seitliche und der mittlere Stirnfortsatz sind noch unverbunden.

Mit etwa 5 Wochen ist die primäre Gaumenbildung vollendet, die Nasenhöhle nimmt von da ab an Ausdehnung zu und sie schiebt sich mehr und mehr in die Tiefe des Kopfes vor. In entgegengesetztem Sinn verschiebt sich das Auge allmählich nach vorn und so kommt es, dass die Nasenhöhle, die anfangs weit vor dem Auge gelegen war, mehr und mehr medialwärts von diesem zu stehen kommt (Fig. 20—22 und oben Fig. 9).

Die Grundform der primären Nasenhöhle ist frühzeitig angelegt und sie prägt sich schon in der ersten Hälfte des zweiten Monats scharf aus. Ihre Profilansicht zeigt von da ab eine bemerkenswerthe Uebereinstimmung mit der der bleibenden Nasenhöhle. Vom vorderen Nasenloch aus steigt die vordere Wand schräg an und geht schliesslich mit einem stumpfen Winkel in die gestreckt verlaufende obere Wand über. Hier, in der Regio olfactoria, erreicht die Nasenhöhle ihre maximale Höhe, und von da aus

entwickeln sich die Bündel des Riechnerven und steigen zur Basis des Vorderhirns empor. Jenseits davon beginnt, gleichfalls unter einem stumpfen Winkel sich anschliessend. die hintere Wand, die



Fig. 20. Sagittalconstruction von Embryo N (Nl, 10,9 mm). Vergr. 15 fach.

mit ziemlich steilem Abfall die primäre Choane erreicht. Das an die Rückwand der Nasenhöhle grenzende Stück der Schädelbasis giebt sich mit seiner der Choane zugekehrten Kante als das Gebiet

des vorderen Keilbeinkörpers zu erkennen. Jenseits davon liegt der Eingang zur Hypophysentasche.

Die drei Nasenmuscheln treten gegen Ende des 2. Monats als flache Hervorwölbung der Seitenwand hervor, zuerst und am ausgeprägtesten die untere, zuletzt die obere. Letztere setzt sich anfangs nur durch eine sehr seichte Furche von der mittleren

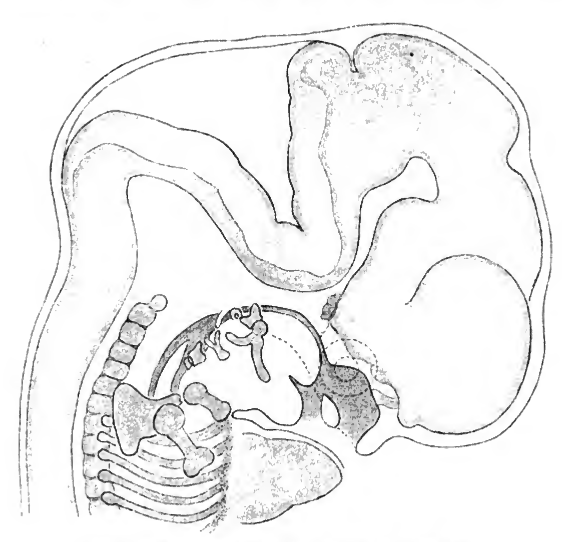


Fig. 21. Sagittalconstruction von Embryo CR (Nl. 13,6 mm). Vergr. 15fach.

Muschel ab. In den Figg. 9 u. 22 habe ich den Ort der drei Muscheln in die Projectionszeichnung eingetragen. Fig. 39 zeigt diese im senkrechten Durchschnitt. Die untere Muschel überragt mit ihrem hinteren Rande die primäre Choane, und die Construction zeigt, dass die primäre Nasenhöhle viel mehr umfasst als die Regio olfactoria, sie entspricht dem weitaus grössten Theil der ausgebildeten Höhle und erfährt nur in ihrem hinteren unteren Abschnitt durch Ausbildung des Kiefergaumens eine fernere Er-

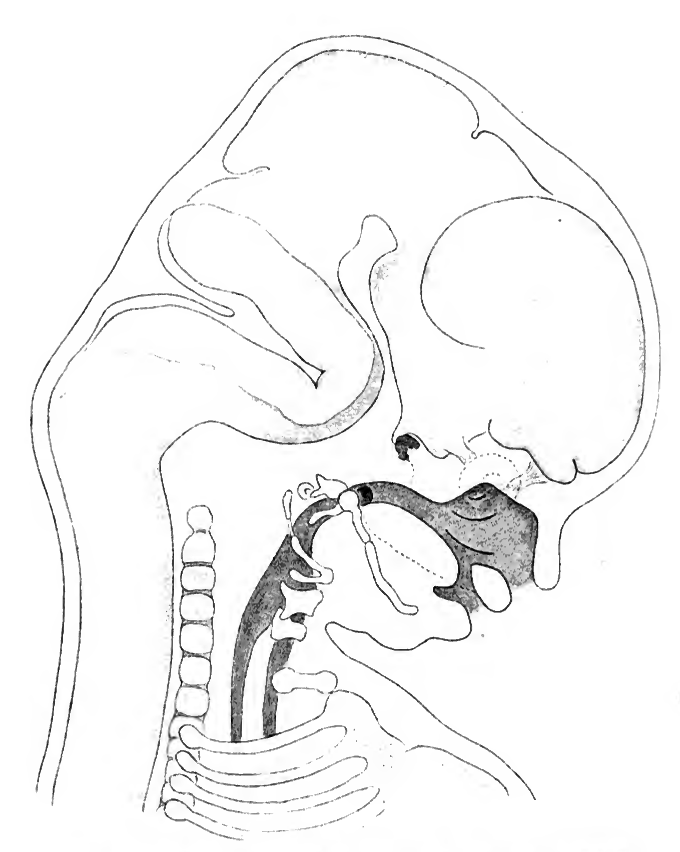


Fig. 22. Sagittalconstruction von Embryo My (Nl. ungefähr 19 mm) Vergr. 15fach. Eingezeichnetes Visceralscelett. Die Nasenhöhle steht durch die nunmehr langgezogene primäre Choane mit der Mundhöhle in Verbindung, ihre Seitenwand zeigt die Anlagen der drei Muscheln. Der Eingang der Tuba ist als dunkler Fleck angegeben. Der untere Rand der Gaumenplatte liegt neben der Zunge und ist durch eine punktirte Linie bezeichnet, die mit ihrem vorderen Ende den primitiven Gaumen erreicht, während das hintere Ende unter dem Tubeneingang vorbeigeht. Sehr ausgeprägt zeigt das Präparat noch das Hervortreten des Herzens über den vorderen Rand der Rippen (die embryonale Ectopie).

gänzung. Das Verhältniss zwischen primärem Gaumen und primitiver Choane verschiebt sich aber in dem Sinn, dass die letztere, die anfangs relativ nur kurz angelegt war, mit fortschreitender Entwicklung an Länge erheblich zunimmt.

Der Mundrachenraum und die Mittelohrtasche.

Der primäre Mundrachenraum zerfällt in einen vorderen, zwischen Vorderhirn und Unterkiefer gelegenen und in einen hinteren Abschnitt, welch letzterer vor dem Rautenhirn herabsteigt. Die Axen beider Abschnitte bilden, der Scheitelkrümmung des Gehirnrohres entsprechend, mit einander einen Winkel von ca. 90°. Die Abgangsstelle der Hypophysentasche fällt in die dorsale Grenze beider Abschnitte und erzeugt an deren Rand eine scharf hervortretende Kante (Figg. 4, 5 u. ff.).

Die hintere Hälfte des Mundrachenraumes enthält die Schlundtaschen und die gesammte Zungenanlage. Das Gebiet der späteren Mundhöhle reicht somit über den vorderen Abschnitt des primären Raumes hinaus bis in dessen hintere Hälfte. Hier bezeichnet der zweite Schlundbogen den Ort des späteren Isthmus faucium. In der 2. Hälfte des 2. Monats senken sich der Unterkiefer und mit ihm die Zungenspitze und der Zungenrücken nach vorn, und damit geht ein Theil der zuvor ventral gerichteten Höhlenwand in den eigentlichen Mundhöhlenboden über, wogegen die Zungenwurzel ihre dorsalwärts gekehrte Richtung beibehält.

Schon zu Schluss des 1. und im Beginn des 2. Monats vollzieht sich jene Zusammenschiebung der Schlundbogen, über die ich s. Z. in der Anatomie menschlicher Embryonen berichtet habe.[1]) Der 3. Bogen kommt lateralwärts vom 4., der 2. lateralwärts vom 3. zu liegen. Später, wenn die Bogengrenzen sich mehr und mehr verwischt haben, erkennt man die Folgen der Uebereinanderschiebung noch in der Lagerung der Bogenderivate. Der Meckel'sche Knorpel, die Knorpelgebilde des Hyoidbogens (Proc. hyoideus und cornu minus des Zungenbeins), das grosse Zungenbeinhorn und der Schildknorpel des Kehlkopfes bilden ein der Reihe nach sich umgreifendes System von Spangen, von denen die dem 1. Bogen angehörige den grössten, die dem 4. entstammende den kleinsten

1) l. c. III, S. 28.

Umfang hat.[1]) Immerhin sind diese Gebilde nicht nur neben, sondern auch hinter einander aufgereiht (Figg. 9, 21 u. 22).

Näher an der Schädelbasis macht sich die Zusammenschiebung der Bogensysteme in der relativen Lagerung der Nervenstämme geltend. Der Nerv des 2. Bogens, der N. facialis rückt lateralwärts von dem des 3., dem N. glossopharyngeus. Am meisten medial gelagert steht der N. vagus, der allerdings nur mit seinem N. laryngeus sup. als Nerv des 4. Bogens in Betracht kommt.

Die transversale Aufreihung der Bogenderivate äussert sich auch im Verhalten der Taschenräume. Es gilt dies weniger für deren ventrale, als für deren dorsale Abschnitte. Unten bez. ventralwärts haben wir als Residuen der Taschen die fossa tonsillaris, und den Recessus piriformis. Jene entstammt der 2. Schlundtasche; vom Recessus piriformis ist der über der Plica nervi laryngei liegende Abschnitt auf die 3., der darunter befindliche auf die 4. Tasche zu beziehen. Im dorsalen Abschnitte der Seitenwand weitet sich der Mundrachenraum jederseits zu einer anfangs trichterförmigen weiten Tasche aus, die lateralwärts bis in die Nähe des äusseren Gehörganges reicht und in der Folge mit diesem sich überschneidet. Sind einmal die Gehörknöchelchen knorplig angelegt, so erstreckt sich die Lichtung der fraglichen Tasche bis zwischen diese hinein. Sie umfasst somit sowohl die Anlage der Tuba als die der Trommelhöhle und kann als Mittelohrtasche bezeichnet werden. In den Fig. 16, 17, 19, 23 bis 25 habe ich eine Anzahl von Constructionsbildern mitgetheilt, sie zeigen den anfangs weiten Zugangstrichter, sowie die zunehmende Vertiefung des Raumes und bei den Figg. 24 u. 25 auch die Ueberschneidung des äusseren Gehörganges.

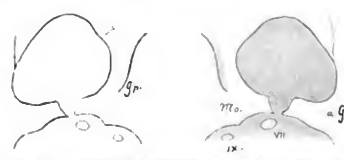


Fig. 23. Construction des Mundrachenraums von Embryo CR. Vergr. 20 fach. Uk. Unterkiefer, Hy. Hyoidbogen, VII. N. facialis, IX. N. glossopharyngeus, Mo. Mittelohrtasche, Gl. Gaumenleiste, a. Gg. äusserer Gehörgang.

Das laterale, die Trommelhöhle bildende Ende der Mittelohrtasche entspricht der ursprünglich ersten Schlundtasche. Dies

1) l. c. III, S. 125. Fig. 76.

ergiebt sich sowohl aus dessen Beziehungen zum äusseren Gehörgang, als aus dem seiner Rückwand folgenden Verlauf des N. facialis. Der Zugang zum Mittelohrtrichter umfasst das Gebiet der zweiten Schlundtasche.[1]) Auf jüngeren Entwickelungsstufen ist deren Ort noch als eine seichte Furche an der dorsalen Trichterwand erkennbar. Die medialwärts davon liegende Strecke umschliesst den N. glossopharyngeus und charakterisirt sich dadurch als Gebiet des dritten Bogens (Fig. 16—17). Der Ort der



Fig. 24. Construction des Mundrachenraums von Embryo My. Vergr. 15fach. bez. wie oben.

dritten Tasche ist nur andeutungsweise, jenseits vom Eingang der Mittelohrtasche erkennbar.

Sagittalschnitte von Embryonen des 2. Monats zeigen den Zugang zur Mittelohrtasche als eine vor dem Labyrinthknorpel schräg ansteigende Spalte, deren Höhe lateralwärts abnimmt. Ihr laterales Ende kommt über das mediale Ende des äusseren Gehörganges zu liegen, und in der dazwischen liegenden Gewebsschicht ist von der 7. Woche ab das knorplige Manubrium mallei zu er-

1) Ich hatte s. Z. (An. menschl. Emb. III, S. 82) die Rosenmüller'sche Grube für den oberen Rest der 2. Schlundtasche gehalten. Nach genauerer Durcharbeitung dieser Gegend kann ich dies nicht mehr für zutreffend halten. Der Ort der Rosenmüller'schen Grube fällt hinter den Eingang der Mittelohrtasche und medialwärts vom Weg des N. glossopharyngeus.

kennen. Hinter dem medialen Abschnitt der Spalte läuft eine Strecke weit die A. carotis interna.

Mit fortschreitender Entwickelung verengert sich der Zugang zur Mittelohrtasche bez. zur Tuba mehr und mehr, so zeigt schon die Projectionszeichnung (Fig. 25) vom 8 wöchentlichen Embryo Mr. den Tubeneingang durch eine keilförmig von hinten herkommende Gewebsleiste erheblich verjüngt. Die Trichterform des Zugangs ist dadurch geschwunden; die Leiste enthält den N. glossopharyngeus, womit wieder ihre Zugehörigkeit zum System des 3. Schlundbogens festgestellt ist. Medialwärts von dieser Leiste folgt der Raum, der später zum Pharynxgewölbe und zur Rosenmüller'schen Tasche wird.

Das letztbeschriebene Verhalten schliesst sich schon der bleibenden Anordnung dieses Raumgebietes an. Die Tuba behält

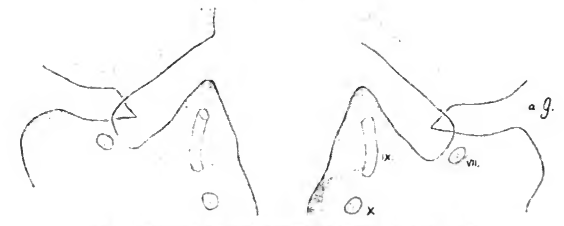


Fig. 25. Construction der Mittelohrtasche von Embryo Mr. Vergr. 15fach.

ihre Spaltenform bei und die von hinten her ihren Zugang einfassende retrotubare Leiste wird zur hinteren Lippe des Tubenwulstes. Die ausgiebigere Vertiefung der Rosenmüller'schen Tasche erfolgt erst secundär. Bei einem Fötus von $11\frac{1}{2}$ cm Scheitelsteisslänge (vom Ende des 4. Monats) finde ich das Pharynxgewölbe gerundet und der Tubeneingang erscheint als eine schräge, etwas nach vorn sich öffnende Spalte. Die hintere Lippe der Spaltöffnung tritt als niedrige retrotubare Leiste hervor, hinter der die Rosenmüller'sche Tasche nur andeutungsweise als besondere Grube erkennbar ist. Ein in der Tubenrichtung geführter Querschnitt zeigt zwischen dem schräg zurückweichenden Tubenspalt und dem dahinter liegenden Pharynxraum eine ähnliche keilförmige Leiste, wie sie oben beschrieben wurde, nur noch schärfer ausgeprägt und mit mehr medialwärts gerichteter Kante.

Den Querschnitt vom Kopf eines 46 mm langen Fötus theile ich in Fig. 26 mit, auch daran zeigt sich die zwischen Tuba und

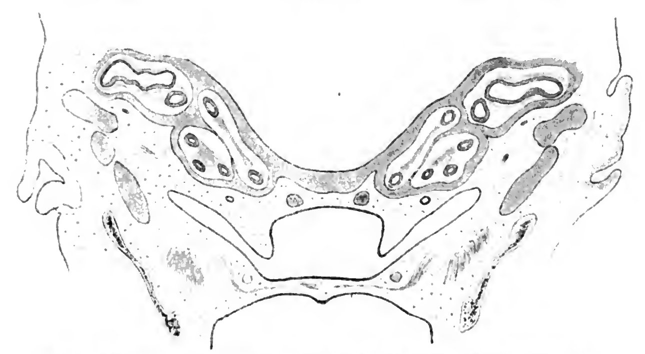


Fig. 26. Schnitt durch den Pharynx und Gaumen von Fötus Dor (SSl. 46 mm). Das Velum palatinum ist geschlossen. Jederseits ist der Tubeneingang getroffen, von dem dahinter liegenden Pharynxraum, der späteren Rosenmüller'schen Tasche, durch die zugeschärfte retrotubare Gewebsleiste geschieden. Vor der Tuba ist der M. tensor palati getroffen, den man, am durchschnittenen Hamulus vorbei, in das Velum eintreten sieht. Von sonstigen Gebilden sind die Schnecke und der Vorhof sichtbar, in letzterem die Durchschnitte von Sacculus und Utriculus. Ebenso sieht man die Gehörknöchelchen Ambos und Hammer, bez. den Anfang des Meckel'schen Knorpels.

Rosenmüller'scher Tasche scharf hervortretende Gewebsleiste. Der N. glossopharyngeus fällt nicht in den Schnitt, wohl aber zeigt dieser die hinter der Tuba heraufsteigende A. carotis interna.

Die Gaumenleisten.

Der Kopfdarm hat von früh ab die Gestalt einer flachen niedrigen Spalte, an der eine dorsale, eine ventrale und zwei laterale Wandungen unterscheidbar sind. In der ventralen Wand entwickeln sich in bekannter Weise die Zunge und die Epiglottis nebst der mittleren Schilddrüsenanlage. Die dorsale Wand zeigt jederseits eine niedrige, die Aorta desc. (bez. die Carotis interna) umschliessende Längsleiste. Die beiden Seitenwandungen sind anfangs niedrig und von ihnen gehen die Schlundtaschen ab (Fig. 27—28). Schnitte durch die dorsalwärts sich ausbiegende erste Schlundtasche, bez. durch die Mittelohrtasche gewähren für die Beurtheilung späterer Verhältnisse insofern eine sichere

Orientirung, als die Gaumenleiste ventralwärts von ihrem Eingang liegen muss. Deren Ort lässt sich schon dann bestimmen, wenn die Kopfdarmspalte im Uebrigen noch recht niedrig ist.

In dem vor dem Hypophyseneingang liegenden vorderen Abschnitt des Mundrachenraumes gehört die Decke dem früheren

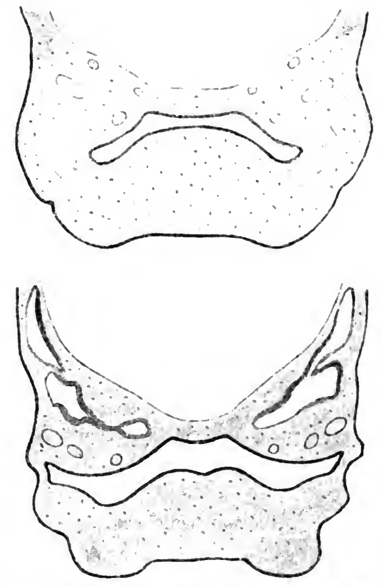


Fig. 27 und Fig. 28. Schnitte durch die hintere Abtheilung des Mundrachenraums von Embryo Ru (Nl. 9,1 mm). Vergr. 30fach. Die Schnitte stehen annähernd senkrecht zur Axe des Rohres. Fig 27 trifft den ersten Bogen beim Durchtritt des N. mandibularis. Fig. 28 schneidet jederseits die erste Schlundtasche, bez. die Mittelohrtasche, sowie die Anlagen des Trommelfells und des äusseren Gehörganges. Fig. 27 zeigt die Durchschnitte der Nn. facialis-abducens, Fig. 28 den des N. facialis, sowie die Theile der Labyrinthanlage.

Mundbuchtgebiet, der überwiegende Theil des Bodens aber dem Kopfdarm an. In eben dem Maasse als die Schnauzenfalte sich stärker entwickelt, nimmt die Höhe der Seitenwand zu und die Innenfläche des Oberkieferfortsatzes wächst zu einer anfangs

stumpfen, späterhin schärfer sich ausprägenden Kante aus, dem ersten Anfang einer Gaumenleiste (Fig. 29). Vorn beginnt die Gaumenleiste neben der primären Choane und sie geht hier unmittelbar in den primären Gaumen über. Von da ab erstreckt sie sich mit schräg verlaufendem Bogen dorsalwärts, und sie ist, über den Eingang zur Mittelohrtasche hinaus, bis in die Nähe des Kehlkopfeinganges zu verfolgen. Die Richtung der Gaumenleiste kreuzt sich unter einem spitzen Winkel mit der Richtung der ursprünglich vorhandenen Rachenhaut. Die Zunge, sobald sie



Fig. 29. Frontalschnitt durch den vorderen Theil der Mundrachenhöhle, hinter den Choanen von Embryo N Vergr. 30fach. Der obere Theil der Zunge ist vom Schnitt getroffen und wird von den als Kanten hervortretenden Gaumenleisten der beiden Oberkieferfortsätze seitlich eingefasst.

einmal deutlich hervortritt, kommt zwischen die beiderseitigen Gaumenleisten zu liegen.

So finden sich die Verhältnisse im Verlauf der 5. Woche bei Embryonen von 10—11 mm Nl. In der Folge tritt die Gaumenleiste selbstständiger, als etwas überhängender Wulst jederseits gegen den Mundrachenraum hervor. Die Figuren 30—31 zeigen dies Verhalten bei Embryonen von 13—14 mm Nl. Fig. 30, aus derselben Schnittreihe stammend wie Fig. 31, trifft die Zungenwurzel, und hier erscheint die Rachenspalte noch sehr niedrig. Indessen wölbt sich die Gaumenleiste bereits aus deren scharf abgesetzter Seitenwand hervor.

Weiterhin wandelt sich die Gaumenleiste immermehr zu einer schmalen, neben der Zunge weit herabsteigenden Platte um, und

nun sondert sich lateralwärts von ihr eine zweite Leiste ab, die Alveolarleiste. Diese reicht nicht so weit als die Gaumenleiste: in einiger Entfernung nimmt die Breite der Mundhöhle erheblich ab, und die Alveolarleiste läuft stumpf aus, während die Gaumen-

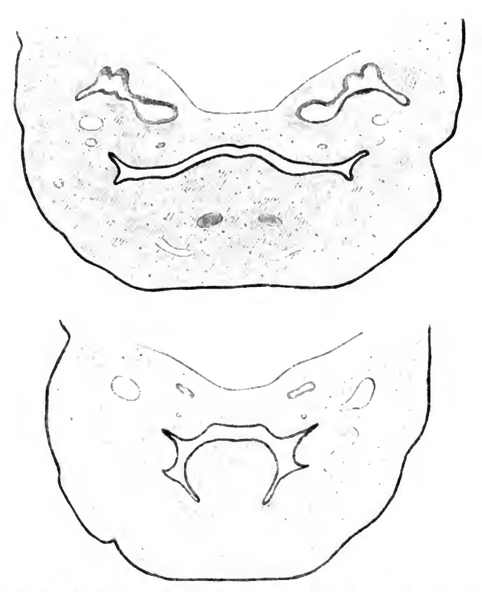


Fig. 30 und Fig. 31. Schnitte senkrecht zur Längsaxe des Kopfdarmes von Embryo CR. Vergr. 25fach. Fig. 30 fällt in das Gebiet der Zungenwurzel. Der Mundraum und die Gaumenleisten sind noch niedrig. Bei Fig. 29 ist der Zungenkörper getroffen, die beiderseitigen Gaumenplatten treten als rundliche Leisten aus der Seitenwand des Mundraumes hervor

leiste ihren Weg weiter dorsalwärts fortsetzt (Fig. 24). Die Sonderung zwischen Alveolar- und Gaumenleiste leitet sich dadurch ein, dass zwischen der letzteren und der seitlichen Mundwand eine breitere Furche auftritt, deren Decke in der Folge sich convex hervorwölbt. (Fig. 32 u. 33). Gleichzeitig vollzieht sich auch im

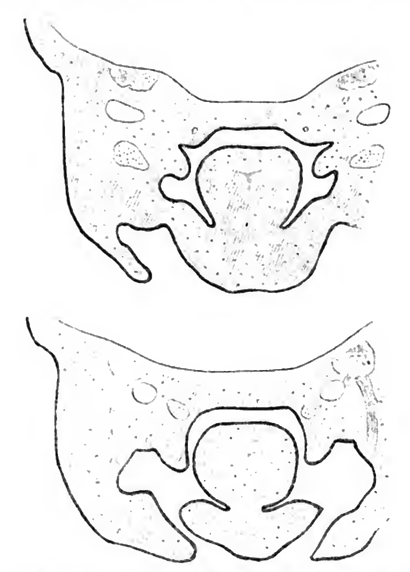


Fig. 32 und Fig 33. Durchschnitt durch den Mundrachenraum von Embryo Sch (Nl. 13,8 mm). Der Schnitt trifft die hintere Hälfte des Raumes, Fig. 32 etwas weiter oben als Fig. 33. Beide Schnitte zeigen die Gaumenplatten als mässig hervorgewölbte Leisten neben der Zunge liegend. Bei Fig 33 hat sich das Feld der Alveolarleiste von der Gaumenplatte bereits getrennt. Vergr 25 fach.

Bereich des mittleren Stirnfortsatzes und des Unterkiefers die Sonderung vom Alveolarfortsatz einerseits und von Lippe und Wange andererseits.

Die ursprüngliche Stellung der Zunge zum Gaumen und zur Nasenhöhle. Umlagerung und Verwachsung des Gaumens.

Es ist s. Z. in der Anatomie menschl. Embryonen auf das eigenthümliche, übrigens schon Dursy bekannte Verhalten zwischen Zunge und Gaumenanlage hingewiesen worden.[1] Die Zunge steigt

1) l. c. III, S. 32.

erheblich höher herauf als die freien Gaumenränder, und sie wird stellenweise von diesen förmlich eingeklemmt (Fig. 34—35). Der

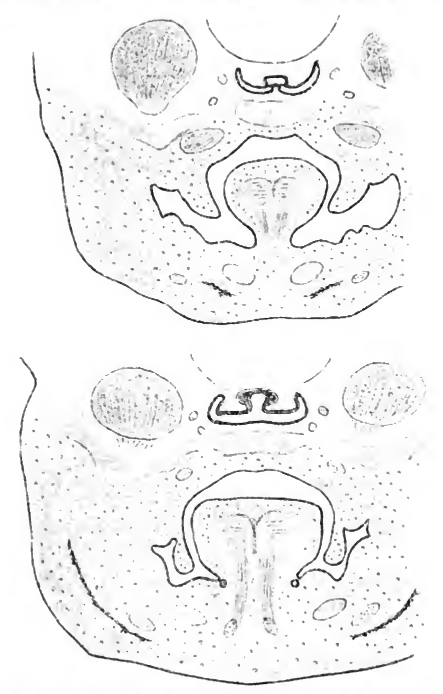


Fig. 34 und Fig. 35. Frontalschnitte durch das Gesicht der beiden Embryonen My und Dd, beide dem Ende der 7. Woche zuzutheilen. Vergr. 20fach. Die Schnitte zeigen zu oberst die Hypophysis im Querschnitt, seitlich davon die Carotis int. und den N. abducens, etwas weiter lateralwärts das mächtige Gauglion Gasseri, darunter die knorpelige Schädelbasis. Die Zunge steht in beiden Präparaten noch hoch und wird seitwärts von den Gaumenplatten umgriffen, die bei Fig. 34 noch von breiter, bei Fig. 35 dagegen von verschmälerter Basis abgehen. Neben den Gaumenplatten liegt jederseits die flache Alveolarleiste, die hier wie am Unterkiefer noch glatt ist und keine Zahnanlagen zeigt. Im Boden der Mundhöhle sind der MECKEL'sche Knorpel, der N. alveolaris inferior und der knöcherne Unterkiefer eingezeichnet.

Rücken der Zunge berührt während der 2. Hälfte des 2. Monats in grösserer Ausdehnung die Schädelbasis, und die Zungenspitze

legt sich dem hinteren Naseneingang dicht an. An Sagittalschnitten gewinnt man geradezu den Eindruck, als ob die Zunge zwischen



Fig. 36 und Fig 37. Embryo Wl (Nl. 15,6 mm). Fig. 36 Sagittalschnitt nahe der Mittelebene und Fig. 37 seitwärts durch die Nasenspalte. Vergr. 20fach. Die Zunge liegt mit Rücken und Spitze bei Fig. 36 dem Septum narium an, bei Fig 37 schiebt sie sich zwischen die Schädelbasis und die Gaumenplatte ein und ist dem hinteren Ende der Muscheln zugekehrt. C. i, C. m. und C. s. untere, mittlere und obere Muschel, Ep. Epiglottis, Gp Gaumenplatte, pr. G. primärer Gaumen, H. Hypophyse, hy. Hyoidknorpel, M. MECKEL'scher Knorpel, Uk. Unterkiefer, Sph. Keilbeinkörper, Sch. Schnecke, Z. Zunge.

Gaumen und Schädelbasis hindurch in die Nasenhöhle hineingedrängt sei (Fig. 36, 37, 38). Es besteht somit zu der Zeit ein

beiderseitiger physiologischer Wolfsrachen mit Tiefstand der Gaumenplatten und Hochstand der Zunge. Der hintere Nasenzugang, bez. die primäre Choane ist nunmehr sehr lang, er erstreckt sich vom Ort des späteren Foramen incisivum nach rückwärts bis zu dem des Nasenrachenganges. Zwischen beiden Choanen liegt das aus dem mittleren Stirnfortsatz durch Verschmelzung seiner beiden Seitenplatten entstandene Septum, das schräg unter der Schädelbasis ausläuft. Die hintere Grenze des Nasengebietes fällt vor den Ort des Tubeneinganges. In den



Fig. 38. Sagittalschnitt durch Nasen- und Mundhöhle von Embryo FM (Nl 17 mm) Vergr. 20fach Bezeichnungen wie bei Fig. 36 u. 37.

Figuren 20, 21 u. 22 ist der Verlauf des unteren Gaumenrandes mit punctirten Linien eingetragen.

Die Umlagerung der Gaumenplatten erfolgt zu Ende des 2. oder im Beginn des 3. Monats. Von da ab findet man die Platten mit einander zugekehrten Rändern über der Zunge liegend. Ihre Verwachsung schreitet von vorn nach rückwärts fort, erfolgt aber nur langsam. Aus der Zeit der bereits gehobenen, aber noch unverschmolzenen Gaumenplatten besitze ich zwei Schnittreihen. Die eine Reihe Re. stammt von einem kleinen Fötus von 31 mm SSl. Sehr schön zeigen die vorderen Schnitte die Einschiebung des mittleren Stirnfortsatzes zwischen die beiden Gaumenplatten, wogegen im übrigen Bereich die Ränder der letzteren noch durch

eine von vorn nach rückwärts breiter werdende Spalte von einander getrennt sind (Fig. 39—40). Bei der anderen Schnittreihe Lo.



Fig. 39. Frontalschnitt durch das Gesicht von Embryo Re (SSl. 31 mm). Vergr. 10fach. Verbindung des mittleren Stirnfortsatzes mit den beiden Gaumenplatten des Oberkiefers. In der Nasenspalte sind jederseits die 3 Muscheln sichtbar.



Fig. 40. Schnitt etwas weiter hinten. Die beiden Gaumenplatten liegen unter dem mittleren Stirnfortsatz und sind noch unverbunden.

handelt es sich um einen ungefähr gleich grossen Fötus von 25 mm Nl., 29 mm SSl. Hier sind sich die beiderseitigen Gaumenplatten bis zur Berührung entgegen gerückt, ohne dass jedoch die Verwachsung erfolgt wäre (Fig. 41).

Bei einem Fötus von 51 mm SSl. (Rbg.) ist der vordere Theil der Gaumenplatten glatt verwachsen, nach rückwärts findet sich

eine Strecke mit blos epithelialer Verklebung, und dahinter folgt eine klaffende, an Breite rasch zunehmende Spalte. Diese entspricht schon dem hinteren Gaumenbogen, die noch unvollständig geschlossene Strecke dem Gaumensegel. Ebenso finden sich die Verhältnisse bei einem Fötus Doed. 2 von 46 mm SSl. Während nun aber im übrigen Gaumenbereich die Platten mit ihren einander zugekehrten Rändern sich glatt aneinanderpassen, erfahren sie in ihrem hinteren Endabschnitte eine gegenseitige Stauung, die Ränder biegen sich nach vorn um. Die Schnitte Figg. 42—43 zeigen diese Strecke bei eben erfolgender Verwachsung. Aus den nach vorn umgebogenen Rändern

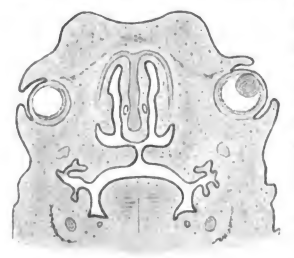


Fig. 41. Frontalschnitt durch das Gesicht von Embryo Lo (SSl. 29 mm). Gaumenplatten über der Zunge liegend, aber unverbunden. Vergr. 10fach.



Fig. 42. Fötus Doed. (SSl. 46 mm). Querschnitt durch den Mund und den Pharynx. Vergr. 10fach. Das Velum palatinum ist noch nicht verwachsen, die freien Ränder der Gaumenplatten sind nach vorn umgebogen. Der Schnitt zeigt vorn die flachgeschnittene Zungenwurzel und seitwärts davon die Tonsillengrube. Die im Velum getroffenen Muskelfasern gehören dem M. pharyngopalatinus an. Seitlich sind der Meckel'sche Knorpel und die Knochenanlage des Unterkiefers und medialwärts von ersterem der M. pterygoideus internus sichtbar (der M. masseter wurde nicht mit gezeichnet). Hinter diesen Theilen ist der laterale Abschnitt der Tuba gestreift. Dahinter sieht man die Carotis interna und einen Theil der Schnecke. Vor der Schädelbasis zwischen ihr und der Rückwand des Pharynx liegt jederseits der M. rectus capitis anterior.

entsteht aber eine convexe Längsleiste (Fig. 44), die sich jederseits durch eine Furche vom übrigen Gaumensegel absetzt. Dies Gebilde ist die Anlage der Uvula. Noch bei einem Fötus von 12 cm SSl.

erscheint die Uvula als ein das Gaumensegel nach vorn und nunmehr auch nach abwärts überragender gerundeter Hügel.

Auf dieser vorgerückten Stufe finde ich im Innern der Gaumennaht concentrisch geschichtete epitheliale Knoten und

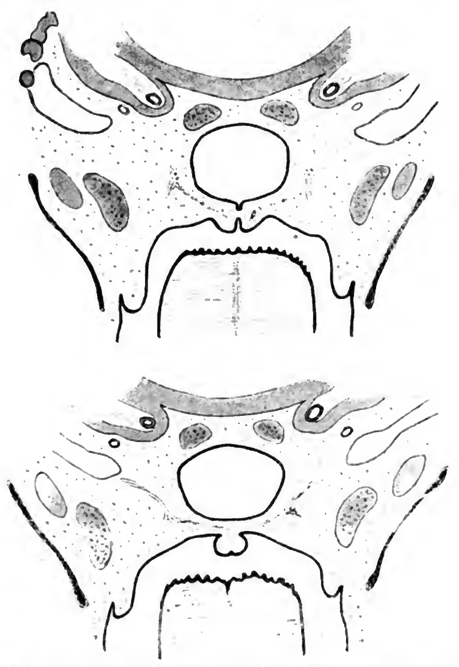


Fig. 43 und Fig. 44. Gehören derselben Schnittreihe an und liegen etwas höher als der Schnitt von Fig 42. Fig. 43 zeigt das Gaumensegel noch unvollständig verwachsen, hinten und vorn durch eine Furche eingeschnitten. Bei Fig. 44 sind die beiden Platten durch ihre ganze Tiefe verwachsen. Nach vorn ragt eine dicke gerundete Leiste hervor, die aus den nach vorn umgebogenen Plattenrändern besteht. Es ist dies die Anlage der Uvula.

Stränge, theils paarig, theils unpaar. Aehnliche Bildungen hat Dursy auch im Gaumen von Thierfötus gesehen und als Vorläufer von Cystenbildungen gedeutet. Zu letzterer Deutung scheint mir bis jezt kein Grund vorzuliegen.

Die Bedingungen der Gaumenumlagerung.

Nach Besprechung der normalen Entwickelungsvorgänge am Gaumen kann ich auf das Präparat (Mr.) zurückkommen, das mich, wie Eingangs bemerkt wurde, zur Wiederaufnahme einer Gaumenbearbeitung veranlasst hat. Seine Maasse betrugen 22 mm Nl., 29 mm SSl., sein Alter 8 Wochen. Wie bereits erwähnt, zeigen die frontal geführten Schnitte eine rechtsseitige Tiefstellung der Gaumenplatte und eine entsprechende Hochstellung des rechten Zungenrandes, wogegen links die Zunge tief und die Gaumenplatte hoch stehen, letztere kehrt ihren freien Rand der Mittelebene zu

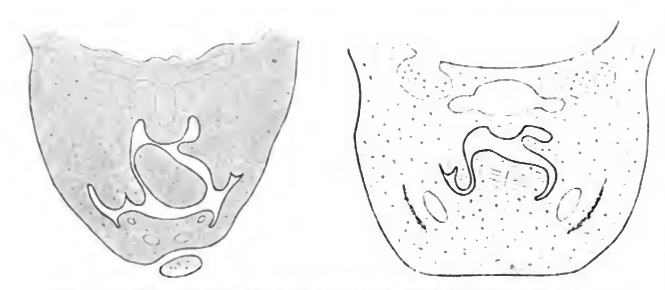


Fig. 45 und Fig. 46. Durchschnitte durch den Mundraum von Embryo Mr. (Vergr. 10fach.) Fig. 45 zeigt die schräg gestellte Zungenspitze. Rechts ist Tiefstand, links Hochstand der Gaumenplatten. Der Unterkiefer hat links einen flachen Eindruck, in den sich der Daumen der linken Hand einpasst. Fig. 46 zeigt gleichfalls asymmetrischen Stand der Gaumenplatten und einseitige Hebung des Zungenrandes, indessen ist in diesem weiter nach rückwärts liegenden Schnitt die Schrägstellung lange nicht so ausgeprägt, wie vorn.

(Fig. 45—46). Einige Schnitte zeigen eine leichte Schrägstellung des Unterkiefers und eine Anlegung des linken Daumens an den Letzteren (Fig. 45). Nach diesem Thatbestand durfte man daran denken, dass durch einen vom Daumen auf den Unterkiefer ausgeübten Druck eine Schrägstellung von Unterkiefer und Zunge und dadurch eine einseitige Wolfsrachenbildung erzeugt worden sei.

Das Modell (Fig. 47—48) zeigt indessen nichts von einer ausgiebigen Schrägstellung des Unterkiefers, sondern da, wo der Daumen anliegt, eine wenig ausgedehnte flache Grube; auch wäre, falls der Daumendruck die Schrägstellung der Zunge veranlasst haben sollte, der Hochstand der letzteren auf der linken Seite zu erwarten. Das trifft aber nicht zu. Andererseits haben die oben

mitgetheilten Untersuchungen gezeigt, dass der Tiefstand der Gaumenplatten und der Hochstand der Zunge während geraumer Zeit physiologische Vorkommnisse sind, und dass die Umlagerung der Gaumenplatten in eben die Periode fällt, der das vorliegende Präparat angehört.

Unter den gegebenen Verhältnissen fragt es sich, ob das Präparat Mr., das sonst in allen Punkten durchaus normale Verhältnisse zeigt, hinsichtlich seiner Gaumenbildung überhaupt als abnorm aufzufassen sei, oder nicht. Je mehr ich mir die Sache überlege, um so wahrscheinlicher wird es mir, dass sich das Präparat in einer Phase physiologischer Umgestaltung befunden hat.



Fig. 47 ist nach dem Plattenmodell von Mr gezeichnet und zeigt den Gaumen vom Mund aus gesehen.

Bis jetzt wissen wir über den Mechanismus der Gaumenumlagerung gar nichts. Da die Gaumenplatten nicht nur neben, sondern mit ihren freien Rändern geradezu unter der Zunge liegen, und da die Zunge den überliegenden Raum völlig ausfüllt, so kann ein Emporsteigen der Platten offenbar nur erfolgen, wenn die Zunge zuvor ausgewichen ist. Dies Ausweichen kann durch active Muskelcontractionen, d. h. durch Senken des Unterkiefers und durch Bewegungen der Zunge eingeleitet werden. Einen anderen Vorgang wüsste ich mir kaum vorzustellen. Dabei ist es wohl denkbar, dass die Hebung der Gaumenplatten nicht für beide Seiten zugleich erfolgt, sondern dass die Zunge erst nach der einen und dann nach der andern Seite hin Raum schafft. Unser

Präparat entspricht in dem Fall einer solchen Uebergangsphase, in der der Process einseitig begonnen hat, aber noch nicht vollendet ist.

In seinem schon oben citirten Werk über die Entwickelungsgeschichte des Kopfes theilt DURSY[1]) einen dem meinigen völlig



Fig. 48 ist nach dem Plattenmodell von Mr gezeichnet und zeigt die Schrägstellung der Zunge.

verwandten Fall von einseitigem Tiefstand einer Gaumenplatte und gleichzeitiger Schrägstellung der Zunge mit. Es handelt sich um

1) l. c. S. 177 u. Taf. IV, Fig. 14.

einen Schweinsembryo von 3 cm. Die andere Gaumenplatte ist bereits gehoben, aber mit dem mittleren Stirnfortsatz noch nicht verwachsen, der Gaumenschluss ist somit noch in Vorbereitung begriffen.

Dursy scheint seinen Fall als pathologisch angesehen zu haben. Im Uebrigen hat er sehr wohl die auch bei thierischen Embryonen neben der Zunge herabsteigende senkrechte Richtung der Gaumenplatten gekannt und ausdrücklich hervorgehoben, dass der Gaumenschluss nur erfolgen kann, wenn die Zunge zuvor sich zurückzieht. Dursy's an einem thierischen Embryo beobachteter Fall verstärkt die Möglichkeit einer physiologischen Deutung derartiger Fälle. Das für meinen Embryo Mr. anfangs vermuthete Motiv äusserer mechanischer Beeinflussung fällt dabei völlig ausser Betracht. Die physiologische Deutung des in beiden Fällen beobachteten Verhaltens wird meines Erachtens um so mehr Gewicht bekommen, je häufiger ähnliche Beobachtungen gemacht werden, und es wird sich im Anschluss an Dursy's Beobachtungen geradezu empfehlen, grössere Mengen von Schweinsembryonen der entsprechenden Entwickelungsstufe auf ihre Gaumenbildung zu untersuchen. Sollte es sich zeigen, dass einseitiger Tiefstand der Gaumenplatten und Schrägstellung der Zunge sich öfters finden, ohne entsprechende Häufigkeit von Wolfsrachenbildung bei erwachsenen Schweinen, so wird die physiologische Deutung ohne Weiteres als bewiesen zu erachten sein.

Die normale Gaumenbildung scheint durch verschiedene Ursachen gestört werden zu können. Am häufigsten mögen wohl stoffliche Defecte einer der betheiligten Anlagen in Betracht kommen. Dies gilt z. B. von den zwei Fällen, die ich s. Z. in der Anat. menschl. Embryonen abgebildet habe[1]), bei denen der Oberkieferfortsatz in seiner Entwickelung zurückgeblieben war. Als fernere Ursachen von Wolfsrachenbildung giebt Dursy[2]) abnorme Membranen- und Cystenbildungen an. Diese Dinge verlangen noch eine eingehendere Bearbeitung auf embryologischer Basis.

1) l. c. III, S. 43, Fig. 27—28.
2) Dursy, l. c. S. 177 ff.

UEBER DAS HIRNGEWICHT DES MENSCHEN.

VON

F. MARCHAND.

Des XXVII. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

Nº IV.

LEIPZIG
BEI B. G. TEUBNER
1902.

Vorgetragen für die Abhandlungen am 13. Januar 1902.
Das Manuscript eingeliefert am 15. Januar 1902.
Der letzte Bogen druckfertig erklärt am 12. März 1902.

UEBER DAS HIRNGEWICHT DES MENSCHEN.

VON

F. MARCHAND.

Einleitung.

Die Gehirnwägungen, die die Grundlage der vorliegenden Zusammenstellung bilden, wurden in den Jahren 1885—1900 im pathologischen Institut in Marburg ausgeführt. Bei der geringen Grösse des Sectionsmateriales ist die Zahl der Wägungen, die überdies nicht regelmässig vorgenommen wurden, nicht sehr gross, doch immerhin grösser als die der meisten bisherigen Zusammenstellungen. Auch musste ein Teil der Wägungen, deren Gesammtzahl 1234 betrug, aus verschiedenen Gründen ausgeschieden werden, ein anderer Theil konnte wegen Unvollständigkeit der Angaben nicht zu allen Berechnungen benutzt werden.

In erster Linie lag es mir an einer genaueren Ermittelung der Wachsthumsverhältnisse des Gehirns; leider war hier gerade die Beschaffung eines ausreichenden Materials am schwierigsten, und ich verfüge daher auch nicht über genügende Zahlen für alle Altersstadien.

Zunächst wurden die Gehirngewichte nach dem Alter der Individuen, in den einzelnen Altersklassen nach dem Gewicht geordnet, und zwar getrennt für die beiden Geschlechter. In den tabellarischen Uebersichten II A u. II B über die einzelnen Lebensalter sind die Gehirngewichte in Stufen von 50 zu 50 g, ferner das Mittelgewicht, sowie das Minimal- und Maximalgewicht jeder einzelnen Stufe zusammengestellt.

Auf die Mittheilung der Einzelgewichte glaubte ich nicht verzichten zu dürfen, doch beschränkte ich mich auf die nach dem Alter und dem Gehirngewicht sowie nach der Grösse geordneten Listen mit Weglassung der Todesursache. Die Zahl der nach dem Lebensalter geordneten Fälle betrug

männlichen Geschlechts		716
weiblichen	„	453
	Sa.	1169.

darunter Kinder unter 15 Jahren:

männlichen Geschlechts		223
weiblichen	„	166
	Sa.	389.

In den Tabellen IV—VIII wurden die Gehirngewichte nach der Körpergrösse der Individuen geordnet, darunter

	männlichen Geschlechts	716
	weiblichen „	457
	Sa.	1173.

Von diesen waren 0—20 Jahre alt (Tab. IV):

	männlichen Geschlechts	275
	weiblichen „	191
	Sa.	466;

20 bis über 80 Jahre alt:

	männlichen Geschlechts	441
	weiblichen „	266
	Sa.	707.

Unter den Erwachsenen wurden ausserdem die Individuen von 20—49 und die von 50 bis über 80 Jahre gesondert berechnet (Tab. V und VI).

Ausser den Beziehungen des Gehirngewichtes zum Lebensalter und der Körpergrösse kommt noch das Verhältniss zum Körpergewicht in Frage; doch wurden Bestimmungen des Körpergewichtes von mir nicht ausgeführt, erstens aus äusseren Gründen, sodann aber auch mit Rücksicht darauf, dass das Körpergewicht bei dem Leichenmaterial der Krankenhäuser ein so wechselnder Faktor ist, dass bestimmte Beziehungen zum Gehirngewichte sich daraus kaum ableiten lassen würden.

Einen gewissen Werth würde die Bestimmung des Körpergewichtes zum Vergleich mit dem des Gehirns nur für annähernd normale, vor dem Tode nicht stark abgemagerte oder geschwollene Individuen einer bestimmten Altersklasse haben, also z. B. für normale Neugeborene oder für jugendliche Individuen von annähernd gleichem Ernährungszustand (z. B. Soldaten). Doch würde sich jenes Verhältniss erfolgreicher durch Vergleichung der für sich ermittelten Gehirngewichte mit den von lebenden Individuen der gleichen Altersklasse erhaltenen Durchschnittsgewichten feststellen lassen.[1])

Methode der Wägung. Die Gehirne wurden im frischen Zustand, in der Regel unmittelbar nach der Herausnahme, mit den Häuten gewogen, seltener nach der Vornahme der Hirnsection.

1) Der gleichen Ansicht ist Pfister, l. c. p. 177.

Auf Differenzen von weniger als 5 g wurde kein Werth gelegt, da die unvermeidlichen Fehler in viel weiteren Grenzen schwanken. Diese Fehler bestehen hauptsächlich in der wechselnden Blutfülle, dem Flüssigkeitsgehalt der weichen Häute und der Gehirnsubstanz, der Füllung der Ventrikel u. s. w. Da dieselben Fehler in allen Fällen wiederkehren, können sie vernachlässigt werden, so lange sie ein gewisses, allerdings nur annähernd abzuschätzendes Maass nicht übertreffen (s. unten).

Die von einigen Autoren gestellte Forderung, das Gehirn nach sorgfältiger Entfernung der weichen Häute und der Plexus zu wägen, ist für eine grosse Anzahl von Wägungen fast unausführbar und schon aus diesem Grunde verfehlt. Ueberdies wird dadurch das erstrebte Ziel, die Nervensubstanz allein zu bestimmen, doch nicht erreicht, da die Gefässe aus der Gehirnsubstanz nicht entfernt werden können. Ferner wird durch diese Art der Wägung der Vergleich mit anderen bereits vorhandenen Wägungen nach der gewöhnlichen Methode unmöglich. Eine absolute Bestimmung der Nervensubstanz bleibt im besten Falle illusorisch. Die weichen Häute gehören aber zum Gehirn ebenso wie die kleinen Gefässe in der Substanz.

Auch von der Wägung der einzelnen Theile des Gehirns habe ich Abstand genommen. Die Meynert'schen Wägungen der Lappen sind ziemlich zwecklos, da die Lappen im Innern nicht von einander abgegrenzt sind. Rationell würden nur die Wägungen der einzelnen Hemisphären, die des Pons mit Kleinhirn und medulla oblongata, oder solche des Kleinhirns allein zum Vergleich mit dem Grosshirn sein.

Einfluss der Todes-Ursache.

Die tödtliche Erkrankung (Todesursache) kann das Hirngewicht nach zwei Richtungen beeinflussen, 1. eine Verkleinerung, 2. eine Vergrösserung zur Folge haben.

Eine erworbene Verringerung (Atrophie) wird bekanntlich am häufigsten durch das Alter herbeigeführt. Unter den Erkrankungen des Gehirns ist es in erster Linie die Dementia paralytica, die eine hochgradige Atrophie und Verminderung des Gehirngewichtes zur Folge hat. Dieser Faktor spielt bei den an dem Leichenmaterial der Irrenanstalten ausgeführten Gehirnwägungen eine grosse Rolle, kommt aber bei unserm Material, unter welchem sich Gehirne von Geisteskranken nur ausnahmsweise finden, nicht in Betracht.

Anderweitige organische Gehirnkrankeiten, wie halb- oder doppelseitige Sklerose des Grosshirns, die ebenfalls beträchtliche Gewichtsverminderung zur Folge haben, sind in der Zusammenstellung ausgeschlossen.

Sehr viel häufiger als eine Verminderung wird durch die Todesursache eine Vermehrung des Hirngewichtes veranlasst, welche sich indess schwer von den noch im Bereiche der Norm liegenden Schwankungen trennen lässt. Als Ursache einer Vermehrung kommen hauptsächlich in Betracht: Hyperämie, besonders durch Stauung, Oedem der Häute und der Gehirnsubstanz, Ansammlung wässeriger Flüssigkeit in den Ventrikeln, enzündliche Exsudate, Blutergüsse und Neubildungen.

Unter den Krankheiten, die durch Stauung Hyperämie und seröse Durchtränkung zur Folge haben, sind abgesehen von den schweren Störungen der Cirkulation durch Herzfehler, Emphysem, plötzliche Erstickung u. s. w. hauptsächlich akute Infectionen von Wichtigkeit, bei denen der Tod unter Erscheinungen von Herzschwäche, sehr hohem Fieber, mit starker Benommenheit erfolgt.

Hierbei ist weniger eine ödematöse Beschaffenheit der Häute als die seröse Durchtränkung der Gehirnsubstanz selbst, eine Schwellung des ganzen Gehirns zu beobachten, und zwar scheint es, dass gerade das kindliche Gehirn dieser Veränderung am leichtesten ausgesetzt ist. Auffallend häufig finden sich ungewöhnlich hohe Hirngewichte bei Diphtherie; das Gehirn ist weich und feucht, die Rinde verhältnissmässig breit, die Marksubstanz blutreicher als die Rinde. In solchen Fällen ist es natürlich schwer zu sagen, wie viel auf die Vermehrung des Gewichtes durch die akute Veränderung zu rechnen ist, während bei dem Oedem der Häute sich das Gewicht des Gehirns nach dem Ablaufen der Flüssigkeit ziemlich richtig feststellen lässt. Auch bei akuter Osteomyelitis, Peritonitis kommen verhältnissmässig oft auffallend hohe Hirngewichte vor. Dass grössere Exsudatansammlungen, zugleich mit Hyperämie und seröser Durchtränkung, wie bei tuberculöser und eitriger Meningitis eine erhebliche Steigerung des Hirngewichtes herbeiführen, ist selbstverständlich; derartige Fälle sind daher am besten auszuschliessen, besonders wenn sie eine Steigerung des mittleren Gehirngewichtes innerhalb einer bestimmten Altersklasse bedingen würden. Ebenso sind Gehirngewichte bei grösseren Hirnblutungen und Geschwülsten auszuscheiden, da hierbei sehr beträchtliche Gewichtsvermehrungen vorkommen. Geringere Grade von Hydrocephalus internus lassen sich nach Ablauf der Flüssigkeit noch verwerthen. Bei kindlichen Gehirnen hat in vielen Fällen die Rachitis eine gewisse Bedeutung für das Hirngewicht, abgesehen von der Erzeugung hydrocephalischer Zustände. Es kommt auch hier hauptsächlich eine ödematöse Durchtränkung bei grosser Blässe und deutlicher Schwellung des Gehirns in Betracht, wie wir sie bei Kindern mit Craniotabes, verbunden mit allgemeiner Anämie, Schwellung der lymphatischen Apparate, Intestinalkatarrhen finden, die zuweilen ganz plötzlich unter eclamptischen Erscheinungen, oder an Spasmus glottidis sterben. Beiläufig bemerkt, deutet hier die Beschaffenheit des Gehirns sehr deutlich darauf hin, dass eine längere Zeit bestehende ödematöse Schwellung des Gehirns die Verdünnung des Schädeldaches (besonders da, wo ein Gegendruck von aussen einwirkt) zur Folge hat.

Selbstverständlich sind geringe Schwankungen des Gewichtes unter dem Einfluss der Todesursache überhaupt nie auszuschliessen,

denn selbst in Fällen von plötzlichem Tod vorher gesunder Individuen können erhebliche Schwankungen des Blutgehaltes in kurzer Zeit eintreten. Es bleibt also nichts übrig, als nach Ausschliessung der auffälligsten Abweichungen die zufälligen Verschiedenheiten durch möglichst grosse Zahl der Fälle auszugleichen, um annähernd richtige Mittelwerthe zu erhalten.

Eine sichere Beurtheilung des Gehirngewichtes würde einen Vergleich desselben mit der Schädel-Capacität, am besten vor Entfernung der harten Hirnhaut voraussetzen. Denn erst hierdurch würde man sich überzeugen können, ob das Gehirngewicht im Verhältniss zum Schädel zu gross oder zu klein ist. Indess ist die Bestimmung der Capacität am Schädel der frischen Leichen umständlich und zeitraubend, und es fehlt vorläufig noch an einer genauen Kenntniss des normalen Verhältnisses zwischen Hirngewicht und Capacität.

Gewicht des kindlichen Gehirns.

Die wichtigste Frage ist zunächst, mit welchem Gehirngewicht der Mensch geboren wird. Diese Frage ist nicht ganz leicht und nur mit Hülfe eines grösseren Materials zu beantworten. Bis zu welcher unteren Grenze sind die zu früh geborenen Kinder zu verwerthen? Ich habe, allerdings etwas willkürlich, als diese Grenze eine Körperlänge von 45 cm angenommen, die ungefähr der 34. Schwangerschaftswoche entsprechen würde.[1]) Eine Beschränkung auf die „reifen" Kinder von mindestens 38 Wochen und einer Körperlänge von 49—50 cm würde nicht gut angängig sein, da ein nicht geringer Theil der in späteren Monaten nach der Geburt gestorbenen Kinder diese Grösse noch nicht erreicht.

Kleinere Kinder — unter 45 cm — bleiben ebenfalls am Leben, zuweilen sogar längere Zeit; aber sie können dann doch nicht zum normalen Durchschnitt gerechnet werden. Es wäre von Interesse zu wissen, wie sich bei solchen zu früh geborenen Kindern das Gehirngewicht in späterer Zeit verhält im Falle sie länger am Leben bleiben, doch ist meistens später nichts Sicheres mehr über die ursprüngliche Ausbildung bei der Geburt zu ersehen.

1) Ahlfeld, Lehrbuch der Geburtshülfe. 1. Aufl. 1898. S. 44, 191.

Da die zu früh geborenen Kinder auch im günstigsten Falle später klein bleiben, so ist wahrscheinlich, dass auch das Gehirngewicht in solchen Fällen immer hinter dem normalen zurückbleiben wird. Wenn man berücksichtigt, dass das Gehirn des 7—8monatlichen Foetus nicht blos in seiner Structur, sondern auch in der Ausbildung der Windungen noch wesentlich unvollkommener ist, als das des reifen Neugeborenen, so ist ferner ziemlich sicher, dass es diesen Mangel nach der Geburt nicht mehr vollständig nachholt; die unter dem Einfluss der äusseren Reize stattfindende Vervollkommnung der Structur muss sich an einem morphologisch mangelhaft entwickelten Gehirn vollziehen. Ich möchte daher annehmen, dass die verhältnissmässig zu kleinen Gehirne mit sehr einfachen Windungen bei Erwachsenen theilweise durch vorzeitige Geburt zu erklären sind. Jedenfalls ist dies ein Punkt, auf welchen bei Untersuchungen über die Verschiedenheiten der Ausbildung der Gehirnwindungen Rücksicht zu nehmen sein wird.

Bei der ziemlich geringen Zahl der Fälle wurden die Kinder aus der ersten Lebenswoche mit den Neugeborenen zusammengerechnet. Als Mittelgewicht ergab sich für

16	Kinder	männlichen Geschlechts	**371** g,
8	„	weiblichen „	**361** g;

darunter sind:

Neugeborene	5	männl.	Geschlechts,	5	weibl.	Geschlechts
Kinder von 1 Tag	2	„	„	-	„	„
„ „ 2 Tagen	2	„	„	-	„	„
„ „ 3 „	4	„	„	2	„	„
„ „ 4 „	1	„	„	-	„	„
„ „ 5 „	1	„	„	-	„	„
„ „ 6 „	-	„	„	1	„	„
„ „ 7 „	1	„	„	-	„	„
Sa.	16	männl.	Geschlechts,	8	weibl.	Geschlechts.

Als Mittelgewicht für die Neugeborenen männlichen Geschlechts ergab sich 380, für die Neugeborenen weiblichen Geschlechts 353, doch ist auf diese Differenz bei der geringen Zahl der Fälle kein besonderer Werth zu legen.

Weitere Anhaltspunkte ergeben sich aus der Zusammenstellung der Gehirngewichte nach der Körperlänge (s. unten).

Von dem Anfangsgewicht an erfolgt nun eine ziemlich regelmässige Steigerung des mittleren Gehirngewichtes im Laufe des ersten Lebensjahres, so dass das Durchschnittsgewicht am Ende dieses Abschnittes

beim männlichen	Geschlecht	967 g,
beim weiblichen	„	893 „

beträgt.[1]) Dies entspricht einem wöchentlichen durchschnittlichen Zuwachs

um	ca.	11,5 g	beim	männlichen	Geschlecht,
„	„	10 „	„	weiblichen	„

Man würde aber sehr irren, wenn man annehmen wollte, dass diesem regelmässigen Ansteigen der Mittelgewichtszahlen auch eine annähernd ebenso regelmässige Zunahme der Einzelgewichte entspräche. Vielmehr zeigen sich hier sehr bedeutende, vom Alter ziemlich unabhängige Schwankungen, die sich der Hauptsache nach wohl nur dadurch erklären lassen, dass eben ein gewisser Procentsatz der Fälle theils frühreifen, theils von vornherein mangelhaft entwickelten, schlecht genährten und im Wachsthum zurückgebliebenen Kindern entstammt, die natürlich auch die Mittelzahlen der einzelnen Altersabschnitte je nach ihrer Zahl mehr oder weniger herabdrücken. Ein Blick auf die Tabelle II A und B zeigt die grosse Differenz der Minimal- und Maximalzahlen in den einzelnen Altersabschnitten, die keineswegs immer den jüngsten bezw. den ältesten Kindern entsprechen. Wir finden z. B. unter den Knaben von 6—12 Monaten ein Minimalgewicht (460 g bei einem Kinde von 9 Monaten), welches noch nicht einmal das Maximalgewicht der Kinder aus der ersten Lebenswoche (540 g) erreicht.

Am meisten machen sich diese Differenzen noch in den ersten 2—4 Wochen bemerklich, während bei Kindern von 1—6 Monaten das Ansteigen mit dem Lebensalter bereits deutlich hervortritt. Als Ergänzung der Tabelle II A und B füge ich folgende Mittelzahlen für die einzelnen Monate hinzu:

1) Diese Zahlen sind aus 5 Fällen von 11 Monaten und 4 Fällen von 1 Jahr für das männliche, aus 6 Fällen von 11 Monaten und 2 Fällen von 1 Jahr für das weibliche Geschlecht berechnet; die Zahl der Fälle ist also noch bei Weitem zu klein.

Tabelle 1.

	Männliches Geschlecht		Weibliches Geschlecht	
Kinder von 5—8 Wochen	(12): 445 g	min. 375 g max. 550 „	(10): 402 g	min. 345 g max. 495 „
„ „ 9—12 „	(16): 469 „	min. 385 „ max. 610 „	(14): 474 „	min. 395 „ max. 560 „
„ „ 3 Monaten	(12): 510 „	min. 385 „ max. 665 „	(2): 545 „	min. 520 „ max. 570 „
„ „ 3—4 „	(8): 558 „	min. 400 „ max. 685 „	(6): 572 „	min. 475 „ max. 710 „
„ „ 5 „	(7): 650 „	min. 515 „ max. 775 „	(7): 546 „	min. 475 „ max. 782 „
„ „ 6 „	(3): 698 „	min. 565 „ max. 790 „	(4): 681 „	min. 565 „ max. 805 „

Bei den Kindern von 7—12 Monaten treten die abnorm niedrigen Gewichte bereits so sehr zurück, dass die grosse Mehrzahl (13 von 17) der Kinder dieses Alters männlichen Geschlechts ein Gewicht von über 700 g besitzt; die höheren Gehirngewichte von 810—1205 g fallen sämmtlich auf Kinder von 11—12 Monaten. Auch unter den Kindern weiblichen Geschlechtes gehören die Gehirne von mehr als 800 g (bis 1000 g) mit wenigen Ausnahmen Kindern von 9—12 Monaten an. Die mangelhaft entwickelten, zu früh geborenen Kinder sind bis dahin grösstentheils abgestorben.

Vom Ablauf des ersten Lebensjahres ab erfolgt die Zunahme des Gehirngewichtes in sehr viel geringerem Maasse; doch lassen sich bei der viel zu geringen Zahl der Fälle keine genauen Zahlenangaben über das durchschnittliche Wachsthum in den einzelnen Lebensjahren machen. Das Mittelgewicht der Kinder männlichen Geschlechts von 4 Jahren ist z. B. etwas geringer als das der Knaben von 3 Jahren. Die schwache Zunahme der Mittelgewichte für die einzelnen Lebensjahre zeigt nur, dass das Wachsthum des Gehirns im Laufe des 2.—3. Lebensjahres bereits sehr viel langsamer ist, als im ersten, und dass vom 5. Lebensjahre an das Wachsthum nur noch sehr geringfügig ist. Bei Betrachtung der absoluten Gehirngewichte ergiebt sich denn auch, dass schon im Laufe des 4., noch mehr des 5. Lebensjahres Gewichte vorkommen, welche denen des erwachsenen Gehirns vollständig entsprechen; da aber noch immer ein grösserer Procentsatz von abnorm niedrigen Gewichten, d. h. in der Entwickelung zurückgebliebenen Gehirnen vorkommt, so wird das mittlere Gewicht herabgedrückt.

Von einigem Interesse ist es, die Hirngewichte von Geschwistern zu kennen, die unter den gleichen Umständen gestorben sind; ich erlaube mir daher hier folgende Fälle mitzutheilen.

1) 3 gemeinsam ertrunkene Geschwister (3. V. 1901):

Knabe	von $4\frac{1}{2}$ J.	88 cm Länge	Gewicht	= 1292 g
Mädchen	„ $3\frac{1}{2}$ „	83 „ „	„	= 950 „
„	„ 2 „	67 „ „	„	= 960 „

2) 3 gemeinsam durch Leuchtgas erstickte Brüder (21. XII. 1901):

Knabe	von $12\frac{1}{2}$ J.	133 cm Länge	Gewicht	= 1400 g
„	„ 8 „	121 „ „	„	= 1460 „
„	„ $4\frac{3}{4}$ „	100 „ „	„	= 1400 „

Bemerkenswerth ist im ersteren Falle das Hirngewicht des 2jährigen Mädchens, das noch 10 g höher war als das der $1\frac{1}{2}$ J. älteren Schwester, während das des nur 5 cm grösseren Bruders das der Letzteren um 342 g übertraf; im zweiten Falle ist das Gehirngewicht des 8jährigen Knaben 60 g schwerer als das seines $12\frac{1}{2}$jährigen Bruders, das des letzteren dagegen ebenso schwer wie das des $4\frac{3}{4}$jährigen Knaben. Alle 3 Gehirne waren ausserordentlich blutreich, die Marksubstanz mit stark gefüllten Venen, die graue Substanz überall dunkelgrauroth, die ganze Hirnsubstanz weich und feucht, am stärksten bei dem jüngsten Knaben. Diese Zahlen beweisen zugleich sehr deutlich, wie unsicher eine Schätzung des Hirngewichtes nach der Grösse und dem Alter im einzelnen Falle nur sein kann.

Für die Erlaubniss, diese Angaben zu benutzen, bin ich Herrn Prof. Kockel, der die Sectionen der Kinder ausführte, zu Dank verpflichtet.

Gewicht des erwachsenen Gehirns.

Die zweite und wichtigste Frage ist, zu welcher Zeit des Lebens das Gehirn seine definitive Grösse erreicht.

Um diese Frage zu beantworten, müssen wir natürlich die Gewichtsverhältnisse der späteren Altersstadien zum Vergleich heranziehen.

Das höchste mittlere Gehirngewicht fällt nach unserer Zusammenstellung (Tab. I) in die Zeit vom 15.—50. Lebensjahr; es beträgt für dieses Altersstadium ca. **1400** g (genau 1405 g) für das männliche, **1275** g für das weibliche Geschlecht.

Diese Zahlen können wir demnach als die Mittelgewichte des männlichen und des weiblichen Gehirns betrachten, mit dem Vorbehalt, dass dieselben zunächst nur für unser Beobachtungsmaterial, also im Wesentlichen für die hessische Bevölkerung gelten.

Genau genommen ist das mittlere Hirngewicht im 15.—17. Lebensjahre beim männlichen Geschlecht etwas niedriger als in der Altersklasse 18—20, doch hat dieser Umstand auf das mittlere Gehirngewicht des reifen Alters (bis zum 50. Jahre) keinen merklichen Einfluss. Das mittlere Hirngewicht, für das Alter von 15 bis über 80 Jahre berechnet, beträgt beim Manne 1388 g, beim Weibe 1252 g, ist

also merklich niedriger, und zwar in Folge der erheblichen Verminderung des Mittelgewichts im 8. Decennium beim Manne, im 7. und 8. beim Weibe. Es erscheint indess nicht gerechtfertigt, wie es gewöhnlich geschieht, diese letzteren Zahlen als die wahren Durchschnittsgewichte zu betrachten.

Betrachten wir nun die Zusammensetzung der mittleren Hirngewichte vom 2. Lebensjahre ab, so zeigt sich beim männlichen Geschlecht, dass schon im 4. Lebensjahre (also bei Kindern von 3—4 Jahren) in 4 von 10 Fällen Gehirngewichte vorkommen, die den erwähnten Durchschnittswerth des erwachsenen Gehirns übertreffen.

Tabelle 2.

Ein Hirngewicht von 1400 g und darüber haben:

Im	4. Lebensjahre	4	von	10	Fällen	=	40%
„	5. „	4	„	14	„	=	28%
„	6. „	5	„	10	„	=	50%
„	7.—10. „	9	„	23	„	=	39%
„	11.—15. „	8	„	24	„	=	32%
„	16.—18. „	6	„	16	„	=	37,5%
„	19.—20. „	16	„	21	„	=	76,2%
„	21.—30. „	62	„	111	„	=	55,8%
„	31.—40. „	34	„	66	„	=	51,5%
„	41.—50. „	41	„	86	„	=	47,6%
„	51.—60. „	46	„	98	„	=	47,9%
„	61.—70. „	28	„	64	„	=	43,7%
„	71.—84. „	6	„	31	„	=	19,3%

Tabelle 3.

Ein Hirngewicht von 1500 g und darüber haben:

Im	4. Lebensjahre	2	von	10	Fällen	=	20%
„	5. „	1	„	14	„	=	7%
„	6. „	0	„	10	„	=	0%
„	7.—10. „	3	„	23	„	=	12%
„	11.—15. „	2	„	24	„	=	8%
„	16.—18. „	1	„	16	„	=	6,2%
„	19.—20. „	5	„	21	„	=	23,3%
„	21.—30. „	27	„	111	„	=	24,3%
„	31.—40. „	13	„	66	„	=	19,7%
„	41.—50. „	21	„	56	„	=	23,2%
„	51.—60. „	15	„	97	„	=	15,4%
„	61.—70. „	7	„	64	„	=	10,9%
„	71.—84. „	3	„	31	„	=	9,6%

Also bis zum 18. Lebensjahre nur vereinzelt, von hier ab fast constant in 20—24% aller Fälle bis zum 50. Lebensjahre, später wieder in absteigender Zahl. Dabei ist zu berücksichtigen, dass die Procentzahlen in den 6 ersten Reihen wegen der zu geringen Zahl der Fälle kein ganz richtiges Bild geben, ferner dass in vielen dieser Fälle mit hohem Hirngewicht in den ersten Lebensjahren Todes-Ursachen vorhanden waren, die eine Steigerung des Gewichtes zur Folge zu haben pflegen; in 2 Fällen ist ausdrücklich Oedem des Gehirns angegeben, in 2 anderen Diphtherie, in 2 Fällen Osteomyelitis (s. oben). Andrerseits dürfte die Procentzahl für das 16.—18. Jahr zufällig zu niedrig sein. Uebrigens finden sich darunter noch 4 Fälle mit einem Gewicht zwischen 1450—1500 g.

Die erhebliche Zunahme der Gehirngewichte über 1400 und 1500 g vom 16.—18. Jahre ab erklärt sich nur durch ein noch andauerndes Gehirnwachsthum in dieser Altersperiode. Die Individuen, welche z. Z. ihres Todes im 16.—20. Lebensjahre ein Hirngewicht von 1500 g und mehr hatten, müssen natürlich in den nächstvorangegangenen Jahren grösstentheils ein solches zwischen 1400 und 1500 g gehabt haben. Wann das Wachsthum des Gehirns im einzelnen Falle thatsächlich aufhört, ist aus diesen Zahlen allein noch nicht sicher zu entnehmen, da aber über das 20. Lebensjahr hinaus keine irgendwie erhebliche Zunahme der Fälle mit einem Gewicht von mehr als 1500 g eintritt, so kann man mit ziemlich grosser Sicherheit behaupten, dass über das 20. Jahr hinaus ein weiteres Wachsthum kaum stattfindet, dass also bei der Mehrzahl das Gehirn seine Wachsthumsgrenze zu derselben Zeit erreicht, in welcher auch das Skeletwachsthum aufzuhören pflegt. Ausnahmen, auf die einige sehr hohe Gewichte nach dem 20. Jahre hindeuten, können selbstverständlich vorkommen.

Die verbreitete Annahme, dass das Gehirnwachsthum beim männlichen Geschlecht noch bis zum 30. Jahre, wenn auch langsam, fortdauert, gründet sich hauptsächlich darauf, dass das Mittelgewicht des 3. Decenniums etwas höher zu sein pflegt als das des vorausgehenden Quinquenniums. So ist es auch in unsern Tabellen. Berechnet man aber die Mittelgewichte der einzelnen Jahrgänge, so zeigt sich durchaus keine regelmässige Zunahme in den 20er Jahren (Tabelle 4).

Tabelle 4.

Alter	Fälle	Min.	Max.	Ueber 1450 g haben	Mittl. Gew.
15—16 Jahre	8	1305 g	1475 g	25%	1377 g
17 „	8	1130 „	1520 „	37,5%	1364 „
18 „	9	1295 „	1540 „	25%	1399 „
19 „	12	1400 „	1555 „	33,3%	1452 „
20 „	8	1065 „	1495 „	50%	1380 „
21 „	8	1112 „	1630 „	25%	1376 „
22 „	18	1285 „	1585 „	50%	1444 „
23 „	13	1170 „	1570 „	77%	1458 „
24 „	11	1300 „	1555 „	54,5%	1452 „
25 „	13	1265 „	1635 „	46%	1441 „
26 „	8	1145 „	1685 „	37%	1407 „
27 „	11	1250 „	1530 „	34,3%	1368 „
28 „	13	1290 „	1520 „	38,4%	1412 „
29 „	8	1203 „	1470 „	12,5%	1357 „

Das höchste Gewicht findet sich hier allerdings im 23. Lebensjahre, aber fast ebenso hoch ist es im 19., während im 20. und 21., dann wieder im 27. geringere Gewichte vorkommen. Man kann allerdings auch hier den Einwand machen, dass die Zahl der Einzelfälle in den einzelnen Jahrgängen zu gering ist. Immerhin zeigt auch die Zahl der hohen Hirngewichte (über 1450 g) vom 20. Jahre ab keineswegs eine annähernd gleichmässige Zunahme.

Tabelle 5.

Beim weiblichen Geschlecht ergeben sich ähnliche Verhältnisse bei Zugrundelegung der Mittelzahl 1275:

Im	4.	Lebensjahre	haben	über	1275 g	1	von	7	= 14%
„	5.—6.	„	„	„	„	5	„	16	= 31%
„	7.—10.	„	„	„	„	10	„	21	= 47,4%
„	11.—15.	„	„	„	„	3	„	14	= 21,4%
„	16.—20.	„	„	„	„	10	„	20	= 50%
„	21.—30.	„	„	„	„	26	„	49	= 53%
„	31.—40.	„	„	„	„	25	„	51	= 49%
„	41.—50.	„	„	„	„	25	„	57	= 43,8%
„	51.—60.	„	„	„	„	23	„	52	= 44,2%
„	61.—70.	„	„	„	„	7	„	33	= 21,2%
„	71.—72.	„	„	„	„	5	„	25	= 20%

Abgesehen von einer ungewöhnlichen (von Zufälligkeiten, Todes-Ursache etc. abhängigen) Zunahme der Procentzahl zwischen dem 7.—10. Lebensjahr und einer auffallenden Abnahme in der

nächsten Altersperiode beträgt die Zahl der das Mittel übertreffenden Hirngewichte in den Jahren von 15—40 ziemlich genau die Hälfte, um dann allmählich im 5. und 6. Decennium, stärker in den beiden folgenden, abzusinken. Die Abnahme in diesen beiden Decennien ist stärker als beim männlichen Geschlecht.

Das Gewicht von 1350 g würde für das weibliche Gehirn ungefähr (wenn auch nicht genau im Verhältniss) dem von 1500 g für das männliche entsprechen. Bis zum 7. Lebensjahr ist noch kein Fall mit diesem Gewicht verzeichnet; ebenso fehlt dasselbe im 7. und 8. Decennium.

Tabelle 6.

Ein Hirngewicht von 1350 g und mehr haben:

Im 7.—10.	Lebensjahr	5	von	21	Fällen	= 23,8%
„ 11.—15.	„	1	„	14	„	= 7%
„ 16.—20.	„	9	„	20	„	= 45%
„ 21.—30.	„	14	„	49	„	= 28,3%
„ 31.—40.	„	14	„	51	„	= 27,4%
„ 41.—50.	„	8	„	47	„	= 17%
„ 51.—60.	„	11	„	52	„	= 21,1%
„ 61.—70.	„	0	„	33	„	= 0%
„ 71.—82.	„	0	„	25	„	= 0%

Die beiden Steigerungen der Procentzahlen im 7.—10. und im 16.—20. Lebensjahre entsprechen den gleichen Steigerungen in der vorausgehenden Uebersicht. Abgesehen von Zufälligkeiten, die hier mitspielen können, spricht die verhältnissmässig grosse Zahl hoher Hirngewichte in den Jahren von 15—19 dafür, dass beim weiblichen Geschlecht die Grenze des Gehirnwachsthums in der Regel schon früher erreicht wird als beim männlichen Geschlecht. Dasselbe dürfte auch aus der Betrachtung der Mittelgewichte in dieser Altersklasse hervorgehen:

		Mittel	Min.	Max.
15—16jährige	(8)	1312 g	1200 g	1445 g
17—18 „	(7)	1285 „	1115 „	1420 „
19 „	(5)	1334 „	1095 „	1495 „

Im Allgemeinen können wir demnach annehmen, dass das Wachsthum des Gehirns beim männlichen Geschlecht im 20., beim weiblichen Geschlecht zwischen 16. und 18. Lebensjahre seinen Abschluss erreicht.

Der besseren Vergleichung wegen habe ich beim männlichen und weiblichen Geschlecht übereinstimmend als Wachsthumsgrenze das 16. Jahr angenommen, da thatsächlich die Differenz des mittleren Gewichts zwischen 16. und 20. Lebensjahr beim männlichen Geschlecht nur sehr gering ist. Das mittlere Gewicht der Altersklasse von 15—19 Jahren (1404 g) bleibt nicht hinter dem des 3. Decenniums zurück (s. Tab. II A); das mittlere Gewicht des Alters von 15—17 Jahren beträgt allerdings nur 1371 g, das des Alters von 18—19 Jahren dagegen 1427 g. Berechnet man das Mittelgewicht für das Alter von 18—49 Jahren, so ergiebt sich nur ein sehr wenig höherer Werth (1406,7 g), als der von uns mit Einrechnung des Alters von 15—17 Jahren angenommene (1404,8 g).

Obere Grenze des normalen Hirngewichtes.

a) Männliches Geschlecht. Die Grenze, über welche hinaus das Gehirn als abnorm gross und schwer zu bezeichnen ist, ist natürlich nicht absolut genau und nur mit Berücksichtigung aller Verhältnisse, die einen Einfluss auf die Vergrösserung des Gehirns haben können, zu bestimmen.[1] Im Allgemeinen kann man beim männlichen Geschlecht das Gewicht von 1600 g als dasjenige bezeichnen, welches nur selten überschritten wird. Unter unserem Material von 503 Männern über 15 Jahre waren 16 (= 3,1%) solcher Fälle.[2] Die Ueberschreitung kann auf einem ungewöhnlich gesteigerten Wachsthum beruhen, also zwar abnorm sein, ohne gerade pathologisch sein zu müssen. Dem entsprechend können auch die Funktionen solcher Gehirne normal sein. Ferner kann die Vergrösserung von einer der oben erwähnten Krankheiten oder Todes-Ursachen herrühren, also pathologisch sein; es ist aber nicht immer festzustellen, wieviel von der Vermehrung des Gewichtes auf die Todes-Ursache zu rechnen ist, denn das Gehirn kann abgesehen davon schon abnorm schwer gewesen sein. Jedenfalls müssen solche Gehirne bei der Durchschnittsberechnung ausgeschlossen werden (dahin gehören die Fälle von eitriger und tuberculöser Meningitis, Hirntumor, Hydrocephalus), während Gehirne ohne nachweisbare Veränderungen mit zu verwerthen sein würden.

Demgemäss habe ich die Mehrzahl der Gehirngewichte über 1600 g, welche in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellt sind, ausgeschieden, und nur diejenigen aufgenommen, bei welchen

1) Dass die Körpergrösse hierbei im Wesentlichen ausser Acht gelassen werden kann, wird weiter unten nachgewiesen; dasselbe geht schon aus einem Vergleich der Längenmaasse in den folgenden Tabellen hervor.

2) Dabei sind Gehirne mit grossen Blutungen schon ausgeschlossen; die Zahl 503 verringert sich durch Hinweglassung von 10 weiteren Fällen auf 493.

bestimmte Angaben über schwerere pathologische Veränderungen fehlten (Nr. 5, 7, 8, 13, 14, 15). Zur sichern Entscheidung würde in solchen Fällen ein Vergleich mit der Schädel-Capacität erforderlich sein. Immerhin ist das Vorkommen so hoher Hirngewichte in einer ganzen Reihe von Fällen von Interesse, selbst wenn ein Theil der Gewichtszunahme auf Blutfülle und seröse Durchtränkung zurückgeführt werden muss. In Zukunft sollten alle Fälle dieser Art möglichst genau auf pathologische Veränderungen untersucht werden.[1]) Das höchste von mir beobachtete Hirngewicht beim Manne, bei welchem Angaben über etwa vorhandenen Hydrocephalus int. fehlen, betrug 1705 g (leider ist der Kopfumfang nicht bekannt); einige andere Gewichte kommen diesem sehr nahe. (Ein Fall mit 1710 g wurde ausgeschieden, da die Wägung des hydrocephalischen Gehirns noch vor Eröffnung der Ventrikel stattgefunden hatte.)

Tabelle 7.

Hirngewichte von Männern von 15—82 Jahren über 1600 g.

Nr.	Alter	Grösse	Hirngewicht	Krankheit	Zustand des Gehirns	
1	16 J.	142 cm	1600 g	Meningitis cer. spin.	Ohne Angabe	Ausgeschieden
2	47 „	165 „	1605 „	Peritonitis perf.	dgl.	
3	33 „	177 „	1620 „	Tumor cerebri	Gliom des Splenium	dgl.
4	?	158 „	1620 „	Emphysem	Hydrocephalus int. chron.	dgl.
5	21 „	169 „	1630 „	Endocarditis	Venen der Dura sehr weit; Gehirnsubstanz ödematös	
6	57 „	172 „	1630 „	Schusswunde d. Pleura	Pia stark ödematös, blutreich; Hydrocephalus int.	dgl.
7	25 „	166 „	1630 „	Lymphoma mal.	Gehirn blass; pia m. nicht ödematös	
8	25 „	?	1635 „	Sepsis	Befund nicht angegeben	
9	29 „	177 „	1645 „	Meningitis purul.	dgl.	dgl.
10	58 „	176 „	1655 „	Sarkom der Orbita	Geschwulst in d. Schädelhöhle; Gehirn blutreich	dgl.
11	29 „		1660 „	Tumor cerebri	Glioma lobi front.	dgl
12	31 „	171 „	1665 „	Leptomeningitis chr.; Suicid. d. Erhängen	Gehirnsubstanz feucht; Ventr. etwas weit	dgl.
13	26 „	171 „	1685 „	Peritonitis ex perfor.	Gehirn ohne bes. Befund; Dura m. gespannt	
14	34 „	165 „	1695 „	Pericarditis tub.	mässiges Oedem der Pia mater	
15	53 „	166 „	1705 „	Exstirpatio carc. recti	Ohne nähere Angabe	
16	40 „	136 „	1710 „	Hydrocephalus int.	Ventrikel stark erweitert	dgl.

1) Für die freundliche nachträgliche Zusammenstellung der Angaben über den Gehirnbefund in diesen Fällen aus den Protokollen des pathologischen In-

Tabelle 8.

Hirngewichte von Knaben von 3—14 Jahren über 1450 g.

Nr.	Alter	Grösse	Hirn-gewicht	Krankheit	Zustand des Gehirns	
1	5 J.	105 cm	1455 g	Diphtherie		
2	4 „	95 „	1460 „	Pneumonie		
3	5 „	107 „	1465 „	Pneumonie		
4	6 „	107 „	1480 „	Glomerulonephritis		
5	13 „	146 „	1480 „	Pleuritis		
6	12 „	146 „	1485 „	Osteomyelitis		
7	5 „	110 „	1490 „	Diphtherie		
8	11 „	140 „	1500 „	Osteomyelitis		
9	11 „	140 „	1500 „	Broncho-Pneumonie		
10	4 „	95 „	1505 „ (1550)	Diphtherie	Pia mater ödematös; Gehirn sehr feucht und blutreich (45 g Flüssigkeit)	Ausgeschieden
11	3 „	97 „	1505 „	Diphtherie		
12	3 „	92 „	1520 „	Diphtherie		
13	6 „	115 „	1540 „		ödematös	
14	8 „	125 „	1540 „	Osteomyelitis	blass und ödematös; Schädel sehr dünn	
15	6 „	105 „	1575 „	Diphtherie		
16	13 „	149 „	1620 „	Osteomyelitis	kl. Bluterguss i. Hinterhauptlappen, Quellung in der Umgebung	dgl.
17	9 „	132 „	1705 „	Diphtherie	Hyperämie und Oedem der Pia mater; Gehirnsubst. weich u. feucht	dgl.

Bei Knaben von 3—14 Jahren kann man als die Grenze, welche nur selten überschritten wird, das Gewicht von 1500 g bezeichnen; immerhin betrug die Zahl der schwereren Gehirne 10 von 83 Fällen dieser Altersklasse = 12%. Gehirne von mehr als 1450 g Gewicht kamen in 17 Fällen vor = 20,4%. Unter diesen finden sich mehrere Fälle von Diphtherie (6), von Osteomyelitis (4), von Pneumonie und Pleuritis (4). Die Vermehrung des Gewichtes ist hier zum Theil jedenfalls auf seröse Durchtränkung der Hirnsubstanz zurückzuführen, die auch in mehreren Fällen ausdrücklich angegeben ist. Immerhin lassen sich diese Gehirne nicht von der Berechnung ausschliessen. Das höchste

stitutes in Marburg, die ich selbst wegen meiner Uebersiedelung nach Leipzig nicht mehr vornehmen konnte, bin ich Herrn Dr. Borrmann, I. Assistenten am pathologischen Institut in Marburg, zu besonderem Dank verpflichtet.

Gewicht bei einem 9jährigen Knaben betrug 1705 g; ich habe diesen Fall nicht mit in die Tabelle aufgenommen, da mir eine so ungewöhnliche Gewichtszunahme bei einem Kinde doch sicher pathologisch zu sein scheint.[1])

Es ist leider bis jetzt unmöglich zu sagen, wieviel die Zunahme des Gewichtes durch einfache Quellung der Hirnsubstanz, die im kindlichen Alter eine so grosse Rolle spielt, betragen kann.

b) Weibliches Geschlecht. Hier liegt die obere Grenze, die nur selten überschritten wird (in 6 von 287 Fällen = 2,09%), bei 1450 g. Das Gewicht von 1400 g wurde in unserem Material in 24 Fällen = 11,1% übertroffen, ohne dass gröbere Veränderungen nachweisbar waren.

Bei Kindern weiblichen Geschlechts von 3—14 Jahren wurde das Gewicht von 1350 g in 7 Fällen überschritten, darunter 3 von Diphtherie, 1 Fall von tuberculöser Meningitis, welcher ausgeschlossen wurde.

Tabelle 9.

Hirngewichte von Frauen über 1450 g.

Nr.	Alter	Grösse	Hirngewicht	Krankheit	Zustand des Gehirns
1	21 J.	164 cm	1450 g	Scarlatina	Ohne Angabe
2	36 „	164 „	1480 „	Carcinom	Ohne Angabe
3	19 „	162 „	1495 „	Carcinoma ovarii	Ohne Angabe; dünner schiefer Schädel
4	24 „	155 „	1500 „	Kystoma ovarii. Laparotomia	Pia m. stark ödematös
5	31 „	157 „	1510 „	Ovar. Tumor, Laparot.	Ohne bes. Befund, blutreich
6	26 „	162 „	1540 „	Phthisis	Ohne Angabe

Tabelle 10.

Hirngewichte von Mädchen von 3—14 Jahren über 1350 g.

Nr.	Alter	Grösse	Hirngewicht	Krankheit	Zustand des Gehirns
1	9 J.	103 cm	1350 g	Diphtherie	
2	8 „	117 „	1360 „	Diphtherie	
3	12 „	151 „	1375 „	Contusio cerebri	
4	6 „	114 „	1405 „	Diphtherie	Venöse Blutfülle; Pia und Gehirn ödematös
5	8 „	117 „	1410 „	Diphtherie	Gehirn feucht, blutreich
6	7 „	110 „	1415 „	Miliartuberculose	Ohne besonderen Befund
7	10 „	130 „	1470 „	Meningitis tuberc.	(Ausgeschieden)

1) S. darüber unten.

Untere Grenze des normalen Hirngewichtes.

a) Männliches Geschlecht. Das Gewicht von 1200 g wurde in 23 von 503 Fällen (4,58%) nicht erreicht; darunter ist eine Anzahl (6) jugendlicher, meist ausgewachsener Männer (Phthisiker), welche augenscheinlich in der Gehirnentwickelung zurückgeblieben waren, und sehr wahrscheinlich zu den von Geburt an schwächlichen (vielleicht vor der Reife geborenen) Individuen gehören. Bei der Mehrzahl der übrigen Fälle von mehr als 50 Jahren kommt neben demselben Umstand oder allein die senile Involution in Betracht. Doch ist diese ohne Berücksichtigung der Schädelcapacität und des Zustandes des Gehirns, über welchen genaue Notizen mir leider nicht vorliegen, nicht sicher abzugrenzen. Die Regel ist, dass derartige Gehirne die Schädelhöhle nicht ganz ausfüllen. Oft sind die Ventrikel erweitert, die weichen Häute ödematös.

b) Weibliches Geschlecht. Ein Gewicht von 1100 g wurde in 14 von 287 Fällen (6,6%) nicht erreicht, und zwar betrafen diese mit wenigen (5) Ausnahmen ältere Frauen, bei denen vorgeschrittene Involution als Ursache der Gewichtsverminderung anzunehmen ist.

Tabelle 11.

Gehirngewichte von Männern von 15—83 J. unter 1200 g.

Nr.	Alter	Grösse	Hirngewicht	Krankheit	Zustand des Gehirns
1	63 J.	178 cm	915 g	Pneumonie	Mikrocephalie geringen Grades
2	61 „	167 „	1010 „	„	(Ausgeschieden)
3	54 „	177 „	1020 „	„	
4	40 „	161 „	1025 „	Phthisis	
5	49 „	161 „	1040 „		Meningitis tub.
6	20 „	161 „	1065 „	„	
7	51 „	139 „	1085 „	Tuberculosis renis, Skoliose	
8	60 „	153 „	1092 „	Gonitis pur.	
9	19 „	171 „	1110 „	Phthisis	
10	57 „	160 „	1110 „	Emphysem	
11	21 „	170 „	1112 „	Phthisis	
12	17 „	142 „	1130 „	„	
13	47 „	180 „	1140 „	„	
14	73 „	161 „	1145 „	Emphysem	

Nr.	Alter	Grösse	Hirn-gewicht	Krankheit	Zustand des Gehirns
15	26 J.	159 cm	1145 g	Phthisis	
16	68 "	171 "	1160 "	"	
17	53 "	167 "	1170 "	Endocarditis	
18	57 "	158 "	1170 "	Pneumonie	
19	23 "	167 "	1170 "	Abscess. pulm.	
20	54 "	161 "	1175 "	Carcinoma	
21	55 "	156 "	1180 "	"	
22	38 "	173 "	1190 "	Peritonitis tub.	
23	67 "	163 "	1195 "	Phthisis	

Tabelle 12.

Hirngewichte von Weibern von 15—82 J. unter 1100 g.

Nr.	Alter	Grösse	Hirn-gewicht	Krankheit	
1	72 J.	143 cm	985 g	Carcinoma vesicae fell.	
2	47 "	126 "	1005 "	Poliomyelitis	
3	72 "	158 "	1025 "	Phthisis	
4	72 "	153 "	1030 "	Emphysem	
5	76 "	159 "	1030 "	Dysenterie	
6	63 "	155 "	1045 "	Endocarditis	
7	49 "	156 "	1045 "	"	
8	68 "	157 "	1080 "	Phthisis	
9	38 "	140 "	1085 "	Cholelithiasis	
10	56 "	144 "	1085 "	Endocarditis	
11	58 "	156 "	1085 "	Carcinoma	
12	62 "	161 "	1085 "	"	
13	29 "	156 "	1090 "	Phthisis	
14	36 "	160 "	1090 "	"	
15	29 "	156 "	1090 "	"	
16	63 "	155 "	1090 "	Pneumonie	
17	19 "	150 "	1095 "	Phthisis	
18	23 "	157 "	1095 "	Peritonitis	
19	73 "	148 "	1095 "	Pneumonie	

Die Tabellen II A und B geben die Uebersicht über die Gehirngewichte in dem Lebensalter von 0—83 Jahren in Stufen von je 50 g. In die horizontalen Linien sind die Einzelfälle für jedes Lebensalter eingetragen; die linke Hälfte enthält die Altersstufen der Wachsthumsperiode (bis zum 16. Lebensjahr), die rechte Hälfte die übrigen. Ferner sind die Mittelgewichte für jede Altersstufe, die Zahl der Fälle über und unter Mittel, die Minima und Maxima ersichtlich. In der Colonne 22 ist die Zahl der Fälle (der Erwachsenen) für jede Gewichtsstufe summirt, in der Colonne 23

sind diese Fälle in Procenten der Gesammtzahl berechnet. Das Gewicht der Mehrzahl der männlichen Gehirne (84%) liegt zwischen 1250 und 1550 g; Gewichte von 1200—1250 g (4,7%) sind noch an der Grenze des normalen (subnormal), solche von 1000—1200 g abnorm niedrig. Andrerseits sind Gehirne von 1550—1600 g (in 5,5% der Fälle) noch im Bereiche der Norm, solche über 1600 g aber im Allgemeinen als abnorm gross zu bezeichnen. Fast genau die Hälfte der Individuen (49,48%) hat ein Gehirngewicht über 1300—1450 g, fast ein Drittel (28,9%) ein Gewicht über 1450 g, die übrigen ein niedrigeres als 1300 g.

Beim weiblichen Geschlecht hat die Mehrzahl der Fälle (91%) ein Gehirngewicht von 1100—1450 g; Gewichte von 1050—1100 g (4%) sind noch an der Grenze des normalen, solche von 950—1050 g abnorm niedrig. Andererseits sind Gehirne von 1450—1550 g für das weibliche Geschlecht abnorm hoch. 55% haben ein Gewicht von 1200—1350 g, 20% ein Gewicht von 1350 g, die übrigen 25% ein geringeres Gewicht als 1200 g.

Aus der Tabelle ergiebt sich ferner die bereits erwähnte bemerkenswerthe Thatsache, dass die Abnahme des mittleren Gehirngewichtes beim männlichen Geschlecht erst nach dem 70. Lebensjahr deutlich hervortritt, während dies beim weiblichen Geschlecht schon nach dem 60. Jahre der Fall ist. Doch kommen in dieser Hinsicht individuell sehr grosse Verschiedenheiten vor.

Verhältniss des Hirngewichtes zur Körpergrösse.

Die Beziehungen zwischen Hirngewicht und Körpergrösse sind vielfach streitig gewesen.

Im Allgemeinen kann man von vornherein voraussetzen, dass einem grossen Körper auch ein grosses Gehirn entspricht und umgekehrt. Bei Thieren, wo innerhalb derselben Art im domesticirten Zustande bekanntlich sehr viel stärkere Grössenverschiedenheiten als beim Menschen vorkommen, erscheint es ganz selbstverständlich, dass grosse Thiere auch ein grösseres Gehirn als kleinere Thiere derselben Art haben (wenn auch vielleicht nicht genau in dem gleichen Verhältniss). Wir wissen aber nicht, ob diese Verschiedenheit auf einer numerischen Differenz oder auf einer einfachen Vergrösserung der einzelnen Elemente (z. B. der Markscheiden) beruht. Das Letztere ist wahrscheinlicher. Beim

Menschen, wo so enorme Verschiedenheiten der Grösse wie z. B. bei Hunden, nicht vorkommen, ist die Verschiedenheit der Grösse des Gehirns entsprechend der Körpergrösse bei weitem nicht so augenfällig und nur durch genaue Vergleiche festzustellen. Bei extremen Abweichungen, wie beim echten Zwergwuchs, ist die geringe Gehirngrösse ausser Zweifel.

Um jenes Verhältniss genauer zu untersuchen, sind natürlich die jugendlichen, noch im Wachsthum begriffenen Individuen von den Erwachsenen gesondert zu berücksichtigen. Die Ersteren sind in der Tabelle IV A und B nach der Körperlänge geordnet, und zwar von 44—60 cm in Abständen von je 2 cm, von 61—125 cm in Abständen von je 5 cm, darüber hinaus in solchen von 10 cm. Als Wachsthumsgrenze wurde das 20. Lebensjahr angenommen. Andrerseits konnten hier unter den Neugeborenen auch die noch nicht ausgetragenen Kinder von 38 resp. 40 cm berücksichtigt werden.

Es ergiebt sich hierbei zunächst die bemerkenswerthe Thatsache, dass das mittlere Gehirngewicht (für jede der erwähnten Abtheilungen gesondert berechnet) unabhängig vom Lebensalter, abgesehen von geringen Schwankungen fast constant — wenn auch nicht ganz gleichmässig — mit der Körperlänge zunimmt. Von einer Körperlänge von 90—100 cm ab werden die Schwankungen im Allgemeinen grösser, was z. Th. die Folge der verhältnissmässig geringen Zahl der Einzelfälle ist.

Innerhalb der einzelnen Stufen kommen ziemlich grosse Schwankungen der Einzelgewichte vor, wie eine Vergleichung der Minima und Maxima zeigt, aber keineswegs entsprechen die ersteren immer den jüngeren, die letzteren den älteren Individuen. Eine ganz regelmässige Progression des Gehirngewichtes je nach der Körperlänge ist nicht erkennbar; die Gewichtsdifferenz zwischen den einzelnen Stufen wechselt (bei Knaben) von 7,6—38,6 g pro cm. In den späteren Stadien bis zum Ende der Wachsthumsperiode ist eine regelmässige Zunahme überhaupt nicht nachzuweisen.

Für das weibliche Geschlecht gilt im Ganzen dasselbe wie für das männliche. Bis zu einer Körperlänge von 70 cm lässt sich noch keine erhebliche Differenz zwischen den beiden Geschlechtern erkennen; die Zunahme pro 1 cm wechselt in noch weiteren Grenzen als beim männlichen Geschlecht (5,5—62,5 g, später erheblich weniger, 1,4—15 g); von 70 cm ab lässt sich indess deutlich eine geringere Zunahme der Mittelgewichte er-

kennen, so dass dieselben ungefähr um 100 g hinter denen der gleichen Stufen beim männlichen Geschlecht zurückbleiben.

Um das Verhältniss des Hirngewichtes zur Körpergrösse bei Erwachsenen festzustellen, wurden zunächst die Hirngewichte der Individuen von 20—50 Jahren nach der Körpergrösse in Abständen von je 1 cm für sich geordnet, um den Einfluss der senilen Atrophie auszuschliessen; sodann in einer zweiten Tabelle (VI A. B) die Individuen von 50 bis über 80 Jahren, in einer dritten endlich alle Fälle von 20 bis über 80 Jahren zusammen (VII A. B).

Die Körpergrösse der Männer betrug 150—192 cm (1 Mann 139 cm), die der Weiber 140—174 cm (1 Weib von 180 cm, 2 von 126—135 cm). Als durchschnittliche Mittelgewichte für die Hauptgruppen von je 10 cm Zunahme ergeben sich für die:

Tabelle 13.

	Männer von 20—49 J.	von 50 bis über 80 J.	von 20 bis über 80 J.
bei 139—160 cm	(29) **1335** g;	(34) **1314** g;	(63) **1324** g;
„ 161—170 „	(136) **1405** „	(91) **1371** „	(227) **1391** „
„ 171—192[1] „	(90) **1422** „	(61) **1377** „	(151) **1404** „
Gesammtmittel[2]:	(255) **1404** „	(186) **1362** „	(441) **1387** „

	Frauen von 20—49 J.	von 50 bis über 80 J.	von 20 bis über 80 J.
bei 126—150 cm	(26) **1257** g;	(22) **1203** g;	(48) **1232** g;
„ 151—160 „	(88) **1261** „	(70) **1220** „	(158) **1243** „
„ 161—180 „	(41) **1302** „	(19) **1263** „	(60) **1290** „
Gesammtmittel:	(155) **1271** „	(111) **1224** „	(266) **1252** „

Aus dieser Uebersicht scheint unbestreitbar hervorzugehen, dass ein gewisses Ansteigen der mittleren Hirngewichte entsprechend den 3 Stufen der Körpergrösse sowohl beim männlichen als beim weiblichen Geschlecht stattfindet. Am deutlichsten ist das Ansteigen beim männlichen Geschlecht in der zweiten Grössenstufe (161—170 cm), während dasselbe in der 3. Stufe gegenüber der 2. nur sehr gering ist; und zwar gilt das sowohl von der Altersklasse von 20—49 Jahren, als besonders von der folgenden.

1) Die wenigen Individuen von mehr als 180 cm Grösse sind mit der vorhergehenden Gruppe vereinigt.

2) Die geringen Differenzen zwischen den Mittelzahlen dieser Uebersicht und denen der Tabelle I erklären sich aus der etwas verschiedenen Zahl der beiden zu Grunde liegenden Einzelfälle.

Beim weiblichen Geschlecht ist dagegen der Unterschied des Hirngewichtes in den beiden ersten Grössenstufen nur sehr gering, der Unterschied zwischen der 2. und 3. Stufe dagegen etwas stärker (durchschnittlich 40 g).

Betrachtet man aber die Mittelgewichte der einzelnen Körpergrössen, so zeigt sich, dass in der Altersklasse von 20—49 Jahren beim männlichen Geschlecht (V A) von einem regelmässigen Ansteigen nicht die Rede sein kann. Bemerkenswerth ist, dass bei einer Körpergrösse von 150—160 cm die Mittelgewichte die Zahl 1400 nirgends erreichen, während bei einer Grösse von 161—170 cm diese Zahl 6 mal, bei einer Grösse von 171—185 cm 7 mal überschritten wird. Die Vergleichung der Minima und Maxima zeigt ferner, dass Gehirngewichte unter 1200 g noch bis zu einer Körpergrösse von 170 cm vorkommen, während andererseits Gewichte über 1500 g auch schon bei Körpergrössen von 157—160 cm sich finden. Daraus geht jedenfalls hervor, dass ein irgendwie constantes Verhältniss zwischen Körpergrösse und Hirngewicht beim männlichen Geschlecht nicht existirt.

Beim weiblichen Geschlecht zeigt sich in derselben Altersklasse (20—49 Jahr) eine geringe Zunahme der Mittelgewichte innerhalb der ersten Gruppe von 126—150 cm; die Zahl 1275 wird hier nur 2 mal erreicht; in den beiden folgenden Gruppen ist ein regelmässiges Ansteigen nicht nachweisbar; bei einer Grösse von 151—160 cm wird die Zahl 1275 5 mal, in der folgenden 4 mal überschritten. Einzelgewichte unter 1100 g kommen noch bis zu einer Grösse von 163 cm vor, während andererseits solche über 1400 g schon bei einer Körpergrösse von 146—149 cm gefunden werden.

In der folgenden Altersklasse (50 bis über 80 Jahr, Tab. VI) kommen beim männlichen Geschlecht in der Grössenstufe 150 bis 160 cm noch keine Mittelgewichte von 1400 g vor, in der nächsten Stufe wird dies Gewicht nur 3 mal, in der folgenden nur 2 mal überschritten. Einzelgewichte unter 1100 g finden sich noch bei einer Grösse von 177 cm, andrerseits solche von mehr als 1500 g schon bei einer Grösse von 150—155 cm.

Beim weiblichen Geschlecht ist eine einigermaassen constante Steigerung der Mittelgewichte ebenfalls nicht wahrnehmbar; das Gewicht von 1275 g wird überhaupt nur 1 mal (bei 162 cm Grösse) überschritten; niedrige Einzelgewichte unter 1100 g kommen noch

bei 161 cm Grösse vor, Gewichte über 1400 g sind nur selten vorhanden.

Tabelle VII A und B giebt die Durchschnittswerthe der beiden vorhergehenden, also im Wesentlichen dieselben Verhältnisse. Die in der Uebersicht p. 415 hervortretende Steigerung des mittleren Gehirngewichts in den einzelnen Grössenstufen ist thatsächlich wesentlich von der Gruppirung der Zahlen abhängig. Berechnet man z. B. die mittleren Gewichte für die Grössenstufe 156—165 cm und 166—175 cm bei Männern, für die Stufe 146—155 cm und 156—165 cm bei Frauen, so ergeben sich sehr viel geringere Differenzen; für die Männer von 15—49 Jahren erhalten wir dann die mittleren Gewichte von 1380 und 1418 g, für die Frauen von 1281 und 1284 g.

Das verhältnissmässig niedrige Mittelgewicht der Grössenstufe 150—160 cm beim männlichen, der Stufe 126—145 cm beim weiblichen Geschlecht lässt sich zum Theil dadurch erklären, dass hier eine grössere Zahl von Individuen vorkommt, die in ihrer ganzen körperlichen Entwickelung zurückgeblieben sind, während die gleichmässige Verminderung der Mittelgewichte in der höheren Altersstufe sehr deutlich auf den Einfluss der erworbenen, in den späteren Jahren eintretenden Atrophie des Gehirns hinweist.

Das relative Hirngewicht im Verhältniss zur Körpergrösse, d. h. die Zahl der Gramme auf je 1 cm Körperlänge ist bei den so unregelmässig wechselnden Mittelgewichten ein sehr inconstanter Faktor, der für den erwachsenen Mann ca. 7,7—8,8 g, für das Weib ca. 7,6—8,0 g beträgt. Für das höhere Alter ist dieses relative Gewicht wegen des durchschnittlich geringeren mittleren Hirngewichtes etwas geringer als für das Alter von 20—50 Jahren; der Unterschied zwischen dem relativen Gewicht bei geringer und bei bedeutender Körpergrösse ist sehr geringfügig und so wenig regelmässig, dass ich auf die ausführliche Angabe in den Tabellen verzichtet habe.

Verhältniss des Hirngewichtes beim männlichen und weiblichen Geschlecht.

Es ergiebt sich nun mit Rücksicht auf die Beziehungen von Körperlänge und Gehirngewicht die wichtige Frage, wie sich das Gewicht des weiblichen Gehirns zu dem des männlichen verhält.

Nach einer verbreiteten Anschauung ist die geringere Grösse des weiblichen Gehirns hauptsächlich oder gar allein auf die geringere Körperlänge des Weibes zurückzuführen. Ein Blick auf die Tabellen V—VII zeigt ohne Weiteres, dass diese Anschauung nicht richtig ist.

Bereits bei Gelegenheit des wachsenden Gehirns wurde hervorgehoben, dass bei Kindern von gleicher Grösse bis zu 70 cm Körperlänge eine Verschiedenheit der Mittelgewichte zwischen beiden Geschlechtern noch nicht klar hervortritt, dass aber darüber hinaus das Gehirnwachsthum der Kinder weiblichen Geschlechts immer deutlicher hinter dem beim männlichen Geschlecht zurückbleibt.

Dem entsprechend finden wir auch bei erwachsenen weiblichen Individuen geringere Gehirngewichte als bei Männern der gleichen Grösse.

Ein direkter Vergleich ist allerdings nur für die Maasse von 150—169 cm, oder besser von 156—168 cm möglich, die bei beiden Geschlechtern durch eine grössere Zahl von Fällen vertreten sind. Aus der Gegenüberstellung der gleichen Maasse ergiebt sich, dass die mittleren Gewichte für jede Körperlänge beim weiblichen Geschlecht ohne Ausnahme hinter dem beim männlichen Geschlecht erheblich zurückbleiben, und zwar beträgt die Differenz zwischen beiden 44—203 g, welchselt also in sehr weiten Grenzen.

Natürlich ist auch hier in Betracht zu ziehen, dass die Mittelgewichte nur dann einen gewissen Werth haben, wenn sie aus einer grossen Zahl von Einzelfällen berechnet sind, was für die Weiber von mehr als 164 cm Länge kaum mehr zutrifft. Demgemäss sind auch hier die Schwankungen der einzelnen Mittelgewichte grösser. Zweifellos ergiebt aber der Vergleich, dass die Männer ein im Durchschnitt erheblich höheres Hirngewicht haben als die Weiber gleicher Grösse, dass demnach das geringere Hirngewicht beim weiblichen Geschlecht nicht von der geringeren Körperlänge abhängt. Dieses Ergebniss stimmt ganz überein mit der von W. Pfitzner an einem grossen Material ermittelten Thatsache, dass bei gleicher Statur das Weib einen kleineren Kopfumfang hat als der Mann.[1])

---

1) Socialanthropologische Studien. II. Der Einfluss des Geschlechts auf die

Abgesehen von der Körperlänge kann die gesammte Körpermasse eine Beziehung zu dem Gehirngewicht haben, und man könnte daher auch die geringere Grösse des weiblichen Gehirns durch die geringere Körpermasse des Weibes erklären. Die genauere Untersuchung dieses Verhältnisses würde in erster Linie Bestimmungen des Körpergewichtes und seines Verhältnisses zur Körpergrösse erforderlich machen, über die wir nicht verfügen. Es wurde bereits oben bemerkt, dass Bestimmungen des Körpergewichtes am Leichenmaterial keine zuverlässigen Werthe liefern können. Aber selbst wenn man von normalen Durchschnittsgewichten ausgeht, kann man sich schwer vorstellen, welche von den Faktoren, die hauptsächlich das Körpergewicht beeinflussen, eine nähere Beziehung zum Hirngewicht haben können. Das Skelet allein schwerlich (wie aus dem Verhältniss vom Hirngewicht zur Körpergrösse hervorgeht); das Fettgewebe, welches eine so erhebliche Bedeutung für das Körpergewicht hat, noch weniger, da es ein ganz wechselnder Faktor ist; die Muskulatur ebenfalls kaum, da die Masse derselben zu sehr von rein accidentellen Einwirkungen abhängt. Ein bestimmtes Verhältniss zwischen Gehirngewicht und der Gesammtmasse der inneren Organe dürfte sich ebenfalls schwer feststellen lassen. Gewisse Beziehungen zwischen dem Gehirn und einzelnen Organen mögen vorhanden sein, ohne dass dieselben einer Deutung zugänglich sind; ich erinnere an die merkwürdige Thatsache einer abnormen Kleinheit der Nebennieren bei rudimentärer Entwickelung des Gehirns (Anencephalie). Da die Geschlechtsverschiedenheit zweifellos von Einfluss auf die Gehirn-Entwickelung und das Gehirngewicht ist, so könnte man bestimmte Beziehungen zwischen diesem und der Entwickelung der Genitalorgane suchen, die sich z. B. bei rudimentärer Entwickelung der letzteren, bei Pseudohermaphroditismus und ähnlichen Zuständen ergeben würden. Indess ist hierfür schwerlich ausreichendes Beobachtungsmaterial zu erhalten. Es ist ferner wohl denkbar, dass eine frühzeitige Beseitigung der Geschlechtsdrüsen einen gewissen Einfluss auf die Entwickelung und Grösse des Gehirns ausübt, ebenso wie auf andere secundäre Geschlechts-Charaktere. Zweifellos muss die

anthropologischen Charaktere. Zeitschr. f. Morphologie und Anthropologie. Bd. III. 3. 1901.

stärkere Grössenentwickelung des Gehirns beim männlichen, die geringere beim weiblichen Geschlecht schon auf einer sehr frühen Entwickelungsstufe durch die Anlage der Genitaldrüsen vorausbestimmt werden, wenn auch spätere Einwirkungen nicht ohne Einfluss auf die weitere Entwickelung sind. Die geringere Grösse des Gehirns beim weiblichen Geschlecht ist eben der Ausdruck einer andern Organisation des weiblichen Körpers, an der sich das Gehirn ebenso wie andere Organe betheiligt. Sie ist vielleicht, bei sonst ganz gleichartiger Beschaffenheit, nur durch eine grössere Feinheit der markhaltigen Fasern bedingt, doch entzieht sich eine solche dem direkten Nachweis durch das Mikroskop.

An die Ergebnisse der eigenen Untersuchung mögen hier einige Vergleiche mit den Resultaten anderer Beobachter angeschlossen werden.

Zu den älteren Zusammenstellungen einer grösseren Zahl von Gehirnwägungen, unter denen besonders die von R. Boyd, Bischoff, Vierordt zu erwähnen sind, ist neuerdings noch diejenige von G. Retzius (450 Männer und 250 Frauen) hinzugetreten. Die übrigen, auch von den letztgenannten Autoren im Einzelnen angeführten und benutzten Arbeiten über den Gegenstand verfügen meist über ein zu geringes Material.

Die von den einzelnen Autoren berechneten Mittelgewichte des Gehirns von 20—80jährigen Europäern wechseln daher in ziemlich weiten Grenzen, was abgesehen von dem angegebenen Uebelstand durch Rasseverschiedenheiten bedingt sein kann.

Nach der Zusammenstellung von Vierordt (l. c. S. 53) schwanken die Angaben für das Mittelgewicht bei Männern zwischen 1265 g (Weisbach, Gewicht ohne Gehirnhäute) und 1461 g[1]) (Krause); bei Weibern zwischen 1112 g (Weisbach) und 1341 g[1]) (Krause). Vierordt berechnet daraus als Mittelgewicht für Europäer **1358** g (Männer) und **1235** g (Weiber); Differenz 123 g. Boyd fand für Engländer 1325 g (Männer) und 1183 g (Frauen); Bischoff für Bayern 1362 g (Männer) und 1219 g (Weiber); Retzius für Schweden

1) Offenbar zu hoch in Folge zu geringer Zahl der Fälle.

als Mittelgewicht von 450 männlichen Gehirnen 1399 g, von 250 weiblichen Gehirnen 1248 g[1]); MARCHAND für die hessische Bevölkerung 1388 g (Männer) und 1252 g (Weiber). Wie man sieht, differiren auch diese aus grossen Zahlen gewonnenen Mittelgewichte noch recht bedeutend:

für die Männer zwischen 1325 und 1399 g,
„ „ Weiber „ 1183 „ 1252 g.

Ich habe bereits oben ausgeführt, dass es nicht ganz richtig ist, das durchschnittliche Mittelgewicht des Gehirns für die gesammte Altersklasse von 20—80 Jahren zu berechnen, da hierbei die senile Involution eine grosse Rolle spielt. Enthält das Material eines Beobachters eine grosse Zahl von Fällen aus dem höheren Alter, so wird dadurch die Mittelzahl erheblich herabgedrückt. Es ist dies also ebenso unrichtig, wie eine Durchschnittsberechnung aus halb erwachsenen und erwachsenen Individuen. Um möglichst sichere Werthe für das Mittelgewicht des erwachsenen Gehirns zu erhalten, ist es nothwendig, die senilen Gehirne zu trennen.

Berechnet man das „wahre Mittelgewicht“ nach den Tabellen von BISCHOFF, so erhält man für das Alter von 17—49 Jahren

für Männer: 1366 g,
„ Weiber: 1235 g (15—49 J.),

also Werthe, die nicht unbeträchtlich hinter den unsrigen zurückbleiben. Als Mittelgewicht für das Alter von 50—80 Jahren ergiebt sich für Männer 1347 g, für Weiber 1176 g.

Aus den Tabellen von RETZIUS erhält man als wahres Mittelgewicht

für Männer 1409,7 g,
„ Weiber 1270 g,

Zahlen, die mit den unserigen fast ganz übereinstimmen; für das Alter von 50—80 Jahren:

für Männer 1372 g,
„ Weiber 1232 g.

1) Genauer, aus der Summe der Einzelgewichte berechnet, 1396 g und 1254 g.

Ein Vergleich der Mittelgewichte der einzelnen Altersklassen ergiebt

Tabelle 14.

Für Männer	nach Boyd	Bischoff	Retzius[1])	Marchand	Tigges[2])
von 20—30 J.	1358 g	1396 g	1434 g	1416 g	1378 g
„ 30—40 „	1366 „	1365 „	1412 „	1390 „	1354 „
„ 40—50 „	1348 „	1366 „	1388 „	1401 „	1358 „
„ 50—60 „	1345 „	1375 „	1392 „	1371 „	1370 „
„ 60—70 „	1315 „	1323 „	1349 „	1370 „	1377 „
„ 70—80 „	1290 „	1279 „	1340 „	1329 „	1333 „
„ über 80 „	1284 „				
Für Weiber					
von 20—30 „	1239 „	1234 „	1279 „	1293 „	1258 „
„ 30—40 „	1222 „	1233 „	1268 „	1267 „	1242 „
„ 40—50 „	1214 „	1240 „	1246 „	1260 „	1263 „
„ 50—60 „	1225 „	1200 „	1237 „	1260 „	1245 „
„ 60—70 „	1210 „	1178 „	1244 „	1215 „	1262 „
„ 70—80 „	1170 „	1121 „	1195 „	1159 „	1210 „
„ über 80 „	1127 „				

Diese Reihen sind im Ganzen ziemlich übereinstimmend, und zwar fällt das Maximum (mit einer kleinen Abweichung für die Männer bei Boyd) auf das Alter zwischen 20 und 30 Jahren. Wir sahen aber, dass das gleiche Gewicht schon in den Jahren von 17—20 beim Manne, von 15—20 beim Weibe erreicht wurde. Kleine Schwankungen in den folgenden Altersstufen kommen nicht in Betracht. Eine deutliche Abnahme fällt bei Boyd und Bischoff schon in das 7. Decennium, nach unserer Zusammenstellung erst in das 8., beim Weibe übereinstimmend in das 7. Decennium. In der nach den Tabellen von Retzius berechneten Uebersicht ist das verhältnissmässig hohe Mittelgewicht für das Alter von 20—30 Jahren beim männlichen Geschlecht auffallend, welches auf relativ zahlreichen Fällen von sehr hohem Hirngewicht beruht. Andererseits ist das Absinken des Gewichts beim Manne schon im 7. Decennium, beim Weibe erst im 8. Decennium etwas ungewöhnlich. Das sind kleine Unregelmässigkeiten, die im Bereiche des Zufalls liegen.

1) Nach dessen Tabellen berechnet.

2) 123 geisteskranke Mecklenburger Männer und 127 Frauen; unter den ersteren im 4. und 5. Decennium viele Paralytiker.

Die Angaben über das Gehirngewicht der Neugeborenen gehen noch immer ziemlich erheblich auseinander, was z. Th. an der etwas willkürlichen und daher nicht übereinstimmenden Abgrenzung des Begriffes „Neugeboren“, z. Th. an der zu geringen Zahl der Fälle liegt.

R. Boyd unterschied Ebengeborene (d. h. vermuthlich reife Todtgeborene) und Neugeborene, also Lebendgeborene, die in den ersten Tagen starben. Unter diesen befanden sich aber, wie aus den Minimalzahlen hervorgeht, augenscheinlich nicht ausgetragene Foeten, die vielleicht kurze Zeit nach der Geburt noch gelebt hatten, vielleicht auch Missbildungen. So beträgt das Minimalgewicht für die männlichen Kinder dieser Gruppe 170 g, für die weiblichen sogar 46,7 g. Selbstverständlich wird dadurch die Mittelgewichtszahl ungebührlich herabgedrückt, während die Zahl für die Ebengeborenen verhältnissmässig hoch erscheint. Sie beträgt für die (43) Knaben: 393 g (max. 623,4 g, min. 342,0 g), für die (31) Mädchen: 347,2 g (max. 428,6 g, min. 226,8 g). Das mittlere Gehirngewicht der „Neugeborenen“ dagegen betrug für (42) Knaben: 330,7 g, für (39) Mädchen: 283,5 g.[1])

Buhl[2]) berechnet (aus 52 Fällen von Neugeborenen bis zu 3 Wochen) für Knaben 356 g, für Mädchen 344 g; Bischoff[3]) für 12 Knaben 367 g, für 12 Mädchen 396 g. Bischoff hebt selbst hervor, dass die Zahl der Beobachtungen zu gering ist. Weitere Gewichtsbestimmungen von 9 Knaben von 1—8 Tagen ergaben im Durchschnitt 390 g; von 7 Mädchen 375 g. Zieht man diese beiden Gruppen zusammen, so erhält man für Knaben aus der ersten Lebenswoche ein Mittelgewicht von 377,2 g; für Mädchen ein solches von 386,5 g. Immerhin weist auch hier das höhere Gewicht bei den Mädchen noch auf etwas abnorm hohe Einzelgewichte. Vierordt berechnet aus 36 Fällen für Knaben ein Gewicht von 381 g; für Mädchen (38 Fälle) 384,2 g. Mies fand als Mittelgewicht von 203 Fällen (grösstentheils aus der Literatur) 339,3 g, für Knaben (79 Fälle) 339,2 g, für Mädchen (69 Fälle) 329,9 g, also erheblich niedrigere Werthe. Die von mir für Kinder aus der ersten Lebenswoche gefundenen Zahlen betrugen 371 g

1) Ziehen, l. c. S. 357, führt nur diese letzteren Zahlen an, während die ersteren offenbar die richtigeren sind.

2) Nach Bischoff, l. c. S. 47.

3) l. c. S. 55.

(männlich) und 361 g (weiblich), doch ist die zu Grunde liegende Zahl der Einzelwägungen noch zu gering.

Die Zunahme des Gehirngewichtes in der Wachsthumsperiode ist durch Boyd, Vierordt, Parrot[1]), Mies[2]), Pfister untersucht worden mit dem im Ganzen übereinstimmenden Resultat, dass das Gehirn beim männlichen Geschlecht stärker an Gewicht zunimmt, als beim weiblichen, und zwar ist sein Gewicht am Ende der ersten ¾ Jahre ungefähr verdoppelt, am Ende des 3. Lebensjahres ungefähr verdreifacht. Die Zunahme erfolgt allmählich immer langsamer bis zum Ende der Wachsthumsperiode.

Tabelle 15.

Alter	Kinder männlichen Geschlechtes					Kinder weiblichen Geschlechtes				
	Boyd	Parrot	Vierordt	Pfister	Marchand	Boyd	Parrot	Vierordt	Pfister	Marchand
	g	g	g	g	g	g	g	g	g	g
Neugeboren	393		381		371	347		384		361
1 Monat	493	(364)	464	(455)	411	452	(331)	402	(379)	375
2—3 Monate		490	549	(515)	474		412	527	(514)	450
4—6 „	603	575	632	(573)	612	560	552	575	(566)	587
7—12 „	777	778			796	709	719			802
1 Jahr			944	(832)	967			872	(690)	893
1—2 Jahre	941	964		977	1011	845	913		(913)	896
2 „			1025					960		
2—3 „					1080					1099
3 „	1097	1167	1108	1150		991	1063	1040	1025	
3—4 „					1310					1024
4 „			1330					1138		
4—5 „					1273					1183
5 „	1140	1261	1263			1137	1137	1220		
5—6 „					1343					1245
6 „			1359					1264		
6—9 „	1304				1360	1156				1242
10—14 „				(1280)	1346				(1265)	1221
15—19 „	1376				1404	1246				1309

In obenstehender Tabelle sind die Ergebnisse der Autoren übersichtlich zusammengestellt. Sie lassen sich nicht sämmtlich genau mit einander vergleichen, da die gewählten Zeitabschnitte nicht immer genau dieselben sind. Besonders gilt dies von den Zahlen Pfister's, welche in Klammern gesetzt wurden. Im Allgemeinen zeigt sich eine ziemlich erfreuliche Uebereinstimmung, die aller-

1) Nach Mittheilungen von Jeanne Bertillon.

2) Leider wurde der Verfasser ebenso wie Parrot durch frühzeitigen Tod an der ausführlichen Mittheilung seiner Untersuchungen verhindert.

dings durch kleinere Unregelmässigkeiten, hauptsächlich in Folge zu geringer Zahl der Fälle in den einzelnen Lebensjahren, unterbrochen wird. Die grösste Zahl eigener Wägungen von Gehirnen von Kindern von 0—6 Jahren hat Parrot gesammelt (968 Fälle).[1])

Die Ansichten darüber, wann das Wachsthum des Gehirnes abgeschlossen ist, gehen merkwürdig weit auseinander. Waren doch einige Autoren der Ansicht, dass das Maximum des Gehirngewichtes erst im 4., ja sogar erst im 5. Decennium (Sims) erreicht werde. Während dies als zweifellos irrig zu bezeichnen ist, wird von Anderen das Ende der Wachsthumsperiode auf ein zu frühes Alter verlegt. Nach Bischoff ist aus den Tabellen „mit Sicherheit" zu ersehen, dass das Maximum des Gehirngewichtes bei Männern im 20. Lebensjahre noch nicht erreicht ist, wohl aber bei den Weibern, während es bei jenen erst zwischen 20 und 30 Jahren eintritt (l. c. p. 63). Nun beträgt allerdings das Mittelgewicht von 16 Männern von 17—19 Jahren bei Bischoff 1340 g, das der 20—21 jährigen 1396 g; doch ist hieraus noch keineswegs eine Zunahme des Wachsthums in dieser Altersklasse zu erschliessen, denn unter der an sich zu geringen Zahl 16 finden sich relativ viel niedrige Einzelgewichte. R. Boyd fand für das Alter von 14—20 Jahren ein etwas höheres Gewicht (1376 g) als für das von 20—30 Jahren. Man kann indess aus einer geringen Zu- oder Abnahme des Mittelgewichtes einer Altersklasse nicht bestimmte Schlüsse ziehen, besonders wenn die Zahl der Fälle nicht sehr gross ist. Noch weniger ist dies natürlich statthaft für die Mittelgewichte einzelner Lebensjahre. Wenn z. B. Mühlmann[2]) lediglich auf Grund der einen höchsten Mittelzahl der Vierordt'schen Tabelle für das Gehirn des 15 jährigen Knaben (1490,2 g) annimmt, dass das Gehirn beim Manne mit dem 15. Jahre sein höchstes Gewicht erreiche und von da ab constant abnehme (ohne zu berücksichtigen, dass jene Zahl lediglich aus 3 Einzelfällen ermittelt ist), so ist das eine ganz willkürliche Behauptung.

Ich habe oben bereits nachzuweisen versucht, wie man aus der Vertheilung der hohen Hirngewichtszahlen innerhalb der einzelnen Altersklassen mit ziemlich grosser Sicherheit den Schluss

1) Die in der Tabelle wiedergegebenen mittleren Gewichte sind aus 374 Fällen berechnet (s. Tabelle 2, l. c. S. 150).

2) Ueber die Ursache des Alters, 1900. S. 153.

ziehen kann, dass das Hirngewicht beim Manne sein Maximum in der Regel am Ende der Wachsthumsperiode, d. h. zwischen 19. und 20. Lebensjahre, beim Weibe schon mit dem 16. bis 18. Jahre erreicht, und dass von da ab das Gehirngewicht im Wesentlichen constant bleibt, bis die senile Atrophie beginnt.

Das Verhältniss des Hirngewichtes zur Körpergrösse bei Erwachsenen ist recht verschieden beurtheilt worden, grösstentheils in Folge einer zu geringen Zahl der Einzelfälle.

Nach Bischoff scheint es auf Grund der nach der Grösse geordneten Zusammenstellung von 390 männlichen und 266 weiblichen Gehirnen „durchaus keinem Zweifel zu unterliegen, dass mit der Körpergrösse im Allgemeinen bei beiden Geschlechtern das Hirngewicht zunimmt“ (l. c. S. 43). Doch soll dieser Einfluss der Körpergrösse auf das Hirngewicht erst bei sehr grossen Zahlen hervortreten. Andererseits sollen nach Bischoff kleinere Individuen ein relativ schwereres Gehirn besitzen, als grosse. Diese beiden Sätze widersprechen sich theilweise, denn wenn das Gehirn entsprechend der Körpergrösse zunähme, müsste das relative Hirngewicht das gleiche bleiben. Bleibt aber das Hirngewicht im Wesentlichen dasselbe für die verschiedenen Grössen, so würden natürlich die kleineren Individuen ein relativ schwereres Gehirn haben, als die grösseren. Bischoff macht selbst darauf aufmerksam, dass sich bei jeder Körpergrösse die verschiedensten Hirngewichte finden, dass beispielsweise unter den 4 grössten Weibern 3 zufällig sehr geringe Gehirngewichte hatten.

Die Bischoff'sche Tabelle scheint allerdings auf den ersten Blick für eine annähernd regelmässige Zunahme des Gehirngewichtes mit der Grösse zu sprechen:

Männer	Hirngewicht	Weiber	Hirngewicht
von 145—149 cm	1307 g	von 132—134 cm	1214 g
„ 150—159 „	1339 „	„ 140—149 „	1197 „
„ 160—164 „	1341 „	„ 150—155 „	1208 „
„ 165—169 „	1355 „	„ 156—159 „	1215 „
„ 170—179 „	1389 „	„ 160—169 „	1290 „
„ 180—187 „	1375 „	„ 174—184 „	1253 „

Für die Männer ist indess eine merkliche Zunahme nur für die Stufen 150—159 und 170—179 gegenüber der vorhergehenden erkennbar, für die Weiber für die Stufe 160—169. Zerlegt man aber diese Stufe in zwei, von 160—163 und von 164—169,

so ergiebt die Rechnung für die erstere 1314, für die letztere 1242, also eine erhebliche Abnahme. Wie man sieht, spielen auch hier Zufälligkeiten eine grosse Rolle.

Tigges spricht sich ebenfalls dafür aus, dass mit der grösseren Körperlänge ein höheres Hirngewicht einhergeht, doch sind seine eigenen Zahlen, besonders für die Männer, nicht sehr beweiskräftig (14 Fälle von 151—160 cm 1362 g; 23 Fälle von 161—170 cm 1356 g; 21 Fälle von 171—180 cm 1389 g; doch finden sich unter den Fällen von 161—170 cm 11 Paralytiker). Bei den weiblichen Individuen ist die Reihe regelmässiger ansteigend (24 Frauen von 141—150 cm 1232 g; 33 Frauen von 151—160 cm 1255 g; 18 Frauen von 161—170 cm 1293 g), immerhin sind die Zahlen nicht gross und eine Trennung nach dem Alter ist nicht durchgeführt.

Das relative Gehirngewicht, im Verhältniss zur Körperlänge, nimmt nach Tigges mit zunehmender Körperlänge ab. Bischoff hat ebenfalls eine sehr regelmässige Abnahme des relativen Hirngewichtes von 8,7 g bei 150 cm bis auf 7,1 g bei 190 cm bei Männern, von 8,7 g bei 140 cm bis auf 6,8 g bei 184 cm bei Weibern berechnet, und daraus den oben erwähnten Schluss gezogen (l. c. S. 45). Leider ist aber die Berechnung Bischoff's nicht ganz einwandfrei, z. Th. geradezu unrichtig.

Unter den neueren Autoren, die sich für ein bestimmtes Verhältniss zwischen Körpergrösse und Gehirngewicht aussprechen, nimmt J. Marshall wohl die erste Stelle ein. Er benutzte zu seinen Berechnungen das von R. Boyd gelieferte Material von Gesunden und Geisteskranken, im Ganzen von 1875 Fällen, von denen hier nur die Gesunden (598 Männer und 552 Frauen) berücksichtigt werden sollen.

Die Tabellen 5 und 6, sowie die daraus zusammengezogenen Tabellen 7 und 8, welche hier in abgekürzter Form, in Gramme umgerechnet, wiedergegeben werden (Tabelle 16), zeigen im Ganzen geringere Mittelgewichte für die Männer unter 167 cm. Das stärkere Absinken in der höheren Altersstufe weist auch hier darauf hin, dass die geringere Körpergrösse z. Th. mit seniler Verkleinerung des Gehirnes einhergeht.

Zwischen den beiden folgenden Grössenstufen ist ebenfalls eine Differenz zu Gunsten der höchsten Stufe (über 175 cm) — jedoch mit Ausnahme der Altersklasse 20—30 Jahre — vorhanden.

Tabelle 16.

Alter	Männer			Frauen		
	175 cm und mehr	167—174 cm	bis 166 cm	162 cm und mehr	155—162 cm	bis 154 cm
20—30 Jahre	1363 g	1391 g	1307 g	1258 g	1207 g	1176 g
30—40 „	1437 „	1346 „	1346 „	1270 „	1230 „	1216 „
40—50 „	1375 „	1349 „	1309 „	1204 „	1216 „	1219 „
50—60 „	1338 „	1326 „	1295 „	1213 „	1213 „	1199 „
60—70 „	1358 „	1326 „	1287 „	1210 „	1207 „	1202 „
70—80 „	1360 „	1301 „	1244 „	1170 „	1145 „	1154 „
80—90 „	1230 „	1315 „	1281 „	1159 „	1117 „	1105 „
20—40 „	1410 „	1360 „	1330 „	1264 „	1216 „	1196 „
40—70 „	1363 „	1332 „	1296 „	1208 „	1213 „	1205 „
70—90 „	1329 „	1304 „	1250 „	1165 „	1128 „	1122 „
20—90 „	1372 „	1335 „	1292 „	1210 „	1199 „	1173 „

Bei den Frauen sind die Differenzen zwischen den einzelnen Grössenstufen in den Altersklassen 40—70 Jahre und 70—90 Jahre sehr gering, z. Th. verschwindend, in der Altersklasse 40—50 Jahre sogar umgekehrt.

Man muss auch hier berücksichtigen, dass die Mittelgewichte aus einer sehr verschiedenen Combination von Einzelgewichten hervorgehen können und daher sehr verschiedene Bedeutung haben. Eine Anzahl hoher Einzelgewichte kann durch einige sehr niedrige Einzelgewichte ausgeglichen werden. Andererseits kann das gleiche Mittelgewicht aus annähernd gleich grossen Einzelgewichten hervorgehen. Ohne genaue Kenntniss der Zusammensetzung können also die Mittelgewichte allein zu falschen Schlüssen verleiten. Bei einer Zusammenstellung der grössten und der kleinsten Männer von 13 Altersklassen von je 5 Jahren ergab sich, dass 5 der letzteren ein erheblich höheres Gehirngewicht hatten, als die grössten derselben Altersklasse; ebenso bei den Frauen (Tabelle XIII, S. 479). Der Durchschnitt ergiebt aber ein erheblich höheres Mittelgewicht für die grösseren als für die kleineren Individuen. Die Schlüsse, die daraus auf das Verhältniss zwischen durchschnittlicher Körpergrösse und durchschnittlichem Gehirngewicht gezogen werden, stehen auf sehr schwachen Füssen. Ein Blick auf die nach dem Hirngewicht geordneten Tabellen zeigt, dass von einer auch nur annähernd regelmässigen Uebereinstimmung zwischen den leichtesten und den schwersten Gehirnen einerseits und der

geringsten und der bedeutendsten Körpergrösse andererseits nicht die Rede ist.

Wie erwähnt, lässt sich auch eine irgendwie regelmässige Abnahme des relativen Gewichtes mit der Zunahme der Körpergrösse nicht nachweisen. Keineswegs kann man eine gewisse Abhängigkeit des Gehirngewichtes von der Körpergrösse ganz in Abrede stellen, doch tritt dieselbe nur bei extremen Fällen, wie z. B. beim Zwergwuchs, deutlich hervor. Bei den gewöhnlichen, noch im Bereiche der Norm liegenden Schwankungen, wird das vielleicht ursprünglich vorhanden gewesene, gesetzmässige Verhältniss durch zahlreiche concurrirende Ursachen verwischt.

Die Körpergrösse, das Skeletwachsthum, wird bekanntlich oft durch Einwirkungen gehemmt, von denen die Grösse des Gehirns nicht in gleichem Maasse, unter Umständen sogar in entgegengesetzter Richtung beeinflusst wird.

Abgesehen von der allgemeinen (Art- und Racen-) und der individuellen Vererbung, welche sowohl für die Grösse des ganzen Körpers als für die des Gehirnes in erster Linie in Betracht kommt, können Einwirkungen verschiedener Art, von der ersten Anlage, während der Entwickelung im Uterus, sowie nach der Geburt, besonders in den ersten Lebensjahren, ja in der ganzen Wachsthumsperiode entweder die Körpergrösse allein, oder die Grösse des Gehirnes, oder beide zugleich betreffen. Das Verhältniss zwischen Körpergrösse und Gehirngewicht hängt also von so zahlreichen Factoren ab, dass eine annähernd sichere Beurtheilung desselben eigentlich nur durch eine Zusammenstellung einer grossen Zahl von möglichst normal entwickelten Individuen der gleichen Altersclasse (z. B. Soldaten) erreichbar ist. Das gewöhnliche, aus den Krankenhäusern stammende Sectionsmaterial reicht hierzu für gewöhnlich nicht aus.

Wir können indess wohl sagen, dass ein starkes Skeletwachsthum nicht mit einer gleichmässigen Zunahme des Gehirngewichtes verbunden zu sein braucht und thatsächlich nicht immer verbunden ist, denn es giebt bekanntlich lang gewachsene Individuen mit verhältnissmässig kleinem Kopfe und kleinem Gehirn. In diesen Fällen hält die Zunahme der Gehirngrösse (welche ja vor dem Ende der Wachsthumsperiode annähernd abgeschlossen ist) mit dem raschen Längenwachsthum der Wirbelsäule und der Extremitäten nicht gleichen Schritt. Solche Individuen behalten also ein

im Verhältniss zu ihrer Körperlänge zu kleines Gehirn. Andererseits haben Individuen, deren Skeletwachsthum während der Wachsthumsperiode eine gewisse Hemmung erleidet, von der der Schädel und das Gehirn nicht betroffen wird, ein im Verhältniss zur Körperlänge zu grosses Gehirn. Dieses Missverhältniss kann noch gesteigert werden, indem gleichzeitig mit der Hemmung des Längenwachsthums eine abnorme Zunahme des Schädelwachsthums und der Gehirngrösse stattfindet.

Eine besonders grosse Bedeutung hat in dieser Hinsicht bekanntlich die Rachitis. Die hierbei so häufig vorkommende bedeutende Grösse des Kopfes bei geringer Körpergrösse ist zwar nicht selten durch eine mehr oder weniger starke hydrocephalische Erweiterung der Ventrikel bedingt, ohne eigentliche Zunahme der Gehirnmasse, indess scheint doch in manchen Fällen ein stärkeres Gehirnwachsthum dabei vorzukommen. Bekanntlich sind die Fälle nicht allzu selten, in denen abnorm kleine, selbst zwerghafte Individuen mit grossem Kopf sich durch eine durchaus normale, ja selbst hervorragende Leistungsfähigkeit ihres Gehirnes auszeichnen, bei denen also schwerere pathologische Veränderungen des Gehirnes jedenfalls auszuschliessen sind. Es wäre nicht unmöglich, dass das Gehirn durch gewisse an sich pathologische Bedingungen des Schädelwachsthumes (verzögerten Verschluss der Fontanellen und Nähte) in seinem Wachsthum begünstigt wird. Als Hauptursache der Vergrösserung des Gehirnes bei Rachitis ist aber zunächst nicht ein vermehrtes Wachsthum, sondern seröse Durchtränkung zu betrachten.

Pfister hat sich über die Ursachen der abnorm hohen Hirngewichte im kindlichen Alter eingehender geäussert. Namentlich hebt er mit Recht die Hyperämie des Gehirnes als einen der wichtigsten Factoren hervor, durch welchen das Hirngewicht gesteigert ist. Auf Grund der verschiedenen Gewichtszunahme der anämischen und der hyperämischen Gehirne in Formol oder Müller-scher Lösung glaubt Pfister eine durchschnittliche Vermehrung resp. Verminderung des normalen Gewichtes bei der Hyperämie und der Anämie um ca. 7,5% annehmen zu können. Ob diese Methode hinreichend zuverlässig ist, vermag ich ohne eigene Nachprüfung nicht zu entscheiden, möchte aber kaum annehmen, dass die grössere oder geringere Füllung der Gefässe mit Blut von so grossem Einfluss auf die Quellbarkeit des Gehirnes in den ge-

nannten Lösungen ist. Für wichtiger möchte ich noch die bereits oben mehrerwähnte seröse Durchtränkung der Gehirnsubstanz halten, welche sich sowohl mit Stauungs-Hyperämie, starker Füllung der Venen der Häute und der Marksubstanz, als mit congestiver Hyperämie, intensiver Röthung der gesammten grauen Substanz verbinden kann. Nicht selten ist indess auch die ödematöse Quellung besonders des kindlichen Gehirnes mit erheblicher Anämie verbunden; eine so scharfe Gegenüberstellung der anämischen und der hyperämischen Gehirne in Bezug auf Verminderung und Vermehrung des Gewichtes erscheint daher nicht zulässig. Dass sehr anämische Gehirne bei Erwachsenen, z. B. bei Anaemia perniciosa, eine erhebliche Gewichtsverminderung gegenüber ursprünglich gleichgrossen hyperämischen Gehirnen erfahren, liegt auf der Hand. Der Grad der mittleren Blutfülle des Gehirnes, der als normal zu betrachten ist, ist aber nicht ganz leicht genau bestimmbar, und wird häufig unterschätzt.

Abgesehen von der Blutfülle sollen nach PFISTER's Meinung in einzelnen Fällen bei Kindern „vielleicht nutritive oder pathologische, vielleicht auch functionelle" Reize bisweilen eine Zeitlang übermässig beschleunigtes Hirnwachsthum hervorrufen können. Es scheint ihm für das Vorkommen derartig abnormen Wachsthumsverlaufes zu sprechen, dass man bei Kindern — ohne pathologische Zustände — in weit höherem Procentsatz als bei Erwachsenen frühzeitig abnorm schwere Hirne trifft. PFISTER verweist dabei auch auf die Rachitis, welche vielleicht für das Gehirn auf früher Altersstufe einen abnormen Wachsthumsreiz bilde. Die dieser Auffassung zu Grunde liegenden Beobachtungen, die sich im Ganzen mit den von mir hervorgehobenen Thatsachen decken[1], sind zweifellos richtig, doch kann ich mich mit der Deutung der notorischen Volums- und Gewichtsvermehrung derartiger Gehirne durch „zeitweilige Wachsthumssteigerung" nicht ganz einverstanden erklären. Zweifellos ist das kindliche Gehirn in viel höherem Maasse der Quellung durch Flüssigkeitsaufnahme ausgesetzt, als das Gehirn der Erwachsenen. Man vergleiche die verbreiterte, oft ganz blasse, verwaschene Rinde eines solchen Gehirnes eines Kindes, die feuchte weiche Marksubstanz mit der des Erwachsenen! Das ist keine Wachsthums-Erscheinung, sondern Vergrösserung durch

1) Dieselben sind bereits durch J. F. MECKEL, path. Anat. I. 2. S. 261 erwähnt.

Quellung, die bei noch nachgiebiger Schädeldecke wohl einen höheren Grad ohne eigentliche Druck-Erscheinungen erreichen kann. Aehnliche hochgradige Quellungen des Gehirnes, wie wir sie in ausgeprägter Weise in der Umgebung von Tumoren, bei frischen arteriellen Embolien, ausgedehnten venösen Thromben antreffen, pflegen bei Erwachsenen sehr bald den Tod unter Erscheinungen des Hirndruckes herbeizuführen.

Es ist wohl denkbar, dass ein derartiger Zustand von ödematöser Durchtränkung auch chronisch werden kann und dass sich im Laufe der Zeit eine Vermehrung der Neuroglia ausbildet, die eine dauernde Vergrösserung herbeiführt. Sicher darf man jene abnorm grossen Kindergehirne nur als pathologisch betrachten, auch wenn gröbere Veränderungen fehlen.

Selbstverständlich setzen derartige abnorm grosse Gehirne eine entsprechend vergrösserte Schädelcapacität voraus, welche sich beim Kinde allmählich entwickeln kann und später unverändert bestehen bleibt, ebenso wie bei hydrocephalischer Vergrösserung des Gehirnes.

Virchow[1]) berichtet über ein solches Gehirn eines rachitischen, tuberculösen 3jährigen Mädchens mit hydrocephalischer Grösse und Form des Schädels, dessen Knochen an vielen Stellen stark verdünnt und dessen Nähte blutreich und nach aussen vorspringend waren. Das Gehirn wog nach Entfernung der sehr mässigen Flüssigkeit aus den Ventrikeln 1911 g. Ueberall war die Rinde sehr reichlich, blass grauroth, die weisse Substanz sehr feucht, etwas weich. Bei einem 13jährigen Knaben mit sehr grossem, stark verdünntem Schädel wog das Gehirn 1732 g; seine Ventrikel enthielten eine geringe Menge Flüssigkeit, die Windungen waren abgeflacht, die graue Substanz anämisch, die Marksubstanz mässig blutreich.

Virchow betrachtete diese Fälle als Beispiele einer interstitiellen Hyperplasie durch Vermehrung der Neuroglia, die auch mikroskopisch ungewöhnlich reichlich und verhältnissmässig stark mit Kernen durchsetzt war.

Ich möchte indess glauben, dass es sich auch bei diesen relativ enormen Gewichts- und Volumsvermehrungen zunächst noch um eine ödematöse Quellung des Gehirnes gehandelt habe. Ich möchte

---

1) Untersuchungen über die Entwickelung des Schädelgrundes. S. 100.

dahin auch das 1840 g schwere Gehirn eines 6jährigen tuberculösen Kindes rechnen, welches Lorey[1]) — leider ohne jede genauere Angabe über den höchst auffälligen Befund — erwähnt.

Ueber das spätere Verhalten solcher dauernd vergrösserter, also dann wirklich hypertrophischer Gehirne ist im Ganzen noch wenig Genaues bekannt.

Virchow erwähnt an derselben Stelle ein 1675 g schweres, sehr derbes Gehirn einer 23jährigen Magd, sowie ein 1872 g schweres, allgemein vergrössertes, etwas ödematöses Gehirn einer 65jährigen Person. In dieselbe Kategorie gehören wahrscheinlich alle die ungewöhnlich schweren Gehirne von Erwachsenen, die theils durch besonders hohe Geistesgabe (man kann sagen trotz des Zustandes ihres Gehirnes) ausgezeichnet waren (Cuvier 1830 g, Turgenjeff 2012 g), theils das gewöhnliche Maass geistiger Fähigkeit nicht erreichten oder wenigstens nicht übertrafen.[2]) Die beiden schwersten, von Bischoff beobachteten Gehirne von 1770 g und 1925 g, welche einem gewöhnlichen Arbeiter und einem Mechaniker angehört hatten, sollen sich durch grossen Windungsreichthum ausgezeichnet haben[3]); genauere Angaben fehlen. Das angeblich 2222 g schwere Gehirn des Rustan soll nach Rudolphi's Angaben, abgesehen von seiner Grösse und Schwere, „sonst natürlich beschaffen" gewesen sein. (Nach Krause[4]) würde das Gewicht dieses Gehirnes, aus der Capacität des noch vorhandenen Schädels berechnet, nur etwa 1871—1898 g betragen haben, doch ist bei der Ausmessung des Schädels die nicht unerhebliche Verkleinerung durch Austrocknung wohl mit in Betracht zu ziehen; die Beschaffenheit des Schädels deutet auf alte Rachitis.) Das von Obersteiner beschriebene, leider nicht frisch gewogene Gehirn, dessen Gewicht auf ca. 2028 g berechnet wurde, hatte auffallend breite Windungen, war aber nicht gerade windungsarm.

Im Allgemeinen werden diese hypertrophischen Gehirne Erwachsener als ungewöhnlich fest und mit breiten Windungen versehen beschrieben[5]), doch sind dabei Zustände von Quellung und von wahrer Gewebszunahme nicht immer scharf getrennt worden.

---

1) Jahrb. f. Kinderheilkunde, Bd. XII.
2) S. die Zusammenstellung dieser Fälle bei Ziehen. S. 360.
3) l. c. S. 112.
4) Biologisches Centralbl. I. S. 541.
5) G. Andral, Précis d'Anat. pathol. T. II. Paris 1829. p. 774.

Ich möchte daher hier noch ein Gehirn erwähnen, welches im vergangenen Jahre bei einem Manne von 24 Jahren gefunden wurde und frisch ein Gewicht von 1790 g hatte. Obwohl dasselbe also noch erheblich hinter den extrem grossen Gehirnen zurückblieb, hatte man doch den Eindruck einer ganz ungewöhnlichen Grösse, der wesentlich durch die sehr plumpen, ziemlich einfachen Windungen gesteigert wurde. Auch das Kleinhirn und die Brücke betheiligten sich an der Vergrösserung. Hier handelt es sich augenscheinlich um eine wahre Hypertrophie, die aber mit grösster Wahrscheinlichkeit auf einer Vermehrung der Neuroglia beruht. Eine genauere Untersuchung steht noch aus.

Was die Beziehungen zwischen Hirngewicht und Körpergewicht anlangt, so hat Bischoff aus seiner Zusammenstellung von 535 Männern und 340 Weibern nach dem Körpergewicht in Gruppen von 10:10 kg den Schluss gezogen, dass danach „der Einfluss des Körpergewichtes auf das Hirngewicht wohl nicht mehr in Zweifel gezogen werden könne“ (l. c. S. 29).

Betrachtet man aber die zu Grunde gelegte Berechnung etwas genauer, so kann man nicht sagen, dass Bischoff dabei kritisch genug verfahren ist. Für 18 Männer mit einem Gewichte von 70—79 kg wird das höchste Gehirngewicht von 1419 g[1]) herausgerechnet, für die nächst niedrige Stufe von 60—69 kg ein solches von 1386 g. Unter jenen 18 Fällen sind nicht weniger als 11 Fälle mit Hydrops und Morbus Brightii; schwerlich wird man aber der wassersüchtigen Anschwellung einen Einfluss auf das ursprüngliche Gehirngewicht zuschreiben. Dazu kommt, dass das einzige sehr hohe Hirngewicht von 1650 g einem Individuum mit „Hydrops cerebri“ angehört. Nach Abzug dieses einen Falles erhält man ein Mittelgewicht von 1380 g, also etwas weniger als das der vorhergehenden Gruppe. Bei den Weibern ergeben sich ähnliche Verhältnisse; unter den 15 schwersten, von 60—69 kg Gewicht, sind nicht weniger als 9 mit Hydrops. Die Gehirngewichte dieser Gruppe sind bis auf 2 kaum Mittelgewichte; nach Abrechnung jener beiden Fälle erhält man als Mittel 1245 g (anstatt 1281 g), d. h. ebensoviel, wie in der vorhergehenden Gruppe. Andererseits finden sich unter den Fällen mit niedrigem Körper- und Gehirngewicht so zahlreiche alte Individuen mit Marasmus, dass die Ver-

1) In Folge eines Rechenfehlers anstatt 1395.

ringerung des Durchschnittsgewichtes hierdurch sehr leicht verständlich ist. Man kann daher aus den eigenen Angaben Bischoff's nur die umgekehrte Schlussfolgerung ziehen.

Ich habe das relative Gehirngewicht im Verhältniss zum Körpergewicht aus den angegebenen Gründen nicht in den Bereich der Untersuchung gezogen.

Wie aus dem Vorhergehenden ersichtlich ist, unterliegt das Gehirngewicht schon im Bereiche der Norm so grossen Schwankungen, dass es unmöglich ist, aus einzelnen Fällen, ja selbst aus einer grösseren Gruppe von Beobachtungen sichere Schlüsse auf etwaige Beziehungen zwischen dem Gewicht des Gehirnes und seiner Function zu ziehen. Ebenso verfehlt, wie es sein würde, eine Parallele zwischen dem Gewicht des Gehirnes und der normalen geistigen Thätigkeit zu ziehen, ist auch der Versuch, bestimmte Geisteskrankheiten mit einem grösseren oder geringeren Hirngewicht in Verbindung zu bringen. Nur dann, wenn die Verkleinerung des Gehirnes durch bestimmte und erkennbare anatomische Veränderungen bedingt ist, wie z. B. bei der progressiven Paralyse, bei seniler Demenz, Arteriosklerose, gewährt das Gehirngewicht einen Anhaltspunkt für die Beurtheilung. Auch die unter die untere Grenze der normalen Breite erheblich herabgehende angeborene Kleinheit des Gehirnes, die Mikrencephalie, ist selbstverständlich mit mehr oder weniger ausgesprochener Idiotie verbunden. Eine vollständig scharfe Bestimmung jener unteren Grenze ist z. Z. noch kaum möglich. Auf der anderen Seite giebt eine über das gewöhnliche Maass hinausgehende Vergrösserung des Gehirnes keine Gewähr für eine hervorragende Gehirnthätigkeit. Wichtigere Anhaltspunkte dürfte eher die mehr oder weniger reichliche Gliederung der Oberfläche liefern. Im Allgemeinen pflegt aber ein grosses Gehirn auch morphologisch gut ausgebildet zu sein und wird daher in der Regel auch in functioneller Hinsicht den Vorzug vor einem kleinen, weniger gut entwickelten haben.

Ergebnisse.[1]

Das mittlere Hirngewicht des erwachsenen Mannes (von 15 bis 50 Jahre) ist **1400** g, das des erwachsenen Weibes **1275** g.

1) Dieselben beziehen sich nur auf die eigenen Untersuchungen und gelten daher zunächst nur für die hessische Bevölkerung.

84 % aller erwachsenen männlichen Individuen (von 15 bis über 80 Jahre) haben ein Hirngewicht von 1250—1550 g; ca. 50 % haben ein Hirngewicht von 1300—1450 g, ca. 30 % ein solches über 1450 g, 20 % ein solches unter 1300 g.

91 % aller erwachsenen weiblichen Individuen haben ein Hirngewicht von 1100—1450 g; 55 % ein solches von 1200—1350 g, 20 % ein solches über 1350 g, 25 % ein solches unter 1200 g.

Das anfängliche Gehirngewicht verdoppelt sich ungefähr im Laufe der ersten 3 Vierteljahre, es verdreifacht sich noch vor Ablauf des 3. Lebensjahres; von da ab erfolgt die Zunahme immer langsamer und ist beim weiblichen Geschlecht geringer als beim männlichen.

Das Gehirn erreicht seine definitive Grösse beim männlichen Geschlecht im 19. bis 20. Lebensjahre, beim weiblichen Geschlecht im 16. bis 18. Jahre.

Die Verkleinerung des mittleren Gehirngewichtes in Folge der senilen Atrophie tritt beim Manne im 8., beim Weibe bereits im 7. Decennium ein, doch finden in dieser Beziehung sehr grosse individuelle Verschiedenheiten statt.

In der Kindheit erfolgt die Zunahme des mittleren Hirngewichtes entsprechend dem Körperwachsthum bis zu einer Körperlänge von ungefähr 70 cm, unabhängig vom Lebensalter und Geschlecht; von da ab ist sie unregelmässiger und beim weiblichen Geschlecht geringer als beim männlichen.

Beim Erwachsenen lässt sich ein bestimmtes Verhältniss zwischen Gehirngewicht und Körperlänge nicht feststellen. Doch ist das mittlere Hirngewicht der Männer unter Mittelgrösse (150—160 cm) etwas niedriger als das der normal grossen Individuen, ebenso das der Weiber unter 145 cm.

Die geringere Grösse des weiblichen Gehirnes ist nicht abhängig von der geringeren Körperlänge, denn das mittlere Gehirngewicht der Weiber ist ohne Ausnahme geringer als das der Männer von gleicher Grösse.

Tabelle I.

Gesammt-Uebersicht.

A. Männliche Gehirne.					B. Weibliche Gehirne.				
Alter	Zahl der Fälle	Mittel			Alter	Zahl der Fälle	Mittel		
0—7 Tage	16	371			0—7 Tage	8	361		
8 Tg.—1 M.	23	411			8 Tg.—1 M.	15	375		
1—3 Mon.	40	474			1—3 Mon.	27	450		
4—6 Mon.	18	612			4—6 Mon.	17	587		
7—12 Mon.	13	796			7—12 Mon.	19	802		
2. Jahr (1—2)	23	1011			2. Jahr (1—2)	14	896		
3. Jahr (2—3)	9	1080			3. Jahr (2—3)	8	1099		
4. Jahr (3—4)	10	1310			4. Jahr (3—4)	7	1024		
5. Jahr (4—5)	14	1273	1305		5. Jahr (4—5)	14	1183	1140	
6. Jahr (5—6)	10	1343			6. Jahr (5—6)	2	1245		
6—9 Jahr	23	1360	1353		6—9 Jahr	21	1237	1230	
10—14 Jahr	24	1346			10—14 Jahr	14	1221		
15—19 Jahr	37	1404			15—19 Jahr	20	1309		
20—29 Jahr	111	1416	1405		20—29 Jahr	49	1293	1275	
30—39 Jahr	66	1391			30—39 Jahr	51	1269		
40—49 Jahr	86	1403		1388	40—49 Jahr	58	1257		1252
50—59 Jahr	98	1370			50—59 Jahr	52	1260		
60—69 Jahr	64	1370	1363		60—69 Jahr	33	1215	1223	
70—83 Jahr	31	1324			70—83 Jahr	25	1159		
Sa.	716				Sa.	453			

Männliche Gehirne nach dem

Uebersichts-Tabelle II A.

Hirngewichte	0—7 T.	8 T.—1 M.	2—3 M.	4—6 M.	7—12 M.	1—2 J. (2. J.)	2—3 J. (3. J.)	3—4 J. (4. J.)	4—5 J. (5. J.)	5—6 J. (6. J.)	7—9 J.	10—14 J
250—300	3	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
300—350	4	4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
350—400	4	5	7	—	—	—	—	—	—	—	—	—
400—450	2	6	8	2	—	—	—	—	—	—	—	—
450—500	2	4	11	—	1	—	—	—	—	—	—	—
500—550	1	2	7	3	—	—	—	—	—	—	—	—
550—600	—	1	3	4	2	—	—	—	—	—	—	—
600—650	—	—	3	2	—	1	—	—	—	—	—	—
650—700	—	—	1	2	1	—	—	—	—	—	—	—
700—750	—	—	—	3	2	—	—	—	—	—	—	—
750—800	—	—	—	2	2	2	—	—	—	—	—	—
800—850	—	—	—	—	2	3	—	—	—	—	—	—
850—900	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
900—950	—	—	—	—	—	2	1	—	—	—	—	—
950—1000	—	—	—	—	—	1	2	—	—	—	—	—
1000—1050	—	—	—	—	1	1	1	—	1	1	—	—
1050—1100	—	—	—	—	1	5	1	—	1	—	—	2
1100—1150	—	—	—	—	—	4	—	1	—	—	1	—
1150—1200	—	—	—	—	—	2	2	1	2	—	1	1
1200—1250	—	—	—	—	1	1	2	3	3	1	3	—
1250—1300	—	—	—	—	—	—	—	1	1	1	1	3
1300—1350	—	—	—	—	—	1	—	—	2	2	4	5
1350—1400	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	4	6
1400—1450	—	—	—	—	—	—	—	2	2	2	5	3
1450—1500	—	—	—	—	—	—	—	—	1	3	1	2
1500—1550	—	—	—	—	—	—	—	2	1	—	2	2
1550—1600	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—
1600—1650	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1650—1700	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1700—1750	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Mittel	**371**	**411**	**474**	**612**	**796**	**1011**	**1080**	**1310**	**1273**	**1343**	**1360**	**1346**
Minimum ...	255	270	375	400	460	630	920	1110	1040	1005	1105	1075
Maximum ...	540	555	665	790	1205	1315	1225	1520	1505	1490	1575	1500
Zahl der Fälle	**16**	**23**	**40**	**18**	**13**	**23**	**9**	**10**	**14**	**10**	**23**	**24**
Unter d. Mittel	9	13	24	10	8	10	5	6	7	4	12	13
Ueber d. Mittel	7	10	16	8	5	13	4	4	7	6	11	11
	0—7 T.	8 T.—1 M.	2—3 M.	4—6 M.	7—12 M.	2. Jahr	3. Jahr	4. Jahr	5. Jahr	6. Jahr	7—9 J.	10—14 J.
1.	2.	3.	4	5	6.	7.	8	9.	10.	11.	12.	13.



Alter und dem Gewicht geordnet.

15—17 J.	18—19 J.	20—29 J.	30—39 J.	40—49 J.	50—59 J.	60—69 J.	70—83 J.	Zahl der Fälle zwischen 15 u. 83 J.	% der Gesammt-Zahl
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	2	1	1	—	4	0,81 %
—	—	1	—	—	1	1	—	3	0,60 %
1	—	2	1	1	1	—	1	7	1,42 %
—	—	1	1	—	4	2	—	8	1,62 %
—	—	1	5	2	6	3	6	23	4,66 %
1	1	8	9	10	12	5	6	52	10,54 %
5	3	21	9	14	14	13	6	85	17,24 %
3	1	15	7	16	13	11	6	72	14,60 %
1	10	12	15	7	25	15	2	87	17,64 %
4	1	23	6	12	6	6	1	59	11,96 %
1	3	17	7	11	13	6	1	59	11,96 %
—	2	6	5	10	1	1	2	27	5,47 %
—	—	3	—	1	—	—	—	4	0,81 %
—	—	1	1	—	—	—	—	2	0,40 %
—	—	—	—	—	1	—	—	1	0,20 %
1371	**1427**	**1410**	**1390**	**1403**	**1370**	**1370**	**1324**	(493)	—
1130	1295	1065	1110	1025	1020	1010	1145	—	—
1520	1590	1685	1695	1605	1705	1590	1555	—	—
16	**21**	**111**	**66**	**86**	**98**	**64**	**31**	S. 716	—
8	11	51	30	45	45	28	17	—	—
8	10	60	36	41	53	36	14	—	—
15—17 J.	18—19 J.	20—29 J.	30—39 J.	40—49 J.	50—59 J.	60—69 J.	70—83 J.		
14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.	21.	22.	23.

Weibliche Gehirne, nach dem

Uebersichts-Tabelle II B.

1. Hirngewichte	2. 0—7 T.	3. 8 T.—1 M.	4. 2—3 M.	5. 4—6 M.	6. 7—12 M.	7. 1—2 J. (2. J.)	8. 2—3 J. (3. J.)	9. 3—4 J. (4. J.)	10. 4—5 J. (5. J.)	11. 5—6 J. (6. J.)	12. 6—9 J. (7—10 J.)	13. 10—14 J.
250—300	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
300—350	3	5	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—
350—400	3	3	5	—	—	—	—	—	—	—	—	—
400—450	2	4	7	—	—	—	—	—	—	—	—	—
450—500	—	2	8	5	—	—	—	—	—	—	—	—
500—550	—	—	2	3	—	—	—	—	—	—	—	—
550—600	—	—	4	3	1	—	—	—	—	—	—	—
600—650	—	—	—	—	3	—	—	—	—	—	—	—
650—700	—	—	—	3	4	—	—	—	—	—	—	—
700—750	—	—	—	1	1	1	—	1	—	—	—	—
750—800	—	—	—	1	2	1	—	—	—	—	—	—
800—850	—	—	—	1	3	2	—	—	—	—	—	—
850—900	—	—	—	—	2	4	—	2	—	—	—	—
900—950	—	—	—	—	2	2	—	—	—	—	—	—
950—1000	—	—	—	—	1	1	1	—	—	—	—	—
1000—1050	—	—	—	—	—	2	1	—	1	—	2	—
1050—1100	—	—	—	—	—	1	2	1	2	—	3	—
1100—1150	—	—	—	—	—	—	2	1	1	—	—	2
1150—1200	—	—	—	—	—	—	1	1	5	1	4	5
1200—1250	—	—	—	—	—	—	1	—	1	—	1	3
1250—1300	—	—	—	—	—	—	—	1	—	1	1	2
1300—1350	—	—	—	—	—	—	—	—	4	—	5	1
1350—1400	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	1
1400—1450	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3	—
1450—1500	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1500—1550	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1550	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Mittel	**361**	**375**	**450**	**587**	**802**	**896**	**1099**	**1024**	**1183**	**1245**	**1237**	**1221**
Minimum . . .	320	290	345	475	560	702	985	730	1005	1195	1015	1142
Maximum . . .	415	470	570	805	1000	1070	1210	1310	1320	1295	1415	1375
Zahl der Fälle	**8**	**15**	**27**	**17**	**19**	**14**	**8**	**7**	**14**	**2**	**21**	**14**
Unter d. Mittel	6	8	15	10	12	9	4	3	8	1	10	8
Ueber d. Mittel	2	7	12	7	7	5	4	4	6	1	11	6
	0—7 T.	8 T.—1 M.	2—3 M.	4—6 M.	7—12 M.	2. Jahr	3. Jahr	4. Jahr	4—5 J. (5. J.)	5—6 J. (6. J.)	7.—10. J.	10—14 J.
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.

Alter und dem Gewicht geordnet.

14. 15—17 J.	15. 18—19 J.	16. 20—29 J.	17. 30—39 J.	18. 40—49 J.	19. 50—59 J.	20. 60—69 J.	21. 70—82 J.	22. Zahl der Fälle zwischen 15 u. 82 J.	23. in %
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	1	1	0,35 %
—	—	—	—	3	—	—	3	6	2,08 %
—	1	2	3	2	2	3	1	12	4,16 %
—	—	1	3	3	5	4	7	23	8,0 %
2	—	3	6	4	5	6	5	31	10,8 %
2	2	10	11	15	13	7	3	63	22,0 %
4	—	12	7	16	7	10	3	59	20,55 %
—	—	7	6	9	9	3	2	36	12,54 %
1	—	6	9	9	8	—	—	27	9,40 %
5	2	5	3	5	3	—	—	23	8,0 %
—	1	1	1	—	—	—	—	3	1,04 %
—	—	2	1	—	—	—	—	3	1,04 %
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1307	**1311**	**1293**	**1269**	**1257**	**1260**	**1215**	**1159**	(287)	—
1165	1095	1090	1085	1005	1085	1080	985	—	—
1445	1495	1540	1510	1430	1445	1340	1340	—	—
14	**6**	**49**	**50**	**58**	**52**	**33**	**25**	**453**	—
8	3	28	25	28	27	14	14	234	—
6	3	21	25	30	25	19	11	219	—
15—17 J. 14.	18—19 J. 15.	20—29 J. 16.	30—39 J. 17.	40—49 J. 18.	50—59 J. 19.	60—69 J. 20.	70—82 J. 21.	22.	23.

716 männliche Individuen von 0—83 Jahren nach dem Alter und Gehirngewicht geordnet.

Tabelle III A.

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirn-gewicht	Mittel
		0—7 Tage.			
1	1	3 Tage	48	255	
2	2	2 Tage	45	270	
3	3	1 Tag	48	295	
4	4	3 Tage	48	320	
5	5	5 Tage	51	320	
6	6	Neugeb.	48	335	
7	7	Neugeb.	48	338	
8	8	3 Tage	45	365	
9	9	Totgeb.	52	365	
10	10	Totgeb.	48	375	
11	11	2 Tage	50	390	
12	12	4 Tage	52	400	
13	13	7 Tage	47	406	
14	14	3 Tage	55	480	
15	15	Totgeb.	51	485	
16	16	1½ Tage	52	540	
S.	16			5939	371
		8 Tage—1 Monat.			
17	1	13 Tage	45	270	
18	2	3 W.	47	330	
19	3	2 W.	45	335	
20	4	21 Tage	45	335	
21	5	10 Tage	47	345	
22	6	12 Tage	48	355	
23	7	2 W.	47	360	
24	8	12 Tage	52	370	
25	9	1 M.	49	370	
26	10	1 M.	49	375	
27	11	2 W.	49	405	
28	12	1 M.	50	405	
29	13	1 M.	52	410	
30	14	20 Tage	52	430	
31	15	2 W.	49	440	
32	16	1 M.	50	440	
33	17	1 M.	54	470	
34	18	1 M.	55	470	
35	19	1 M.	53	480	
36	20	2 W.	54	485	
37	21	3 W.	42	500	
38	22	1 M.	56	520	
39	23	3 W.	55	555	
S.	23			9455	411
		1—3 Monate.			
40	1	5 W.	50	375	
41	2	2 M.	48	385	
42	3	11 W.	51	385	
43	4	1½ M.	48	390	
44	5	6 W.	52	390	
45	6	2 M.	49	390	
46	7	2 M.	53	390	
47	8	5 W.	47	400	
48	9	8 W.	53	405	
49	10	3 M.	50	410	
50	11	5 W.	50	420	
51	12	1½ M.	51	430	
52	13	6 W.	53	435	
53	14	3 M.	49	440	
54	15	2½ M.	53	445	
55	16	6 W.	50	450	
56	17	2 M.	53	450	
57	18	2½ M.	56	450	
58	19	2 M.	51	455	
59	20	3 M.	54	455	
60	21	9 W.	46	460	
61	22	3 M.	57	465	
62	23	2½ M.	51	465	
63	24	2 M.	52	470	
64	25	6 W.	51	485	
65	26	7 W.	53	495	
66	27	2½ M.	55	500	
67	28	3 M.	52	500	
68	29	3 M.	53	510	

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirngewicht	Mittel
69	30	3 M.	61	520	
70	31	7 W.	55	525	
71	32	2 M.	56	540	
72	33	2 M.	58	540	
73	34	2 M.	56	550	
74	35	6 W.	53	550	
75	36	3 M.	57	550	
76	37	3 M.	56	600	
77	38	2 M.	58	610	
78	39	3 M.	58	615	
79	40	3 M.	59	665	
S.	40			18965	474

4—6 Monate.

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirngewicht	Mittel
80	1	4 M.	56	400	
81	2	$3\frac{1}{2}$ M.	48	425	
82	3	$5\frac{1}{2}$ M.	55	515	
83	4	4 M.	54	530	
84	5	5 M.	55	545	
85	6	6 M.	55	565	
86	7	13 W.	59	585	
87	8	4 M.	54	590	
88	9	5 M.	59	595	
89	10	4 M.	60	600	
90	11	5 M.	61	620	
91	12	4 M.	60	655	
92	13	4 M.	63	685	
93	14	5 M.	60	700	
94	15	$5\frac{1}{2}$ M.	65	700	
95	16	6 M.	61	740	
96	17	$5\frac{1}{2}$ M.	67	775	
97	18	6 M.	64	790	
S.	18			11015	612

7—12 Monate.

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirngewicht	Mittel
98	1	9 M.	63	460	
99	2	$10\frac{3}{4}$ M.	59	580	
100	3	7 M.	66	675	
101	4	7 M.	62	690	
102	5	7 M.	67	720	
103	6	$6\frac{1}{2}$ M.	60	740	
104	7	11 M.	63	780	
105	8	8 M.	55	790	
106	9	7 M.	63	800	
107	10	11 M.	65	810	
108	11	11 M.	68	1040	
109	12	11 M.	69	1065	
110	13	11 M.	73	1205	
S.	13			10355	796

2. Lebensjahr.

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirngewicht	Mittel
111	1	$1\frac{1}{2}$	62	630	
112	2	$1\frac{1}{6}$	63	755	
113	3	$1\frac{3}{4}$	60	760	
114	4	$1\frac{1}{2}$	68	800	
115	5	$1\frac{1}{2}$	73	830	
116	6	1	72	845	
117	7	1	73	915	
118	8	1	72	930	
119	9	$1\frac{1}{4}$	67	970	
120	10	$1\frac{7}{12}$	68	1030	
121	11	$1\frac{7}{12}$	79	1070	
122	12	$1\frac{3}{4}$	80	1070	
123	13	$1\frac{1}{2}$	80	1080	
124	14	$1\frac{1}{4}$	79	1090	
125	15	$1\frac{1}{4}$	78	1095	
126	16	$1\frac{1}{2}$	73	1100	
127	17	$1\frac{1}{3}$	76	1110	
128	18	1	74	1120	
129	19	$1\frac{3}{4}$	76	1130	
130	20	$1\frac{1}{4}$	78	1170	
131	21	$1\frac{1}{2}$	80	1190	
132	22	$1\frac{1}{4}$	76	1240	
133	23	$1\frac{1}{4}$	82	1315	
S.	23			23253	1011

3. Lebensjahr.

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirngewicht	Mittel
134	1	2	72	920	
135	2	2	80	950	
136	3	2	83	990	
137	4	$2\frac{1}{2}$	90	1030	
138	5	$2\frac{1}{2}$	80	1075	
139	6	$2\frac{1}{4}$	75	1150	

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirngewicht	Mittel
140	7	2½	90	1160	
141	8	2½	91	1220	
142	9	2¾	86	1225	
S.	9			9720	1080
		4. Lebensjahr.			
143	1	3	—	1110	
144	2	3½	94	1180	
145	3	3	96	1200	
146	4	3	93	1215	
147	5	3	91	1230	
148	6	3	90	1290	
149	7	3½	101	1430	
150	8	3	91	1425	
151	9	3	97	1505	
152	10	3	92	1520	
S.	10			13105	1310
		5. Lebensjahr.			
153	1	4	92	1040	
154	2	4	88	1080	
155	3	4	94	1160	
156	4	4	—	1195	
157	5	4	100	1200	
158	6	4	98	1205	
159	7	4	94	1240	
160	8	4	77	1280	
161	9	4	99	1305	
162	10	4	100	1330	
163	11	4¾	98	1400	
164	12	4	98	1435	
165	13	4	95	1460	
166	14	4	95	1505	
S.	14			17835	1273
		6. Lebensjahr.			
167	1	5	85	1005	
168	2	5	108	1235	
169	3	5	104	1295	
170	4	5	95	1300	
171	5	5½	100	1345	
172	6	5	99	1420	

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirngewicht	Mittel
173	7	5	105	1420	
174	8	5	105	1455	
175	9	5½	107	1465	
176	10	5	110	1490	
S.	10			13430	1343
		6—9 Jahre (7.—10. Jahr).			
177	1	8	109	1105	
178	2	7	110	1168	
179	3	8	158	1230	
180	4	9	131	1240	
181	5	8	110	1245	
182	6	7	118	1275	
183	7	9	109	1315	
184	8	7	101	1330	
185	9	6	113	1335	
186	10	7	115	1337	
187	11	8	118	1350	
188	12	7¾	123	1355	
189	13	8	122	1370	
190	14	6	110	1375	
191	15	7¾	118	1405	
192	16	6	115	1410	
193	17	8	124	1435	
194	18	9	124	1435	
195	19	7	119	1440	
196	20	6	107	1480	
197	21	6½	115	1540	
198	22	8	125	1540	
199	23	6	105	1575	
S.	23			31290	1360
		10—14 Jahre.			
200	1	11	122	1075	
201	2	12	140	1090	
202	3	14	118	1190	
203	4	13	138	1265	
204	5	13	135	1270	
205	6	10	135	1280	
206	7	14	137	1300	
207	8	13	118	1315	

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirn-gewicht	Mittel
208	9	11	144	1330	
209	10	14	159	1340	
210	11	12	130	1345	
211	12	14	141	1350	
212	13	12	125	1350	
213	14	14	146	1365	
214	15	14	147	1380	
215	16	10¾	134	1395	
216	17	12	131	1395	
217	18	10	117	1430	
218	19	14	155	1435	
219	20	10	118	1440	
220	21	13	146	1480	
221	22	12	146	1485	
222	23	11	140	1500	
223	24	11	140	1500	
S.	24			32305	1346
		15—19 Jahre.			
224	1	17	142	1130	
225	2	17	150	1280	
226	3	18	178	1295	
227	4	16	158	1305	
228	5	15	153	1315	
229	6	17½	160	1320	
230	7	18	148	1320	
231	8	17	158	1320	
232	9	18	160	1330	
233	10	18	163	1335	
234	11	16	161	1340	
235	12	16	166	1360	
236	13	18	158	1378	
237	14	16	138	1385	
238	15	16	160	1390	
239	16	19	172	1400	
240	17	19	170	1400	
241	18	17	155	1405	
242	19	18	175	1410	
243	20	19	103	1410	
244	21	19	175	1410	
245	22	19	169	1420	
246	23	19	162	1432	
247	24	19	163	1435	
248	25	18	147	1435	
249	26	19	169	1440	
250	27	15	143	1450	
251	28	19	173	1455	
252	29	17	145	1460	
253	30	16	156	1475	
254	31	17	163	1480	
255	32	18	155	1500	
256	33	17	155	1520	
257	34	19	165	1535	
258	35	19	170	1540	
259	36	19	169	1555	
260	37	18	167	1590	
S.	37			51960	1404
		20—29 Jahre.			
261	1	20	161	1065	
262	2	21	170	1112	
263	3	26	159	1145	
264	4	23	167	1170	
265	5	29	164	1203	
266	6	27	164	1250	
267	7	26	156	1254	
268	8	27	167	1255	
269	9	27	156	1260	
270	10	21	155	1260	
271	11	25	170	1265	
272	12	22	161	1285	
273	13	28	163	1290	
274	14	27	165	1300	
275	15	24	170	1300	
276	16	25	178	1300	
277	17	29	157	1315	
278	18	27	171	1318	
279	19	26	160	1320	
280	20	29	163	1320	
281	21	21	162	1325	
282	22	25	175	1325	
283	23	27	162	1325	
284	24	25	170	1330	
285	25	25	170	1330	

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirn-Gewicht	Mittel	L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirn-Gewicht	Mittel
286	26	28	160	1330		328	68	20	165	1460	
287	27	23	169	1340		329	69	22	166	1465	
288	28	28	159	1340		330	70	24	173	1465	
289	29	28	175	1340		331	71	27	173	1465	
290	30	20	169	1342		332	72	28	161	1470	
291	31	21	176	1343		333	73	29	174	1470	
292	32	20	164	1345		334	74	23	167	1475	
293	33	22	168	1345		335	75	22	161	1480	
294	34	29	172	1345		336	76	28	163	1480	
295	35	20	170	1350		337	77	28	171	1480	
296	36	24	160	1350		338	78	23	171	1485	
297	37	22	170	1355		339	79	22	179	1487	
298	38	22	163	1365		340	80	20	166	1490	
299	39	22	170	1370		341	81	23	170	1490	
300	40	22	170	1370		342	82	20	173	1495	
301	41	29	156	1370		343	83	20	172	1495	
302	42	25	167	1380		344	84	26	171	1495	
303	43	28	167	1380		345	85	23	164	1500	
304	44	28	166	1380		346	86	22	169	1500	
305	45	21	169	1385		347	87	27	171	1500	
306	46	22	172	1385		348	88	28	168	1510	
307	47	24	171	1390		349	89	26	161	1515	
308	48	29	172	1390		350	90	23	167	1520	
309	49	27	167	1395		351	91	23	168	1520	
310	50	28	158	1402		352	92	28	170	1520	
311	51	21	179	1410		353	93	25	169	1525	
312	52	26	172	1420		354	94	24	171	1530	
313	53	26	168	1425		355	95	24	171	1530	
314	54	24	170	1430		356	96	25	166	1530	
315	55	23	168	1430		357	97	27	168	1530	
316	56	24	160	1440		358	98	24	175	1535	
317	57	25	158	1440		359	99	21	159	1540	
318	58	28	161	1440		360	100	22	170	1545	
319	59	29	171	1440		361	101	23	163	1545	
320	60	22	163	1445		362	102	24	177	1555	
321	61	22	162	1445		363	103	22	167	1565	
322	62	24	178	1450		364	104	23	171	1570	
323	63	27	163	1450		365	105	22	163	1570	
324	64	23	165	1450		366	106	25	171	1580	
325	65	23	169	1455		367	107	22	172	1585	
326	66	22	166	1460		368	108	21	169	1630	
327	67	25	164	1460		369	109	25	166	1630	

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirn-gewicht	Mittel
370	110	25	—	1635	
371	111	26	171	1685	
S.	111			157246	1416

30—39 Jahre.

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirn-gewicht	Mittel
372	1	30	171	1110	
373	2	38	173	1190	
374	3	30	159	1215	
375	4	30	166	1215	
376	5	31	171	1225	
377	6	33	165	1230	
378	7	32	172	1242	
379	8	30	172	1250	
380	9	39	—	1260	
381	10	35	166	1265	
382	11	36	167	1275	
383	12	30	167	1282	
384	13	37	165	1285	
385	14	36	158	1290	
386	15	39	184	1295	
387	16	35	170	1299	
388	17	33	164	1300	
389	18	30	154	1310	
390	19	36	163	1315	
391	20	38	175	1315	
392	21	30	162	1320	
393	22	37	165	1320	
394	23	37	172	1320	
395	24	37	178	1340	
396	25	32	171	1348	
397	26	37	169	1350	
398	27	30	163	1375	
399	28	31	162	1377	
400	29	35	172	1380	
401	30	33	172	1380	
402	31	33	172	1395	
403	32	30	175	1395	
404	33	33	163	1400	
405	34	31	166	1400	
406	35	35	162	1400	
407	36	30	169	1410	
408	37	36	170	1410	
409	38	33	183	1415	
410	39	37	171	1420	
411	40	34	163	1425	
412	41	37	166	1425	
413	42	32	169	1430	
414	43	39	173	1430	
415	44	32	185	1430	
416	45	32	167	1435	
417	46	36	175	1440	
418	47	31	151	1445	
419	48	33	180	1455	
420	49	38	162	1455	
421	50	34	172	1460	
422	51	33	165	1470	
423	52	34	166	1480	
424	53	34	172	1485	
425	54	31	172	1500	
426	55	30	161	1512	
427	56	34	172	1515	
428	57	31	177	1525	
429	58	39	157	1530	
430	59	30	174	1530	
431	60	31	165	1545	
432	61	34	181	1550	
433	62	33	175	1550	
434	63	36	172	1560	
435	64	34	173	1580	
436	65	37	168	1585	
437	66	34	165	1695	
S.	66			91765	1391

40—49 Jahre.

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirn-gewicht	Mittel
438	1	40	161	1025	
439	2	49	161	1040	
440	3	47	180	1140	
441	4	45	—	1210	
442	5	42	158	1225	
443	6	45	174	1250	
444	7	49	160	1260	
445	8	48	174	1265	
446	9	44	155	1270	
447	10	43	161	1270	

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirngewicht	Mittel
448	11	45	174	1280	
449	12	44	167	1285	
450	13	42	157	1285	
451	14	46	167	1290	
452	15	49	172	1290	
453	16	45	163	1300	
454	17	46	165	1310	
455	18	44	170	1310	
456	19	46	166	1315	
457	20	45	177	1320	
458	21	41	164	1330	
459	22	48	170	1330	
460	23	48	171	1330	
461	24	40	179	1330	
462	25	44	169	1335	
463	26	47	171	1340	
464	27	46	153	1345	
465	28	43	167	1345	
466	29	44	170	1345	
467	30	42	170	1350	
468	31	42	161	1355	
469	32	42	166	1360	
470	33	41	172	1360	
471	34	42	173	1360	
472	35	41	172	1365	
473	36	40	173	1370	
474	37	44	174	1370	
475	38	47	119	1370	
476	39	40	168	1370	
477	40	41	172	1372	
478	41	42	150	1375	
479	42	48	166	1380	
480	43	43	164	1390	
481	44	42	161	1395	
482	45	40	156	1395	
483	46	49	166	1405	
484	47	47	171	1415	
485	48	45	167	1420	
486	49	41	184	1430	
487	50	42	—	1435	
488	51	45	171	1440	
489	52	46	173	1445	

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirngewicht	Mittel
490	53	45	174	1455	
491	54	49	170	1460	
492	55	49	162	1462	
493	56	41	168	1465	
494	57	42	157	1470	
495	58	45	166	1470	
496	59	40	173	1470	
497	60	43	162	1475	
498	61	44	173	1480	
499	62	42	181	1480	
500	63	49	168	1490	
501	64	47	170	1495	
502	65	45	—	1500	
503	66	42	161	1505	
504	67	42	166	1510	
505	68	44	168	1510	
506	69	40	—	1515	
507	70	46	165	1525	
508	71	47	162	1530	
509	72	42	173	1530	
510	73	42	166	1540	
511	74	47	169	1540	
512	75	48	168	1545	
513	76	47	157	1550	
514	77	47	167	1555	
515	78	41	166	1565	
516	79	42	174	1565	
517	80	49	164	1570	
518	81	49	172	1570	
519	82	47	173	1570	
520	83	43	174	1580	
521	84	43	173	1590	
522	85	44	—	1590	
523	86	47	165	1605	
S.	86			120629	1402,6

50—59 Jahre.

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirngewicht	Mittel
524	1	54	177	1020	
525	2	51	139	1085	
526	3	57	160	1110	
527	4	53	167	1170	
528	5	57	158	1170	

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirngewicht	Mittel	L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirngewicht	Mittel
529	6	54	161	1175		571	48	57	167	1380	
530	7	55	156	1180		572	49	58	174	1380	
531	8	50	173	1205		573	50	56	174	1385	
532	9	52	166	1225		574	51	58	177	1385	
533	10	50	181	1235		575	52	58	172	1390	
534	11	54	174	1235		576	53	52	166	1400	
535	12	53	178	1240		577	54	57	169	1400	
536	13	50	173	1245		578	55	53	174	1404	
537	14	53	161	1255		579	56	51	163	1405	
538	15	50	—	1260		580	57	51	176	1405	
539	16	52	153	1260		581	58	53	167	1405	
540	17	56	172	1260		582	59	56	166	1405	
541	18	57	170	1260		583	60	50	172	1410	
542	19	59	173	1265		584	61	54	162	1410	
543	20	52	159	1275		585	62	53	169	1415	
544	21	59	162	1275		586	63	54	167	1415	
545	22	50	171	1280		587	64	55	168	1415	
546	23	54	174	1250		588	65	50	163	1420	
547	24	58	168	1280		589	66	52	172	1420	
548	25	53	—	1290		590	67	57	168	1420	
549	26	53	173	1310		591	68	52	164	1424	
550	27	53	158	1310		592	69	50	167	1425	
551	28	51	169	1315		593	70	50	179	1430	
552	29	55	189	1315		594	71	59	170	1430	
553	30	57	175	1315		595	72	52	167	1435	
554	31	50	169	1320		596	73	58	174	1435	
555	32	51	170	1320		597	74	57	160	1440	
556	33	55	162	1320		598	75	58	172	1443	
557	34	50	175	1330		599	76	52	173	1445	
558	35	56	170	1330		600	77	53	166	1445	
559	36	57	157	1330		601	78	55	164	1460	
560	37	54	152	1340		602	79	55	165	1465	
561	38	57	178	1340		603	80	50	177	1470	
562	39	50	162	1345		604	81	59	168	1475	
563	40	57	—	1350		605	82	50	171	1485	
564	41	55	168	1350		606	83	53	172	1490	
565	42	58	175	1355		607	84	54	183	1500	
566	43	59	178	1358		608	85	50	163	1510	
567	44	58	160	1360		609	86	54	156	1510	
568	45	59	181	1370		610	87	56	168	1510	
569	46	53	173	1375		611	88	50	174	1512	
570	47	52	166	1380		612	89	58	165	1515	

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirngewicht	Mittel
613	90	57	171	1520	
614	91	52	166	1525	
615	92	59	179	1525	
616	93	50	164	1530	
617	94	52	172	1530	
618	95	54	162	1540	
619	96	56	169	1545	
620	97	57	164	1595	
621	98	53	166	1705	
S.	98			134281	1370,2

60—69 Jahre.

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirngewicht	Mittel
622	1	61	170	1010	
623	2	60	153	1092	
624	3	68	171	1160	
625	4	67	163	1195	
626	5	63	163	1225	
627	6	62	159	1245	
628	7	69	163	1245	
629	8	67	155	1250	
630	9	68	158	1255	
631	10	68	174	1260	
632	11	69	164	1270	
633	12	60	168	1280	
634	13	60	169	1300	
635	14	66	158	1305	
636	15	69	169	1310	
637	16	69	160	1310	
638	17	62¾	164	1320	
639	18	66	157	1320	
640	19	68	166	1320	
641	20	60	161	1325	
642	21	60	167	1330	
643	22	65	155	1330	
644	23	69	163	1335	
645	24	60	170	1340	
646	25	65	152	1345	
647	26	69	168	1350	
648	27	60	173	1350	
649	28	64	170	1355	
650	29	63	175	1370	
651	30	64	—	1370	
652	31	67	164	1380	
653	32	60	161	1380	
654	33	69	177	1380	
655	34	66	164	1385	
656	35	64	175	1385	
657	36	60½	163	1395	
658	37	61	172	1400	
659	38	62	172	1400	
660	39	63	165	1400	
661	40	64	160	1400	
662	41	61	169	1410	
663	42	60	173	1430	
664	43	65	174	1430	
665	44	69	169	1430	
666	45	61	168	1435	
667	46	60	175	1440	
668	47	64	162	1440	
669	48	66	161	1440	
670	49	60	158	1440	
671	50	60	172	1440	
672	51	62	169	1445	
673	52	63	177	1450	
674	53	66	172	1455	
675	54	69	177	1455	
676	55	60	172	1460	
677	56	68	165	1470	
678	57	66	171	1480	
679	58	62	170	1510	
680	59	66	181	1515	
681	60	60	172	1520	
682	61	66	166	1535	
683	62	63	178	1545	
684	63	69	155	1545	
685	64	68	169	1590	
S.	64			87687	1370

70—83 Jahre.

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirngewicht	Mittel
686	1	73½	161	1145	
687	2	80	170	1212	
688	3	71	160	1214	
689	4	74	151	1215	
690	5	80	170	1220	

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirn-gewicht	Mittel	L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirn-gewicht	Mittel
691	6	73	107	1240		705	20	76	158	1350	
692	7	70	168	1245		706	21	70	164	1350	
693	8	79½	160	1250		707	22	83	178	1355	
694	9	70	166	1260		708	23	77	162	1360	
695	10	71	163	1265		709	24	72	166	1360	
696	11	77	160	1270		710	25	81	165	1380	
697	12	76	169	1275		711	26	72	170	1400	
698	13	80	192	1280		712	27	78	157	1430	
699	14	74	161	1300		713	28	71	162	1475	
700	15	70	168	1305		714	29	73	163	1500	
701	16	76	167	1305		715	30	72	160	1555	
702	17	72	156	1320		716	31	73	153	1555	
703	18	72	160	1330		S.	31			41051	1324
704	19	75	172	1330							

453 weibliche Individuen von 0—82 Jahren, nach dem Alter und dem Gehirngewicht geordnet.

Tabelle III B.

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirngewicht	Mittel
		0—7 Tage.			
1	1	Frühgeb.	47	320	
2	2	Totgeb.	47	330	
3	3	6 Tage	48	340	
4	4	Neugeb.	48,5	350	
5	5	Neugeb.	50	365	
6	6	3 Tage	51	365	
7	7	Totgeb.	54	400	
8	8	3 Tage	52	415	
S.	8			2885	360,6
		1—4 Wochen.			
9	1	13 Tage	46	290	
10	2	9 Tage	49	310	
11	3	12 Tage	45	310	
12	4	10 Tage	50	330	
13	5	12 Tage	50	340	
14	6	9 Tage	48	345	
15	7	20 Tage	47	350	
16	8	3 W.	48	360	
17	9	3 W.	48	390	
18	10	3 W.	46	400	
19	11	15 Tage	52	405	
20	12	24 Tage	49	415	
21	13	22 Tage	52	440	
22	14	3 W.	55	465	
23	15	3 W.	53	470	
S.	15			5620	375
		1—3 Monate.			
24	1	5 W.	48	345	
25	2	5 W.	47	350	
26	3	31 Tage	86	360	
27	4	7 W.	47	365	
28	5	8 W.	44	370	
29	6	2½ M.	48	395	
30	7	2 M.	55	400	
31	8	2½ M.	51	405	
32	9	2½ M.	52	410	
33	10	1¾ M.	51	415	
34	11	6—7 W.	51	415	
35	12	2 M.	52	425	
36	13	2 M.	52	445	
37	14	2 M.	55	450	
38	15	8 W.	53	450	
39	16	7 W.	49	460	
40	17	2 M.	54	465	
41	18	2 M.	57	475	
42	19	2 M.	52	480	
43	20	1½ M.	56	495	
44	21	2 M.	54	495	
45	22	3 M.	57	520	
46	23	2 M.	55	540	
47	24	9 W.	55	550	
48	25	2 M.	53	555	
49	26	2 M.	51	560	
50	27	3 M.	58	570	
S.	27			12 165	450
		3—6 Monate.			
51	1	3½ M.	56	475	
52	2	5 M.	56	475	
53	3	5 M.	55	480	
54	4	4½ M.	57	480	
55	5	4 M.	52	485	
56	6	4 M.	56	500	
57	7	5 M.	—	500	
58	8	5½ M.	52	520	
59	9	6 M.	55	565	
60	10	4 M.	57	580	
61	11	5 M.	65	590	
62	12	6 M.	58	665	
63	13	4 M.	63	685	
64	14	6 M.	62	690	
65	15	4 M.	62	710	
66	16	5 M.	59	782	
67	17	6 M.	64	805	
S.	17			9987	587

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirngewicht	Mittel
		7—12 Monate.			
68	1	8 M.	66	560	
69	2	8 M.	60	610	
70	3	7 M.	64	625	
71	4	9 M.	57	645	
72	5	7 M.	57	655	
73	6	7 M.	65	665	
74	7	8 M.	60	665	
75	8	9 M.	62	670	
76	9	8 M.	64	720	
77	10	10 M.	59	760	
78	11	8 M.	58	795	
79	12	10 M.	59	800	
80	13	9 M.	63	830	
81	14	8 M.	67	840	
82	15	8 M.	67	860	
83	16	9 M.	66	870	
84	17	9 M.	67	915	
85	18	11 M.	69	925	
86	19	11 M.	72	1000	
S.	19			15250	802
		2. Lebensjahr.			
87	1	$1\frac{1}{2}$	74	702	
88	2	1	70	795	
89	3	$1\frac{1}{2}$	70	815	
90	4	1	66	835	
91	5	1	62	855	
92	6	$1\frac{1}{4}$	72	870	
93	7	1	72	875	
94	8	$1\frac{1}{6}$	67	875	
95	9	1	67	905	
96	10	$1\frac{1}{2}$	71	920	
97	11	1	77	960	
98	12	$1\frac{1}{3}$	78	1020	
99	13	$1\frac{1}{4}$	76	1045	
100	14	$1\frac{3}{4}$	80	1070	
S.	14			12542	896
		3. Jahr.			
101	1	2	88	985	
102	2	2	74	1025	
103	3	2	82	1080	
104	4	$2\frac{1}{2}$	89	1080	
105	5	2	85	1120	
106	6	$2\frac{3}{4}$	82	1145	
107	7	$2\frac{3}{4}$	85	1150	
108	8	2	85	1210	
S.	8			8795	1099
		4. Jahr.			
109	1	3	64	730	
110	2	3	82	885	
111	3	$3\frac{1}{2}$	88	890	
112	4	3	70	1070	
113	5	3	85	1115	
114	6	$3\frac{1}{4}$	92	1170	
115	7	3	—	1310	
S.	7			7170	1024
		5. Jahr.			
116	1	4	86	1005	
117	2	4	94	1065	
118	3	4	95	1085	
119	4	4	—	1115	
120	5	4	90	1160	
121	6	4	100	1160	
122	7	4	93	1165	
123	8	4	101	1180	
124	9	$4\frac{1}{2}$	92	1185	
125	10	4	95	1220	
126	11	$4\frac{1}{2}$	91	1300	
127	12	$4\frac{1}{2}$	98	1300	
128	13	4	88	1310	
129	14	4	100	1370	
S.	14			16570	1183
		6. Jahr.			
130	1	5	94	1195	
131	2	$5\frac{3}{4}$	111	1295	
S.	2			2490	1245

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirngewicht	Mittel
		7.—10. Jahr (6—9 J.).			
132	1	9	120	1015	
133	2	7	90	1045	
134	3	8	114	1050	
135	4	9	115	1060	
136	5	7	109	1088	
137	6	8	116	1150	
138	7	6	113	1165	
139	8	6	96	1170	
140	9	7	109	1195	
141	10	9½	113	1235	
142	11	6	114	1260	
143	12	7	121	1310	
144	13	6½	105	1315	
145	14	8	118	1325	
146	15	7½	116	1325	
147	16	8	113	1330	
148	17	9	123	1350	
149	18	8	117	1360	
150	19	6	114	1405	
151	20	8	117	1410	
152	21	7	110	1415	
S.	21			25978	1237
		10—14 Jahre.			
153	1	14	134	1142	
154	2	12	118	1145	
155	3	10	132	1175	
156	4	13	141	1175	
157	5	13	133	1175	
158	6	10	131	1185	
159	7	13	139	1190	
160	8	13	133	1210	
161	9	12	130	1235	
162	10	13	135	1240	
163	11	11	118	1265	
164	12	12	144	1275	
165	13	14	138	1305	
166	14	12	151	1375	
S.	14			17092	1221
		15—19 Jahre.			
167	1	19	150	1095	
168	2	17	150	1165	
169	3	17	148	1170	
170	4	16	138	1200	
171	5	18	147	1200	
172	6	19	158	1220	
173	7	16	157	1230	
174	8	16	—	1255	
175	9	17	—	1260	
176	10	15	150	1270	
177	11	15	170	1280	
178	12	17	—	1380	
179	13	16	140	1400	
180	14	17	160	1405	
181	15	16	149	1420	
182	16	17	156	1420	
183	17	19	162	1430	
184	18	19	171	1430	
185	19	15	155	1445	
186	20	19	162	1495	
S.	20			26170	1309
		20—29 Jahre			
187	1	29	156	1090	
188	2	23	157	1095	
189	3	25	142	1100	
190	4	26	156	1150	
191	5	22	153	1175	
192	6	25	166	1180	
193	7	24	163	1205	
194	8	26	163	1205	
195	9	21	156	1210	
196	10	25	153	1210	
197	11	29	156	1215	
198	12	29	—	1220	
199	13	22	160	1235	
200	14	22	156	1240	
201	15	23	154	1245	
202	16	28	162	1245	
203	17	25	158	1250	

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirngewicht	Mittel
204	18	26	156	1250	
205	19	21	162	1255	
206	20	20	160	1260	
207	21	24	159	1265	
208	22	20	154	1270	
209	23	23	164	1270	
210	24	24	157	1275	
211	25	24	154	1285	
212	26	24	169	1290	
213	27	24	156	1290	
214	28	28	171	1290	
215	29	27	152	1300	
216	30	27	161	1305	
217	31	22	155	1310	
218	32	28	162	1310	
219	33	26	152	1320	
220	34	26	152	1330	
221	35	26	153	1335	
222	36	27	168	1365	
223	37	24	156	1375	
224	38	26	151	1382	
225	39	21	156	1390	
226	40	29	151	1390	
227	41	25	135	1392	
228	42	22	174	1410	
229	43	25	161	1410	
230	44	26	150	1415	
231	45	27	150	1430	
232	46	26	162	1445	
233	47	21	164	1450	
234	48	24	155	1500	
235	49	26	162	1540	
S.	49			63374	1293

30—39 Jahre.

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirngewicht	Mittel
236	1	38	140	1085	
237	2	36	160	1090	
238	3	37	161	1090	
239	4	33	157	1115	
240	5	30	161	1120	
241	6	33	159	1145	
242	7	34	153	1160	
243	8	35	142	1160	
244	9	37	148	1165	
245	10	36	163	1175	
246	11	30	156	1185	
247	12	36	160	1190	
248	13	30	156	1200	
249	14	31	164	1205	
250	15	33	155	1205	
251	16	33	166	1205	
252	17	37	162	1205	
253	18	32	171	1210	
254	19	36	158	1210	
255	20	38	142	1215	
256	21	31	156	1220	
257	22	39	156	1217	
258	23	39	146	1245	
259	24	32	152	1260	
260	25	39	153	1265	
261	26	36	172	1275	
262	27	35	156	1280	
263	28	37	157	1280	
264	29	32	173	1285	
265	30	35	158	1285	
266	31	39	148	1305	
267	32	37	153	1310	
268	33	36	159	1325	
269	34	38	163	1325	
270	35	36	153	1330	
271	36	36	161	1340	
272	37	39	155	1350	
273	38	35	150	1360	
274	39	39	160	1360	
275	40	32	151	1370	
276	41	35	147	1370	
277	42	38	157	1370	
278	43	37	159	1380	
279	44	34	149	1390	
280	45	33	143	1395	
281	46	36	149	1410	
282	47	38	156	1420	
283	48	32	162	1440	

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirngewicht	Mittel
284	49	36	164	1480	
285	50	31	157	1510	
S.	50			63487	1269

40—49 Jahre.

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirngewicht	Mittel
286	1	47	126	1005	
287	2	43	147	1045	
288	3	49	156	1045	
289	4	44	151	1110	
290	5	49	156	1110	
291	6	44	158	1140	
292	7	48	147	1150	
293	8	40	153	1160	
294	9	47	153	1165	
295	10	45	156	1173	
296	11	48	146	1200	
297	12	48	160	1205	
298	13	41	158	1210	
299	14	47	157	1210	
300	15	48	160	1210	
301	16	40	150	1215	
302	17	43	155	1215	
303	18	47	150	1215	
304	19	49	164	1220	
305	20	41	149	1230	
306	21	42	157	1230	
307	22	46	159	1230	
308	23	45	157	1235	
309	24	48	156	1245	
310	25	42	146	1246	
311	26	42	157	1250	
312	27	45	155	1250	
313	28	42	147	1255	
314	29	49	160	1260	
315	30	44	159	1260	
316	31	49	167	1260	
317	32	42	156	1262	
318	33	42	149	1270	
319	34	41	156	1280	
320	35	44	152	1280	
321	36	44	167	1280	
322	37	45	158	1280	
323	38	48	153	1283	
324	39	$40\frac{3}{4}$	160	1290	
325	40	44	160	1290	
326	41	44	158	1300	
327	42	41	161	1310	
328	43	44	168	1310	
329	44	47	151	1310	
330	45	48	163	1315	
331	46	42	165	1315	
332	47	44	161	1320	
333	48	43	165	1325	
334	49	40	154	1335	
335	50	44	160	1375	
336	51	47	155	1380	
337	52	44	163	1390	
338	53	48	165	1390	
339	54	43	159	1400	
340	55	46	152	1400	
341	56	46	152	1415	
342	57	47	146	1420	
343	58	44	180	1430	
S.	58			72911	1257

50—59 Jahre.

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirngewicht	Mittel
344	1	56	144	1085	
345	2	58	156	1085	
346	3	57	168	1120	
347	4	57	160	1125	
348	5	50	158	1135	
349	6	50	157	1140	
350	7	58	155	1140	
351	8	56	159	1150	
352	9	56	160	1150	
353	10	53	150	1160	
354	11	53	147	1170	
355	12	52	148	1180	
356	13	51	156	1200	
357	14	53	158	1200	
358	15	58	158	1200	
359	16	50	168	1205	
360	17	59	155	1209	

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirngewicht	Mittel
361	18	56	154	1218	
362	19	54	147	1220	
363	20	52	160	1222	
364	21	57	161	1222	
365	22	50	160	1230	
366	23	57	144	1230	
367	24	52	161	1240	
368	25	54	153	1244	
369	26	50	168	1255	
370	27	58	166	1259	
371	28	54	147	1260	
372	29	58	170	1265	
373	30	53	153	1275	
374	31	53	156	1285	
375	32	58	163	1285	
376	33	56	153	1300	
377	34	54	155	1310	
378	35	54	160	1320	
379	36	56	154	1320	
380	37	55	156	1325	
381	38	51	158	1330	
382	39	51	151	1335	
383	40	57	157	1335	
384	41	57	161	1345	
385	42	54	154	1350	
386	43	50	156	1355	
387	44	55	155	1355	
388	45	50	148	1370	
389	46	53	150	1370	
390	47	59	157	1375	
391	48	59	161	1375	
392	49	52	150	1395	
393	50	53	157	1410	
394	51	56	158	1420	
395	52	58	167	1445	
S.	52			65504	1260

60—69 Jahre.

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirngewicht	Mittel
396	1	68	157	1080	
397	2	62	161	1085	
398	3	63	155	1090	
399	4	62	162	1125	
400	5	63	157	1130	
401	6	64	155	1130	
402	7	63	—	1142	
403	8	61	152	1150	
404	9	66	152	1177	
405	10	65	151	1180	
406	11	65	159	1185	
407	12	68	153	1185	
408	13	61	154	1190	
409	14	69	154	1210	
410	15	60	160	1215	
411	16	62	153	1220	
412	17	66	157	1230	
413	18	69	166	1230	
414	19	63	149	1240	
415	20	66	158	1240	
416	21	62	157	1252	
417	22	60	160	1255	
418	23	67	143	1260	
419	24	69	150	1260	
420	25	61	155	1270	
421	26	66	153	1270	
422	27	65	157	1275	
423	28	63	162	1275	
424	29	69	159	1285	
425	30	61	168	1290	
426	31	66	156	1305	
427	32	64	157	1315	
428	33	65	146	1340	
S.	33			40085	1215

70—82 Jahre.

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirngewicht	Mittel
429	1	72	143	982	
430	2	72	158	1025	
431	3	72	153	1030	
432	4	76	159	1030	
433	5	73	148	1095	
434	6	73	152	1100	
435	7	75	147	1100	
436	8	82	150	1100	
437	9	72	154	1115	

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirngewicht	Mittel	L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirngewicht	Mittel
438	10	70	149	1116		447	19	71	151	1210	
439	11	70	157	1140		448	20	73	161	1210	
440	12	72	150	1140		449	21	73	160	1280	
441	13	76	154	1155		450	22	70	154	1285	
442	14	76	155	1155		451	23	70	163	1295	
443	15	73	161	1160		452	24	70	163	1335	
444	16	74	142	1180		453	25	74	152	1340	
445	17	74	154	1190		S.	25			28981	1159
446	18	71	149	1210							

A.
275 männliche Individuen von 0—19 Jahren.
40—178 cm.
Nach der Körperlänge geordnet.

B.
191 weibliche Individuen von 0—19 Jahren.
38—171 cm.
Nach der Körperlänge geordnet.

Tabelle IV.

Zahl der Fälle	Grösse cm	Alter	Mittl. Gehirngewicht	Zunahme in gr pro 1 ccm	Zahl der Fälle	Grösse cm	Alter	Mittl. Gehirngewicht	Zunahme in gr pro 1 ccm
7	40—44	2—23 T.	240	—	7	38—44	1 T.—2 M.	247	—
6	45—46	0—3½ M.	339	10,5	3	45—46	12 T.—3 W.	333	—
16	47—48	0—3½ M.	360	24,0	13	47—48	0—2½ M.	344	5,5
14	49—50	2 T.—3 M.	408	10,0	7	49—50	0—7 W.	378	22,5
18	51—52	0—3 M.	428	19,0	15	51—52	3 T.—5½ M.	442	32,0
15	53—54	14 T.—4 M.	476	28,0	6	53—54	0—2 M.	472	15,0
18	55—56	3 T.—5 M.	532	28,0	11	55—56	3 W.—6 M.	494	11,0
6	57—58	2—3 M.	606	37,0	9	57—58	2—9 M.	598	52,0
7	59—60	3 M.—1¾ J.	653	23,5	5	59—60	5—10 M.	723	62,5
14	61—65	3 M.—1½ J.	691	7,6	13	61—65	4 M.—1 J.	707	—
8	66—70	5 M.—1½ J.	884	38,6	13	66—70	8 M.—3 J.	853	18,5
9	71—75	11 M.—2¼ J.	1001	21,4	7	71—75	11 M.—2 J.	928	15,0
13	76—80	16 M.—4 J.	1119	21,6	4	76—80	16 M.—1¾ J.	1023	15,0
3	81—85	1¼—5 J.	1106	—	7	81—85	2—3 J.	1100	15,4
5	86—90	2½—4 J.	1157	—	7	86—90	2—7 J.	1068	7,3
12	91—95	2½—5 J.	1291	26,8	8	91—95	3—5 J.	1173	12,8
10	96—100	3—5½ J.	1334	12,6	4	96—100	4—6 J.	1237	2,0
6	101—105	3½—7 J.	1419	17,0	2	101—105	4—6 J.	1247	1,4
9	106—110	5—9 J.	1310	—	3	106—110	6—7 J.	1254	—
5	111—115	6—7 J.	1404	—	8	111—115	5—9 J.	1220	—
8	116—120	7—14 J.	1355	—	8	116—120	7—12 J.	1249	—
7	121—125	7—12 J.	1365	—	2	121—125	7—9 J.	1330	—
6	126—135	9—13 J.	1311	—	7	126—135	10—14 J.	1194	—
12	136—145	11—17 J.	1363	—	6	136—145	12—16 J.	1257	—
13	146—155	12—18 J.	1426	—	8	146—155	12—19 J.	1267	—
14	156—165	14—19 J.	1386	—	6	156—165	16—19 J.	1366	—
12	166—178	16—19 J.	1439	—	2	170—171	15—19 J.	1350	—
275					191				

A. 255 Männer von 20—49 Jahren, B. 155 Weiber von 20—49 Jahren, nach der Körperlänge geordnet.

Tabelle V.

Zahl der Fälle	Grösse		Mittl. Gehirngewicht	Zahl der Fälle	Grösse		Mittl. Gehirngewicht	Differenz zwischen M. u. W.
				2	126—135		1198	
				5	140—145		1191	
				4	146		1277	
				4	147	1257 (26 F.)	1210	
				2	148		1235	
				4	149		1325	
				5	150		1327	
				5	151		1312	
				7	152		1300	
				10	153		1239	
				4	154		1281	
6	150—155		1334	7	155	1261 (88 F.)	1315	
4	156		1319	20	156		1230	— 89
6	157	1335 (29 F.)	1360	10	157		1257	—103
4	158		1339	7	158		1239	—121
4	159		1310	7	159		1286	— 24
5	160		1340	11	160		1251	— 89
12	161		1360	7	161		1270	— 90
10	162		1411	7	162		1348	— 69
12	163		1406	6	163		1269	—137
9	164		1372	5	164		1325	— 47
12	165	1405 (136 F.)	1433	3	165	1302 (41 F.)	1343	— 90
21	166		1425	2	166		1192	—133
16	167		1376	2	167		1270	—106
11	168		1481	2	168		1337	—144
12	169		1436	6	169—174		1271	—166
21	170		1370	1	180		(1430)	
20	171		1431					
22	172		1412					
14	173		1460					
9	174		1418					
7	175	1422 (90 F.)	1414					
1	176		(1343)					
3	177		1466					
3	178		1363					
3	179		1409					
8	180—185		1399					
255		1404		155			1271	

A. Männer von 50—83 Jahren. B. Weiber von 50—82 Jahren,

nach der Körperlänge geordnet.

Tabelle VI.

Zahl der Fälle	Grösse		Mittl. Gehirn-gewicht	Zahl der Fälle	Grösse		Mittl. Gehirn-gewicht	Differenz zwischen M. u. W.
				5	142—145		1148	
				1	146		(1340)	
				4	147	1203	1187	
				3	148	(22 F.)	1215	
				3	149		1188	
				6	150		1237	
				3	151		1241	
				4	152		1192	
				8	153		1239	
				9	154		1192	
10	139—155		1301	8	155	1220	1207	
3	156		1336	7	156	(70 F.)	1257	— 79
3	157	1314	1366	11	157		1243	—123
6	158	(34 F.)	1305	7	158		1221	— 81
2	159		1260	4	159		1162	— 98
10	160		1324	9	160		1225	— 99
8	161		1257	7	161		1234	— 23
8	162		1395	3	162		1313	— 82
10	163		1349	2	163		1310	— 39
9	164		1412	—	164	1263	—	—
5	165	1371	1446	—	165	(19 F.)	—	—
10	166	(91 F.)	1433	1	166		(1259)	—
7	167		1362	1	167		(1445)	—
11	168		1369	4	168		1217	—152
12	169		1396	1	170		(1265)	—
11	170		1308					
5	171		1385					
13	172		1422					
8	173		1328					
9	174		1365					
6	175	1377	1366					
2	176	(61 F.)	1342					
6	177		1360					
5	178		1367					
1	179		(1430)					
6	180—192		1402					
186		1362		111		1224		

A. Männer von 20 bis über 83 Jahre, B. Weiber von 20 bis über 82 Jahre, nach der Körperlänge geordnet.

Tabelle VII.

Zahl der Fälle	Grösse		Mittl. Gehirngewicht	Ueber 1400 g in %	Zahl der Fälle	Grösse		Mittl. Gehirngewicht	Ueber 1275 g in %	Differenz zwischen M. u. W.
					2	126—135		1198	—	
					10	140—145		1169	10,0	
					5	146		1290	40,0	
					8	147	1232	1196	12,5	
					5	148	(48 F.)	1223	40,0	
					7	149		1266	28,5	
					11	150		1278	45,0	
					8	151		1286	62,5	
					11	152		1261	63,6	
					18	153		1234	38,8	
					13	154		1220	38,4	
16	139—155		1317	18,7	15	155	1243	1258	40,0	
7	156		1327	14,3	27	156	(158 F.)	1237	37,0	— 90
9	157	1324	1360	44,5	21	157		1250	38,0	—110
10	158	(63 F.)	1318	30,0	14	158		1230	35,7	— 88
6	159		1293	16,4	11	159		1241	36,3	— 52
15	160		1329	26,6	20	160		1240	25,0	— 89
20	161		1319	35,0	14	161		1252	50,0	— 67
18	162		1407	55,0	10	162		1338	60,0	— 69
22	163		1380	45,4	8	163		1279	65,0	—101
18	164		1392	38,8	5	164		1325	40,0	— 67
17	165	1391	1436	64,7	3	165	1290	1343	—	— 77
31	166	(227 F.)	1434	64,5	3	166	(60 F.)	1215	—	—203
23	167		1372	47,8	3	167		1328	—	— 44
22	168		1425	63,6	6	168		1259	50,0	—166
24	169		1416	58,3	7	169—174		1289	71,4	—127
32	170		1348	31,2	1	180		(1430)	—	—
25	171		1422	64,0						
35	172		1415	54,2						
22	173		1412	59,1						
18	174		1392	50,0						
13	175	1404	1392	30,7						
3	176	(151 F.)	1342	33,3						
9	177		1395	55,5						
8	178		1366	25,0						
4	179		1414	75,0						
14	180—192		1400	57,1						
441		1387			266		1250			



716 Gehirngewichte männlicher Individuen, nach der Körpergrösse geordnet.

a. Von 0—19 Jahren.

Tabelle VIII A.

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirngewicht	Mittel
1	1	2 Tage	40	205	
2	2	3 Tage		283	
3	3	23 Tage	41	235	
4	4	3 Tage	42	255	
5	5	2 Tage	43	225	
6	6	4 Tage		240	
7	7	1 Std.	44	240	
S.	7			1683	240
8	1	13 Tage	45	270	
9	2	2 Tage		270	
10	3	14 Tage		335	
11	4	21 Tage		335	
12	5	3 Tage		365	
13	6	9 W.	46	460	
S.	6			2035	339
14	1	3 W.	47	330	
15	2	10 Tage		345	
16	3	14 Tage		360	
17	4	5 W.		400	
18	5	7 Tage		406	
19	6	3 Tage	48	255	
20	7	1 Tag		295	
21	8	3 Tage		320	
22	9			335	
23	10	Neugeb.		338	
24	11	12 Tage		355	
25	12	in partu gestorben		375	
26	13	2 M.		385	
27	14	6 W.		390	
28	15	3½ M.		425	
29	16			455	
S.	16			5769	360

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirngewicht	Mittel
30	1	1 M.	49	370	
31	2	1 M.		375	
32	3	2 M.		390	
33	4	14 Tage		405	
34	5	14 Tage		440	
35	6	3 M.		440	
36	7	5 W.	50	375	
37	8	2 Tage		390	
38	9	1 M.		405	
39	10	5 W.		410	
40	11	3 M.		410	
41	12			420	
42	13	1 M.		440	
43	14	6 W.		450	
S.	14			5720	408
44	1	5 Tage	51	320	
45	2			380	
46	3	11 W.		385	
47	4	1½ M.		430	
48	5			445	
49	6	2 M.		455	
50	7	2½ M.		465	
51	8	6 W.		485	
52	9	0 Tage		485	
53	10	0 Tage	52	365	
54	11	12 Tage		370	
55	12	6 W.		390	
56	13	4 Tage		400	
57	14	4 W.		410	
58	15	20 Tage		430	
59	16	2 M.		470	
60	17	3 M.		500	
61	18	1½ Tage		540	
S.	18			7725	428

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirn-gewicht	Mittel
62	1	2 M.	53	390	
63	2	8 W.		405	
64	3	6 W.		435	
65	4	2½ M.		445	
66	5	2 M.		450	
67	6			450	
68	7	1 M.		480	
69	8	7 W.		495	
70	9	3 M.		510	
71	10	6 W.		550	
72	11	3 M.	54	455	
73	12	1 M.		470	
74	13	14 Tage		485	
75	14	4 M.		530	
76	15	4 M.		590	
S.	15			7140	476
77	1	1 M.	55	470	
78	2	3 Tage		480	
79	3	2½ M.		500	
80	4			500	
81	5	3½ M.		515	
82	6	7 W.		525	
83	7	5 M.		545	
84	8			550	
85	9	3 W.		555	
86	10	½ J.		565	
87	11	8 M.		790	
88	12	4 M.	56	400	
89	13	2½ M.		450	
90	14			515	
91	15	1 M.		520	
92	16	2 M.		540	
93	17	2 M.		550	
94	18	3 M.		600	
S.	18			9570	532
95	1	3 M.	57	465	
96	2	3 M.		550	
97	3			600	
98	4	2 M.	58	540	
99	5	2 M.	58	610	
100	6	3 M.		615	
S.	6			3640	606
101	1	11 M.	59	580	
102	2	13 W.		585	
103	3	5 M.		595	
104	4	3 M.		665	
105	5	4 M.	60	600	
106	6	4 M.		655	
107	7	4 M.		700	
108	8	6½ M.		740	
109	9	1¾ J.		760	
S.	9			5880	653
110	1	3 M.	61	520	
111	2	5 M.		620	
112	3	3 M.		700	
113	4	6 M.		740	
114	5	1½ J.	62	630	
115	6	7 M.		690	
116	7	9 M.	63	460	
117	8	4 M.		685	
118	9	1⅙ J.		755	
119	10	11 M.		780	
120	11	7 M.		800	
121	12	6 M.	64	790	
122	13	5½ J.	65	700	
123	14	11 M.		810	
S.	14			9680	691
124	1	7 M.	66	675	
125	2	7 M.	67	720	
126	3	5½ M.		775	
127	4	15 M.	68	970	
128	5	1½ J.		800	
129	6	19 M.		1030	
130	7	11 M.		1040	
131	8	11 M.	69	1065	
S.	8			7075	884

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirngewicht	Mittel
132	1	1	72	845	
133	2	2		920	
134	3	1		930	
135	4	1½	73	830	
136	5	1		915	
137	6	1½		1100	
138	7	11 M.		1205	
139	8	1	74	1120	
140	9	2¼	75	1150	
S.	9			9015	1001
141	1	16 M.	76	1110	
142	2	1¾		1130	
143	3	1¼		1240	
144	4	4	77	1280	
145	5	1¼	78	1095	
146	6	1¼		1170	
147	7	1½	79	1070	
148	8	1¼		1090	
149	9	2	80	950	
150	10	1¾		1070	
151	11	2½		1075	
152	12	1½		1080	
153	13	1½		1190	
S.	13			14550	1119
154	1	5/4	82	1315	
155	2	2	83	990	
156	3	5	85	1005	
S.	3			3320	1106
157	1	2¾	86	1225	
158	2	4	88	1080	
159	3	2½	90	1030	
160	4	2½		1160	
161	5	3		1290	
S.	5			5785	1157
162	1	2½	91	1220	
163	2	3		1230	
164	3	3		1425	

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirngewicht	Mittel
165	4	4	92	1040	
166	5	3		1520	
167	6	3	93	1215	
168	7	4	94	1160	
169	8	3½		1180	
170	9	4		1240	
171	10	5	95	1300	
172	11	4		1460	
173	12	4		1505	
S.	12			15495	1291
174	1	3	96	1200	
175	2	3	97	1505	
176	3	4	98	1205	
177	4	4¾		1400	
178	5	4		1435	
179	6	4	99	1305	
180	7	5		1420	
181	8	4	100	1200	
182	9	4		1330	
183	10	5½		1345	
S.	10			13345	1334
184	1	7	101	1330	
185	2	3½		1430	
186	3	5	104	1295	
187	4	5	105	1420	
188	5	5		1455	
189	6	6		1575	
S.	6			8505	1419
190	1	5½	107	1465	
191	2	6		1480	
192	3	5	108	1235	
193	4	8	109	1105	
194	5	9		1315	
195	6	7	110	1168	
196	7	8		1245	
197	8	6		1375	
198	9	5		1490	
S.	9			11788	1310

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirngewicht	Mittel
199	1	6	113	1335	
200	2	7	115	1337	
201	3			1400	
202	4	6		1410	
203	5	$6^1/_2$		1540	
S.	5			7022	1404
204	1	10	117	1430	
205	2	14	118	1190	
206	3	7		1275	
207	4	13		1315	
208	5	8		1350	
209	6	$7^3/_4$		1405	
210	7	10		1440	
211	8	8	119	1440	
S.	8			10845	1355
212	1	11	122	1075	
213	2	8		1370	
214	3	$7^3/_4$	123	1355	
215	4	8	124	1435	
216	5	9		1435	
217	6	12	125	1350	
218	7	8		1540	
S.	7			9560	1365
219	1	12	130	1345	
220	2	9	131	1240	
221	3	12		1395	
222	4	$10^3/_4$	134	1395	
223	5	13	135	1270	
224	6	10		1280	
S.	6			7865	1311
225	1	14	137	1300	
226	2	13	138	1265	
227	3	16		1385	
228	4	11	140	1090	
229	5	12		1500	
230	6	11		1500	
231	7	14	141	1350	
232	8	17	142	1130	
233	9	16		1600	
234	10	15	143	1450	
235	11	11	144	1330	
236	12	17	145	1460	
S.	12			16360	1363
237	1	14	146	1365	
238	2	13		1480	
239	3	12		1485	
240	4	14	147	1380	
241	5	18		1435	
242	6	18	148	1320	
243	7	13	149	1620	
244	8	17	150	1280	
245	9	15	153	1315	
246	10	17	155	1405	
247	11	14		1435	
248	12	18		1500	
249	13	17		1520	
S.	13			18540	1426
250	1	16	156	1475	
251	2	17	158	1305	
252	3	14		1320	
253	4	18		1378	
254	5	14	159	1340	
255	6	$17^1/_2$	160	1320	
256	7	18		1330	
257	8	16		1390	
258	9	16	161	1340	
259	10	19	162	1432	
260	11	18	163	1335	
261	12	19		1435	
262	13	17		1480	
263	14	19	165	1535	
S.	14			19405	1386
264	1	16	166	1360	
265	2	18	167	1590	

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirn-gewicht	Mittel
266	3	19	169	1420	
267	4	19		1440	
268	5	19		1555	
269	6	19	170	1400	
270	7	19		1540	
271	8	19	172	1400	

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirn-gewicht	Mittel
272	9	19	173	1455	
273	10	18	175	1410	
274	11	19		1410	
275	12	18	178	1295	
S.	12			17275	1439

b. Von 20—49 Jahren.

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirn-gewicht	Mittel
276	1	42	150	1375	
277	2	31	151	1445	
278	3	46	153	1345	
279	4	30	154	1310	
280	5	21	155	1260	
281	6	44		1270	
S.	6			8005	1334
282	1	26	156	1254	
283	2	27		1260	
284	3	29		1370	
285	4	40		1395	
S.	4			5279	1319
286	1	29	157	1010	
287	2	42		1285	
288	3	29		1315	
289	4	42		1470	
290	5	39		1530	
291	6	47		1550	
S.	6			8160	1360
292	1	42	158	1225	
293	2	36		1290	
294	3	28		1402	
295	4	25		1440	
S.	4			5357	1339
296	1	26	159	1145	
297	2	30		1215	
298	3	28		1340	
299	4	21		1540	
S.	4			5240	1310

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirn-gewicht	Mittel
300	1	49	160	1260	
301	2	26		1320	
302	3	28		1330	
303	4	24		1350	
304	5	24		1410	
S.	5			6700	1340
305	1	40	161	1025	
306	2	20		1065	
307	3	43		1270	
308	4	22		1285	
309	5	42		1355	
310	6	42		1395	
311	7	28		1440	
312	8	28		1470	
313	9	22		1480	
314	10	42		1505	
315	11	30		1512	
316	12	26		1515	
S.	12			16317	1360
317	1	30	162	1320	
318	2	21		1325	
319	3	27		1325	
320	4	31		1377	
321	5	35		1400	
322	6	22		1445	
323	7	38		1455	
324	8	49		1462	
325	9	43		1475	
320	10	47		1530	
S.	10			14114	1411

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirngewicht	Mittel
327	1	28	163	1290	
328	2	45		1300	
329	3	36		1315	
330	4	29		1320	
331	5	22		1365	
332	6	30		1375	
333	7	34		1425	
334	8	22		1445	
335	9	27		1450	
336	10	28		1480	
337	11	23		1545	
338	12	22		1570	
S.	12			16880	1406
339	1	$29\frac{3}{4}$	164	1203	
340	2	27		1250	
341	3	33		1300	
342	4	41		1330	
343	5	$20\frac{1}{2}$		1345	
344	6	43		1390	
345	7	25		1460	
346	8	23		1500	
347	9	49		1570	
S.	9			12348	1372
348	1	33	165	1230	
349	2	37		1285	
350	3	27		1300	
351	4	46		1310	
352	5	37		1320	
353	6	23		1450	
354	7	20		1460	
355	8	33		1470	
356	9	46		1525	
357	10	31		1545	
358	11	47		1605	
359	12	34		1695	
S.	12			17195	1433
360	1	30	166	1215	
361	2	52		1225	
362	3	35		1265	
363	4	$46\frac{1}{2}$	166	1315	
364	5	42		1360	
365	6	28		1380	
366	7	48		1380	
367	8	31		1400	
368	9	49		1405	
369	10	37		1425	
370	11	26		1425	
371	12	22		1460	
372	13	22		1465	
373	14	45		1470	
374	15	34		1480	
375	16	20		1490	
376	17	42		1510	
377	18	25		1530	
378	19	42		1540	
379	20	41		1565	
380	21	25		1630	
S.	21			29935	1425
381	1	23	167	1170	
382	2	27		1255	
383	3	36		1275	
384	4	30		1282	
385	5	44		1285	
386	6	46		1290	
387	7	43		1345	
388	8	25		1380	
389	9	28		1380	
390	10	27		1395	
391	11	45		1420	
392	12	32		1435	
393	13	23		1475	
394	14	23		1520	
395	15	47		1555	
396	16	22		1565	
S.	16			22027	1376
397	1	22	168	1345	
398	2	$40\frac{1}{2}$		1370	
399	3	23		1430	
400	4	44		1510	

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirn-gewicht	Mittel
401	5	48	168	1515	
402	6	41		1465	
403	7	49		1490	
404	8	28		1510	
405	9	23		1520	
406	10	27½		1530	
407	11	37		1585	
S.	11			16300	1481
408	1	44	169	1335	
409	2	23		1340	
410	3	20		1342	
411	4	37		1350	
412	5	21		1385	
413	6	30		1410	
414	7	32		1430	
415	8	23		1455	
416	9	22		1500	
417	10	25		1525	
418	11	47		1540	
419	12	21		1630	
S.	12			17242	1436
420	1	21	170	1112	
421	2	25		1265	
422	3	35		1300	
423	4	24		1300	
424	5	44		1310	
425	6	25		1330	
426	7	25		1330	
427	8	48		1330	
428	9	44		1345	
429	10	20		1350	
430	11	42		1350	
431	12	22		1355	
432	13	22		1370	
433	14	22		1370	
434	15	36		1410	
435	16	24		1430	
436	17	49		1460	
437	18	23		1490	
438	19	47½		1495	

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirn-gewicht	Mittel
439	20	28½	170	1520	
440	21	22		1545	
S.	21			24767	1370
441	1	30	171	1110	
442	2	31		1225	
443	3	27½		1318	
444	4	48		1330	
445	5	47		1340	
446	6	32		1348	
447	7	24		1390	
448	8	47		1415	
449	9	37		1420	
450	10	45		1440	
451	11	29		1440	
452	12	28		1480	
453	13	23		1485	
454	14	26		1495	
455	15	27		1500	
456	16	24		1530	
457	17	24		1530	
458	18	23		1570	
459	19	25		1580	
460	20	26		1685	
S.	20			28631	1431
461	1	32	172	1242	
462	2	30		1250	
463	3	49		1290	
464	4	37		1320	
465	5	29		1345	
466	6	41½		1360	
467	7	41¾		1365	
468	8	41		1372	
469	9	33		1380	
470	10	35		1380	
471	11	22		1385	
472	12	29		1390	
473	13	33		1395	
474	14	26		1420	
475	15	34		1460	
476	16	34		1485	

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirngewicht	Mittel
477	17	20	172	1495	
478	18	31		1500	
479	19	34		1515	
480	20	36		1560	
481	21	49		1570	
482	22	22		1585	
S.	22			31062	1412
483	1	38	173	1190	
484	2	42		1360	
485	3	40		1370	
486	4	39		1430	
487	5	46		1445	
488	6	24		1465	
489	7	27		1465	
490	8	40		1470	
491	9	44		1480	
492	10	20		1495	
493	11	42		1530	
494	12	47½		1570	
495	13	34		1580	
496	14	43		1590	
S.	14			20440	1460
497	1	45	174	1250	
498	2	48		1265	
499	3	45		1280	
500	4	44		1370	
501	5	45		1455	
502	6	29		1470	
503	7	30		1530	
504	8	42		1565	
505	9	43		1580	
S.	9			12765	1418

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirngewicht	Mittel
506	1	38	175	1315	
507	2	25		1325	
508	3	28		1340	
509	4	30		1395	
510	5	36		1440	
511	6	24		1535	
512	7	33		1550	
S.	7			9900	1414
513	1	21	176	1343	
514	1	45	177	1320	
515	2	31		1525	
516	3	24		1555	
S.	3			4400	1466
517	1	25	178	1300	
518	2	37		1340	
519	3	24		1450	
S.	3			4090	1363
520	1	40	179	1330	
521	2	21		1410	
522	3	22		1487	
S.	3			4227	1409
523	1	47	180	1140	
524	2	33		1455	
525	3	42	181	1480	
526	4	34		1550	
527	5	33	183	1415	
528	6	39	184	1295	
529	7	41		1430	
530	8	32	185	1430	
S.	8			11195	1399

c. Von 50—83 Jahren.

531	1	51	139	1085	
532	2	74	151	1215	
533	3	54	152	1340	
534	4	65		1345	
535	5	60	153	1092	
536	6	52		1260	
537	7	73		1555	
538	8	67	155	1250	

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirn-gewicht	Mittel	L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirn-gewicht	Mittel
539	9	65	155	1330		569	5	74	161	1300	
540	10	69		1545		570	6	60		1325	
S.	10			13017	1301	571	7	60		1380	
						572	8	66		1440	
541	1	55	156	1180		S.	8			10060	1257
542	2	72		1320							
543	3	54		1510		573	1	59	162	1275	
S	3			4010	1336	574	2	55		1320	
						575	3	50		1345	
544	1	66	157	1320		576	4	77		1360	
545	2	57		1330		577	5	54		1410	
546	3	78		1430		578	6	64		1440	
S.	3			4080	1366	579	7	71		1475	
						580	8	54		1540	
547	1	57	158	1170		S.	8			11165	1395
548	2	68		1255							
549	3	66		1305		581	1	67	163	1195	
550	4	53		1310		582	2	63		1225	
551	5	76		1350		583	3	69		1245	
552	6	60		1440		584	4	71		1265	
S.	6			7830	1305	585	5	69		1335	
						586	6	60		1395	
553	1	62	159	1245		587	7	51		1405	
554	2	52		1275		588	8	50		1420	
S.	2			2520	1260	589	9	73		1500	
						590	10	50		1510	
555	1	57	160	1110		S.	10			13495	1349
556	2	71		1214							
557	3	79		1250		591	1	69	164	1270	
558	4	77		1270		592	2	62		1320	
559	5	69		1310		593	3	70		1350	
560	6	72		1330		594	4	67		1380	
561	7	58		1360		595	5	66		1385	
562	8	64		1400		596	6	52		1424	
563	9	57		1440		597	7	55		1460	
564	10	72		1550		598	8	50		1530	
S.	10			13234	1324	599	9	57		1595	
						S.	9			12714	1412
565	1	50	161	1040							
566	2	73		1145		600	1	81	165	1380	
567	3	54		1175		601	2	63		1400	
568	4	53		1255		602	3	55		1465	

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirn-gewicht	Mittel
603	4	68	165	1470	
604	5	58		1515	
S.	5			7230	1446
605	1	70	166	1260	
606	2	68		1320	
607	3	72		1360	
608	4	52		1380	
609	5	52		1400	
610	6	56		1405	
611	7	53		1445	
612	8	52		1525	
613	9	66		1535	
614	10	53		1705	
S.	10			14335	1433
615	1	53	167	1170	
616	2	76		1305	
617	3	57		1380	
618	4	53		1405	
619	5	54		1415	
620	6	50		1425	
621	7	52		1435	
S.	7			9535	1362
622	1	70	168	1245	
623	2	58		1280	
624	3	60		1280	
625	4	70		1305	
626	5	55		1350	
627	6	69		1350	
628	7	55		1415	
629	8	57		1420	
630	9	61		1435	
631	10	59		1475	
632	11	50		1510	
S.	11			15065	1369
633	1	76	169	1275	
634	2	60		1300	
635	3	69		1310	
636	4	51		1315	
637	5	50	169	1320	
638	6	57		1400	
639	7	61		1410	
640	8	53		1415	
641	9	69		1430	
642	10	62		1445	
643	11	56		1545	
644	12	68		1590	
S.	12			16755	1396
645	1	61	170	1010	
646	2	80		1212	
647	3	80		1220	
648	4	57		1260	
649	5	51		1320	
650	6	56		1330	
651	7	60		1340	
652	8	64		1355	
653	9	72		1400	
654	10	59		1430	
655	11	62		1510	
S.	11			14387	1308
656	1	68	171	1160	
657	2	50		1280	
658	3	66		1480	
659	4	50		1485	
660	5	57		1520	
S.	5			6925	1385
661	1	56	172	1260	
662	2	75		1330	
663	3	58		1390	
664	4	61		1400	
665	5	62		1400	
666	6	50		1410	
667	7	52		1420	
668	8	60		1440	
669	9	58		1443	
670	10	66		1455	
671	11	53		1490	

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirn-gewicht	Mittel
672	12	60	172	1520	
673	13	52		1530	
S.	13			18488	1422
674	1	50	173	1205	
675	2	50		1245	
676	3	59		1265	
677	4	53		1310	
678	5	60		1350	
679	6	53		1375	
680	7	60		1430	
681	8	52		1445	
S.	8			10625	1328
682	1	54	174	1235	
683	2	54		1250	
684	3	68		1260	
685	4	58		1380	
686	5	56		1385	
687	6	53		1404	
688	7	65		1430	
689	8	58		1435	
690	9	50		1512	
S.	9			12291	1365
691	1	57	175	1315	
692	2	50		1330	
693	3	58		1355	
694	4	63		1370	
695	5	64		1385	
696	6	60		1440	
S.	6			8195	1366

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirn-gewicht	Mittel
697	1	—	176	1280	
698	2	51		1405	
S.	2			2685	1342
699	1	54	177	1020	
700	2	69		1380	
701	3	58		1385	
702	4	63		1450	
703	5	69		1455	
704	6	50		1470	
S.	6			8160	1360
705	1	53	178	1240	
706	2	57		1340	
707	3	83		1355	
708	4	59		1358	
709	5	63		1545	
S.	5			6838	1367
710	1	50	179	1430	
711	1	50	181	1235	
712	2	59		1370	
713	3	66		1515	
714	4	54	183	1550	
715	5	55	189	1315	
716	6	80	192	1280	
S.	6			8415	1402

Weibliche Individuen, nach der Körpergrösse geordnet.

a. Von 0—19 Jahren.

Tabelle VIII B.

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirngewicht	Mittel
1	1	3 Tage	38	200	
2	2	1 Tag	42	183	
3	3	3 Tage	42	240	
4	4	3 Tage	43	240	
5	5	14 Tage		250	
6	6	3 Tage	44	250	
7	7	8 W.		370	
S.	7			1733	247
8	1	12 Tage	45	310	
9	2	13 Tage	46	290	
10	3	3 W.	46	400	
S.	3			1000	333
11	1	6 W.	47	240	
12	2	0 Tag		320	
13	3	0 Tag		330	
14	4	3 W.		350	
15	5	5 W.		350	
16	6	7 W.		365	
17	7	6 Tage	48	340	
18	8	9 Tage		345	
19	9	5 W.		345	
20	10	0 Tag		350	
21	11	3 W.		360	
22	12	3 W.		390	
23	13	$2\frac{1}{2}$ M.		395	
S.	13			4480	344
24	1	9 Tage	49	310	
25	2	24 Tage		415	
26	3	—		430	
27	4	7 W.		460	
28	5	10 Tage	50	330	
29	6	12 Tage		340	
30	7	0 Tag		365	
S.	7			2650	378

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirngewicht	Mittel
31	1	3 Tage	51	365	
32	2	$2\frac{1}{2}$ M.		405	
33	3	6—7 W.		415	
34	4	7 W.		415	
35	5	—		450	
36	6	2 M.		560	
37	7	2 M.	52	405	
38	8	$2\frac{1}{2}$ M.		410	
39	9	3 Tage		415	
40	10	2 M.		425	
41	11	3 W.		440	
42	12	2 M.		445	
43	13	2 M.		480	
44	14	4 M.		485	
45	15	$5\frac{1}{2}$ M.		520	
S.	15			6635	442
46	1	2 M.	53	450	
47	2	3 W.		470	
48	3	2 M.		555	
49	4	0 Tag	54	400	
50	5	2 M.		465	
51	6	2 M.		495	
S.	6			2835	472
52	1	2 M.	55	400	
53	2	2 M.		450	
54	3	3 W.		465	
55	4	5 M.		480	
56	5	2 M.		540	
57	6	9 W.		550	
58	7	$\frac{1}{2}$ Jahr		565	
59	8	$3\frac{1}{2}$ M.	56	475	
60	9	5 M.		475	
61	10	$1\frac{1}{2}$ M.		495	
62	11	4 M.		500	
S.	11			5395	494

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirngewicht	Mittel
63	1	2 M.	57	475	
64	2	4½ M.		480	
65	3	3 M.		520	
66	4	4 M.		580	
67	5	9 M.		645	
68	6	7 M.		655	
69	7	3 M.	58	570	
70	8	6 M.		665	
71	9	8 M.		795	
S.	9			5385	598
72	1	21 W.	59	782	
73	2	10 M.		760	
74	3	10 M.		800	
75	4	8 M.	60	610	
76	5	8 M.		665	
S.	5			3617	723
77	1	—	62	620	
78	2	9 M.		670	
79	3	½ J.		690	
80	4	4 M.		710	
81	5	1 J.		855	
82	6	4 M.	63	685	
83	7	9 M.		830	
84	8	7 M.	64	625	
85	9	8 M.		720	
86	10	3 M.		730	
87	11	½ J.		805	
88	12	5 M.	65	590	
89	13	7 M.		665	
S.	13			9195	707
90	1	8 M.	66	560	
91	2	1 J.		835	
92	3	¾ J.		870	
93	4	8 M.	67	840	
94	5	8 M		860	
95	6	14 M.		875	
96	7	1 J.		905	
97	8	9 M.		915	

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirngewicht	Mittel
98	9	11 M.	69	840	
99	10	11 M.		925	
100	11	1 J.	70	795	
101	12	1½ J.		815	
102	13	3 J.		1070	
S.	13			11105	853
103	1	1½ J.	71	920	
104	2	5/4 J.	72	870	
105	3	1 J.		875	
106	4	11 M.		1000	
107	5	—	73	1110	
108	6	18 M.	74	702	
109	7	2 M.		1025	
S.	7			6502	928
110	1	1¼ J.	76	1045	
111	2	1 J.	77	960	
112	3	16 M.	78	1020	
113	4	1¾ J.	80	1070	
S.	4			4095	1023
114	1	3	82	885	
115	2	2		1080	
116	3	2¾		1145	
117	4	3	85	1115	
118	5	2		1120	
119	6	2¾		1150	
120	7	2		1210	
S.	7			7705	1100
121	1	4	86	1005	
122	2	3½	88	890	
123	3	2		985	
124	4	4		1310	
125	5	2½	89	1080	
126	6	7	90	1045	
127	7	4		1160	
S.	7			7475	1068

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirngewicht	Mittel
128	1	$4\frac{1}{2}$	91	1300	
129	2	$3\frac{1}{4}$	92	1170	
130	3	$4\frac{1}{2}$		1185	
131	4	4	93	1165	
132	5	4	94	1065	
133	6	5		1195	
134	7	4	95	1085	
135	8	4		1220	
S.	8			9385	1173
136	1	6	96	1170	
137	2	$4\frac{1}{2}$	98	1300	
138	3	4	100	1160	
139	4	4		1320	
S.	4			4950	1237
140	1	4	101	1180	
141	2	$6\frac{1}{2}$	105	1315	
S.	2			2495	1247
142	1	7	109	1088	
143	2	7		1195	
144	3	7	110	1415	
S.	3			3708	1254
145	1	$5\frac{3}{4}$	111	1295	
146	2	6	113	1165	
147	3	$9\frac{1}{2}$		1235	
148	4	8		1330	
149	5	8	114	1050	
150	6	6		1260	
151	7	6		1405	
152	8	9	115	1060	
S.	8			9800	1220
153	1	8	116	1150	
154	2	$7\frac{1}{2}$		1325	
155	3	8	117	1360	
156	4	8		1410	
157	5	12	118	1145	
158	6	11		1265	
159	7	8		1325	
160	8	9	120	1015	
S.	8			9995	1249

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirngewicht	Mittel
161	1	7	121	1310	
162	2	9	123	1350	
S.	2			2660	1330
163	1	12	130	1235	
164	2	10	131	1185	
165	3	10	132	1175	
166	4	13	133	1175	
167	5	13		1210	
168	6	14	134	1142	
169	7	13	135	1240	
S.	7			8362	1194
170	1	16	138	1200	
171	2	14		1305	
172	3	13	139	1190	
173	4	16	140	1400	
174	5	13	141	1175	
175	6	12	144	1275	
S.	6			7545	1257
176	1	18	147	1200	
177	2	17	148	1170	
178	3	16	149	1420	
179	4	19	150	1095	
180	5	17		1165	
181	6	15		1270	
182	7	12	151	1375	
183	8	15	155	1445	
S.	8			10140	1267
184	1	17	156	1420	
185	2	16	157	1230	
186	3	19	158	1220	
187	4	17	160	1405	
188	5	19	162	1430	
189	6	19		1495	
S.	6			8200	1366
190	1	$15\frac{1}{2}$	170	1280	
191	2	19	171	1430	
S.	2			2710	1350

b. Von 20—49 Jahren.

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirngewicht	Mittel
192	1	47	126	1005	
193	2	25	135	1392	
S.	2			2397	1198
194	1	38	140	1085	
195	2	25	142	1100	
196	3	35		1160	
197	4	38		1215	
198	5	33	143	1395	
S.	5			5955	1191
199	1	48	146	1200	
200	2	39		1245	
201	3	42		1246	
202	4	47		1420	
S.	4			5111	1277
203	1	43	147	1045	
204	2	48		1150	
205	3	42		1255	
206	4	35		1370	
S.	4			4820	1210
207	1	37	148	1165	
208	2	39		1305	
S.	2			2470	1235
209	1	41	149	1230	
210	2	42		1270	
211	3	34		1390	
212	4	36		1410	
S.	4			5300	1325
213	1	47	150	1215	
214	2	40		1215	
215	3	35		1360	
216	4	26		1415	
217	5	27		1430	
S.	5			6635	1327
218	1	44	151	1110	
219	2	47		1310	
220	3	32		1370	
221	4	26		1382	
222	5	29		1390	
S.	5			6562	1312
223	1	32	152	1260	
224	2	44		1280	
225	3	27		1300	
226	4	26		1320	
227	5	26		1330	
228	6	46		1400	
229	7	46		1415	
S.	7			9105	1300
230	1	40	153	1160	
231	2	34		1160	
232	3	47		1165	
233	4	22		1175	
234	5	25		1210	
235	6	39		1265	
236	7	48		1285	
237	8	37		1310	
238	9	36		1330	
239	10	26		1335	
S.	10			12395	1239,5
240	1	23	154	1245	
241	2	20		1270	
242	3	24		1285	
243	4	40		1335	
S.	4			5135	1281
244	1	33	155	1205	
245	2	43		1215	
246	3	45		1250	
247	4	22		1310	
248	5	39		1350	

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirn-gewicht	Mittel
249	6	47	155	1380	
250	7	24		1500	
S.	7			9210	1315
251	1	49	156	1045	
252	2	29		1090	
253	3	49		1110	
254	4	26		1150	
255	5	45		1173	
256	6	30		1185	
257	7	30		1200	
258	8	21		1210	
259	9	29		1215	
260	10	39		1215	
261	11	31		1220	
262	12	22		1240	
263	13	26		1250	
264	14	42		1262	
265	15	35		1280	
266	16	41		1280	
267	17	24		1290	
268	18	24		1375	
269	19	21		1390	
270	20	38		1420	
S.	20			24602	1230
271	1	23	157	1095	
272	2	33		1115	
273	3	47		1210	
274	4	42		1230	
275	5	45		1235	
276	6	42		1250	
277	7	24		1275	
278	8	37		1280	
279	9	38		1370	
280	10	31		1510	
S.	10			12570	1257
281	1	44	158	1140	
282	2	36		1210	
283	3	41		1210	
284	4	25		1250	
285	5	45	158	1280	
286	6	35		1285	
287	7	44		1300	
S.	7			8675	1239
288	1	33	159	1145	
289	2	46		1230	
290	3	44		1260	
291	4	24		1265	
292	5	36		1325	
293	6	37		1380	
294	7	43		1400	
S.	7			9005	1286
295	1	36	160	1090	
296	2	36		1190	
297	3	48		1205	
298	4	48		1210	
299	5	22		1235	
300	6	49		1260	
301	7	20		1260	
302	8	40		1290	
303	9	44		1290	
304	10	39		1360	
305	11	44		1375	
S.	11			13765	1251
306	1	37	161	1090	
307	2	30		1120	
308	3	27		1305	
309	4	41		1310	
310	5	44		1320	
311	6	36		1340	
312	7	25		1410	
S.	7			8895	1270
313	1	37	162	1205	
314	2	28		1245	
315	3	21		1255	
316	4	28		1310	
317	5	32		1440	

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirngewicht	Mittel
318	6	26	162	1445	
319	7	26		1540	
S.	7			9440	1348
320	1	36	163	1175	
321	2	24		1205	
322	3	26		1205	
323	4	48		1315	
324	5	38		1325	
325	6	44		1390	
S.	6			7615	1269
326	1	31	164	1205	
327	2	49		1220	
328	3	23		1270	
329	4	21		1450	
330	5	36		1480	
S.	5			6625	1325
331	1	42	165	1315	
332	2	43		1325	
333	3	48		1390	
S.	3			4030	1343

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirngewicht	Mittel
334	1	25	166	1180	
335	2	33		1205	
S.	2			2385	1192
336	1	49	167	1260	
337	2	44		1280	
S.	2			2540	1270
338	1	44	168	1310	
339	2	27		1365	
S.	2			2675	1337
340	1	24	169	1290	
341	2	32	171	1210	
342	3	28		1290	
343	4	36	172	1275	
344	5	32	173	1285	
345	6	22	174	1410	
S.	6			7760	1271
346	1	44	180	1430	

c. Von 50—82 Jahren.

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirngewicht	Mittel
347	1	74	142	1180	
348	2	72	143	985	
349	3	67		1260	
350	4	56	144	1085	
351	5	57		1230	
S.	5			5740	1148
352	1	65	146	1340	
353	1	75	147	1100	
354	2	53		1170	
355	3	54		1220	
356	4	54		1260	
S.	4			4750	1187,5
357	1	73	148	1095	
358	2	52		1180	
359	3	50		1370	
S.	3			3645	1215

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirngewicht	Mittel
360	1	70	149	1116	
361	2	71		1210	
362	3	63		1240	
S.	3			3566	1188,6
363	1	82	150	1100	
364	2	72		1140	
365	3	53		1160	
366	4	69		1260	
367	5	53		1370	
368	6	52		1395	
S.	6			7425	1237,5
369	1	65	151	1180	
370	2	71		1210	
371	3	51		1335	
S.	3			3725	1241

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirn-gewicht	Mittel
372	1	73	152	1100	
373	2	61		1150	
374	3	66		1177	
375	4	74		1340	
S.	4			4767	1192
376	1	72	153	1030	
377	2	68		1185	
378	3	62		1220	
379	4	54		1244	
380	5	66		1270	
381	6	53		1275	
382	7	70		1295	
383	8	56		1300	
S.	8			9819	1239
384	1	72	154	1115	
385	2	76		1155	
386	3	61		1190	
387	4	74		1190	
388	5	69		1210	
389	6	56		1218	
390	7	70		1285	
391	8	56		1320	
392	9	54		1350	
S.	9			10733	1192
393	1	63	155	1090	
394	2	64		1130	
395	3	58		1140	
396	4	76		1155	
397	5	59		1210	
398	6	61		1270	
399	7	54		1310	
400	8	55		1355	
S.	8			9660	1207
401	1	58	156	1085	
402	2	51		1200	
403	3	48		1245	
404	4	53		1285	
405	5	66		1305	
406	6	55	156	1325	
407	7	50		1355	
S.	7			8800	1257
408	1	68	157	1080	
409	2	63		1130	
410	3	70		1140	
411	4	50		1140	
412	5	66		1230	
413	6	62		1252	
414	7	65		1274	
415	8	64		1315	
416	9	57		1335	
417	10	59		1375	
418	11	53		1410	
S.	11			13681	1243
419	1	72	158	1025	
420	2	50		1135	
421	3	58		1200	
422	4	53		1200	
423	5	66		1240	
424	6	51		1330	
425	7	56		1420	
S.	7			8550	1221
426	1	76	159	1030	
427	2	56		1150	
428	3	65		1185	
429	4	69		1285	
S.	4			4650	1162
430	1	73	160	1280	
431	2	57		1125	
432	3	56		1150	
433	4	60		1215	
434	5	52		1222	
435	6	69		1230	
436	7	50		1230	
437	8	60		1255	
438	9	54		1320	
S.	9			11027	1225

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirngewicht	Mittel
439	1	62	161	1085	
440	2	73		1160	
441	3	73		1210	
442	4	57		1222	
443	5	52		1240	
444	6	57		1345	
445	7	59		1375	
S.	7			8637	1234
446	1	62	162	1125	
447	2	63		1275	
448	3	—		1540	
S.	3			3940	1313

L. Nr.	Nr.	Alter	Grösse	Gehirngewicht	Mittel
449	1	58	163	1285	
450	2	70		1335	
S.	2			2620	1310
451	1	58	166	1259	
452	1	58	167	1445	
453	1	57	168	1120	
454	2	50		1205	
455	3	50		1255	
456	4	61		1290	
S.	4			4870	1217
457	1	58	170	1265	

Literatur.

BERTILLON, JEANNE. L'indice encéphalo-cardiaque. Bullet. de la Soc. d'anthropol. de Paris. 3. III. 1887. T. X.

v. BISCHOFF, TH. Das Hirngewicht des Menschen. Bonn 1880.

BOYD, ROB. Tables on the weights of the human Body and Intern Organs in the Sane and Insane. Philosoph. Transact. vol. 151. 1861. London 1862.

MARSHALL, JOH. On the Relations between the weight of the brain and its parts and the structure and mass of the Body in man. Journal of Anat. and Physiol. vol. XXVI. 1892. p. 445.

MIES. Das Gehirngewicht neugeborener Kinder. Tagebl. der Kölner Naturforscher-Versammlung 1888. S. 195.

Derselbe. Ueber das Gehirngewicht des heranwachsenden Menschen. Corresp. Bl. der deutschen Gesellsch. f. Anthropologie 1894. S. 157.

OBERSTEINER, H. Ein schweres Gehirn. Centralbl. f. Nervenheilkunde. Jahrg. XIII. 1870. S. 173.

PFISTER, HERMANN. Das Hirngewicht im Kindesalter. Archiv für Kinderheilkunde. Bd. XXIII. 1897. S. 144.

RETZIUS, G. Ueber das Gehirngewicht der Schweden. Biolog. Untersuchungen. N. Folge. IX. 1900. S. 51.

TIGGES. Das Gewicht des Gehirnes und seiner Theile bei Geisteskranken. Allgem. Zeitschr. f. Psychiatrie 1889. Bd. 45.

VIERORDT, H. Das Massenwachsthum der Körperorgane des Menschen. Archiv f. Anat. und Entwickelungsgesch. Jahrg. 1890. Suppl.-Bd.

Derselbe. Daten und Tabellen. 2. Aufl. 1893.

WALDEYER. Ueber die somatischen Unterschiede der beiden Geschlechter. Corr. Bl. der deutschen Gesellsch. f. Anthropologie 1895. Nr. 9.

ZIEHEN, TH. Centralnervensystem. Th. 1 in v. BARDELEBEN, Handbuch der Anatomie des Menschen. Jena 1899.

Weitere Literatur bei PFISTER und ZIEHEN.

DAS STATISCHE UND DAS KINETISCHE MAASS FÜR DIE WIRKUNG EINES MUSKELS,

ERLÄUTERT AN EIN- UND ZWEIGELENKIGEN MUSKELN DES OBERSCHENKELS

VON

OTTO FISCHER.

Des XXVII. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

N° V.

MIT 12 TAFELN.

LEIPZIG
BEI B. G. TEUBNER
1902.

Vorgetragen für die Abhandlungen am 3. März 1902.
Das Manuscript eingeliefert am 11. März 1902.
Der letzte Bogen druckfertig erklärt am 7. Mai 1902.

Inhaltsverzeichniss.

DEM ANDENKEN

DES HERRN GEHEIMEN RATHES

PROFESSOR DR. ADOLF FICK

GEWIDMET VOM VERFASSER.

DAS STATISCHE UND DAS KINETISCHE MAASS FÜR DIE WIRKUNG EINES MUSKELS,

ERLÄUTERT AN EIN- UND ZWEIGELENKIGEN MUSKELN DES OBERSCHENKELS

VON

OTTO FISCHER.

I. Kritik der gebräuchlichen Methoden, die Wirkung eines Muskels zu bestimmen.

In den Hand- und Lehrbüchern der Anatomie und Physiologie findet man im Anschluss an die Beschreibung der einzelnen Muskeln des menschlichen Körpers gewöhnlich auch kurze Mitteilungen über die Wirkung, welche dieselben bei isolirter Contraction ausüben sollen. Diese Angaben können, so weit sie nicht direct falsch sind, in den meisten Fällen nur in ganz groben Zügen eine Vorstellung von der Wirkungsweise der verschiedenen Muskeln unter ganz speciellen Verhältnissen geben; sie vermögen aber keinesfalls in erschöpfender Weise die Thätigkeit derselben zu charakterisiren. Es lässt sich in der Regel die Wirkung eines Muskels überhaupt nicht mit wenigen Worten klarlegen.

Das geht zunächst schon daraus hervor, dass mit wenig Ausnahmen die Wirkung anders ausfällt, wenn die Körpertheile, die der Muskel in Bewegung setzt, vorher in andere Stellung zu einander gebracht worden sind. Es kann sogar so weit gehen, dass ein Muskel, welcher bei einer Gelenkstellung ein Glied in einem bestimmten Sinne dreht, von einer anderen Stellung aus gerade die entgegengesetzte Drehung hervorbringt. Ein sehr einfaches und bekanntes Beispiel hierfür bietet der M. brachioradialis dar. Man schrieb ihm früher die Wirkung zu, den Unterarm gegen den Oberarm zu beugen und gleichzeitig zu supinieren, und gab ihm aus diesem Grunde den leider zuweilen noch jetzt verwendeten Namen M. supinator longus. Der Muskel vermag aber nur dann eine Supination des Unterarms hervorzubringen, wenn der letztere vorher in Pronationsstellung gebracht worden ist. Bei äusserster Supinationsstellung des Unterarms kann er dagegen nur Pronation verursachen, und in einer mittleren Stellung des Radioulnargelenks wirkt er weder supinirend noch pronirend auf den

Unterarm ein. In richtiger Erkenntniss dieser Thatsache hat man bei Aufstellung der neuen anatomischen Nomenclatur die Bezeichnung Supinator longus endgültig fallen lassen, und dafür den unverfänglichen, nichts über die Funktion des Muskels aussagenden Namen M. brachioradialis eingeführt.

Ganz abgesehen davon, dass sich in der Regel die Wirkungsweise eines Muskels überhaupt nicht mit einem Namen kennzeichnen lässt, können die Angaben der Lehrbücher, so weit sie sich auf eine bestimmte Ausgangsstellung beschränken, in den meisten Fällen nur bedingte Geltung beanspruchen. Denn sie sind wohl fast ausnahmslos unter einer Voraussetzung gemacht, die sich nur selten in genügender Annäherung verwirklicht findet.

Man nimmt entweder stillschweigend an, dass der Muskel bei seiner Contraction nur den Ansatzpunkt, nicht aber auch gleichzeitig den Ursprung und den Körpertheil, an dem sich derselbe befindet, bewegt; oder man gibt ausdrücklich an, wie die Wirkung des Muskels bei Fixation des Ursprungs, und wie sie bei Fixation des Ansatzes stattfindet. Es wird sich aber wohl heute Niemand mehr der Erkenntnis verschliessen, dass ein Muskel bei seiner Contraction alle beiden Körpertheile, welche die Insertionsstellen tragen, und, wenn er über mehrere Gelenke hinweg zieht, auch alle zwischen den Insertionsknochen eingeschalteten Glieder in drehende Bewegung zu setzen sucht. In welchem Sinne und in welcher Ausdehnung die Drehungen aller dieser in den Wirkungsbereich eines Muskels fallenden Abschnitte des menschlichen Körpers stattfinden, das hängt nicht allein von der Ansatzweise und Lagerung des Muskels, sondern vor allen Dingen auch von der mechanischen Beschaffenheit der in Bewegung zu setzenden Körpertheile ab.

Wenn z. B. der den Muskelursprung tragende Körpertheil sehr viel grösseres Gewicht hat als der Körpertheil, an dem sich der Ansatz des Muskels befindet, so wird bei der Contraction der letztere im Vergleich zu dem ersteren im Allgemeinen eine viel ausgedehntere Bewegung erfahren. Irgend ein Augenmuskel sucht nicht nur den Bulbus in der Orbita gegen den Kopf, sondern auch diesen gegen jenen im umgekehrten Sinne zu drehen. Der grosse Gewichtsunterschied zwischen beiden bringt es aber mit sich, dass bei der Contraction thatsächlich nur das Auge in Drehung versetzt wird, während in diesem Falle der den Ursprung tragende Abschnitt, d. h. also der Kopf, mit aus-

reichender Genauigkeit in Ruhe bleibt. Hier fände sich also die erwähnte Voraussetzung eines fixirten Ursprungs ziemlich vollkommen realisirt.

Anders verhält es sich in allen den Fällen, wo die beiden Körpertheile, an denen der Muskel inserirt, keinen so grossen Gewichtsunterschied aufweisen. So drehen die zwischen dem Humerus und der Ulna ausgespannten eingelenkigen Köpfe des M. triceps brachii ebenso wie der M. brachialis bei isolirter Contraction nicht nur den Unterarm, sondern auch den Oberarm. Desgleichen setzen die drei eingelenkigen Köpfe des M. quadriceps femoris nicht allein den Unterschenkel in Bewegung, an dem sich ihr Ansatz, sondern auch den Oberschenkel, an dem sich ihr Ursprung befindet.

Eine weitere Folge der Drehung des den Ursprung tragenden Knochens ist die, dass einerseits die eingelenkigen Köpfe des M. triceps brachii und der M. brachialis auf das Schultergelenk, andererseits die eingelenkigen Köpfe des M. quadriceps femoris auf das Hüftgelenk, also auf Gelenke, über die sie garnicht hinwegziehen, drehend einwirken. Wenn nun auch der Oberarm resp. Oberschenkel bei ihren Bewegungen den Unterarm resp. Unterschenkel mitzunehmen haben, so sind doch die Drehungen des Schultergelenks im einen, und des Hüftgelenks im anderen Falle keineswegs so gering, dass sie gegenüber den gleichzeitigen Drehungen im Ellbogen- resp. Kniegelenk vernachlässigt werden könnten. Bei Aenderung der Massenverhältnisse, z. B. bei Belastung der Hand oder des Fusses mit einem Gewicht von genügender Grösse, kann man es sogar erreichen, dass die Drehungen in den proximalen Gelenken grösser sind als in den distalen.[1])

Die Voraussetzung, dass eine der beiden Insertionen des Muskels bei der Contraction in Ruhe bleibt, ist daher im Grunde gleichbedeutend mit der Annahme, dass ein Muskel immer nur solche Gelenke in Bewegung setzt, über welche er hinwegzieht. So sucht man denn auch vergeblich in den meisten Lehrbüchern der Anatomie und Physiologie nach Angaben über die Wirkung eines Muskels auf Gelenke, welche nicht zwischen seinen Insertionsstellen eingeschaltet sind. Erst in neuster Zeit fangen einige Lehr-

1) Abhandlungen der math.-phys. Classe der Königl. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch. Bd. XXII Nr. II.

bücher der Physiologie[1]) an, ihre Mitteilungen in dieser Hinsicht zu vervollständigen.

Es liegt nun nahe, die Frage aufzuwerfen, ob die Angaben in den Lehrbüchern wenigstens in dem Falle, dass eine Insertion des Muskels festgestellt ist, für die Gelenke, über welche der Muskel hinwegzieht, uneingeschränkte Geltung beanspruchen können.

Um diese Frage zu beantworten, ist es nöthig, sich einmal klar zu machen, welche Wege man eingeschlagen hat, um zu einem Urtheil über die Wirkung eines Muskels zu gelangen.

Die einfachste, und wohl am meisten angewendete Methode, die Funktion eines Muskels zu bestimmen, besteht darin, dass man an einem geeigneten Präparat untersucht, wie sich der Muskel bei verschiedenen Gelenkbewegungen verhält. Erschlafft er, so schreibt man ihm gewöhnlich ohne Weiteres die Wirkung zu, bei activer Contraction die betreffende Gelenkbewegung, eventuell neben anderen Drehungen des Gelenks, hervorzubringen. Handelt es sich um ein Gelenk von 1 Grade der Freiheit, in welchem etwa nur Beugung und Streckung von einer beliebigen Gelenkstellung aus möglich sind, so sondert man auf diese Weise die Beuger des Gelenks von den Streckern ab. Hat man es dagegen mit einem Gelenk von 3 Graden der Freiheit zu thun, in welchem von einer beliebigen Gelenkstellung aus Beugung und Streckung, Abduction und Adduction, sowie Rollung im einen oder anderen Sinne ausgeführt werden können, so verwendet man diese Methode, um festzustellen, welche Muskeln eine beugende und welche eine streckende Componente besitzen, welche gleichzeitig abducirend und welche adducirend wirken, welche eine Rollung im einen und welche eine solche im entgegengesetzten Drehungsinne hervorbringen. In entsprechender Weise verfährt man bei den Gelenken von 2 Graden der Freiheit.

Die auf diesem Wege für verschiedene Muskeln abgeleiteten qualitativen Resultate können unter der Voraussetzung eines festen Ursprungsknochens nur für eingelenkige Muskeln, und auch hier genau genommen allein bei Gelenken von 1 Grad der Freiheit, uneingeschränkte Geltung beanspruchen. Zur Feststellung der

1) Vgl. R. Tigerstedt, Lehrbuch der Physiologie des Menschen. Leipzig 1898. Bd. II, Kapitel 15, § 3 Seite 51 ff., ferner Text-Book of Physiology. Edited by E. A. Schäfer. Edingburgh and London 1900. Volume II p. 228 und L. Hermann, Lehrbuch der Physiologie. 12. Aufl. Berlin 1900, Seite 323.

Wirkungsweise zwei- und mehrgelenkiger Muskeln, welche doch im menschlichen Körper in grösserer Anzahl vertreten sind, als die eingelenkigen, versagt dagegen diese Methode vollkommen.

Davon kann man sich leicht an einem beliebigen Beispiel überzeugen. Bei alleiniger Beugung des Kniegelenks erschlafft unter anderen der M. semimembranosus. Derselbe Muskel legt sich am Präparat auch in Falten, wenn nur im Hüftgelenk eine Streckung ausgeführt wird. Wollte man allein aus dieser Beobachtung schliessen, dass der M. semimembranosus bei activer Contraction das Kniegelenk beugt und gleichzeitig das Hüftgelenk streckt, wie es wohl zuweilen geschieht, so wäre dieser Schluss durch nichts gerechtfertigt. Was man durch einen derartigen Versuch qualitativ ableiten kann, ist nur einerseits die Einwirkung auf das Kniegelenk unter der Voraussetzung, dass das Hüftgelenk durch besondere, nicht mit der Contraction dieses Muskels zusammenhängende Kräfte festgestellt ist, und andererseits die Einwirkung auf das Hüftgelenk, wenn eine gleichzeitige Bewegung im Kniegelenk aus irgend welcher Veranlassung unmöglich gemacht ist. In beiden Fällen wirkt aber der Muskel im Grunde nicht als zweigelenkiger, sondern nur als eingelenkiger Muskel. Er sieht sich mechanischen Verhältnissen gegenüber, welche sich ihm in der Regel bei seiner Contraction nicht darbieten, und er zeigt daher auch einen ganz speciellen Bewegungseffekt. Die für ihn als zweigelenkigen Muskel charakteristische Wirkung, welche er ausübt, wenn gleichzeitig beide Gelenke, über die er hinwegzieht, frei beweglich sind, kann eine ganz andere sein und ist auch, wie wir sehen werden, in vielen Fällen von ganz anderer Art.

Die Angaben der Lehrbücher über die Funktion der zwei- und mehrgelenkigen Muskeln stützen sich nun gewöhnlich allein auf derartige Beobachtungen über das Verhalten der Muskeln, wenn immer nur in einem einzigen Gelenk Bewegung ausgeführt wird. Dieselben nehmen also auf die eigentliche Wirkung mehrgelenkiger Muskeln gar nicht Bezug. Sie besitzen daher für diese Muskeln erst recht nur ganz bedingte Geltung, indem sie nicht nur zur Voraussetzung haben, dass eine der beiden Insertionsstellen, sondern dass ausserdem alle Gelenke bis auf ein einziges, für welches die Angabe gemacht wird, festgestellt sind, oder mit anderen Worten, dass der Muskel nicht als mehrgelenkiger, sondern in jedem Falle nur wie ein eingelenkiger wirkt.

Man könnte nun daran denken, die einem mehrgelenkigen Muskel zukommende Funktion dadurch zu bestimmen, dass man gleichzeitig alle Gelenke, über die er hinwegzieht, in Bewegung setzt, und dabei beobachtet, ob der Muskel am Präparat erschlafft, oder ob er noch mehr angespannt wird. Es ist aber wohl nicht schwer, einzusehen, dass man auf diese Weise zu gar keinem eindeutig bestimmten Resultat gelangen würde. Denn wie man durch isolierte Beugung des Kniegelenks oder Streckung des Hüftgelenks ein Erschlaffen des M. semimembranosus erzielen kann, so lässt sich ein solches nicht nur durch gleichzeitiges Ausführen dieser beiden Gelenkbewegungen, sondern auch durch Beugen in beiden Gelenken oder durch Strecken in beiden Gelenken hervorbringen. In dem einen Falle hat man nur die Gelenkbewegungen so zu bemessen, dass die Verkürzung des Muskels beim Beugen des Kniegelenks grösser ist als die mit der Beugung des Hüftgelenks einhergehende Verlängerung; im anderen Falle hat man dafür zu sorgen, dass die mit der Streckung des Kniegelenks verbundene Verlängerung des Muskels geringer ist als die gleichzeitige Verkürzung desselben infolge der Streckung des Hüftgelenks. Es gibt also keine Combination der beiden Bewegungsarten im Hüft- und Kniegelenk, die nicht bei geeigneter Ausdehnung derselben den Muskel zum Erschlaffen bringen würde und daher bei Anwendung der in Rede stehenden Methode demselben als Wirkung zugeschrieben werden könnte. —

Eine andere, scheinbar noch einfachere Methode, sich über die Wirkungsart eines Muskels ein Urteil zu verschaffen, besteht darin, dass man untersucht, auf welcher Seite der Flexions-Extensionsaxe, bezüglich der Abductions-Adductionsaxe oder der Rollungsaxe eines Gelenks der Muskel in einer Richtung verläuft, welche nicht gerade der betreffenden Axe parallel ist. So redet man z. B. von der Gruppe „der Beugemuskeln“ des Ellbogengelenks, indem man darunter alle ein- und mehrgelenkigen Muskeln versteht, welche auf der Beugeseite des Ellbogengelenks vorüberziehen. Es wäre richtiger und vorsichtiger, dieselben in ihrer Gesammtheit als die Gruppe „der auf der Beugeseite des Ellbogengelenks verlaufenden Muskeln“ zu bezeichnen. So findet man auch in den Lehrbüchern den M. biceps brachii in der Gruppe der Beugemuskeln des Schultergelenks aufgeführt, weil er vor der Flexions-Extensionsaxe desselben vorüberzieht. Derselbe bringt aber bei gewissen Haltungen

des Armes gerade die entgegengesetzte Bewegung, nämlich eine Streckung des Schultergelenks hervor, sofern nur das Ellbogengelenk frei beweglich ist.[1]) Bei Feststellung des letzteren und des Radioulnargelenks könnte er allerdings nur den nunmehr abgesteiften Arm im Schultergelenk beugen; er würde dann aber eben nicht in seiner Eigenschaft als mehrgelenkiger Muskel zur Wirkung kommen, sondern auf das Niveau eines eingelenkigen Muskels herabgedrückt sein. Ebenso wenig ist man berechtigt, aus der Thatsache, dass der M. rectus femoris auf der Beugeseite des Hüftgelenks und der Streckseite des Kniegelenks liegt, den Schluss zu ziehen, dass er bei seiner Contraction und ungehinderter Beweglichkeit beider Gelenke Beugung im Hüftgelenk und Streckung im Kniegelenk hervorbringt, oder dass der M. semimembranosus infolge seiner Lage auf der Hinterseite des Oberschenkels die entgegengesetzten Gelenkbewegungen erzeugt.

Im Princip stimmt diese Methode der Bestimmung der Muskelwirkung mit der zuerst geschilderten „Erschlaffungsmethode" überein. Denn wenn z. B. ein Muskel auf der Beugeseite eines Gelenks vorüberzieht, und nicht zufällig der Beugeaxe parallel gerichtet ist, so wird er erschlaffen, wenn im Gelenk Beugung ausgeführt wird, während gleichzeitig alle anderen Gelenke festgestellt bleiben. Es können daher die mit dieser zweiten Methode gewonnenen Resultate auch nur mit denselben Einschränkungen Geltung beanspruchen wie die auf dem zuerst beschriebenen Wege abgeleiteten. —

Eine weitere Methode, die Wirkung eines Muskels aufzuklären, besteht darin, dass man an einem Präparat direkt von dem Muskel oder einem Theil desselben in einer seinem Verlauf entsprechenden Richtung einen Zug ausübt und beobachtet, welche Körpertheile und in welcher Weise dieselben in Bewegung gesetzt werden. Trotzdem diese Methode sehr verlockend erscheint, kann doch auch sie nicht zu einwurfsfreien Resultaten führen, und zwar aus folgenden Gründen. Zunächst lassen sich die mechanischen Verhältnisse bei der Contraction eines Muskels nicht dadurch nachahmen, dass man an dem Muskel nur in einer Richtung zieht. Man müsste zu diesem Zwecke in zwei einander entgegengesetzten Richtungen mit gleicher Kraft einen Zug ausüben; denn der Muskel zieht ja bei

1) Vgl. Abhandlungen der math.-phys. Classe der Kgl. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch. Bd. XXIII. No. VI.

der Contraction sowohl am Ansatz in der Richtung nach dem Ursprung hin, als auch umgekehrt am Ursprung in der Richtung nach dem Ansatz hin. Immerhin könnte man annehmen, dass man wenigstens auf dem beschriebenen Wege zu der Kenntniss von der Wirkung des Muskels für den speciellen Fall gelangen würde, dass der den Ursprung tragende Körpertheil festgestellt ist; denn unter dieser Voraussetzung kommt ja die am Ursprung angreifende Kraft nicht zur Geltung und kann daher unberücksichtigt bleiben. Hiergegen ist zu sagen, dass bei dem Versuch der in Bewegung gesetzte Körpertheil gar nicht allein der Einwirkung des Muskelzuges unterliegt, da ja gleichzeitig immer die Schwere mitwirkt; und auch die passiv angespannten Muskeln die Bewegung beeinflussen. Wenn man aber nach der Wirkung eines Muskels fragt, so meint man doch wohl allgemein entweder stillschweigend, oder auch ausgesprochener Maassen, damit die Bewegung, welche er hervorbringen würde, wenn er sich ganz allein contrahiren könnte, und ausser seiner Spannung keine anderen Kräfte, weder Schwere noch auch elastische Spannungen anderer Muskeln, auf die Körpertheile einwirkten. In diesem Sinne sind zweifellos die Angaben in den Lehrbüchern zu verstehen.

Es liesse sich auch in den meisten Fällen gar nicht durchführen, das Problem der isolirten Wirkung eines bestimmten Muskels von vorn herein mit der Frage nach der Einwirkung der Schwere, welche von seiner Spannung ganz unabhängig ist, und mit dem Problem der vorläufig ebenfalls unbekannten Wirkung anderer Muskeln zu verquicken. Denn ob die Muskeln sich im Zustand activer Contraction befinden, oder ob sie nur durch ihre elastische Spannung auf die Körpertheile einwirken, bedingt in dem mechanischen Effekt keinen Unterschied. Man ist daher zunächst auch gar nicht in der Lage, den Einfluss der passiven Spannung eines Muskels zu beurtheilen, bevor man nicht weiss, was derselbe bei activer isolirter Contraction für eine Wirkung hervorbringt. Auf diese Weise liesse sich ausserdem überhaupt keine exakte Fragestellung formuliren. Denn selbst bei Feststellung des einen Insertionspunktes und aller Gelenke bis auf das eine ist die Schwerewirkung noch verschieden je nach der Stellung des ganzen Körpers im Raume, und der Einfluss der elastischen Spannung der übrigen Muskel zum Theil abhängig von der Haltung des Körpers, in der die übrigen Gelenke festgestellt worden sind. Natürlich ist es von

grossem Werth, schliesslich angeben zu können, welche Bewegung eintritt, wenn bei einer bestimmten Haltung des Körpers die Schwere und verschiedene Muskeln infolge activer Contraction oder rein elastischer Spannung einwirken. Diese Aufgabe lässt sich aber überhaupt erst allgemein für jede beliebige Haltung des Körpers exakt lösen, nachdem man Klarheit darüber gewonnen hat, in welcher Weise ein jeder der verschiedenen Faktoren unabhängig von den anderen den Bewegungszustand des Körpers in den verschiedenen Gelenkstellungen verändern würde.

Die Methode, am Präparat durch einseitigen Zug an einem Muskel die Wirkung desselben festzustellen, kann also in keinem Falle zu einwandfreien Resultaten führen. Man kann aber auf diese Weise auch nicht etwa die Bewegung auffinden, welche infolge des modificirenden Einflusses der Schwere und der elastischen Spannung der passiv gedehnten Muskeln bei der Contraction eines bestimmten Muskels eintritt, weil die Elasticitätsverhältnisse eines Muskels sich mit dem Tode vollkommen verändern. Schneidet man hingegen am Präparat alle anderen Muskeln weg, so verändert man dadurch nicht nur das Gewicht des in Bewegung befindlichen Körpertheils, sondern auch in der Regel die Lage seines Schwerpunktes. Es kann daher der Versuch auch nicht einmal Aufschluss über das Resultat der gleichzeitigen Einwirkung eines Muskels und der Schwere geben. —

Von einem grossen Theile der eben angedeuteten Fehlerquellen scheinen nun die schönen zuerst von DUCHENNE in umfassender Weise angestellten, und später von Anderen vielfach wiederholten Versuche, die Wirkung eines Muskels durch lokale Faradisation desselben festzustellen, frei zu sein. In der That schafft man hierbei Verhältnisse, welche denen bei der activen Contraction des Muskels ziemlich nahe kommen. Zunächst verhält sich der elektrisch gereizte Muskel insofern gerade so wie der im Leben sich contrahirende, als er wirklich nach zwei entgegengesetzten Richtungen hin Kraftäusserung zeigt; er zieht ebenso am Ansatz in der Richtung nach dem Ursprung hin, als auch am Ursprung in der Richtung nach dem Ansatz. Ferner findet er die richtige Massenvertheilung und die richtige Lage des Schwerpunktes innerhalb der einzelnen Körpertheile und auch die richtigen Elasticitätsverhältnisse bei den passiv gedehnten Muskeln vor. Man würde daher auf diesem Wege sehr wohl zu einem Urtheil über die Be-

wegung gelangen können, welche unter Umständen im Leben bei activer Contraction eines Muskels und gleichzeitiger Einwirkung der Schwere und der passiv gedehnten Muskeln eintritt, wenn es gelänge, die elektrische Reizung auf den in Frage stehenden Muskel zu beschränken. Dies ist jedoch bei vielen Muskeln zweifelhaft. Aber selbst wenn dies möglich wäre, so könnte man nach dem oben Gesagten aus einem derartigen Versuch doch nicht die bei alleiniger Einwirkung des gereizten Muskels erfolgende Bewegung ableiten. Die Angaben der anatomischen Lehrbücher beziehen sich eben auf etwas ganz Anderes als die Duchenne'schen Versuche und können daher auch nicht mit den Ergebnissen der letzteren verglichen werden. Die bei den Duchenne'schen Versuchen beobachtete Bewegung ist das Resultat einer ganzen Reihe von sehr speciellen Krafteinwirkungen, deren Intensität sich unserer Kenntniss zum grössten Theil entzieht. Denn man hat vorläufig gar kein Mittel, die Spannung zu messen, welche ein Muskel im Leben bei elektrischer Reizung annimmt; man kennt auch nicht die elastischen Spannungen der passiv gedehnten Muskeln; nur über den Einfluss der Schwere kann man sich unter Berücksichtigung der Stellung der einzelnen Körpertheile im Raume Rechenschaft geben. Die Bewegung ändert sich nun sofort, wenn man andere Versuchsbedingungen schafft. Reizt man z. B. einen Muskel der unteren Extremität, während das Becken festgestellt ist, und der Fuss nicht mit dem Boden in Berührung ist, so tritt natürlich eine andere Bewegung ein, als beim Stand des Körpers auf den Füssen. Man kann daher das Resultat eines derartigen Versuches nicht auf andere Fälle übertragen und ihm allgemeine Gültigkeit zuschreiben, wie es zuweilen geschieht. Immerhin haben die Duchenne'schen Versuche ihre grosse Bedeutung; man darf nur nicht aus ihnen Schlüsse ableiten wollen, die nicht berechtigt sind. Zur erschöpfenden Charakterisirung der Funktion eines Muskels beim Menschen reichen sie eben nicht aus.

Ganz das Gleiche gilt für die Versuche, die Wirkungsweise der Muskeln eines Thieres durch Reizung bestimmter Partieen der Grosshirnrinde festzustellen. —

Es bleibt daher als einziger exakter Weg, die Wirkungsweise eines Muskels bei isolirter Contraction zu ergründen, nur übrig, genaue Messungen am Präparat vorzunehmen, um die mechanischen Verhältnisse aufzuklären, unter denen der Muskel bei seiner Con-

traction zur Wirkung gelangt. Hat man die genügenden empirischen Unterlagen gewonnen, so ist es dann ein rein mechanisches, allerdings nicht immer ganz einfaches Problem, festzustellen, welche Bewegungen nothwendiger Weise eintreten müssen, wenn ein Muskel sich contrahirt, und ausser ihm keine anderen Kräfte auf die in Bewegung zu setzenden Körpertheile einwirken. Die Nothwendigkeit, diesen Weg zu beschreiten, ist zuerst von A. FICK klar ausgesprochen worden.[1]) Von ihm und seinen Schülern stammen auch die ersten in dieser Richtung angestellten exakten Messungen.[2])

Zunächst hat man sich ein Maass verschafft für den drehenden Einfluss, welchen der Muskel in den verschiedenen Gelenkstellungen auf ein Gelenk ausübt. Dies ist in dem sogenannten Drehungsmoment gegeben. Von einem Drehungsmoment, welches auf ein Gelenk ausgeübt wird, kann man im Grunde nur reden, wenn wiederum sowohl einer der beiden Körpertheile, an denen der Muskel inserirt, als auch alle anderen Gelenke, über welche derselbe hinwegzieht, festgestellt sind. Dann wirkt der Muskel bei seiner Contraction wie eine Kraft, welche an dem beweglich gelassenen Insertionspunkte, bezüglich einer bestimmten Stelle seiner Insertionsfläche angreift, und deren Richtung durch die resultirende Zugrichtung des Muskels gegeben ist. Vorausgesetzt ist dabei natürlich, dass überhaupt eine einzige Resultante für die von allen Fasern des Muskels ausgeübten Zugkräfte existirt; andernfalls hat man sich den Muskel in eine genügende Anzahl von Theilen in der Richtung der Muskelfasern zerlegt zu denken, für welche die Annahme einer resultirenden Zugrichtung mit hinreichender Genauigkeit zutrifft. Unter allen diesen einschränkenden Voraussetzungen stellt der allein bewegliche Abschnitt des Körpers einen Hebel dar, welcher sich nur um die Axe oder den Mittelpunkt des frei gelassenen Gelenks drehen kann. Die an ihm angreifende Muskel-

1) Vgl. A. FICK, Die medicinische Physik, 3. Auflage, Braunschweig 1885 und ders., Specielle Bewegungslehre in L. HERMANNS Handbuch der Physiologie Bd. I. Teil II Seite 241, insbesondere Seite 297.

2) Vgl. A. FICK, statische Betrachtung der Muskulatur des Oberschenkels. Zeitschr. f. rat. Med. Bd. IX. 1849. A. E. FICK und E. WEBER, Anatomisch-mechanische Studie über die Schultermuskeln. Verh. d. phys. Ges. zu Würzburg. N. F. Bd. XI. A. E. FICK, Ueber zweigelenkige Muskeln. Archiv f. Anatomie und Physiologie. Anat. Abt. 1879, und ferner auch W. BRAUNE und O. FISCHER, Die Rotationsmomente der Beugemuskeln am Ellbogengelenk des Menschen. Abhandl. d. math.-phys. Classe d. Königl. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch. Bd. XV. No. III.

kraft sucht ihm dann im Allgemeinen eine Drehung zu ertheilen, welche sich in einer entsprechenden Aenderung der Gelenkstellung ausdrückt. In diesem Sinne kann man davon reden, dass der Muskel auf das Gelenk ein gleich grosses Drehungsmoment als auf den Körpertheil ausübt, obgleich derselbe in erster Linie den letzteren in Drehung zu setzen sucht, und die gleich grosse Bewegung im Gelenk erst secundär aus dem Umstande resultirt, dass der andere am Gelenk betheiligte Körpertheil festgestellt ist. Wäre der letztere auch beweglich, so käme zugleich die im anderen Insertionspunkt angreifende Muskelkraft zur Wirkung; dieselbe würde dann in der Regel auch diesen zweiten Körpertheil in Drehung versetzen, und zwar im entgegengesetzten Drehungssinn, so dass die Drehung im Gelenk nicht mehr mit der auf den ruhenden Raum bezogenen Drehung eines der beiden Körpertheile übereinstimmt.

Man könnte vielleicht dagegen einwenden, dass doch die relative Drehung eines der beiden Körpertheile in Bezug auf den anderen der Gelenkbewegung gleich ist. Abgesehen davon, dass die beiden Relativbewegungen, die man auf diese Weise erhalten kann, entgegengesetzten Drehungssinn besitzen, also gar nicht identisch sind, ist das auf einen Körpertheil ausgeübte Drehungsmoment nur ein Maass für das Bestreben des Muskels, den Körpertheil im Raume zu drehen; es ist aber durchaus nicht ausschlaggebend für die Relativbewegung desselben gegen den anderen Körpertheil und kann daher nicht zugleich als das auf das Gelenk ausgeübte Drehungsmoment angesehen werden.

Was versteht man nun in dem Falle, dass nur ein Gelenk beweglich ist, und der eine Insertionspunkt fest liegt, unter dem auf das Gelenk ausgeübten Drehungsmoment? Handelt es sich um ein Gelenk von 3 Graden der Freiheit mit festem Mittelpunkt, so wird das Drehungsmoment eines Muskels durch das Produkt aus der Grösse der gesammten Muskelkraft und dem Abstand der resultirenden Zugrichtung vom Drehpunkt, den man als idealen Hebelarm bezeichnet, gemessen. Die gesammte Muskelkraft ist dabei direkt proportional dem physiologischen Querschnitt des Muskels; sie kann daher selbst wieder als Produkt aus dem physiologischen Querschnitt und der auf die Querschnittseinheit bezogenen Muskelspannung aufgefasst werden. Die Axe, um welche der Muskel den Körpertheil drehen will, steht auf der Ebene durch die resultirende

Zugrichtung und den Drehpunkt senkrecht und geht natürlich durch letzteren hindurch. Es ist üblich, die Axe vom Drehpunkt aus nur nach der Seite gezogen zu denken, von der aus die Drehung, welche der Muskel hervorzubringen sucht, im Sinne des Uhrzeigers stattfinden würde. Man hat dann in dieser Halbaxe des Drehungsmomentes zugleich ein Zeichen für den Drehungssinn desselben. Denkt man sich weiter vom Drehpunkt aus auf dieser Halbaxe eine Strecke abgetragen, deren Länge der Grösse des Drehungsmomentes proportional ist, so hat man damit das Drehungsbestreben, welches der Muskel unter den einschränkenden Voraussetzungen auf das Gelenk ausübt, in eindeutiger Weise charakterisirt und veranschaulicht.

Die Voraussetzungen, dass der eine Insertionspunkt des Muskels, nämlich sein Ursprung, fixirt ist, und der Muskel nur auf ein Gelenk einwirkt, finden sich, wie schon oben auseinandergesetzt wurde, mit genügender Genauigkeit bei den Augenmuskeln erfüllt. Man hat daher von jeher in der angedeuteten Weise die Drehungsmomente der Augenmuskeln bestimmt und durch eine vom Drehpunkt des Auges aus gezogene Strecke veranschaulicht. Hierbei hat man es insofern mit besonders einfachen Verhältnissen zu thun, als der ideale Hebelarm bei allen Stellungen des Auges für die sämmtlichen 6 Augenmuskeln mit grosser Annäherung gleich gross, nämlich gleich dem durchschnittlichen Radius des Augapfels ist. Daher verhalten sich in diesem Falle die von den Augenmuskeln ausgeübten Drehungsmomente wie die Gesammtspannungen derselben.

Bei einem Gelenk von 1 Grad der Freiheit, wo die Drehung von jeder Gelenkstellung aus nur um eine einzige bestimmte Axe stattfinden kann, ist die oben gegebene Definition des Drehungsmomentes nur dann richtig, wenn die Halbaxe des Drehungsmomentes in die thatsächlich vorhandene Drehungsaxe hineinfällt. Andernfalls hat man die auf der Halbaxe des Drehungsmomentes abgetragene Strecke auf die wirkliche Drehungsaxe zu projiciren, um ein exaktes und anschauliches Maass für die Grösse des Drehungsmomentes zu erhalten. Man kann dann auch so verfahren, dass man die in der resultirenden Zugrichtung wirkende Muskelkraft in zwei zu einander rechtwinklige Componenten zerlegt, von denen die eine die Richtung der vorhandenen Drehungsaxe besitzt; da diese Componente keine Drehung um die Axe hervorbringen kann,

so kommt für das Drehungsmoment des Muskels allein die andere, zu der Drehungsaxe senkrecht gerichtete, Componente der Muskelkraft in Betracht. Das Produkt der letzteren mit ihrem kürzesten Abstand von der Drehungsaxe, welcher den idealen Hebelarm darstellt, gibt dann wieder das Maass für das Drehungsmoment ab. Die Halbaxe desselben fällt dabei von selbst in die Drehungsaxe hinein.

Da nach den obigen Auseinandersetzungen das in der angeführten Weise definirte Drehungsmoment für ein Gelenk nur so lange Bedeutung besitzt, als dieses Gelenk allein unter allen anderen beweglich gelassen ist, so fragt es sich, was man unter dem Drehungsmoment eines Muskels zu verstehen hat, wenn diese Bedingung nicht mehr erfüllt ist.

II. Definition des statischen und des kinetischen Maasses der Wirkung eines Muskels.

Für die Entscheidung der Frage, was man im Falle freier Beweglichkeit der Gelenke unter den Drehungsmomenten eines Muskels zu verstehen hat, ist es von ganz principieller Bedeutung, dass, wie schon oben angedeutet wurde, ein Muskel in erster Linie die einzelnen Körpertheile zu drehen strebt, und also die in einem Gelenk eintretende Bewegung erst eine secundäre Erscheinung ist. Man hat daher vor allen Dingen das Drehungsbestreben, oder mit anderen Worten das Drehungsmoment, festzustellen und zu messen, welches der Muskel auf die verschiedenen zwischen seinen Insertionen liegenden Körpertheile ausübt.

Was ist nun unter einem Drehungsmoment zu verstehen, welches auf einen Körpertheil ausgeübt wird, da man ja doch hier nicht wie beim Gelenk eine feste Axe oder einen festen Punkt hat, auf welchen das Drehungsmoment bezogen werden kann?

Wenn ein Körper in Drehung versetzt wird, so lässt sich in allen Fällen nachweisen, dass er nicht der Einwirkung einer einzigen Kraft, sondern eines sogenannten Kräftepaares unterliegt. Unter einem **Kräftepaar** versteht man bekanntlich nach Poinsot zwei Kräfte von gleicher Intensität aber entgegengesetzter Richtung, welche in verschiedenen Punkten eines Körpers in der Weise angreifen, dass die Richtung der einen nicht gerade die Fortsetzung der Richtung der anderen bildet, so dass also beide Richtungen in einem gewissen Abstand von einander verlaufen, den man den **Arm** des Kräftepaares nennt. Je grösser der Arm des Paares, um so grösser ist das auf den Körper ausgeübte Drehungsmoment. Das letztere wird daher durch das Produkt aus der Intensität einer der beiden Kräfte und der Länge des Armes des Paares gemessen, eine Grösse, welche auch das **Moment des Kräftepaares** genannt wird.

Es ist nicht immer leicht, auf den ersten Blick die beiden Kräfte des Paares zu erkennen, welches einen Körper in Drehung versetzt hat. In manchen Fällen stellt die eine der beiden Kräfte einen Druck dar, den ein anderer Körper ausübt, in anderen Fällen wird sie gebildet durch die Reaction gegen einen Druck, den der betreffende Körper selbst gegen einen anderen im Raume festen ausübt; zuweilen rührt sie auch von der Trägheit des Körpers her u. s. w. Wenn z. B. ein Körper um eine feste Axe drehbar ist, so verursacht jede an demselben angreifende Kraft einen Druck gegen die Axe, und die letztere übt daher nach dem Newtonschen Princip der Gleichheit von Action und Reaction einen gleich grossen Gegendruck auf den Körper aus. Der Druck auf die Axe stimmt an Intensität und Richtung mit der am Körper angreifenden Kraft überein; die Reaction ist daher derselben entgegengesetzt gleich und ergänzt sie zum Kräftepaar, welches die Ursache der eintretenden Drehung ist.

Bei einem Muskel, der entweder eingelenkig ist, oder bei dem alle Gelenke bis auf eins, sowie ausserdem der den Ursprung tragende Körpertheil festgestellt sind, verhält es sich ganz genau ebenso. Die am Ansatz angreifende Muskelkraft, welche unter den einschränkenden Voraussetzungen allein zur Wirkung gelangt, verursacht einen gleich grossen und gleich gerichteten Druck im Gelenk auf den festgestellten Körpertheil, der zu einer ebenfalls gleich grossen, aber natürlich entgegengesetzt gerichteten Reaction auf den beweglichen Körpertheil Veranlassung gibt. Es unterliegt daher der den Ansatz tragende Körpertheil der Wirkung eines Kräftepaares, welches aus der im Ansatz angreifenden Muskelkraft und der im Mittelpunkt des Verbindungsgelenks angreifenden Reactionskraft besteht. Dieses Kräftepaar ist die eigentliche Ursache der Drehung desselben. Das Drehungsmoment, welches dasselbe auf den Körpertheil ausübt, ist nach dem Obigen gleich dem Produkt aus der Muskelkraft und dem Arm des Paares. Da der letztere mit dem Abstand der resultirenden Zugrichtung vom Gelenkmittelpunkt übereinstimmt, so ist also in diesem speciellen Falle das auf den allein beweglich gelassenen Körpertheil ausgeübte Drehungsmoment der Grösse nach identisch mit dem auf das Gelenk ausgeübten Drehungsmoment.

Wie gestalten sich aber die Verhältnisse, wenn beide Insertionsstellen und auch alle Gelenke frei beweglich sind?

Um die Betrachtung zu vereinfachen, soll zunächst angenommen werden, dass es sich um einen eingelenkigen Muskel handelt. Zu der im Ansatz angreifenden Muskelkraft kommt dann die entgegengesetzt gleiche Kraft am Ursprung hinzu. Die letztere verursacht im Mittelpunkt des Gelenks einen gleich grossen Druck auf den Körpertheil, welcher den Ansatz trägt, und vervollständigt die erstere zu dem auf den Ansatz-Körpertheil einwirkenden Kräftepaar. Umgekehrt übt die am Ansatz angreifende Kraft auf den Ursprungs-Körpertheil einen gleich grossen Druck im Gelenk aus, welcher mit der am Ursprung angreifenden Muskelkraft das auf diesen Körpertheil einwirkende Kräftepaar zusammensetzt. Vorausgesetzt ist dabei, dass der Muskel sich zwischen Ansatz und Ursprung ungehindert ausspannen kann; legt er sich dagegen über Knochenvorsprünge hinweg, so sind als Insertionsstellen hier und bei allen folgenden Betrachtungen immer diejenigen Stellen der beiden Körpertheile zu verstehen, zwischen denen sich der Muskel thatsächlich ungehindert auszuspannen vermag. Es kommt dabei gar nicht in Betracht, ob auf dieser Strecke alle Muskelfasern vorhanden sind oder nicht; es beeinträchtigt sogar die Gültigkeit der Schlüsse nicht im mindesten, wenn der Muskel sich nur mit einem Stück seiner Sehne geradlinig zwischen den beiden Körpertheilen ausspannt.

Die Arme der beiden Kräftepaare eines eingelenkigen Muskels sind gleich, und zwar an Grösse gleich dem Abstand der resultirenden Zugrichtung des Muskels vom Gelenk. Daher haben auch die auf die beiden Körpertheile ausgeübten Drehungsmomente gleiche Grösse; der Drehungssinn ist jedoch bei dem einen gerade entgegengesetzt als bei dem anderen. Besonders hervorzuheben ist, dass das am Ansatz-Körpertheil angreifende Kräftepaar durch den Umstand, dass der Ursprung frei beweglich gemacht worden ist, keine Aenderung erfahren hat. Am Ursprungs-Körpertheil ist dagegen erst jetzt ein drehendes Kräftepaar zum Vorschein gekommen. Das Bestreben, auch diesen zu drehen, hat dagegen der Muskel schon in dem Falle gehabt, wo der Ursprung noch fixirt war. Durch die Feststellung des betreffenden Körpertheils wurde es jedoch verhindert, sich geltend zu machen, indem durch die Reactionskräfte an den Befestigungsstellen ein zweites Kräftepaar hervorgerufen wurde, welches gerade dem vom Muskel ausgeübten das Gleichgewicht hielt. Das letztere war also schon früher in gleicher

Grösse vorhanden. Daraus geht aber die wichtige Thatsache hervor, dass die von einem Muskel auf die verschiedenen Körpertheile ausgeübten Drehungsmomente von speciellen Voraussetzungen über die Beweglichkeit der Insertionsstellen und Gelenke ganz unabhängig sind, und daher allgemeine Gültigkeit besitzen.

Bei zweigelenkigen Muskeln kommen die Kräftepaare, welche auf die beiden Körpertheile einwirken, an denen der Muskel inserirt, in genau derselben Weise zu Stande wie bei eingelenkigen Muskeln. Die eine Kraft des Paares ist immer die im Insertionspunkt selbst angreifende Muskelkraft; die andere wird durch den Druck dargestellt, welche die im zweiten Insertionspunkt angreifende Muskelkraft an dem ihm zugekehrten Gelenk des den ersten Insertionspunkt tragenden Körpertheils verursacht. Vorausgesetzt ist dabei zunächst, dass der Muskel sich zwischen zwei Stellen der beiden Körpertheile, an denen er inserirt, ungehindert ausspannen kann, also nicht durch einen am mittleren Körpertheil befindlichen Knochenvorsprung aus seinem geradlinigen Verlaufe abgelenkt wird. Auf den mittleren Körpertheil wirkt unter diesen Umständen der Muskel mit einem Kräftepaar ein, welches auf folgende Weise entsteht. Sowohl die im Ansatz als auch die im Ursprung angreifende Muskelkraft übt einen Druck auf das ihr zunächst liegende Gelenk des mittleren Körpertheils aus, welcher ihr an Grösse und Richtung gleich ist. Diese beiden Druckkräfte bilden das Kräftepaar, welches den mittleren Körpertheil zu drehen sucht.

Die Momente der drei Kräftepaare bilden nun wieder die vom Muskel auf die drei in seinem Wirkungsbereich liegenden Körpertheile ausgeübten Drehungsmomente. Von Drehungsmomenten, welche auf die beiden Gelenke ausgeübt werden, kann hier gar keine Rede mehr sein.

Zwischen den drei auf die Körpertheile ausgeübten Drehungsmomenten besteht eine sehr einfache Beziehung. Dieselben würden sich nämlich zusammen das Gleichgewicht halten, also keine Drehung mehr hervorbringen, wenn sie nicht auf drei verschiedene, sondern auf ein und denselben Körper einwirkten. Davon kann man sich leicht auf folgende Weise Rechenschaft geben. Die Drehungsmomente sind nach den obigen Auseinandersetzungen unabhängig davon, ob die Körpertheile ganz frei in den Gelenken beweglich sind oder nicht. Denkt man sich also die beiden Gelenke festgestellt, so werden die Drehungsmomente des Muskels hier-

durch nicht geändert. Die drei Körpertheile bilden aber dann einen einzigen starren Körper, auf welchen nunmehr die drei Drehungsmomente in derselben Weise einwirken wie auf die einzelnen Theile. Da nun aber, wie wohl ohne Weiteres ersichtlich ist, der Muskel kein Drehungsbestreben mehr ausüben kann, wenn alle Gelenke, über die er hinwegzieht, festgestellt sind, so müssen auch bei Freiheit der Gelenke die drei Drehungsmomente so bemessen sein, dass sie sich gegenseitig in ihrer Wirkung aufheben, wenn man sie zu einem resultirenden Drehungsmoment zusammensetzen wollte. Für einen eingelenkigen Muskel müssen daher insbesondere nach diesem Satze die beiden Drehungsmomente entgegengesetzt gleich sein, wie es in der That der Fall ist.

Bisher war angenommen worden, dass der zweigelenkige Muskel nicht durch den mittleren Körpertheil aus seinem geradlinigen Verlauf zwischen den Insertionsstellen, bezüglich den diese vertretenden Stellen der beiden äusseren Körpertheile, abgelenkt wird. Findet dagegen eine solche Ablenkung des Muskelzuges statt, so kann man für die Ableitung der drei Drehungsmomente den Muskel als eine Combination von zwei eingelenkigen Muskeln auffassen. Der eine Muskel zieht nur über das eine Gelenk, der andere nur über das andere Gelenk hinweg, und beide besitzen immer die gleiche Spannung. Als Insertionen der beiden eingelenkigen Theilmuskeln sind dabei wiederum die Stellen aufzufassen, zwischen denen sie sich ungehindert vom mittleren Körpertheil nach den beiden anderen ausspannen können. Jeder der beiden Theilmuskeln gibt natürlich zu zwei Drehungsmomenten Veranlassung, so dass der mittlere Körper der Einwirkung zweier Drehungsmomente unterliegt, deren Resultante das auf denselben ausgeübte Drehungsmoment darstellt. Zwischen dem letzteren und den auf die beiden anderen Körpertheile ausgeübten Drehungsmomenten besteht nun wieder die obige Beziehung, dass sie sich gegenseitig in ihrer Wirkung vernichten würden, wenn sie auf einen einzigen starren Körper einwirkten. Das geht hier ohne Weiteres aus dem Umstande hervor, dass die zu einem Theilmuskel gehörenden beiden Drehungsmomente entgegengesetzt gleich sind, so dass also alle vier eine verschwindende Resultante besitzen.

Die einfache Beziehung, welche in allen Fällen zwischen den drei Drehungsmomenten eines zweigelenkigen Muskels besteht, gibt nun ein einfaches Mittel an die Hand, ohne neue Messung am

Präparat das dritte Drehungsmoment zu bestimmen, wenn die beiden anderen bekannt sind. Es ist verhältnissmässig leicht, das Drehungsmoment am Präparat direkt zu bestimmen, welches auf einen Körpertheil ausgeübt wird, an dem der Muskel inserirt. Zu dem Zwecke braucht man nur in der zu untersuchenden Gelenkstellung die beiden anderen Körpertheile, und damit das dieselben verbindende Gelenk zu fixiren, und dann mit einer der für diesen Zweck ausgebildeten Methoden das Drehungsmoment zu messen, welches der Muskel unter den speciellen Bedingungen auf das allein frei gelassene Gelenk ausübt. Das letztere stimmt dann nach dem Früheren in seiner Grösse mit dem auf den betreffenden Körpertheil ausgeübten Drehungsmoment überein. Hat man aber einmal die zu den beiden Insertions-Körpertheilen gehörenden Drehungsmomente erst gewonnen, so kann man aus diesen dann leicht das Drehungsmoment des mittleren Körpertheils ableiten, welches am Präparat nicht so einfach zu bestimmen ist. Man braucht zu diesem Zwecke nur die beiden schon gewonnenen Drehungsmomente zu einem resultirenden Drehungsmoment zusammenzusetzen; von diesem unterscheidet sich das auf den mittleren Körpertheil ausgeübte Drehungsmoment allein durch den Drehungssinn, der deshalb in das Gegentheil umzukehren ist.

Handelt es sich endlich um einen Muskel, der über mehr als zwei Gelenke sich geradlinig ausspannt, so kann man nach demselben Princip wie bei den zweigelenkigen Muskeln die Kräftepaare construiren, mit denen derselbe auf die verschiedenen in seinem unmittelbaren Wirkungsbereich liegenden Körpertheile einwirkt. Die Kräftepaare an den beiden Insertions-Körpertheilen setzen sich auch hier wieder zusammen aus der im Insertionspunkte, bezüglich dessen Stellvertreter, angreifenden Muskelkraft und einer entgegengesetzt gleichen Druckkraft in dem Gelenk des Insertions-Körpertheils, über welches der Muskel hinwegzieht. Auf einen mittleren Körpertheil wirkt dagegen der Muskel in jedem der beiden Gelenke, die er überspannt, als Druck. Auch diese beiden Druckkräfte sind entgegengesetzt gleich; denn eine jede stimmt mit derjenigen der beiden Muskelkräfte überein, welche an dem Insertions-Körpertheil angreift, mit dem der mittlere Körpertheil durch das betreffende Gelenk in unmittelbarer oder wenigstens mittelbarer Verbindung steht. So gibt also auch hier der Muskel zu einem Kräftepaar Veranlassung.

Wird ein mehrgelenkiger Muskel durch Knochenvorsprünge oder andere Muskeln am geradlinigen Verlauf zwischen den beiden Insertions-Körpertheilen gehindert, so ist er wiederum gleichwerthig mit einer Kette auf einanderfolgender Muskeln, von denen jeder nur noch über eine geringere Anzahl von Muskeln geradlinig hinwegzieht.

Auch für einen beliebigen mehrgelenkigen Muskel gilt unter allen Umständen der Satz, dass die Drehungsmomente, mit denen er auf die einzelnen Körpertheile einwirkt, sich das Gleichgewicht halten würden, wenn sie alle einen einzigen starren Körper beeinflussten. Denn stellt man alle Gelenke fest, über welche der Muskel hinwegzieht, so vermag derselbe dieses starre System natürlich nicht mehr in Drehung zu versetzen. Das aus den sämmtlichen Drehungsmomenten zusammengesetzte resultirende Drehungsmoment muss also die Grösse Null besitzen. Lässt man nur ein Gelenk frei, während man alle anderen feststellt, so verhält sich der Muskel wie ein eingelenkiger. Die Drehungsmomente, mit denen er auf die beiden durch das beweglich gelassene Gelenk mit einander verbundenen starren Systeme von Körpertheilen einwirkt, sind dann nach dem Früheren entgegengesetzt gleich, d. h. sie besitzen gleiche Grösse, aber entgegengesetzten Drehungssinn. Ein jedes derselben bildet dabei das resultirende Drehungsmoment für die sämmtlichen Drehungsmomente, mit denen der Muskel auf die jetzt starr verbundenen Körpertheile des betreffenden Systems einwirkt.

Mit Hülfe dieser Sätze lassen sich die zu den einzelnen Körpertheilen gehörenden Drehungsmomente leicht unter Anwendung der Methoden zur Bestimmung der Drehungsmomente eines eingelenkigen Muskels gewinnen. Um dies verständlich zu machen, seien die auf einander folgenden Körpertheile, auf welche ein Muskel Drehungsmomente ausübt, von 1 bis n numerirt, und jedem Drehungsmoment die betreffende Nummer als Index beigegeben. Dann lässt sich zunächst das Drehungsmoment D_1 leicht dadurch empirisch bestimmen, dass man alle Gelenke bis auf das, welches den 1. und 2. Körpertheil verbindet, feststellt. Lässt man dagegen nur das Gelenk zwischen dem 2. und 3. Körpertheil frei, so erhält man durch Messung ein Drehungsmoment, welches die Resultante der beiden Drehungsmomente D_1 und D_2 darstellt. Da D_1 schon vorher gewonnen ist, so kann man nunmehr auch D_2 selbst ab-

leiten. Bei Fixation aller Gelenke mit Ausnahme desjenigen, welches den 3. und 4. Körpertheil verbindet, erhält man weiterhin das resultirende Drehungsmoment von D_1, D_2 und D_3, und kann infolgedessen D_3 bestimmen. Fährt man in dieser Weise fort, so erhält man schliesslich die sämmtlichen Drehungsmomente D_1, D_2, $D_3 \ldots D_n$.

Hat man nun mit der Ableitung der Drehungsmomente, mit denen ein Muskel auf die sämmtlichen zwischen seinen Insertionsstellen liegenden Körpertheile einwirkt, die Wirkungsweise desselben vollkommen klargestellt?

Die Antwort auf diese Frage findet sich in den früheren Auseinandersetzungen schon angedeutet. Es ist hervorgehoben worden, dass die Bewegungen, welche ein Muskel an den Körpertheilen und den sie verbindenden Gelenken bei isolirter Contraction hervorruft, ausser von den Drehungsmomenten noch von den Dimensionen und den Massen der Körpertheile, sowie der Massenvertheilung innerhalb eines jeden, und natürlich auch von der Art der besonderen Gelenkverbindungen abhängen. Ferner stellt sich heraus, dass die Bewegung eines Körpertheils in ganz bestimmter Weise durch die eintretenden Bewegungen der übrigen Körpertheile und, falls die Contraction des Muskels nicht aus der Ruhe geschieht, durch den schon vorhandenen Bewegungszustand des ganzen Körpers beeinflusst wird. Die Kenntniss der Drehungsmomente stellt daher zwar einen nothwendigen und wesentlichen Faktor für die Beurtheilung der Wirkungsweise eines Muskels dar, sie reicht aber allein nicht aus, um die infolge der Contraction des Muskels eintretenden Bewegungen verstehen und voraussagen zu können. Kommt dagegen trotz der durch Innervation hervorgerufenen Vergrösserung der Spannung eines Muskels keine Bewegung zu Stande, so dass derselbe anderen einwirkenden Muskelkräften, Schwerkräften u. a. das Gleichgewicht hält, so wird sein Einfluss auf die verschiedenen Körpertheile durch die auf dieselben ausgeübten Drehungsmomente vollkommen charakterisirt. Demnach stellen die Drehungsmomente nur ein **statisches Maass** für die Wirkung eines Muskels dar.

Es bleibt daher noch zu entscheiden, wie man sich ein Maass für den vom Muskel erzielten Bewegungseffekt verschaffen kann. Dieses bezeichnet man dann zweckmässiger Weise als das kinetische Maass der Wirkung des Muskels.

Im Allgemeinen wirkt ein Muskel auf mindestens zwei Gelenke,

sehr oft aber auf mehr Gelenke bewegend ein. Ausgenommen sind hiervon nur mit grosser Annäherung diejenigen eingelenkigen Muskeln, bei denen, wie bei den Augenmuskeln, das Gewicht des einen der beiden am Gelenk betheiligten Körperabschnitte so stark über das Gewicht des andern überwiegt, dass das letztere gegenüber dem ersteren ohne merklichen Fehler vernachlässigt werden kann. So wirken beispielsweise, wie schon oben erwähnt wurde, alle nur über das Ellbogengelenk hinwegziehenden Muskeln auch auf das Schultergelenk, alle allein über das Kniegelenk ziehenden Muskeln gleichzeitig auf das Hüftgelenk, ferner alle nur über das Fussgelenk ausgespannten Muskeln auch auf das Kniegelenk, genau genommen sogar auf das Hüftgelenk bewegend ein. Es bringen sogar die allein über das Schultergelenk oder das Hüftgelenk hinwegziehenden Muskeln gleichzeitig eine Bewegung im Ellbogengelenk[1]) oder im Kniegelenk hervor u. s. w. Die Grösse der in den verschiedenen Gelenken während einer bestimmten Zeit eintretenden Drehungen hängt dabei natürlich von der jeweiligen Spannung des betreffenden Muskels ab.

Fasst man zunächst nur den Fall ins Auge, dass vor der Contraction des Muskels der Körper sich im Ruhezustande befindet — eine Voraussetzung, welche auch allen bisherigen Angaben über die Wirkung der Muskeln zu Grunde liegt —, so zeigt sich dagegen, dass das Verhältniss der um bestimmte Gelenkaxen stattfindenden Gelenkdrehungen von der Spannung des Muskels unabhängig ist. Bei doppelter oder dreifacher Spannung fallen zwar die einzelnen Drehungen entsprechend grösser aus, ihr Grössenverhältniss bleibt aber dasselbe; es werden dann die gleichen Drehungen wie bei einfacher Spannung eben nur in entsprechend kürzerer Zeit hervorgebracht. Vorausgesetzt ist nur, dass die zum Vergleiche herangezogenen Drehungen in den verschiedenen Gelenken an und für sich nicht sehr gross sind, damit durch dieselben die mechanischen Verhältnisse, insbesondere die vom Muskel ausgeübten Drehungsmomente, sich nicht merklich ändern. Genau genommen darf man dabei nur unendlich kleine Anfangsbewegungen in den Gelenken berücksichtigen, denn bei jeder neuen Gelenkstellung wird im Allgemeinen die kinetische Wirkung eines Muskels eine andere.

1) Abhandlungen der math.-phys. Classe der Königl. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch. Bd. XXIII No. VI.

Der Satz, dass das Verhältniss der kleinen Anfangsdrehungen in den Gelenken von der Spannung des Muskels ganz unabhängig ist, gilt nicht nur für eingelenkige, sondern für alle Muskeln, gleichgültig über wie viel frei bewegliche Gelenke sie hinwegziehen. Der Grund für diese bemerkenswerthe Thatsache ist, wie aus den späteren Angaben und auch schon aus früheren Untersuchungen[1]) hervorgeht, darin zu suchen, dass das Verhältniss der kleinen Anfangsdrehungen nicht von den absoluten Werthen der vom Muskel ausgeübten Drehungsmomente, sondern auch nur von deren Verhältniss abhängt. Da die sämmtlichen von einem Muskel auf die verschiedenen Körpertheile ausgeübten Drehungsmomente die jeweilige Gesammtspannung des Muskels als einen gemeinsamen Faktor besitzen, während der andere Faktor den Arm des entsprechenden Kräftepaares darstellt, so kann das Verhältniss je zweier dieser Drehungsmomente stets durch das Verhältniss der Arme der beiden zugehörigen Kräftepaare ersetzt werden. Hieraus geht weiterhin hervor, dass das Verhältniss der Drehungsmomente, und infolgedessen das Verhältniss der kleinen Anfangsdrehungen, auch nicht von dem physiologischen Querschnitt des Muskels beeinflusst wird.

So hat man denn in den Verhältnissen der Anfangsdrehungen, die der Muskel bei seiner Contraction aus einer bestimmten Ruhehaltung in den verschiedenen Gelenken hervorbringt, ein geeignetes **kinetisches Maass** für die Wirkungsweise des Muskels, das sowohl von der Spannung als auch dem Querschnitt des Muskels unabhängig ist und sich nur als eine Funktion der Verhältnisse der Arme der einwirkenden Kräftepaare und der Gelenkwinkel, welche die Ausgangshaltung eindeutig bestimmen, darstellt.

Es fragt sich nun, auf welche Weise man im gegebenen Falle dieses Maass numerisch gewinnen kann. Um dies zu erreichen, hat man zu beachten, dass bei der Bewegung aus der Ruhe die Anfangsdrehung in einem Gelenk direkt proportional der Winkelbeschleunigung ist, welche der Muskel in dem Gelenk hervorruft. Man kann daher das Verhältniss der Anfangsdrehungen in den Gelenken durch das Verhältniss der zugehörenden Winkel-

1) Abhandlungen der math.-phys. Classe der Königl. Sächs. Gesellsch. d. Wissenschaften. Bd. XXII No. II und Bd. XXIII No. VI.

beschleunigungen messen. Diese Winkelbeschleunigungen hängen nun in bestimmt angebbarer Weise von den Drehungsmomenten und den mechanischen Eigenschaften der einzelnen Körpertheile, wie den Dimensionen und der Grösse der Masse eines jeden, der Lage der Schwerpunkte, den Trägheitsmomenten u. s. w., ab. Diese Abhängigkeit findet ihren Ausdruck in den sogenannten Bewegungsgleichungen. Hat man dieselben aufgestellt, so kann man dann leicht die Verhältnisse der Winkelbeschleunigungen durch die Verhältnisse der Drehungsmomente und die zur Ausgangshaltung gehörenden Gelenkwinkel ausdrücken.

Die allgemeine Methode, mit welcher man die Bewegungsgleichungen gewinnen kann, ist in einer früheren Arbeit[1]) von mir schon ausführlich auseinandergesetzt worden. In späteren Arbeiten[2]) sind auch schon diese Gleichungen für den speciellen Fall eines zweigliedrigen Systems abgeleitet und zur Bestimmung der Wirkungsweise eingelenkiger Armmuskeln und des langen Kopfes des M. biceps brachii verwendet worden. Es kann daher an dieser Stelle das Resultat der früheren Untersuchungen ohne Weiteres zur Aufstellung eines geeigneten kinetischen Maasses für die Wirkung der an einem zweigliedrigen System angreifenden Muskeln verwendet werden. Dabei ist nur zu beachten, dass die früheren Entwickelungen zur Voraussetzung hatten, dass das aus nur zwei durch ein Gelenk verbundenen Gliedern bestehende System durch ein an dem einen Glied befindliches Gelenk mit einem dritten Körpertheil verbunden ist, welcher bei den Contractionen der in Frage kommenden Muskeln festbleibt. Diese Annahme trifft aber wenigstens annähernd bei dem allein im Ellbogengelenk gegliederten Arm zu; denn die Contraction seiner Muskeln übt auf den Rumpf infolge der grossen Masse desselben nur einen geringen bewegenden Einfluss, und auch das Schulterblatt, welches sich ja bei den seitlichen Erhebungen des Armes bekanntlich sehr stark an der Bewegung betheiligen kann, und in der That auch betheiligt, darf für die allein in Frage stehenden Drehungen im Schultergelenk um eine zur Ellbogenaxe parallele Axe mit genügender Annäherung als zum Rumpfe festgestellt betrachtet werden. Ferner

1) Abhandlungen der math.-phys. Classe der Königl. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch. Bd. XX No. I.

2) Abhandlungen der math.-phys. Classe der Königl. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch. Bd. XXII No. II und Bd. XXIII No. VI.

bietet auch die untere Extremität ein hierher gehörendes Beispiel dar, sofern man den Fuss starr mit dem Unterschenkel verbunden denkt, und nur die Bewegungen in Betracht zieht, welche das Bein um eine zur Knieaxe parallele Axe des Hüftgelenkes auszuführen vermag, wenn der Fuss nicht unterstützt ist; denn auch hier kann man annähernd den Rumpf und das Becken als feststehend auffassen, zumal beide in diesem Falle entweder durch das andere Bein oder eine Unterlage, auf der man sitzt, unterstützt sein müssen.

Man hat hier ähnliche Verhältnisse wie bei den Augenmuskeln, wo man auch mit genügender Annäherung den Kopf als fixirt annehmen kann. Während aber die Augenmuskeln nur über ein Gelenk hinwegziehen, kommen bei dem zweigliedrigen System ausser den eingelenkigen auch zweigelenkige Muskeln in Frage. Unter die letzteren sind dabei auch solche drei- und mehrgelenkige Muskeln zu zählen, welche infolge der Voraussetzung, dass die beiden Glieder des Systems sich wie starre Massen verhalten, nur als zweigelenkige Muskeln zur Wirkung kommen; dies ist z. B. für die beiden Köpfe des dreigelenkigen M. biceps brachii der Fall, wenn die Beweglichkeit im Radioulnargelenk aufgehoben ist. Man erhält aber natürlich durch die Betrachtung des zweigliedrigen Systems nicht das kinetische Maass für die eigentliche Wirkung von drei- und mehrgelenkigen Muskeln; dieses kann nur bei Berücksichtigung eines drei- und mehrgliedrigen Systems gewonnen werden. Dagegen beziehen sich die für zweigelenkige Muskeln am zweigliedrigen System abgeleiteten Resultate auf die für die zweigelenkigen Muskeln charakteristische Wirkung und besitzen daher uneingeschränkte Geltung für dieselben, sofern nur die Voraussetzung mit genügender Annäherung erfüllt ist, dass das Zwischengelenk ein Charniergelenk ist, und das ganze System sich um eine nahezu festbleibende Axe dreht, welche der Axe des Zwischengelenks parallel läuft. Es kommen daher beispielsweise für den allein im Ellbogengelenk gegliederten Arm, bezüglich das allein im Kniegelenk gegliederte Bein, nur solche Muskeln in Betracht, deren resultirende Zugrichtungen einer zu den beiden parallelen Gelenkaxen senkrechten Ebene parallel laufen. Bei Muskeln, welche Drehungen im Schulter- bezüglich Hüftgelenk um noch andere Axen als die zur Ellbogen- bezüglich Knieaxe parallele hervorzubringen suchen, bleiben daher

die zu diesen Axen gehörenden Drehungsmomente vorläufig ausser Betracht. Eine solche Beschränkung ist zunächst angebracht, damit die Verhältnissse nicht von vornherein zu sehr complicirt werden. Durch die Untersuchungen an diesem speciellen zweigliedrigen System ist aber principiell der Weg vorgezeichnet, den man bei der Betrachtung von mehrgliedrigen Systemen oder von zweigliedrigen Systemen mit grösserer Freiheit in den Gelenken und den auf dieselben einwirkenden Muskeln einzuschlagen hat.

III. Ableitung des kinetischen Maasses am zweigliedrigen System.

Wie stellt sich nun unter der speciellen Annahme eines derartigen zweigliedrigen Systems das kinetische Maass für die Wirkung der an demselben angreifenden Muskeln?

Es mögen durch D_1 und D_2 die Drehungsmomente bezeichnet sein, mit welchen ein am zweigliedrigen System angreifender Muskel auf die beiden Glieder einwirkt, wobei D_1 demjenigen Glied angehören soll, welches um die feste Gelenkaxe drehbar ist. Dieses Glied soll überhaupt kurz als das erste, und das andere als das zweite bezeichnet sein. Ferner sei l_1 die Entfernung der Mittelpunkte beider Gelenke oder, mit anderen Worten, die Länge des ersten Gliedes, und c_2 der Abstand des Hauptpunktes des zweiten Gliedes vom Mittelpunkt des Zwischengelenks. Dabei ist unter dem Hauptpunkte eines Gliedes der Schwerpunkt desjenigen fingirten Massensystems zu verstehen, das man aus dem betreffenden Gliede erhält, wenn man im Mittelpunkt des Zwischengelenkes die ganze Masse des anderen Gliedes concentrirt denkt. Ein jedes der beiden auf diese Weise entstehenden Massensysteme wird als das zu dem Gliede gehörende „reducirte System" bezeichnet und zweckmässiger Weise mit der Nummer des Gliedes versehen. Nimmt man an, dass die feste Axe für das erste, und die Axe des Zwischengelenks für das zweite Glied bezügl. reducirte System eine Hauptträgheitsaxe darstellt, und bezeichnet man mit λ_1 den auf die feste Axe bezogenen Trägheitsradius des ersten reducirten Systems, mit λ_2 den auf die Axe des Zwischengelenks bezogenen Trägheitsradius des zweiten reducirten Systems, mit ψ den Winkel, welchen die Strecke c_2 mit der über das Zwischengelenk hinaus verlängerten Strecke l_1 bildet (Gelenkwinkel des Zwischengelenks), mit ψ'' die Winkelbeschleunigung in demselben Gelenk, und endlich mit φ'' die Winkelbeschleunigung in dem Gelenk mit der feststehenden Axe,

so hat man nach den früheren Untersuchungen[1]) für das Verhältniss der beiden Winkelbeschleunigungen die Formel

$$\frac{\varphi''}{\psi''} = \frac{\lambda_2^2 \frac{D_1}{D_2} - l_1 c_2 \cos \psi}{(\lambda_1^2 + l_1 c_2 \cos \psi) - (\lambda_2^2 + l_1 c_2 \cos \psi) \frac{D_1}{D_2}}.$$

Man erkennt hieraus, dass in der That das Verhältniss der Winkelbeschleunigungen und das mit diesem übereinstimmende Verhältniss der Anfangsdrehungen in den beiden Gelenken, welches das kinetische Maass für die Wirkung eines an dem System angreifenden Muskels abgibt, nur von dem Verhältniss der beiden Drehungsmomente, mit denen der Muskel auf die beiden Glieder einwirkt, abhängt. Weiterhin ist ersichtlich, dass in dem angenommenen Falle einer festen Drehungsaxe für das ganze System die Wirkung der Muskeln nur insofern sich mit der Gelenkstellung in dem Gelenk mit fester Axe ändert, als durch dieselbe das Verhältniss der Drehungsmomente beeinflusst wird; denn in expliciter Form kommt nur der Gelenkwinkel ψ des Zwischengelenks in der Formel vor. Da die Strecken l_1 und c_2 nur in der Verbindung $l_1 c_2$ auftreten, so wird der Einfluss der Dimensionen und Massen der beiden Glieder, sowie der Massenvertheilung innerhalb eines jeden scheinbar durch drei Grössen dargestellt, nämlich durch die Quadrate λ_1^2 und λ_2^2 der zu den beiden reducirten Systemen gehörenden Trägheitsmomente und das Produkt $l_1 c_2$. Es lässt sich aber leicht zeigen, dass diese drei Grössen durch nur zwei andere Constanten ersetzt werden können, welche im vorliegenden Falle vollkommen ausreichen, um die Abhängigkeit der Wirkung eines Muskels von den rein mechanischen Eigenschaften der beiden Glieder zu charakterisiren. Dividirt man nämlich den Zähler und Nenner des Ausdrucks für das kinetische Maass mit $l_1 c_2$, so nimmt dasselbe die Form an

$$\frac{\varphi''}{\psi''} = \frac{\frac{\lambda_2^2}{l_1 c_2} \frac{D_1}{D_2} - \cos \psi}{\left(\frac{\lambda_1^2}{l_1 c_2} + \cos \psi\right) - \left(\frac{\lambda_2^2}{l_1 c_2} + \cos \psi\right) \frac{D_1}{D_2}},$$

Die beiden Constanten $\frac{\lambda_1^2}{l_1 c_2}$ und $\frac{\lambda_2^2}{l_1 c_2}$, die jetzt allein noch in der Formel vorhanden sind, besitzen nun eine verhältnissmässig

---

1) Abhandl. der math.-phys. Classe der Königl. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch. Bd. XXIII. No. VI. Seite 511.

einfache Bedeutung, welche es ermöglicht, dieselben in jedem speciellen Falle leicht zu bestimmen. Da λ_2 der Trägheitsradius des zweiten reducirten Systems in Bezug auf die Axe des Zwischengelenks, und c_2 der Abstand des Schwerpunktes dieses Systems (Hauptpunktes des zweiten Gliedes) von derselben Axe ist, so bedeutet $\frac{\lambda_2^2}{c_2}$ die Länge σ_2 des mathematischen Pendels, welches die gleiche Schwingungsdauer besitzt, wie dieses Systems um die Axe des Zwischengelenks. Das zweite reducirte System unterscheidet sich von dem zweiten Glied nur dadurch, dass in einem Punkte der Axe des Zwischengelenks die Masse des ersten Gliedes concentrirt gedacht ist. Durch diese an der Axe selbst concentrirte Masse kann aber die Schwingungsdauer nicht geändert werden; daher bedeutet σ_2 auch zugleich die Länge des mathematischen Pendels, welches die gleiche Schwingungsdauer aufweist, als das zweite Glied selbst bei seinen Schwingungen um die Zwischengelenksaxe, nachdem man die letztere horizontal gestellt hat. Führt man die Grösse σ_2 ein, so nimmt die zweite Constante $\frac{\lambda_2^2}{l_1 c_2}$ die einfachere Form $\frac{\sigma_2}{l_1}$ an. Ferner wird die Länge σ_1 des mathematischen Pendels, welches die gleiche Schwingungsdauer besitzt als das erste reducirte System um die horizontal gestellte feste Axe, durch $\frac{\lambda_1^2}{c_1}$ gemessen, wenn man unter c_1 den Abstand des Schwerpunktes des ersten reducirten Systems (Hauptpunkt des ersten Gliedes) von dieser festen Axe versteht. Man kann daher zunächst die erste Constante $\frac{\lambda_1^2}{l_1 c_2}$ in der Form $\frac{\sigma_1}{l_1 \frac{c_2}{c_1}}$ schreiben. Nun bedeutet nach früheren Untersuchungen[1]) der Nenner $l_1 \frac{c_2}{c_1}$ dieses Quotienten den Abstand eines festen Punktes der Unterarmlängsaxe vom Mittelpunkt des Zwischengelenks, welcher mit dem festen Mittelpunkt des ersten Gelenks und dem Gesammtschwerpunkt S_0 des ganzen zweigliedrigen Systems bei allen Gelenkstellungen in einer geraden Linie liegt. Dieser Punkt auf der Längsaxe des zweiten Gliedes führt den Namen „Richtpunkt" desselben. Bezeichnet man seine Entfernung vom Mittelpunkt des Zwischengelenks mit ϱ_2, so geht

1) Abhandl. der math.-phys. Classe der Königl. Sächs. Gesellsch. d. Wissenschaften. Bd. XXIII. No. IV. Seite 322.

die erste Constante über in $\frac{\sigma_1}{\varrho_2}$. Ersetzt man die beiden Constanten durch diese beiden Quotienten je zweier Strecken von anschaulicher Bedeutung, so nimmt das kinetische Maass für die Wirkung aller am zweigliedrigen System angreifenden Muskeln endlich die Form an

$$\frac{\varphi''}{\psi''} = \frac{\frac{\sigma_2}{l_1} \cdot \frac{D_1}{D_2} - \cos\psi}{\left(\frac{\sigma_1}{\varrho_2} + \cos\psi\right) - \left(\frac{\sigma_2}{l_1} + \cos\psi\right)\frac{D_1}{D_2}}.$$

Damit ist das kinetische Maass für die Wirkung der Muskeln im vorliegenden Falle auf den einfachsten Ausdruck gebracht. Es ist wohl zu beachten, dass dies nur für diejenigen Muskeln gilt, welche den oben gemachten Voraussetzungen entsprechen, und dass für die Wirkung der Muskeln unter anderen Verhältnissen auch der Ausdruck für das kinetische Maass sich ändert.

Die obigen Formeln lassen auf den ersten Blick erkennen, dass das Verhältniss der Drehungsmomente, mit welchen ein Muskel auf die beiden Körpertheile einwirkt, kein ausreichendes Maass für die bewegende Wirkung des Muskels sein kann; denn sonst müsste das Verhältniss der Winkelbeschleunigungen demselben proportional sein. Man findet nun in den Formeln deutlich zum Ausdruck gebracht, in welcher Weise die bei der Contraction eines Muskels eintretende Bewegung des zweigliedrigen Systems von den verschiedenen Faktoren beeinflusst wird. Während das Verhältniss der beiden Drehungsmomente D_1 und D_2 von der Insertionsweise und dem Verlauf des Muskels, sowie von der Ausgangsstellung in den Gelenken abhängt, wird der Einfluss der Dimensionen und Massen der beiden Körpertheile, sowie der Massenvertheilung innerhalb eines jeden allein durch die beiden Längen-Verhältnisse $\frac{\sigma_1}{\varrho_2}$ und $\frac{\sigma_2}{l_1}$ dargestellt; endlich gibt der Winkel ψ die Stellung der beiden Körpertheile zu einander an.

Sind die Bedingungen, unter denen ein Muskel zur Wirkung gelangt, complicirter, als sie für das specielle zweigliedrige System vorausgesetzt wurden, so reicht ein einziges Verhältniss zweier Winkelbeschleunigungen von verschiedenen Gelenken nicht aus, um die kinetische Wirkungsweise des Muskels darzustellen und zu messen. Wenn zum Beispiel das Gelenk, in welchem das ganze System gegen einen nahezu feststehenden Körpertheil sich

drehen kann, nicht zwangläufig ist, sondern 3 Grade der Freiheit besitzt, so wird die Anfangsbewegung in demselben nicht durch eine Winkelbeschleunigung allein charakterisirt. Es gehören hierzu dann drei Winkelbeschleunigungen, die sich etwa auf drei zu einander rechtwinklige Axen des annähernd festen Körpertheils beziehen lassen. Bezeichnet man dieselben mit φ_1'', φ_2'' und φ_3'' und nimmt an, dass das Zwischengelenk wie früher ein Charniergelenk ist, dessen Winkelbeschleunigung die Grösse ψ'' besitzt, so stellen erst die drei Verhältnisse $\frac{\varphi_1''}{\psi''}$, $\frac{\varphi_2''}{\psi''}$ und $\frac{\varphi_3''}{\psi''}$ zusammen das vollständige kinetische Maass für die Wirkung eines am System angreifenden Muskels dar. Ist dagegen die Voraussetzung, dass der Körpertheil, an welchem das System eingelenkt ist, fest bleibt, nicht mit genügender Annäherung erfüllt, sondern führt dieser wiederum Drehungen gegen einen anderen bei der Contraction des Muskels nahezu festbleibenden Körperabschnitt mit der Winkelbeschleunigung χ'' aus, so wird das kinetische Maass für die Muskelwirkung durch die zwei Verhältnisse $\frac{\chi''}{\varphi''}$ und $\frac{\varphi''}{\psi''}$ dargestellt, falls alle Gelenke zwangläufig sind. Jede Vergrösserung der Bewegungsfreiheit in einem oder mehreren der drei Gelenke vergrössert aber auch hier die Anzahl der Verhältnisse von je zwei Winkelbeschleunigungen, welche zur vollständigen Charakterisirung der Wirkungsweise des Muskels nothwendig sind. Ist das System von Haus aus mehr als zweigliedrig, wie es z. B. bei der unteren Extremität der Fall ist, wenn es nicht erlaubt ist, den Fuss gegen den Unterschenkel festgestellt anzunehmen, so bedingt schon dieser Umstand eine Vermehrung der Winkelbeschleunigungs-Verhältnisse.

Auf alle diese Fälle soll jedoch vorläufig noch nicht näher eingegangen werden, um das Problem der Bestimmung des kinetischen Maasses für die Wirkung von Muskeln von vornherein nicht zu sehr zu compliciren. Es mag vielmehr im Folgenden nur das specielle zweigliedrige System eingehend untersucht werden, welches die untere Extremität darstellt, falls man das Becken mit der Wirbelsäule als ruhend, und den Fuss gegen den Unterschenkel festgestellt annehmen darf. Um nicht Resultate von nur bedingter Geltung zu erlangen, sollen auch dabei die Muskeln ausser Betracht bleiben, welche, wie der M. gastrocnemius, ausser über das Kniegelenk auch über das Fussgelenk, oder wie der M. psoas major ausser über das Hüftgelenk auch über das Kreuz-

bein-Beckengelenk hinwegziehen. Von den übrigen Muskeln sollen aus demselben Grunde ferner nur diejenigen berücksichtigt werden, welche nicht ein merkliches rotatorisches oder adductorisches, bezüglich abductorisches Drehungsmoment auf den Oberschenkel ausüben. Es bleiben dann allein für die Untersuchung übrig die Mm. iliacus, gracilis, rectus femoris, vastus lateralis, vastus intermedius und vastus medialis, semitendinosus, semimembranosus und biceps femoris. Absolut genau ist zwar auch für diese Muskeln nicht die Bedingung erfüllt, dass sie nur Drehungsmomente um parallele Axen von der Richtung der Knieaxe hervorbringen. Da aber die Abweichungen der Axen ihrer Drehungsmomente von dieser Richtung nur gering sind, so wird durch die folgenden Messungen doch die Wirkungsweise dieser Muskeln bei ruhendem Becken mit grosser Annäherung aufgeklärt werden.

Zunächst sollen die von allen diesen Muskeln ausgeübten Drehungsmomente, und damit ihr statisches Maass, abgeleitet, und im Anschluss daran die Verhältnisse der Winkelbeschleunigungen, oder ihr kinetisches Maass, bestimmt werden.

IV. Das statische Maass von Muskeln des Oberschenkels.

a) Methode der Ableitung.

Bei der Bestimmung des statischen Maasses, welches in den Werthen der Drehungsmomente seinen Ausdruck findet, ist zu beachten, dass das auf einen Körpertheil ausgeübte Drehungsmoment auch bei gleichbleibender Spannung des Muskels sich im Allgemeinen mit der Gelenkstellung der Körpertheile zu einander ändert; es ist also eine Funktion der Gelenkwinkel. Dabei ist grundsätzlich auseinander zu halten, ob der betreffende Muskel allein über das Hüftgelenk oder allein über das Kniegelenk, oder ob er über beide Gelenke hinwegzieht. Bei den Muskeln der beiden ersten Arten sind die Drehungsmomente nur mit der Gelenkstellung im Hüftgelenk, bezüglich im Kniegelenk veränderlich; bei den Muskeln der letzten Art hängen dagegen die Drehungsmomente im Allgemeinen sowohl von der Stellung des Hüftgelenks als auch von der des Kniegelenks ab. Will man sich ein anschauliches Bild von der Abhängigkeit der Drehungsmomente von den Gelenkstellungen verschaffen, so kann das in den ersten beiden Fällen durch Curven, im letzten Falle dagegen in der Regel nur durch Flächen geschehen.

Die genannten Curven gewinnt man auf die Art, dass man auf einer horizontalen geraden Linie von einem festen Punkt derselben aus Strecken abträgt, welche den von einer bestimmten Gelenkstellung aus gemessenen Gelenkwinkeln im Hüftgelenk, bezüglich im Kniegelenk, proportional sind; dann kann man hierdurch jede Stellung in dem Gelenk, von welchem allein die Drehungsmomente des betreffenden eingelenkigen Muskels beeinflusst werden, durch einen Punkt der Geraden darstellen. Denkt man darauf von jedem dieser Punkte aus senkrecht zu der Geraden eine Strecke nach oben oder unten gezogen, deren Länge dem auf

einen Körpertheil ausgeübten Drehungsmoment proportional ist, so hat man in der die Endpunkte aller dieser Strecken verbindenden Curve ein klares Bild von der Aenderung des Drehungsmomentes mit der Gelenkstellung, falls man nur in der Richtung, in welcher die Strecken abgetragen werden, auch dem Drehungssinn des auf den Körpertheil ausgeübten Drehungsmomentes Rechnung trägt. In dieser Hinsicht empfiehlt es sich, die Strecke nach oben zu ziehen, wenn der Muskel von einer bestimmten Seite aus gesehen den Körpertheil im Sinne des Uhrzeigers zu drehen sucht, dagegen nach unten beim entgegengesetzten Drehungssinn. Eine auf diese Weise construirte Curve soll kurz die zu dem Körpertheil gehörende „Momentcurve“ heissen.

Die Fläche, welche die Abhängigkeit des von einem zweigelenkigen Muskel auf einen Körpertheil ausgeübten Drehungsmomentes von den Gelenkstellungen des zweigliedrigen Systems zur Darstellung bringt, gewinnt man dagegen folgendermaassen. In einer horizontalen Ebene denke man sich von einem festen Coordinatenanfangspunkt aus zwei zu einander rechtwinklige Coordinatenaxen eingezeichnet. Von dem Coordinatenanfangspunkt aus trage man auf der einen Axe Strecken, welche den Gelenkwinkeln des Hüftgelenks, und auf der anderen solche, welche den Gelenkwinkeln des Kniegelenks proportional sind, ab. Auf diese Weise ordnet man jeder, durch bestimmte Werthe der beiden Gelenkwinkel charakterisirten Haltung der unteren Extremität einen ganz bestimmten Punkt der horizontalen Ebene zu, nämlich den Punkt, dessen Coordinaten den beiden Gelenkwinkeln proportional sind. Denkt man darauf wiederum von jedem Punkte der Ebene aus entsprechend dem Drehungssinn nach oben oder unten senkrecht zu der Ebene eine Strecke gezogen, welche dem zu der betreffenden Haltung des Systems gehörenden Drehungsmoment proportional ist, so liegen die Endpunkte aller dieser Strecken in einer Fläche, welche ein anschauliches Bild der Abhängigkeit des auf einen Körpertheil ausgeübten Drehungsmomentes von der Haltung der unteren Extremität gibt. Eine solche Fläche soll im Folgenden kurz als die zu dem Körpertheil gehörende „Momentfläche“ bezeichnet sein.

Bei der Construction der Momentcurven und Momentflächen muss natürlich vorausgesetzt werden, dass die Spannung des Muskels, auf die Einheit des physiologischen Querschnittes bezogen, bei

allen Stellungen des zweigliedrigen Systems die gleiche ist. Dann ist aber das Drehungsmoment proportional dem Produkt aus dem Arm des Kräftepaares, zu dem es gehört, und der Anzahl der Flächeneinheiten des physiologischen Querschnittes. Man kann daher dieses veränderliche Produkt direkt zur Darstellung der Momentcurven uud Momentflächen verwenden. Nimmt man als Einheit des Drehungsmomentes 1 Centimeterkilogramm und stellt dieselbe durch eine Länge von 1 Millimeter dar, so gibt die Anzahl der Millimeter einer jeden Ordinate die Anzahl der Centimeterkilogramm des Drehungsmomentes für den Fall an, dass der Muskel auf die Einheit des physiologischen Querschnittes bezogen eine Spannung von 1 Kilogramm besitzt.

Während das kinetische Maass eines Muskels sich ändert, wenn ein Gelenk festgestellt wird, oder sonst die mechanischen Verhältnisse, unter denen der Muskel zur Contraction gelangt, sich ändern, hängen die auf einen Körpertheil bei den verschiedenen Gelenkstellungen ausgeübten Drehungsmomente in keiner Weise von den besonderen Bedingungen für die Bewegung ab. Sie sind dieselben, wenn das Bein sich gegen das nahezu feststehende Becken bewegt, als wenn der Fuss auf dem Boden aufgesetzt ist, und das Bein unter Mitnahme des ganzen übrigen Körpers sich nur gegen den feststehenden Fuss bewegen kann. Man darf daher für die Ableitung des statischen Maasses der oben angeführten Muskeln das auf das Becken, bezüglich den Rumpf, ausgeübte Drehungsmoment nicht unberücksicht lassen, trotzdem diese Muskeln einen nur geringen kinetischen Einfluss auf diesen Körpertheil ausüben. Es kommen also im vorliegenden Falle drei Körpertheile in Betracht, nämlich der Rumpf, der Oberschenkel und der Unterschenkel, auf welche von den in Frage stehenden Muskeln mit Drehungsmomenten eingewirkt werden kann. Die eingelenkigen Muskeln beeinflussen nur zwei von denselben, die zweigelenkigen dagegen alle drei Körpertheile. Die von einem der eingelenkigen Muskeln auf die beiden benachbarten Körpertheile ausgeübten Drehungsmomente sind nach den früheren Auseinandersetzungen entgegengesetzt gleich; ihre algebraische Summe hat also den Werth Null. Desgleichen muss die algebraische Summe der drei Drehungsmomente, mit denen einer der zweigelenkigen Muskeln auf alle drei Körpertheile einwirkt, verschwinden. Dies ist eine unmittelbare Folge der für die angegebenen Muskeln nahezu erfüllten Vorraus-

setzung, dass alle drei Kräftepaare in einer Ebene liegen; die letztere steht dabei auf der Richtung der Knieaxe und der damit parallelen, allein in Frage kommenden Hüftaxe senkrecht. Würden die Kräftepaare, mit denen ein Muskel auf die drei Körpertheile einwirkt, in verschiedene, zu einander geneigte Ebenen fallen, so würde nicht die algebraische, sondern die sogenannte geometrische Summe der drei Drehungsmomente den Werth Null ergeben.

Man braucht daher für einen eingelenkigen Muskel nur ein Drehungsmoment, für einen zweigelenkigen Muskel dagegen nur zwei Drehungsmomente direkt zu messen, und kann dann das noch fehlende Drehungsmoment leicht ohne weitere Messung angeben.

Die Ableitung der Drehungsmomente am Präparat muss es bei der Messung der Arme der verschiedenen Kräftepaare und des Muskelquerschnittes bewenden lassen; denn der noch fehlende Spannungsfaktor ist ja von den Dimensionen und der Ansatzweise des Muskels ganz unabhängig. Nimmt man an, dass der Muskel pro Quadratcentimeter des physiologischen Querschnittes die Spannung von 1 Kilogramm besitzt, so hat man also dann in dem Produkt aus der Anzahl der Centimeter des Armes eines Kräftepaares und der Anzahl der Quadratcentimeter des physiologischen Querschnittes direkt die Maasszahl für das gesammte Drehungsmoment, gemessen in Centimeterkilogramm. Bestimmt man in dieser Weise für alle Körpertheile, auf welche ein Muskel mit Kräftepaaren einwirkt, die Drehungsmomente, so stellt die Gesammtheit derselben das statische Maass des Muskels für den Fall dar, dass er pro Quadratcentimeter die Spannung von 1 Kilogramm besitzt. Hat man weiterhin diese Bestimmung für verschiedene Muskeln ausgeführt, so hat man damit die Möglichkeit gewonnen, die verschiedenen Muskeln in Bezug auf ihre statische Wirkungsweise mit einander zu vergleichen. Für die Ableitung des kinetischen Maasses eines Muskels wäre dagegen die Messung der Querschnitte nicht nöthig, da dasselbe nur von den Verhältnissen der von einem Muskel auf die verschiedenen Körpertheile ausgeübten Drehungsmomente abhängt. Allerdings gestattet die Kenntniss des kinetischen Maasses in Folge dessen zunächst auch nur einen qualitativen, aber keinen quantitativen Vergleich der von verschiedenen Muskeln bei isolirter Contraction hervorgerufenen Gelenkbewegungen.

Die Messung der Arme der einzelnen Kräftepaare lässt sich im vorliegenden Falle besonders einfach gestalten. Die Voraussetzung, dass die Axen der von allen angeführten Muskeln verursachten Drehungsmomente der horizotal und frontal gerichteten Knieaxe parallel laufen sollen, kommt im Grunde darauf hinaus, dass man von den Muskelkräften nur diejenigen Componenten in Betracht zieht, welche einer zur Knieaxe senkrechten Ebene, also z. B. der Medianebene des Körpers, parallel laufen. Diese Bedingung ist für die hier in Frage kommenden Muskeln mit grosser Annäherung erfüllt. Um sich aber von etwaigen geringen Componenten unabhängig zu machen, die zur Medianebene senkrecht, der Knieaxe also parallel laufen, braucht man nur die ganze untere Extremität mit den Muskeln auf die Medianebene projicirt zu denken. Man kann dann in dieser zu den Gelenkaxen senkrechten Projection noch die gleichen Bewegungen der einzelnen Körpertheile gegen einander ausführen, wie an der Extremität selbst, und bekommt auch den ganzen Einfluss der Muskeln auf die zur Medianebene des Körpers parallelen Bewegungen der Körpertheile und Gelenke. Insbesondere werden die Arme der Kräftepaare, welche ja ebenfalls alle zur Medianebene parallel vorausgesetzt waren, in der Projection in unverkürztem Maasse erhalten. Es empfiehlt sich daher, die Messung derselben an einer solchen Projection auf die Medianebene vorzunehmen; dies ist bedeutend bequemer, als die Bestimmung an einem geeigneten Präparat, und führt zu mindestens ebenso genauen Resultaten.

Die Genauigkeit, welche bei derartigen Messungen an Präparaten erreicht werden kann, wird vielfach überschätzt. Man mag sich nur einmal alle die Fehlerquellen vergegenwärtigen, mit denen die Bestimmung des Abstandes des resultirenden Muskelzuges von einer Gelenkaxe behaftet ist, und bei noch so grosser Sorgfalt in der Anstellung der Versuche bis zu einem gewissen Grade behaftet bleiben muss.

Zunächst ist schon die Angabe der Insertionspunkte des resultirenden Muskelzuges nur annähernd zu machen. In Wirklichkeit hat man es ja stets mit mehr oder weniger ausgedehnten Insertionsflächen zu thun; die Bevorzugung je eines Punktes derselben, den man als Insertionspunkt des resultirenden Muskelzuges auffasst, ist aber unter allen Umständen innerhalb gewisser Grenzen willkürlich. Meistens wird ja die Annahme einer Resultante sämmt-

licher von den verschiedenen Muskelfasern ausgeübten Kräfte überhaupt nicht streng zutreffen. Aber selbst wenn in genügender Annäherung mit der Existenz einer Resultante gerechnet werden kann, so hat man doch durchaus kein exaktes Mittel, dieselbe aufzufinden; denn dies würde wiederum die genaue Kenntniss der Richtung der einzelnen Muskelfasern und ihrer Spannungen voraussetzen. Da es sehr wahrscheinlich ist, dass die verschiedenen, einen Muskel bildenden Fasern in ungleicher Weise bei der Contraction gespannt sind, und dass dieses Spannungsverhältniss sich mit der Gelenkbewegung fortwährend ändert, so kann man nicht einmal in den Fällen, wo voraussichtlich eine Resultante existirt, mit Sicherheit von einer unveränderlichen Lage der zum resultirenden Muskelzug gehörenden Insertionspunkte reden.

Die bis zu gewissem Grade also willkürlich gewählten Insertionspunkte denkt man nun mit einem Faden verbunden, welcher sich in entsprechender Weise wie der Muskel entweder ungehindert oder über einzelne Knochenvorsprünge hinweg ausspannt, und direkt als der resultirende Muskelzug aufgefasst wird. Nach dem Abstand dieses Fadens von den Gelenken bemisst man die Arme der einwirkenden Kräftepaare. Hierin liegt natürlich in vielen Fällen eine neue Fehlerquelle; denn ein solcher Faden wird im Allgemeinen nicht in gleicher Weise aus seinem geradlinigen Verlauf herausgedrängt, als es beim wirklichen Muskel infolge der Anlehnung an andere Muskeln und an Knochenvorsprünge, sowie der Verbindung mit Bindegewebsstreifen u. a. der Fall ist. Wollte man zur Vermeidung dieser Fehlerquelle den Muskel intakt lassen, aber nur eine mittlere Linie innerhalb desselben für die Messung verwenden, so würde wiederum die Bestimmung dieser mittleren Zugrichtung erschwert und mit neuen Fehlern behaftet sein. Man muss daher versuchen, bei der Messung des Abstandes des Muskelfadens von den Gelenkaxen dem Einfluss der Dicke des Muskels Rechnung zu tragen; zu absolut genauen Resultaten kann man aber selbstverständlich dabei nicht gelangen.

Dazu kommt nun noch, dass der Abstand der resultirenden Zugrichtung von der Gelenkaxe oder dem Mittelpunkt eines Gelenks sich schon deshalb nicht genau messen lässt, weil in den meisten Fällen weder eine unveränderliche Axe, noch auch ein unveränderlicher Mittelpunkt in einem organischen Gelenk existirt,

sondern mit der Aenderung der Gelenkstellung gewöhnlich auch eine geringe Aenderung in der Lage der Drehungsaxe oder des Drehpunktes einhergeht. Die genaue Kenntniss der Gelenkbewegung ist nur durch Versuche am Lebenden zu gewinnen, während die Messung der Drehungsmomente am Präparat vorgenommen werden muss. Die am Lebenden gewonnenen Resultate können aber infolge der individuellen Verschiedenheiten nicht ohne Weiteres auf die Verhältnisse an dem zu untersuchenden Präparat übertragen werden.

Aus alledem geht wohl zur Genüge hervor, dass bei der Messung der Arme der einzelnen Kräftepaare nicht immer eine Genauigkeit bis auf einen Millimeter oder gar auf Bruchtheile eines Millimeters erreicht werden kann. Daher sind auch die genaueren Verfahren, welche man zur Ermittelung der Drehungsmomente ausgebildet und angewendet hat, wie z. B. die Methode der Ableitung aus der Verkürzungscurve, zwar theoretisch interessant, die Genauigkeit der mit ihrer Hülfe gewonnenen Resultate steht aber in keinem Verhältniss zu der aufgewandten Mühe. Die viel einfachere und bequemer auszuführende direkte Messung der Arme der Kräftepaare steht jener Methode jedenfalls an Genauigkeit nicht nach, besitzt aber dafür den Vortheil grösserer Anschaulichkeit.

Gerade im vorliegenden Falle, wo man nach den obigen Auseinandersetzungen nur die Projectionen auf die Medianebene zu berücksichtigen braucht, lässt sich das Verfahren der direkten Messung ganz besonders einfach gestalten. Man braucht nur die den drei Körpern zu Grunde liegenden Knochen, also das Becken, das Femur und die Tibia nebst Fibula mit den Insertionen der in Frage kommenden Muskeln in der Normalstellung einzeln auf einen starken, sehr wenig biegsamen, zur Medianebene parallel gestellten Carton zu projiciren, diese Projectionen auszuschneiden und mit einander nach Art des Hüft- und Kniegelenks drehbar zu verbinden, und kann dann die Messung der Drehungsmomente direkt an diesem ebenen Gelenkmodell vornehmen. Dabei lässt sich sehr wohl dem Umstande Rechnung tragen, dass die Axe des Kniegelenks während der Beugung nach hinten wandert, und sich dabei etwas der Tibia nähert. Da in dieser Projection die Insertionsflächen zum Theil bedeutend verkürzt erscheinen, so ist auch vielfach die Willkür in der Wahl der Insertionspunkte geringer, als wenn man die letztere am Präparat selbst vornimmt.

Vorausgesetzt ist bei dieser Methode natürlich, dass die Projectionen der einzelnen Knochen mit ihren Insertionen sehr genau ausgeführt worden sind. Dies ist aber nur eine Frage der Technik und lässt sich mit geeigeneten Instrumenten bis zu jedem nur wünschenswerthen Grade von Genauigkeit erreichen. Zum Zwecke der weiter unten mitgetheilten Messungen der Drehungsmomente ist folgendermaassen verfahren worden. Die Projectionstafel war auf einer horizontalen Tischplatte befestigt. Ueber dieser Tafel wurde der zu projicirende Knochen mittelst geeigneter Stative und Klemmen in einer Lage fixirt, welche derselbe bei horizontal gestellter Medianebene des ganzen Körpers in seiner Normalstellung einnehmen würde. Ist die Projectionstafel genau horizontal orientirt, so kann man mit Hülfe eines einfachen Senkelfadens, welcher unten mit einem in eine feine Spitze auslaufenden Metallkegel beschwert ist, die Projection der Umrisse des Knochens in der Weise ausführen, dafs man den Faden dicht an dem Knochen vorbeiführt. Noch einfacher ist es aber, hierzu ein schmales auf der einen Seite scharfkantiges Lineal zu verwenden, welches an einem auf der Projectionstafel verschiebbaren Metallfuss so befestigt ist, dass es bei allen Verschiebungen des Fusses immer senkrecht zu der Projectionstafel gestellt bleibt; dann ist es nicht einmal nöthig, die letztere genau horizontal zu richten.

In der zuletzt beschriebenen Weise sind nun zunächst die Contouren der Knochen projicirt werden. Das verwendete Lineal lief unten in eine Spitze aus, welche genau in der Verlängerung der scharfen Kante des metallenen Lineals lag und durch eine besondere Vorrichtung gegen die Projectionstafel gedrückt werden konnte, so dass man die Projection eines beliebigen Punktes des Knochenumrisses als feinen Stich auf derselben markiren konnte. Nachdem die Umrisse projicirt waren, liessen sich dann leicht auch die Begrenzungen der am Knochen besonders kenntlich gemachten Insertionsflächen in die Projection einzeichnen.

b) Die Arme der Kräftepaare.

Unter den oben angegebenen Muskeln, deren Drehungsmomente hier allein bestimmt werden sollen, geht der M. iliacus allein über das Hüftgelenk hinweg. Derselbe wirkt daher nur auf den Rumpf und den Oberschenkel direkt mit Kräftepaaren

ein, während er auf den Unterschenkel kein Drehungsmoment ausübt. Die Arme der beiden Kräftepaare sind bei jeder Stellung des Hüftgelenks gleich gross, nämlich gleich dem kürzesten Abstand des resultirenden Muskelzuges vom Mittelpunkt des Hüftgelenks; der Drehungssinn ist aber bei dem einen entgegengesetzt wie bei dem anderen. Bezeichnet man im Folgenden stets den Arm eines Kräftepaares und das zugehörige Drehungsmoment als positiv, wenn das betreffende Kräftepaar einen Körpertheil von der rechten Seite aus gesehen im Sinne des Uhrzeigers zu drehen sucht, so kommt dem Arm und dem Drehungsmoment bei entgegengesetztem Drehungssinn das negative Vorzeichen zu. In diesem Sinne kann man sagen, dass der M. iliacus auf den Rumpf stets mit positivem, auf den Oberschenkel dagegen mit negativem Drehungsmoment einwirkt.

Für die Bestimmung des Armes der beiden entgegengesetzt gleichen Kräftepaare des M. iliacus kommt nur dasjenige Stück des resultirenden Muskelzuges in Frage, welches sich ungehindert zwischen dem Becken und dem Oberschenkelknochen ausspannen kann. In der extremen Streckstellung des Femur gegen das Becken zieht der Muskel aber dicht vor dem Kopf des Femur vorbei, so dass der Abstand des resultirenden Muskelzuges vom Mittelpunkt des Femurkopfes gleich dem Radius des letzteren, vermehrt um die halbe Dicke der Muskelplatte, ist. Hieraus ergibt sich nach Messungen an dem erwähnten Modell, welches die genaue Projection des Beckens und der unteren Extremität auf die Medianebene darstellt, für den Arm der beiden Kräftepaare in der Streckstellung des Hüftgelenks die Länge von 3,0 cm.

Es ist wohl zu beachten, dass die Lage der Insertionsflächen des Muskels in der fossa iliaca des Darmbeins einerseits, und am Trochanter minor des Femur andererseits hier in keiner Weise für die Grösse des Drehungsmomentes maassgebend sind. An Stelle der eigentlichen Insertionen, bezüglich der Mittelpunkte der Insertionsflächen, treten die beiden Punkte am Darmbein und am Femurkopf, zwischen denen der Muskel sich geradlinig ausspannen kann. Am Darmbein ist dieser ungefähr die spina iliaca anterior inferior, welche ja allerdings, ebenso wie die spina iliaca anterior superior, der Ursprungsfläche so wie so mit angehört, aber keineswegs den Mittelpunkt derselben bildet; am Femur ist er ein bestimmter Punkt der Oberfläche des Kopfes. Man kann eben

aus der blossen Kenntniss des Ursprungs und Ansatzes eines Muskels in sehr vielen Fällen durchaus noch keinen Schluss auf die Drehungsmomente ziehen.

Die Länge von 3,0 cm für den Arm der Kräftepaare gilt zunächst für die äusserste Streckstellung. Es lässt sich aber leicht nachweisen, dass die Verhältnisse, welche für die Grösse des Armes maassgebend sind, sich nicht ändern, wenn man das Femur gegen das Becken um einen Winkel bis zu 80° aus der extremen Streckstellung herausbeugt. Daher besitzt auch in allen diesen Beugestellungen der Arm der Kräftepaare noch denselben Werth von 3,0 cm. Erst in der Nähe der rechtwinkligen Beugestellung hat der Ansatz des Winkels am Trochanter minor des Femur eine solche Stellung gegenüber dem Becken eingenommen, dass sich nun der Muskel vom Femurkopf abheben, und dadurch der resultirende Muskelzug sich vom Gelenkmittelpunkt noch weiter entfernen kann.

Die Werthe der sich hieraus ergebenden Arme der Kräftepaare, mit denen der M. iliacus bei der Gesammtspannug von 1 kg auf das Becken und das Femur einwirkt, finden sich in der umstehenden Tabelle 1 niedergelegt. Dabei sind hier und in allen späteren entsprechenden Tabellen die einzelnen Gelenkstellungen im Hüftgelenk durch den Winkel φ gekennzeichnet worden, welchen die Längsaxe des Oberschenkels mit ihrer Lage in der Normalstellung[1]) bildet. Die äusserste Streckstellung im Leben, bei der der Oberschenkel noch um ca. 10° von der Normalstellung nach hinten abweicht, ist durch $-10°$, und die Beugestellungen sind dementsprechend durch positive Winkel bezeichnet worden. Da man nach den Messungen der Brüder WEBER[2]) im Leben unter normalen Verhältnissen den Oberschenkel gegen das Becken gewöhnlich nur bis zur rechtwinkligen Beugestellung erheben kann, so sind die Bestimmungen der Drehungsmomente nur bis zu der durch $\varphi = 100°$ charakterisirten Beugestellung ausgeführt worden. Ein auf den Rumpf ausgeübtes Drehungsmoment soll im Folgenden immer mit D_b und der Arm des zugehörigen Kräftepaares mit h_b, ein auf den Oberschenkel ausgeübtes Drehungsmoment mit D_f und

[1]) Vgl. Abhandlungen der math.-phys. Classe der Königl. Sächs. Gesellsch. d. Wissenschaften, Bd. XV, No. VII, S. 599.

[2]) W. und E. WEBER, Mechanik der menschlichen Gehwerkzeuge. Göttingen 1836, § 63, S. 147 oder WILHELM WEBER's Werke, Bd. VI, S. 101.

der Arm seines Kräftepaares mit h_f, und endlich ein auf den Unterschenkel ausgeübtes Drehungsmoment mit D_t und der Arm des zugehörigen Kräftepaares mit h_t bezeichnet werden.

Werthe der Arme h_b und h_f der Kräftepaare, mit denen der M. iliacus auf den Rumpf und den Oberschenkel in den verschiedenen Stellungen des Hüftgelenks einwirkt:

Tabelle 1.

Hüftgelenkwinkel φ	in Centimeter											
	− 10°	0°	+ 10°	+ 20°	+ 30°	+ 40°	+ 50°	+ 60°	+ 70°	+ 80°	+ 90°	+ 100°
h_b	+ 3,0	+ 3,0	+ 3,0	+ 3,0	+ 3,0	+ 3,0	+ 30	+ 3,0	+ 3,0	+ 3,6	+ 4,4	+ 4,9
h_f	− 3,0	− 3,0	− 3,0	− 3,0	− 3,0	− 3,0	− 3 0	− 3,0	− 3,0	− 3,6	− 4,4	− 4,9

Die Stellung des Kniegelenks hat natürlich auf die Werthe dieser Arme keinen Einfluss. Auf den Unterschenkel übt der M. iliacus kein Drehungsmoment aus, so dass also in diesem Falle h_t für alle Gelenkstellungen den Werth Null besitzt.

Ueber das Kniegelenk ziehen von den für die Untersuchung herausgegriffenen Muskeln allein hinweg die Mm. vastus lateralis, vastus intermedius, vastus medialis und der kurze Kopf des M. biceps femoris.

Die drei ersten Muskeln wirken in genau übereinstimmender Weise und sind daher als ein einziger Muskel aufzufassen. Dies geht daraus evident hervor, dass nach den obigen Auseinandersetzungen für die Bestimmung ihrer Drehungsmomente ausschliesslich das Stück ihrer gemeinsamen Endsehne in Frage kommt, welches sich zwischen dem Apex patellae und der Tuberositas tibiae ausspannt. Die Lage, Gestalt und Ausdehnung ihrer Insertionsflächen am Femur hat also hier in keiner Stellung des Kniegelenks auch nur den geringsten Einfluss auf die Drehungsmomente; die letzteren hängen ganz allein von der Stellung der Kniescheibe zu der Knieaxe einerseits, und dem Ansatz der gemeinsamen Sehne an der Tibia andererseits ab. Auch der M. rectus femoris würde mit diesen drei Muskeln zu verschmelzen sein, wenn er nicht ausser über das Kniegelenk auch über das Hüftgelenk hinwegzöge. Immerhin ist auch für diesen von vornherein klar, dass er mit einem Kräftepaar von ganz gleichem Arm auf den Unterschenkel einwirken muss, als die drei anderen Theile des M. quadriceps femoris. Es gelten daher die folgenden Messungsresultate auch gleichzeitig für die Einwirkung des M. rectus femoris auf den Unterschenkel. Dagegen stellt sich

heraus, dass dieser auf den Oberschenkel mit ganz anderen Drehungsmomenten einwirkt als die drei anderen Theile des M. quadriceps femoris, welche ja den Oberschenkel mit einem an Grösse gleichen, aber an Drehungssinn entgegengesetzten Drehungsmoment wie den Unterschenkel angreifen.

Für die Bestimmung des Armes der Kräftepaare der drei Mm. vasti ist zu berücksichtigen, dass die Patella bei der Beugung des Kniegelenks sich nicht nur nach unten, sondern gleichzeitig nach hinten auf der Facies patellaris des Oberschenkelbeins gegen das letztere verschiebt. Dies hat im Gefolge, dass die gemeinsame Sehne des M. quadriceps femoris sich gleichzeitig der Axe des Kniegelenks nähert, und dass der Arm der beiden Kräftepaare kleiner wird. Nun verändert zwar auch die Drehungsaxe des Kniegelenks bei der Beugung ihre Lage im Femur, indem sie auch etwas nach hinten und gleichzeitig in distaler Richtung wandert. Der Einfluss dieser Verschiebung der Gelenkaxe auf den Arm der Kräftepaare ist jedoch, wie die Messung zeigt, nicht so gross wie der Einfluss der zum Femur relativen Bewegung der Patella. Und so ergibt sich denn eine zwar ganz allmähliche, aber doch stetige Verminderung der Drehungsmomente mit der Beugung im Kniegelenk, wie aus folgender Tabelle deutlich zu erkennen ist. Die Stellung des Kniegelenks ist dabei durch den Winkel ψ gekennzeichnet, welchen die Längsaxe des Unterschenkels mit ihrer Lage in der äussersten Streckstellung bildet.

Werthe der Arme h_f und h_t der Kräftepaare, mit denen die Mm. vastus lateralis, vastus intermedius und vastus medialis auf den Oberschenkel und den Unterschenkel in verschiedenen Stellungen des Kniegelenks einwirken:

Tabelle 2.

Kniegelenkwinkel ψ	in Centimeter															
	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°	110°	120°	130°	140°	150°
h_f	+4,5	+4,5	+4,4	+4,3	+4,2	+4,1	+4,0	+3,9	+3,8	+3,8	+3,7	+3,7	+3,6	+3,6	+3,5	+3,5
h_t	−4,5	−4,5	−4,4	−4,3	−4,2	−4,1	−4,0	−3,9	−3,8	−3,8	−3,7	−3,7	−3,6	−3,6	−3,5	−3,5

Auf diese Arme der Kräftepaare kann natürlich die Gelenkstellung im Hüftgelenk keinen Einfluss ausüben, und der Arm h_b besitzt für alle Gelenkstellungen den Werth Null.

Der andere eingelenkige Muskel, der kurze Kopf des M. biceps femoris, vermag sich in den meisten Stellungen des Kniegelenks ungehindert zwischen seinen Insertionen am Labium laterale der

Linea aspera femoris und am Capitulum fibulae auszuspannen. Nur in der Nähe der äussersten Streckstellung wird er durch den Epicondylus lateralis femoris am geradlinigen Verlauf gehindert. Der Arm seiner beiden Kräftepaare ist daher im Anfang der Beugung gleich dem Abstand des hinteren Randes des lateralen Epicondylus von der Knieaxe vermehrt um die halbe Dicke der Sehne. Die Messung ergiebt 2,5 cm. Bei einer Beugestellung von $\psi = 20°$ verlässt darauf der Muskel den Epicondylus und spannt sich nun geradlinig zwischen seinen Insertionsstellen aus. Dabei nimmt der Abstand der mittleren Zugrichtung von der Axe fortwährend zu, bis er nach der rechtwinkligen Beugestellung des Kniegelenks, bei $\psi = 100°$, das Maximum von 5,8 cm erreicht hat. Bei dieser Stellung zeigt nämlich in der zur Messung verwendeten Projection auf die Medianebene die Verbindungslinie des Drehpunktes des Kniegelenks mit dem Muskelansatz am Capitulum fibulae eine Richtung, welche gerade zu der Richtung des resultirenden Muskelzuges senkrecht steht. Bei fortschreitender Beugung nähert sich dann der resultirende Muskelzug, oder vielmehr dessen Verlängerung über den Ansatz hinaus, wieder der Knieaxe, so dass der Arm der Kräftepaare kleiner wird; er behält aber in der äussersten Beugestellung immer noch eine Grösse, welche über die Anfangsgrösse hinausgeht. Die sich aus dieser Messung ergebenden Werthe der Arme finden sich in folgender Tabelle niedergelegt.

Werthe der Arme h_f und h_t der Kräftepaare, mit denen der M. biceps femoris caput breve auf den Oberschenkel und den Unterschenkel in verschiedenen Stellungen des Kniegelenks einwirkt:

Tabelle 3.

Kniegelenkwinkel ψ	In Centimeter															
	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°	110°	120°	130°	140°	150°
h_f	−2,5	−2,5	−2,5	−2,9	−3,5	−4,2	−4,7	−5,1	−5,4	−5,6	−5,8	−5,6	−5,2	−4,6	−4,1	−3,7
h_t	+2,5	+2,5	+2,5	+2,9	+3,5	+4,2	+4,7	+5,1	+5,4	+5,6	+5,8	+5,6	+5,2	+4,6	+4,1	+3,7

Auch die Arme der Kräftepaare dieses Muskels können nicht durch eine Aenderung der Gelenkstellung im Hüftgelenk abgeändert werden. Der Arm h_b besitzt auch hier wieder den Werth Null. Während das auf den Oberschenkel ausgeübte Drehungsmoment für den kurzen Kopf des M. biceps femoris entgegengesetzt gleich dem für den Unterschenkel vorhandenen ist,

wird dies beim langen Kopf desselben Muskels keineswegs der Fall sein. Es verhält sich dieser zu jenem in seiner Wirkungsweise ähnlich wie der M. rectus femoris zu den drei eingelenkigen Theilen des Quadriceps femoris.

Die übrigen zu untersuchenden Muskeln ziehen sowohl über das Hüftgelenk, als auch über das Kniegelenk hinweg und wirken daher auf alle drei Körpertheile mit Drehungsmomenten ein. Dabei werden die Drehungsmomente im Allgemeinen sowohl bei einer Aenderung der Gelenkstellung im Hüftgelenk als auch bei einer solchen im Kniegelenk andere Werthe annehmen. Es ist daher im Princip nicht ausreichend, wenn man z.B. die Drehungsmomente bei allen möglichen Stellungen des Hüftgelenks ableitet, während man das Kniegelenk in einer bestimmten Stellung, etwa der äussersten Streckstellung, fixirt hat, sondern man muss dieselbe Messung für eine genügend grosse Anzahl von anderen Stellungen des Kniegelenks wiederholen. Greift man, wie bisher, beim Hüftgelenk 12, und beim Kniegelenk 16 um 10° von einander entfernte Gelenkstellungen zur Messung heraus, so ist man also im Grunde genöthigt, für 192 verschiedene Haltungen des ganzen Beines die drei Arme h_b, h_f und h_t zu bestimmen.

Es stellt sich nun aber bei genauerem Eingehen auf die Verhältnisse an der unteren Extremität heraus, dass diese umfangreiche Arbeit nicht nöthig ist, sondern dass man in Anbetracht der überhaupt erreichbaren Genauigkeit schon mit 28 direkten Messungen zum Ziele gelangt.

Fixirt man nämlich das Kniegelenk in einer bestimmten Haltung und führt das Hüftgelenk successive in alle möglichen Stellungen über, so wird zwar im Allgemeinen der Abstand der resultirenden Zugrichtung eines zweigelenkigen Muskels vom Hüftgelenkmittelpunkt sich dabei ändern, dagegen wird gleichzeitig der Abstand von der Axe des Kniegelenks nur verhältnissmässig sehr geringe Schwankungen erleiden. Dies lässt sich leicht einsehen. Wenn das Kniegelenk fixirt ist, so sind dadurch das Oberschenkelbein und die beiden Knochen des Unterschenkels starr mit einander verbunden. Bewegt man nun das Becken im Hüftgelenk, so wird sich im Allgemeinen auch der am Becken befindliche Ursprung des zu untersuchenden Muskels gegen dieses starre System bewegen, während der im Unterschenkel liegende Ansatz seine Lage im System beibehält. Es dreht sich daher der

resultirende Muskelzug um den festen Ansatz. Da nun dieser Drehpunkt bei allen zweigelenkigen Oberschenkelmuskeln nahe an der Axe des Kniegelenks liegt, während er in Folge der grossen Länge des Oberschenkels vom Mittelpunkt des Hüftgelenks verhältnissmässig sehr weit entfernt ist, so wird bei den Bewegungen des Beckens im Hüftgelenk der Abstand der resultirenden Zugrichtung des Muskels vom Hüftgelenkmittelpunkt sich beträchtlich, dagegen sein Abstand von der Knieaxe sich nur sehr wenig ändern können. Macht man beispielsweise diesen Versuch mit dem M. semimembranosus, so zeigt sich, dass bei den Drehungen des Beckens im Hüftgelenk der Abstand der Zugrichtung vom Hüftgelenkmittelpunkt im Ganzen um 25 mm sich ändert, während die gleichzeitige Aenderung seines Abstandes von der Knieaxe nur ca. $^1/_2$ mm beträgt. Bei anderen zweigelenkigen Muskeln, wie dem M. semitendinosus und dem M. gracilis, sind die Verhältnisse in Folge des grösseren Abstandes ihres Ansatzes von der Knieaxe zwar nicht ganz so günstig wie beim M. semimembranosus. Immerhin liegen aber auch hier die mit der Bewegung des Beckens im Hüftgelenk einhergehenden Schwankungen des Abstandes des resultirenden Muskelzuges von der Knieaxe innerhalb der bei derartigen Messungen unvermeidlichen Fehlergrenzen. Beim M. rectus femoris ist sogar absolute Constanz dieses Abstandes vorhanden. Da nun nach den früheren Auseinandersetzungen der Abstand des resultirenden Muskelzuges von dem Mittelpunkt des Hüftgelenks den Arm des Kräftepaares darstellt, mit welchem der Muskel auf das Becken einwirkt, so hat man das Resultat, dass das Drehungsmoment D_b, mit welchem einer der genannten zweigelenkigen Muskeln des Oberschenkels auf das Becken einwirkt, mit genügender Annäherung allein von der Gelenkstellung im Hüftgelenk beeinflusst wird, dagegen von der Stellung des Kniegelenks unabhängig ist.

In ganz entsprechender Weise kann man sich davon überzeugen, dass bei allen diesen Muskeln andererseits das Drehungsmoment D_t, mit welchem dieselben auf den Unterschenkel einwirken, nur von der Gelenkstellung im Kniegelenk abhängt, durch die gleichzeitige Stellung im Hüftgelenk dagegen nahezu unbeeinflusst bleibt.

Dagegen ist das Drehungsmoment D_f, welches diese zweigelenkigen Muskeln auf den Oberschenkel ausüben, im Allgemeinen eine Function beider Gelenkwinkel. Da D_f aber nicht direkt ge-

messen zu werden braucht, sondern aus den Werthen von D_b und D_t mit Hülfe der Beziehung $D_b + D_f + D_t = 0$ abgeleitet werden kann, so reicht man in der That mit 28 direkten Messungen aus. Man braucht nur für die 12 um je 10° von einander entfernten Stellungen des Hüftgelenks den Abstand des resultirenden Muskelzuges vom Hüftgelenkmittelpunkt, und darauf für die 16 um je 10° von einander entfernten Stellungen des Kniegelenks den Abstand desselben von der Knieaxe zu bestimmen, und hat damit die genügenden Unterlagen gewonnen, um die zu allen 192 für die Messung herausgegriffenen Haltungen der unteren Extremität gehörenden Werthe der drei Arme ableiten zu können; denn zwischen diesen besteht natürlich die gleiche Beziehung $h_b + h_f + h_t = 0$.

Die an dem Projectionsmodell unter Berücksichtigung der anatomischen Verhältnisse vorgenommenen Messungen haben nun zunächst folgende Resultate ergeben:

Werthe des Armes h_b der Kräftepaare, mit welchen die verschiedenen zweigelenkigen Muskeln des Oberschenkels auf den Rumpf in den verschiedenen Haltungen des Beins einwirken:

Tabelle 4.

Hüftgelenkwinkel φ	in Centimeter											
	− 10°	0°	+ 10°	+ 20°	+ 30°	+ 40°	+ 50°	+ 60°	+ 70°	+ 80°	+ 90°	+ 100°
M. rectus femoris..	+ 3,0	+ 3,0	+ 3,4	+ 3,7	+ 3,9	+ 4,0	+ 3,9	+ 3,7	+ 3,3	+ 2,9	+ 2,5	+ 2,1
M. biceps femoris caput longum ...	− 4,1	− 4,8	− 5,5	− 6,2	− 6,7	− 7,0	− 6,9	− 6,7	− 6,2	− 5,6	− 4,9	− 4,1
M. semimembranosus	− 3,1	− 3,9	− 4,6	− 5,1	− 5,5	− 5,6	− 5,5	− 5,3	− 5,0	− 4,6	− 4,1	− 3,4
M. semitendinosus..	− 3,5	− 4,8	− 5,9	− 6,9	− 7,7	− 8,0	− 8,1	− 8,0	− 7,5	− 6,9	− 6,2	− 5,3
M. gracilis	+ 3,6	+ 2,4	+ 1,2	− 0,1	− 1,4	− 2,5	− 3,5	− 4,5	− 5,3	− 5,9	− 6,2	− 6,4

Ein jeder zu einer bestimmten Grösse des Hüftgelenkwinkels φ gehörende Werth dieser Tabelle gilt gleichzeitig für alle möglichen Grössen des Kniegelenkwinkels ψ.

Wie aus der Tabelle hervorgeht, ist der Arm h_b des M. gracilis zu Anfang positiv, erreicht aber bald den Werth Null und wird dann negativ. Dieser Muskel sucht also im Anfang das Becken im Sinne des Uhrzeigers, von 20° Beugung an dagegen mit fortwährend wachsendem Moment im umgekehrten Sinne des Uhrzeigers zu drehen. Bei den vier anderen Muskeln ändert dagegen der Arm h_b sein Zeichen nicht im Verlaufe der Beugung. Der M. rectus femoris sucht das Becken stets im Sinne des Uhrzeigers, die drei anderen Muskeln suchen es dagegen nur im umgekehrten Sinne des Uhrzeigers zu drehen. Die absolute Grösse

des Armes h_6 nimmt bei allen vier Muskeln mit der Beugung zunächst zu, erreicht schliesslich einen grössten Werth und nimmt dann wieder ab. Das Maximum des Armes h_6 erreichen der M. rectus femoris, der lange Kopf des M. biceps femoris und der M. semimembranosus fast übereinstimmend bei $\varphi = 40^0$, der M. semitendinosus dagegen erst bei $\varphi = 50^0$.

Weiter hat sich ergeben für die

Werthe des Armes h_t der Kräftepaare, mit welchen die verschiedenen zweigelenkigen Muskeln des Oberschenkels auf den Unterschenkel in den verschiedenen Haltungen des Beins einwirken:

Tabelle 5.

Kniegelenkwinkel ψ	in Centimeter															
	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°	110°	120°	130°	140°	150°
M. rectus femoris....	−4,5	−4,5	−4,4	−4,3	−4,2	−4,1	−4,0	−3,9	−3,8	−3,8	−3,7	−3,7	−3,6	−3,6	−3,5	−3,5
M. biceps femoris caput longum	+2,5	+2,8	+3,3	+4,0	+4,6	+5,1	+5,5	+5,7	+5,8	+5,6	+5,3	+4,9	+4,3	+3,8	+3,5	+3,3
M. semimembranosus.	+2,5	+2,5	+3,0	+3,3	+3,6	+3,9	+4,1	+4,1	+4,0	+3,8	+3,6	+3,3	+2,9	+2,5	+2,0	+1,6
M. semitendinosus ...	+2,5	+2,5	+2,5	+3,3	+4,6	+5,8	+6,8	+7,6	+8,3	+8,8	+9,1	+9,3	+9,2	+9,0	+8,5	+8,0
M. gracilis..........	+2,5	+2,5	+2,5	+2,5	+2,5	+3,5	+4,4	+5,3	+6,1	+6,8	+7,4	+7,9	+8,2	+8,4	+8,4	+8,2

Ein jeder zu einer bestimmten Grösse des Kniegelenkwinkels ψ gehörende Werth dieser Tabelle gilt gleichzeitig für alle möglichen Werthe des Hüftgelenkwinkels φ.

Die für den M. rectus femoris geltenden Werthe von h_t stimmen natürlich mit denen der drei anderen Theile des M. quadriceps femoris vollkommen überein. Die zum langen Kopf des M. biceps femoris gehörenden Werte von h_t sind dagegen von $\psi = 10^0$ bis $\psi = 80^0$ grösser als die entsprechenden für den kurzen Kopf, bei $\psi = 90^0$ sind sie für beide Köpfe gleich, und über die rechtwinklige Beugestellung hinaus überwiegt der Arm h_t des kurzen Kopfes. Der Grund für dieses Verhalten ist leicht einzusehen. Der Arm h_t hat für jeden Kopf dann den grössten Werth, wenn die resultirende Zugrichtung auf der kürzesten Verbindungsstrecke des Ansatzpunktes mit der Knieaxe senkrecht steht; dies tritt beim langen Kopf bei $\psi = 80^0$, beim kurzen dagegen erst bei $\psi = 100^0$ ein. Der Arm des Kräftepaares ist in beiden Fällen direkt gleich dieser Verbindungsstrecke, welche eine Länge von 5,8 cm an dem untersuchten Präparat besass. Die maximale Grösse des Armes h_t ist daher für beide Köpfe die gleiche, nämlich 5,8 cm. Daraus folgt aber unmittelbar, dass bei der Beugung des Kniegelenks zuerst der Arm h_t des langen Kopfes und später der des kurzen Kopfes überwiegen muss. Zu Anfang

der Beugung sind nicht nur die Arme h_t der beiden Köpfe des M. biceps femoris, sondern auch die der Mm. semimembranosus, semitendinosus und gracilis gleich gross, nämlich gleich 2,5 cm. Dies hat seinen Grund darin, dass zu Anfang der Beugung die Sehnen aller dieser Muskeln sich über die hintere Fläche des Epicondylus medialis femoris hinweglegen und daher in nahezu gleichem Abstande von der Knieaxe verlaufen. So lange diese Sehnen noch den Epicondylus berühren, behält der Arm h_t den Werth 2,5 cm bei; denn die Verschiebung der Knieaxe innerhalb des Femur nach hinten, welche mit der Beugung einhergeht, ist bei geringen Beugegraden noch so gering, dass sie in Anbetracht der überhaupt zu erreichenden Genauigkeit besser unberücksichtigt bleibt. Der lange Kopf des M. biceps femoris hebt sich zuerst, bei $\psi = 5^0$, vom Epicondylus ab, darauf der M. semimembranosus bei $\psi = 10^0$, dann der kurze Kopf des M. biceps femoris bei $\psi = 20^0$, weiterhin der M. semitendinosus bei $\psi = 25^0$ und schliesslich der M. gracilis bei $\psi = 40^0$. Daher findet man in der Tabelle, dass von diesen Beugegraden an der Arm h_t bei den einzelnen Muskeln über den Werth 2,5 cm hinausgeht. Der M. semimembranosus besitzt den Maximalwerth dieses Armes zwischen $\psi = 60^0$ und $\psi = 70^0$, der M. semitendinosus dagegen erst ungefähr bei $\psi = 100^0$, und der M. gracilis sogar erst zwischen $\psi = 130^0$ und $\psi = 140^0$.

Aus den Werthen von h_b und h_t, welche einem Muskel bei einer bestimmten Haltung des Beines zukommen, berechnet man nun den zugehörigen Wert von h_f mittelst der Formel:

$$h_f = -(h_b + h_t).$$

Man hat sich also zur Bestimmung des Armes des auf den Oberschenkel ausgeübten Kräftepaares die algebraische Summe der Werthe der Arme der beiden anderen Kräftepaare zu verschaffen und darauf das Vorzeichen umzukehren. Es ist leicht ersichtlich, dass diese Rechnung für alle 192 zur Messung herausgegriffenen Haltungen des Beines besonders ausgeführt werden muss; denn wenn auch h_b annähernd nur von φ, und h_t nur von ψ abhängt, so ist doch ihre Summe eine Funktion beider Winkel.

Aus den Tabellen 4 und 5 erhält man mit Hülfe der obigen Formel folgende Werthe des Armes h_f des Kräftepaares, mit welchem die fünf zweigelenkigen Muskeln auf den Oberschenkel einwirken:

Werthe des Armes h_f für den M. rectus femoris.

Tabelle 6.

	Hüftgelenkwinkel φ in Centimeter											
Kniegelenkwinkel ψ	− 10°	0°	+ 10°	+ 20°	+ 30°	+ 40°	+ 50°	+ 60°	+ 70°	+ 80°	+ 90°	+ 100°
0°	+ 1,5	+ 1,5	+ 1,1	+ 0,8	+ 0,6	+ 0,5	+ 0,6	+ 0,8	+ 1,2	+ 1,6	+ 2,0	+ 2,4
10°	+ 1,5	+ 1,5	+ 1,1	+ 0,8	+ 0,6	+ 0,5	+ 0,6	+ 0,8	+ 1,2	+ 1,6	+ 2,0	+ 2,4
20°	+ 1,4	+ 1,4	+ 1,0	+ 0,7	+ 0,5	+ 0,4	+ 0,5	+ 0,7	+ 1,1	+ 1,5	+ 1,9	+ 2,3
30°	+ 1,3	+ 1,3	+ 0,9	+ 0,6	+ 0,4	+ 0,3	+ 0,4	+ 0,6	+ 1,0	+ 1,4	+ 1,8	+ 2,2
40°	+ 1,2	+ 1,2	+ 0,8	+ 0,5	+ 0,3	+ 0,2	+ 0,3	+ 0,5	+ 0,9	+ 1,3	+ 1,7	+ 2,1
50°	+ 1,1	+ 1,1	+ 0,7	+ 0,4	+ 0,2	+ 0,1	+ 0,2	+ 0,4	+ 0,8	+ 1,2	+ 1,6	+ 2,0
60°	+ 1,0	+ 1,0	+ 0,6	+ 0,3	+ 0,1	0	+ 0,1	+ 0,3	+ 0,7	+ 1,1	+ 1,5	+ 1,9
70°	+ 0,9	+ 0,9	+ 0,5	+ 0,2	0	− 0,1	0	+ 0,2	+ 0,6	+ 1,0	+ 1,4	+ 1,8
80°	+ 0,8	+ 0,8	+ 0,4	+ 0,1	− 0,1	− 0,2	− 0,1	+ 0,1	+ 0,5	+ 0,9	+ 1,3	+ 1,7
90°	+ 0,8	+ 0,8	+ 0,4	+ 0,1	− 0,1	− 0,2	− 0,1	+ 0,1	+ 0,5	+ 0,9	+ 1,3	+ 1,7
100°	+ 0,7	+ 0,7	+ 0,3	0	− 0,2	− 0,3	− 0,2	0	+ 0,4	+ 0,8	+ 1,2	+ 1,6
110°	+ 0,7	+ 0,7	+ 0,3	0	− 0,2	− 0,3	− 0,2	0	+ 0,4	+ 0,8	+ 1,2	+ 1,6
120°	+ 0,6	+ 0,6	+ 0,2	− 0,1	− 0,3	− 0,4	− 0,3	− 0,1	+ 0,3	+ 0,7	+ 1,1	+ 1,5
130°	+ 0,6	+ 0,6	+ 0,2	− 0,1	− 0,3	− 0,4	− 0,3	− 0,1	+ 0,3	+ 0,7	+ 1,1	+ 1,5
140°	+ 0,5	+ 0,5	+ 0,1	− 0,2	− 0,4	− 0,5	− 0,4	− 0,2	+ 0,2	+ 0,6	+ 1,0	+ 1,4
150°	+ 0,5	+ 0,5	+ 0,1	− 0,2	− 0,4	− 0,5	− 0,4	− 0,2	+ 0,2	+ 0,6	+ 1,0	+ 1,4

Werthe des Armes h_f für den M. biceps femoris caput longum

Tabelle 7.

	Hüftgelenkwinkel φ in Centimeter											
Kniegelenkwinkel ψ	− 10°	0°	+ 10°	+ 20°	+ 30°	+ 40°	+ 50°	+ 60°	+ 70°	+ 80°	+ 90°	+ 100°
0°	+ 1,6	+ 2,3	+ 3,0	+ 3,7	+ 4,2	+ 4,5	+ 4,4	+ 4,2	+ 3,7	+ 3,1	+ 2,4	+ 1,6
10°	+ 1,3	+ 2,0	+ 2,7	+ 3,4	+ 3,9	+ 4,2	+ 4,1	+ 3,9	+ 3,4	+ 2,8	+ 2,1	+ 1,3
20°	+ 0,8	+ 1,5	+ 2,2	+ 2,9	+ 3,4	+ 3,7	+ 3,6	+ 3,4	+ 2,9	+ 2,3	+ 1,6	+ 0,8
30°	+ 0,1	+ 0,8	+ 1,5	+ 2,2	+ 2,7	+ 3,0	+ 2,9	+ 2,7	+ 2,2	+ 1,6	+ 0,9	+ 0,1
40°	− 0,5	+ 0,2	+ 0,9	+ 1,6	+ 2,1	+ 2,4	+ 2,3	+ 2,1	+ 1,6	+ 1,0	+ 0,3	− 0,5
50°	− 1,0	− 0,3	+ 0,4	+ 1,1	+ 1,6	+ 1,9	+ 1,8	+ 1,6	+ 1,1	+ 0,5	− 0,2	− 1,0
60°	− 1,4	− 0,7	0	+ 0,7	+ 1,2	+ 1,5	+ 1,4	+ 1,2	+ 0,7	+ 0,1	− 0,6	− 1,4
70°	− 1,6	− 0,9	− 0,2	+ 0,5	+ 1,0	+ 1,3	+ 1,2	+ 1,0	+ 0,5	− 0,1	− 0,8	− 1,6
80°	− 1,7	− 1,0	− 0,3	+ 0,4	+ 0,9	+ 1,2	+ 1,1	+ 0,9	+ 0,4	− 0,2	− 0,9	− 1,7
90°	− 1,5	− 0,8	− 0,1	+ 0,6	+ 1,1	+ 1,4	+ 1,3	+ 1,1	+ 0,6	0	− 0,7	− 1,5
100°	− 1,2	− 0,5	+ 0,2	+ 0,9	+ 1,4	+ 1,7	+ 1,6	+ 1,4	+ 0,9	+ 0,3	− 0,4	− 1,2
110°	− 0,8	− 0,1	+ 0,6	+ 1,3	+ 1,8	+ 2,1	+ 2,0	+ 1,8	+ 1,3	+ 0,7	0	− 0,8
120°	− 0,2	+ 0,5	+ 1,2	+ 1,9	+ 2,4	+ 2,7	+ 2,6	+ 2,4	+ 1,9	+ 1,3	+ 0,6	− 0,2
130°	+ 0,3	+ 1,0	+ 1,7	+ 2,4	+ 2,9	+ 3,2	+ 3,1	+ 2,9	+ 2,4	+ 1,8	+ 1,1	+ 0,3
140°	+ 0,6	+ 1,3	+ 2,0	+ 2,7	+ 3,2	+ 3,5	+ 3,4	+ 3,2	+ 2,7	+ 2,1	+ 1,4	+ 0,6
150°	+ 0,8	+ 1,5	+ 2,2	+ 2,9	+ 3,4	+ 3,7	+ 3,6	+ 3,4	+ 2,9	+ 2,3	+ 1,6	+ 0,8

Werthe des Armes h_f für den M. semimembranosus.

Tabelle 8.

	Hüftgelenkwinkel φ in Centimeter											
Kniegelenkwinkel ψ	− 10°	0°	+ 10°	+ 20°	+ 30°	+ 40°	+ 50°	+ 60°	+ 70°	+ 80°	+ 90°	+ 100°
0°	+ 0,6	+ 1,4	+ 2,1	+ 2,6	+ 3,0	+ 3,1	+ 3,0	+ 2,8	+ 2,5	+ 2,1	+ 1,6	+ 0,9
10°	+ 0,6	+ 1,4	+ 2,1	+ 2,6	+ 3,0	+ 3,1	+ 3,0	+ 2,8	+ 2,5	+ 2,1	+ 1,6	+ 0,9
20°	+ 0,1	+ 0,9	+ 1,6	+ 2,1	+ 2,5	+ 2,6	+ 2,5	+ 2,3	+ 2,0	+ 1,6	+ 1,1	+ 0,4
30°	− 0,2	+ 0,6	+ 1,3	+ 1,8	+ 2,2	+ 2,3	+ 2,2	+ 2,0	+ 1,7	+ 1,3	+ 0,8	+ 0,1
40°	− 0,5	+ 0,3	+ 1,0	+ 1,5	+ 1,9	+ 2,0	+ 1,9	+ 1,7	+ 1,4	+ 1,0	+ 0,5	− 0,2
50°	− 0,8	0	+ 0,7	+ 1,2	+ 1,6	+ 1,7	+ 1,6	+ 1,4	+ 1,1	+ 0,7	+ 0,2	− 0,5
60°	− 1,0	− 0,2	+ 0,5	+ 1,0	+ 1,4	+ 1,5	+ 1,4	+ 1,2	+ 0,9	+ 0,5	0	− 0,7
70°	− 1,0	− 0,2	+ 0,5	+ 1,0	+ 1,4	+ 1,5	+ 1,4	+ 1,2	+ 0,9	+ 0,5	0	− 0,7
80°	− 0,9	− 0,1	+ 0,6	+ 1,1	+ 1,5	+ 1,6	+ 1,5	+ 1,3	+ 1,0	+ 0,6	+ 0,1	− 0,6
90°	− 0,7	+ 0,1	+ 0,8	+ 1,3	+ 1,7	+ 1,8	+ 1,7	+ 1,5	+ 1,2	+ 0,8	+ 0,3	− 0,4
100°	− 0,5	+ 0,3	+ 1,0	+ 1,5	+ 1,9	+ 2,0	+ 1,9	+ 1,7	+ 1,4	+ 1,0	+ 0,5	− 0,2
110°	− 0,2	+ 0,6	+ 1,3	+ 1,8	+ 2,2	+ 2,3	+ 2,2	+ 2,0	+ 1,7	+ 1,3	+ 0,8	+ 0,1
120°	+ 0,2	+ 1,0	+ 1,7	+ 2,2	+ 2,6	+ 2,7	+ 2,6	+ 2,4	+ 2,1	+ 1,7	+ 1,2	+ 0,5
130°	+ 0,6	+ 1,4	+ 2,1	+ 2,6	+ 3,0	+ 3,1	+ 3,0	+ 2,8	+ 2,5	+ 2,1	+ 1,6	+ 0,9
140°	+ 1,1	+ 1,9	+ 2,6	+ 3,1	+ 3,5	+ 3,6	+ 3,5	+ 3,3	+ 3,0	+ 2,6	+ 2,1	+ 1,4
150°	+ 1,5	+ 2,3	+ 3,0	+ 3,5	+ 3,9	+ 4,0	+ 3,9	+ 3,7	+ 3,4	+ 3,0	+ 2,5	+ 1,8

Werthe des Armes h_f für den M. semitendinosus.

Tabelle 9.

Kniegelenkwinkel ψ	Hüftgelenkwinkel φ in Centimeter: — 10°	0°	+ 10°	+ 20°	+ 30°	+ 40°	+ 50°	+ 60°	+ 70°	+ 80°	+ 90°	+ 100°
0°	+ 1,0	+ 2,3	+ 3,4	+ 4,4	+ 5,2	+ 5,5	+ 5,6	+ 5,5	+ 5,0	+ 4,4	+ 3,7	+ 2,8
10°	+ 1,0	+ 2,3	+ 3,4	+ 4,4	+ 5,2	+ 5,5	+ 5,6	+ 5,5	+ 5,0	+ 4,4	+ 3,7	+ 2,8
20°	+ 1,0	+ 2,3	+ 3,4	+ 4,4	+ 5,2	+ 5,5	+ 5,6	+ 5,5	+ 5,0	+ 4,4	+ 3,7	+ 2,8
30°	+ 0,2	+ 1,5	+ 2,6	+ 3,6	+ 4,4	+ 4,7	+ 4,8	+ 4,7	+ 4,2	+ 3,6	+ 2,9	+ 2,0
40°	— 1,1	+ 0,2	+ 1,3	+ 2,3	+ 3,1	+ 3,4	+ 3,5	+ 3,4	+ 2,9	+ 2,3	+ 1,6	+ 0,7
50°	— 2,3	— 1,0	+ 0,1	+ 1,1	+ 1,9	+ 2,2	+ 2,3	+ 2,2	+ 1,7	+ 1,1	+ 0,4	— 0,5
60°	— 3,3	— 2,0	— 0,9	+ 0,1	+ 0,9	+ 1,2	+ 1,3	+ 1,2	+ 0,7	+ 0,1	— 0,6	— 1,5
70°	— 4,1	— 2,8	— 1,7	— 0,7	+ 0,1	+ 0,4	+ 0,5	+ 0,4	— 0,1	— 0,7	— 1,4	— 2,3
80°	— 4,8	— 3,5	— 2,4	— 1,4	— 0,6	— 0,3	— 0,2	— 0,3	— 0,8	— 1,4	— 2,1	— 3,0
90°	— 5,3	— 4,0	— 2,9	— 1,9	— 1,1	— 0,8	— 0,7	— 0,8	— 1,3	— 1,9	— 2,6	— 3,5
100°	— 5,6	— 4,3	— 3,2	— 2,2	— 1,4	— 1,1	— 1,0	— 1,1	— 1,6	— 2,2	— 2,9	— 3,8
110°	— 5,8	— 4,5	— 3,4	— 2,4	— 1,6	— 1,3	— 1,2	— 1,3	— 1,8	— 2,4	— 3,1	— 4,0
120°	— 5,7	— 4,4	— 3,3	— 2,3	— 1,5	— 1,2	— 1,1	— 1,2	— 1,7	— 2,3	— 3,0	— 3,9
130°	— 5,5	— 4,2	— 3,1	— 2,1	— 1,3	— 1,0	— 0,9	— 1,0	— 1,5	— 2,1	— 2,8	— 3,7
140°	— 5,0	— 3,7	— 2,6	— 1,6	— 0,8	— 0,5	— 0,4	— 0,5	— 1,0	— 1,6	— 2,3	— 3,2
150°	— 4,5	— 3,2	— 2,1	— 1,1	— 0,3	0	+ 0,1	0	— 0,5	— 1,1	— 1,8	— 2,7

Werthe des Armes h_f für den M. gracilis.

Tabelle 10.

Kniegelenkwinkel ψ	Hüftgelenkwinkel φ in Centimeter: — 10°	0°	+ 10°	+ 20°	+ 30°	+ 40°	+ 50°	+ 60°	+ 70°	+ 80°	+ 90°	+ 100°
0°	— 6,1	— 4,9	— 3,7	— 2,4	— 1,1	0	+ 1,0	+ 2,0	+ 2,8	+ 3,4	+ 3,7	+ 3,9
10°	— 6,1	— 4,9	— 3,7	— 2,4	— 1,1	0	+ 1,0	+ 2,0	+ 2,8	+ 3,4	+ 3,7	+ 3,9
20°	— 6,1	— 4,9	— 3,7	— 2,4	— 1,1	0	+ 1,0	+ 2,0	+ 2,8	+ 3,4	+ 3,7	+ 3,9
30°	— 6,1	— 4,9	— 3,7	— 2,4	— 1,1	0	+ 1,0	+ 2,0	+ 2,8	+ 3,4	+ 3,7	+ 3,9
40°	— 6,1	— 4,9	— 3,7	— 2,4	— 1,1	0	+ 1,0	+ 2,0	+ 2,8	+ 3,4	+ 3,7	+ 3,9
50°	— 7,1	— 5,9	— 4,7	— 3,4	— 2,1	— 1,0	0	+ 1,0	+ 1,8	+ 2,4	+ 2,7	+ 2,9
60°	— 8,0	— 6,8	— 5,6	— 4,3	— 3,0	— 1,9	— 0,9	+ 0,1	+ 0,9	+ 1,5	+ 1,8	+ 2,0
70°	— 8,9	— 7,7	— 6,5	— 5,2	— 3,9	— 2,8	— 1,8	— 0,8	0	+ 0,6	+ 0,9	+ 1,1
80°	— 9,7	— 8,5	— 7,3	— 6,0	— 4,7	— 3,6	— 2,6	— 1,6	— 0,8	— 0,2	+ 0,1	+ 0,3
90°	—10,4	— 9,2	— 8,0	— 6,7	— 5,4	— 4,3	— 3,3	— 2,3	— 1,5	— 0,9	— 0,6	— 0,4
100°	—11,0	— 9,8	— 8,6	— 7,3	— 6,0	— 4,9	— 3,9	— 2,9	— 2,1	— 1,5	— 1,2	— 1,0
110°	—11,5	—10,3	— 9,1	— 7,8	— 6,5	— 5,4	— 4,4	— 3,4	— 2,6	— 2,0	— 1,7	— 1,5
120°	—11,8	—10,6	— 9,4	— 8,1	— 6,8	— 5,7	— 4,7	— 3,7	— 2,9	— 2,3	— 2,0	— 1,8
130°	—12,0	—10,8	— 9,6	— 8,3	— 7,0	— 5,9	— 4,9	— 3,9	— 3,1	— 2,5	— 2,2	— 2,0
140°	—12,0	—10,8	— 9,6	— 8,3	— 7,0	— 5,9	— 4,9	— 3,9	— 3,1	— 2,5	— 2,2	— 2,0
150°	—11,8	—10,6	— 9,4	— 8,1	— 6,8	— 5,7	— 4,7	— 3,7	— 2,9	— 2,3	— 2,0	— 1,8

c) Die Werthe der Drehungsmomente.

Um die Werthe der Drehungsmomente selbst für die pro Quadratcentimeter des physiologischen Querschnittes vorhandene Spannung von 1 Kilogramm aus den Armen der Kräftepaare ableiten zu können, braucht man nun noch die Querschnitte der einzelnen Muskeln. An dem Präparat, welches der Messung der Arme der einzelnen Kräftepaare zu Grunde lag, konnten diese Querschnitte nicht gewonnen werden; denn es waren an demselben zwar die Insertionsstellen der Muskeln, nicht aber diese selbst mehr vorhanden. Deshalb sollen für die Bestimmung der Drehungs-

momente die Resultate der seiner Zeit von A. E. FICK[1]) ausgeführten Querschnittsmessungen verwendet werden. Es hatten sich dabei für die hier in Frage kommenden Muskeln im Mittel die folgenden Werthe der Querschnitte ergeben (auf ganze Quadratcentimeter abgerundet):

M. iliacus 8 qcm;

Mm. vastus lateralis, vastus intermedius und vastus medialis zusammen 49 qcm;

M. rectus femoris 9 qcm;

M. biceps caput longum 14 qcm;

M. biceps caput breve 6 qcm;

M. semimembranosus 15 qcm;

M. semitendinosus 8 qcm;

M. gracilis 3 qcm.

Der Querschnitt des M. iliacus ist zwar in der Tabelle von A. E. FICK nicht allein angegeben, sondern der gesammte Querschnitt des M. iliopsoas. Da aber, wie aus einer anderen Tabelle[2]) derselben Abhandlung hervorgeht, der Querschnitt des M. iliacus einerseits zu dem Gesammtquerschnitt von M. psoas major und M. psoas minor andererseits sich verhält wie 3:5, so berechnet sich der Quer-schnitt des M. iliacus allein zu $^3/_8$ des Querschnittes des M. iliopsoas, welcher im Mittel $22^1/_2$ qcm betrug.

Durch Multiplikation mit diesen Querschnitten erhält man aus den Tabellen 1 bis 10 die folgenden entsprechenden Tabellen für die Werthe der Drehungsmomente, welche in Anbetracht der überhaupt erreichbaren Genauigkeit auf ganze Centimeterkilogramm abgerundet sind.

Werthe der Drehungsmomente D_b und D_f, mit denen der M. iliacus auf den Rumpf und den Oberschenkel bei 1 Kilogramm Spannung pro Quadratcentimeter seines physiologischen Querschnittes in den verschiedenen Haltungen des Beins einwirkt:

Tabelle 11.

Hüftgelenkwinkel φ	in Centimeterkilogramm											
	− 10°	0°	+ 10°	+ 20°	+ 30°	+ 40°	+ 50°	+ 60°	+ 70°	+ 80°	+ 90°	+ 100°
D_b	+ 24	+ 24	+ 24	+ 24	+ 24	+ 24	+ 24	+ 24	+ 24	+ 29	+ 35	+ 39
D_f	− 24	− 24	− 24	− 24	− 24	− 24	− 24	− 24	− 24	− 29	− 35	− 39

1) A. E. FICK, Ueber zweigelenkige Muskeln. Archiv für Anatomie und Physiologie. Anatomische Abtheilung, 1879, S. 224.

2) a. a. O., S. 221.

Die Stellung des Kniegelenks hat auf die Werthe dieser Drehungsmomente keinen Einfluss. Auf den Unterschenkel übt der Muskel kein Drehungsmoment aus, so dass für jede Haltung des Beins D_t den Werth Null hat.

Werthe der Drehungsmomente D_f und D_t, mit denen die Mm. vastus lateralis, vastus intermedius und vastus medialis gemeinsam auf den Oberschenkel und den Unterschenkel bei 1 Kilogramm Spannung pro Quadratcentimeter ihres gesammten physiologischen Querschnittes in den verschiedenen Haltnngen des Beins einwirken:

Tabelle 12.

Kniegelenkwinkel ψ	in Centimeterkilogramm															
	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°	110°	120°	130°	140°	150°
D_f	+221	+221	+216	+211	+206	+201	+196	+191	+186	+186	+181	+181	+176	+176	+172	+172
D_t	—221	—221	216	—211	—206	—201	—196	—191	—186	—186	—181	—181	—176	—176	—172	—172

Hier hat die Stellung im Hüftgelenk auf die Werthe der Drehungsmomente keinen Einfluss. Auf das Becken, bezw. den Rumpf, üben diese Muskeln kein Drehungsmoment aus, so dass für jede Haltung des Beins D_b den Werth Null besitzt.

Werthe der Drehungsmomente D_f und D_t, mit denen der M. biceps femoris caput breve auf den Oberschenkel und den Unterschenkel bei 1 Kilogramm Spannung pro Quadratcentimeter seines physiologischen Querschnittes in den verschiedenen Haltungen des Beins einwirkt:

Tabelle 13.

Kniegelenkwinkel ψ	in Centimeterkilogramm															
	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°	110°	120°	130°	140°	150°
D_f	—15	—15	—15	—17	—21	—25	—28	—31	—32	—34	—35	—34	—31	—28	—25	—22
D_t	+15	+15	+15	+17	+21	+25	+28	+31	+32	+34	+35	+34	+31	+28	+25	+22

Auch bei diesem, allein über das Kniegelenk hinwegziehenden Muskel hat die Stellung im Hüftgelenk keinen Einfluss auf die Werthe der Drehungsmomente, und auch für ihn besitzt das Drehungsmoment D_b in jeder Haltung des Beins den Werth Null.

Werthe des Drehungsmomentes D_b, mit welchem die verschiedenen zweigelenkigen Muskeln des Oberschenkels auf den Rumpf bei 1 Kilogramm Spannung pro Quadratcentimeter ihres physiologischen Querschnittes in den verschiedenen Haltungen des Beins einwirken:

Tabelle 14.

Hüftgelenkwinkel φ	in Centimeterkilogramm											
	—10°	0°	+10°	+20°	+30°	+40°	+50°	+60°	+70°	+80°	+90°	+100°
M. rectus femoris....	+ 27	+ 27	+ 31	+ 33	+ 35	+ 36	+ 35	+ 33	+ 30	+ 26	+ 23	+ 19
M. biceps femoris caput longum.......	— 57	— 67	— 77	— 87	— 94	— 98	— 97	— 94	— 87	— 78	— 69	— 57
M. semimembranosus	— 47	— 59	— 69	— 77	— 83	— 84	— 83	— 80	— 75	— 69	— 62	— 51
M. semitendinosus ...	— 28	— 38	— 47	— 55	— 62	— 64	— 65	— 64	— 60	— 55	— 50	— 42
M. gracilis..........	+ 11	+ 7	+ 4	0	— 4	— 8	— 11	— 14	— 16	— 18	— 19	— 19

Dabei gilt ein jeder zu einer bestimmten Grösse des Hüftgelenkwinkels φ gehörende Werth des Drehungsmomentes D_h gleichzeitig für alle möglichen Grössen des Kniegelenkwinkels ψ.

Werthe des Drehungsmomentes D_h, mit welchem die verschiedenen zweigelenkigen Muskeln des Oberschenkels auf den Unterschenkel bei 1 Kilogramm Spannung pro Quadratcentimeter ihres physiologischen Querschnittes in den verschiedenen Haltungen des Beins einwirken:

Tabelle 15.

Kniegelenkwinkel ψ	in Centimeterkilogramm															
	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°	110°	120°	130°	140°	150°
M. rectus femoris	−41	−41	−40	−39	−38	−37	−36	−35	−34	−34	−33	−33	−32	−32	−32	−32
M. biceps femoris caput longum	+35	+39	+46	+56	+64	+71	+77	+80	+81	+78	+74	+69	+60	+53	+49	+46
M. semimembranosus.	+38	+38	+45	+50	+54	+59	+62	+62	+60	+57	+54	+50	+44	+38	+30	+24
M. semitendinosus ...	+20	+20	+20	+26	+37	+46	+54	+61	+66	+70	+73	+74	+74	+72	+68	+64
M. gracilis	+ 8	+ 8	+ 8	+ 8	+ 8	+11	+13	+16	+18	+20	+22	+24	+25	+25	+25	+25

Hier gilt ein jeder zu einer bestimmten Grösse des Kniegelenkwinkels ψ gehörende Werth des Drehungsmomentes D_t gleichzeitig für alle möglichen Grössen des Hüftgelenkwinkels φ.

Werthe des Drehungsmomentes D_f, mit welchem der M. rectus femoris auf den Oberschenkel bei 1 Kilogramm Spannung pro Quadratcentimeter seines physiologischen Querschnittes in den verschiedenen Haltungen des Beins einwirkt:

Tabelle 16.

	Hüftgelenkwinkel φ				in Centimeterkilogramm							
Kniegelenkwinkel ψ	−10°	0°	+10°	+20°	+30°	+40°	+50°	+60°	+70°	+80°	+90°	+100°
0°	+14	+14	+10	+7	+5	+5	+5	+7	+11	+14	+18	+22
10°	+14	+14	+10	+7	+5	+5	+5	+7	+11	+14	+18	+22
20°	+13	+13	+9	+6	+5	+4	+5	+6	+10	+14	+17	+21
30°	+12	+12	+8	+5	+4	+3	+4	+5	+9	+13	+16	+20
40°	+11	+11	+7	+5	+3	+2	+3	+5	+8	+12	+15	+19
50°	+10	+10	+6	+4	+2	+1	+2	+4	+7	+11	+14	+18
60°	+9	+9	+5	+3	+1	0	+1	+3	+6	+10	+14	+17
70°	+8	+8	+5	+2	0	−1	0	+2	+5	+9	+13	+16
80°	+7	+7	+4	+1	−1	−2	−1	+1	+5	+8	+12	+15
90°	+7	+7	+4	+1	−1	−2	−1	+1	+5	+8	+12	+15
100°	+6	+6	+3	0	−2	−3	−2	0	+4	+7	+11	+14
110°	+6	+6	+3	0	−2	−3	−2	0	+4	+7	+11	+14
120°	+5	+5	+2	−1	−3	−4	−3	−1	+3	+6	+10	+14
130°	+5	+5	+2	−1	−3	−4	−3	−1	+3	+6	+10	+14
140°	+5	+5	+1	−2	−4	−5	−4	−2	+2	+5	+9	+13
150°	+5	+5	+1	−2	−4	−5	−4	−2	+2	+5	+9	+13

Werthe des Drehungsmomentes D_f, mit welchem der M. biceps femoris caput longum auf den Oberschenkel bei 1 Kilogramm Spannung pro Quadratcentimeter seines physiologischen Querschnittes in den verschiedenen Haltungen des Beins einwirkt:

Tabelle 17.

Kniegelenkwinkel ψ	Hüftgelenkwinkel φ in Centimeterkilogramm											
	− 10°	0°	+ 10°	+ 20°	+ 30°	+ 40°	+ 50°	+ 60°	+ 70°	+ 80°	+ 90°	+ 100°
0°	+ 22	+ 32	+ 42	+ 52	+ 59	+ 63	+ 62	+ 59	+ 52	+ 43	+ 34	+ 22
10°	+ 18	+ 28	+ 38	+ 48	+ 55	+ 59	+ 57	+ 55	+ 48	+ 39	+ 29	+ 18
20°	+ 11	+ 21	+ 31	+ 41	+ 48	+ 52	+ 50	+ 48	+ 41	+ 32	+ 22	+ 11
30°	+ 1	+ 11	+ 21	+ 31	+ 38	+ 42	+ 41	+ 38	+ 31	+ 22	+ 13	+ 1
40°	− 7	+ 3	+ 13	+ 22	+ 29	+ 34	+ 32	+ 29	+ 22	+ 14	+ 4	− 7
50°	− 14	− 4	+ 6	+ 15	+ 22	+ 27	+ 25	+ 22	+ 15	+ 7	− 3	− 14
60°	− 20	− 10	0	+ 10	+ 17	+ 21	+ 20	+ 17	+ 10	+ 1	− 8	− 20
70°	− 22	− 13	− 3	+ 7	+ 14	+ 18	+ 17	+ 14	+ 7	− 1	− 11	− 22
80°	− 24	− 14	− 4	+ 6	+ 13	+ 17	+ 15	+ 13	+ 6	− 3	− 13	− 24
90°	− 21	− 11	− 1	+ 8	+ 15	+ 20	+ 18	+ 15	+ 8	0	− 10	− 21
100°	− 17	− 7	+ 3	+ 13	+ 20	+ 24	+ 22	+ 20	+ 13	+ 4	− 6	− 17
110°	− 11	− 1	+ 8	+ 18	+ 25	+ 29	+ 28	+ 25	+ 18	+ 10	0	− 11
120°	− 3	+ 7	+ 17	+ 27	+ 34	+ 38	+ 36	+ 34	+ 27	+ 18	+ 8	− 3
130°	+ 4	+ 14	+ 24	+ 34	+ 41	+ 45	+ 43	+ 41	+ 34	+ 25	+ 15	+ 4
140°	+ 8	+ 18	+ 28	+ 38	+ 45	+ 49	+ 48	+ 45	+ 38	+ 29	+ 20	+ 8
150°	+ 11	+ 21	+ 31	+ 41	+ 48	+ 52	+ 50	+ 48	+ 41	+ 32	+ 22	+ 11

Werthe des Drehungsmomentes D_f, mit welchem der M. semimembranosus auf den Oberschenkel bei 1 Kilogramm Spannung pro Quadratcentimeter seines physiologischen Querschnittes in den verschiedenen Haltungen des Beins einwirkt:

Tabelle 18.

Kniegelenkwinkel ψ	Hüftgelenkwinkel φ in Centimeterkilogramm											
	− 10°	0°	+ 10°	+ 20°	+ 30°	+ 40°	+ 50°	+ 60°	+ 70°	+ 80°	+ 90°	+ 100°
0°	+ 9	+ 21	+ 32	+ 39	+ 45	+ 47	+ 45	+ 42	+ 38	+ 32	+ 24	+ 14
10°	+ 9	+ 21	+ 32	+ 39	+ 45	+ 47	+ 45	+ 42	+ 38	+ 32	+ 24	+ 14
20°	+ 2	+ 14	+ 24	+ 32	+ 38	+ 39	+ 38	+ 35	+ 30	+ 24	+ 17	+ 6
30°	− 3	+ 9	+ 20	+ 27	+ 33	+ 35	+ 33	+ 30	+ 26	+ 20	+ 12	+ 2
40°	− 8	+ 5	+ 15	+ 23	+ 29	+ 30	+ 29	+ 26	+ 21	+ 15	+ 8	− 3
50°	− 12	0	+ 11	+ 18	+ 24	+ 26	+ 24	+ 21	+ 17	+ 11	+ 3	− 8
60°	− 15	− 3	+ 8	+ 15	+ 21	+ 23	+ 21	+ 18	+ 14	+ 8	0	− 11
70°	− 15	− 3	+ 8	+ 15	+ 21	+ 23	+ 21	+ 18	+ 14	+ 8	0	− 11
80°	− 14	− 2	+ 9	+ 17	+ 23	+ 24	+ 23	+ 20	+ 15	+ 9	+ 2	− 9
90°	− 11	+ 2	+ 12	+ 20	+ 26	+ 27	+ 26	+ 23	+ 18	+ 12	+ 5	− 6
100°	− 8	+ 5	+ 15	+ 23	+ 29	+ 30	+ 29	+ 26	+ 21	+ 15	+ 8	− 3
110°	− 3	+ 9	+ 20	+ 27	+ 33	+ 35	+ 33	+ 30	+ 26	+ 20	+ 12	+ 2
120°	+ 3	+ 15	+ 26	+ 33	+ 39	+ 41	+ 39	+ 36	+ 32	+ 26	+ 18	+ 8
130°	+ 9	+ 21	+ 32	+ 39	+ 45	+ 47	+ 45	+ 42	+ 38	+ 32	+ 24	+ 14
140°	+ 17	+ 29	+ 39	+ 47	+ 53	+ 54	+ 53	+ 50	+ 45	+ 39	+ 32	+ 21
150°	+ 23	+ 35	+ 45	+ 53	+ 59	+ 60	+ 59	+ 56	+ 51	+ 45	+ 38	+ 27

Durch die Werthe der Drehungsmomente, welche sich in den Tabellen 11 bis 20 niedergelegt finden, ist das statische Maass für die sämmtlichen 8 Muskeln gewonnen, so weit sich dasselbe aus den Dimensionen, der Insertionsweise und dem Verlauf der Muskeln ableiten lässt. Beträgt die Spannung eines Muskels pro Quadratcentimeter seines physiologischen Querschnittes nicht 1 Kilogramm,

Werthe des Drehungsmomentes $D_{\prime}$, mit welchem der M. semitendinosus auf den Oberschenkel bei 1 Kilogramm Spannung pro Quadratcentimeter seines physiologischen Querschnittes in den verschiedenen Haltungen des Beins einwirkt:

Tabelle 19.

Kniegelenkwinkel ψ	Hüftgelenkwinkel φ in Centimeterkilogramm											
	− 10°	0°	+ 10°	+ 20°	+ 30°	+ 40°	+ 50°	+ 60°	+ 70°	+ 80°	+ 90°	+ 100°
0°	+ 8	+ 18	+ 27	+ 35	+ 42	+ 44	+ 45	+ 44	+ 40	+ 35	+ 30	+ 22
10°	+ 8	+ 18	+ 27	+ 35	+ 42	+ 44	+ 45	+ 44	+ 40	+ 35	+ 30	+ 22
20°	+ 8	+ 18	+ 27	+ 35	+ 42	+ 44	+ 45	+ 44	+ 40	+ 35	+ 30	+ 22
30°	+ 2	+ 12	+ 21	+ 29	+ 35	+ 38	+ 38	+ 38	+ 34	+ 29	+ 23	+ 16
40°	− 9	+ 2	+ 10	+ 18	+ 25	+ 27	+ 28	+ 27	+ 23	+ 18	+ 13	+ 6
50°	− 18	− 8	+ 1	+ 9	+ 15	+ 18	+ 18	+ 18	+ 14	+ 9	+ 3	− 4
60°	− 26	− 16	− 7	+ 1	+ 7	+ 10	+ 10	+ 10	+ 6	+ 1	− 5	− 12
70°	− 33	− 22	− 14	− 6	+ 1	+ 3	+ 4	+ 3	− 1	− 6	− 11	− 18
80°	− 38	− 28	− 19	− 11	− 5	− 2	− 2	− 2	− 6	− 11	− 17	− 24
90°	− 42	− 32	− 23	− 15	− 9	− 6	− 6	− 6	− 10	− 15	− 21	− 28
100°	− 45	− 34	− 26	− 18	− 11	− 9	− 8	− 9	− 13	− 18	− 23	− 30
110°	− 46	− 36	− 27	− 19	− 13	− 10	− 10	− 10	− 14	− 19	− 25	− 32
120°	− 46	− 35	− 26	− 18	− 12	− 10	− 9	− 10	− 14	− 18	− 24	− 31
130°	− 44	− 34	− 25	− 17	− 10	− 8	− 7	− 8	− 12	− 17	− 22	− 30
140°	− 40	− 30	− 21	− 13	− 6	− 4	− 3	− 4	− 8	− 13	− 18	− 26
150°	− 36	− 26	− 17	− 9	− 2	0	+ 1	0	− 4	− 9	− 14	− 22

Werthe des Drehungsmomentes $D_{\prime}$, mit welchem der M. gracilis auf den Oberschenkel bei 1 Kilogramm Spannung pro Quadratcentimeter seines physiologischen Querschnittes in den verschiedenen Haltungen des Beins einwirkt.

Tabelle 20.

Kniegelenkwinkel ψ	Hüftgelenkwinkel φ in Centimeterkilogramm											
	− 10°	0°	+ 10°	+ 20°	+ 30°	+ 40°	+ 50°	+ 60°	+ 70°	+ 80°	+ 90°	+ 100°
0°	− 18	− 15	− 11	− 7	− 3	0	+ 3	+ 6	+ 8	+ 10	+ 11	+ 12
10°	− 18	− 15	− 11	− 7	− 3	0	+ 3	+ 6	+ 8	+ 10	+ 11	+ 12
20°	− 18	− 15	− 11	− 7	− 3	0	+ 3	+ 6	+ 8	+ 10	+ 11	+ 12
30°	− 18	− 15	− 11	− 7	− 3	0	+ 3	+ 6	+ 8	+ 10	+ 11	+ 12
40°	− 18	− 15	− 11	− 7	− 3	0	+ 3	+ 6	+ 8	+ 10	+ 11	+ 12
50°	− 21	− 18	− 14	− 10	− 6	− 3	0	+ 3	+ 5	+ 7	+ 8	+ 9
60°	− 24	− 20	− 17	− 13	− 9	− 6	− 3	0	+ 3	+ 5	+ 5	+ 6
70°	− 27	− 23	− 20	− 16	− 12	− 8	− 5	− 2	0	+ 2	+ 3	+ 3
80°	− 29	− 26	− 22	− 18	− 14	− 11	− 8	− 5	− 2	− 1	0	+ 1
90°	− 31	− 28	− 24	− 20	− 16	− 13	− 10	− 7	− 5	− 3	− 2	− 1
100°	− 33	− 29	− 26	− 22	− 18	− 15	− 12	− 9	− 6	− 5	− 4	− 3
110°	− 35	− 31	− 27	− 23	− 20	− 16	− 13	− 10	− 8	− 6	− 5	− 5
120°	− 35	− 32	− 28	− 24	− 20	− 17	− 14	− 11	− 9	− 7	− 6	− 5
130°	− 36	− 32	− 29	− 25	− 21	− 18	− 15	− 12	− 9	− 8	− 7	− 6
140°	− 36	− 32	− 29	− 25	− 21	− 18	− 15	− 12	− 9	− 8	− 7	− 6
150°	− 35	− 32	− 28	− 24	− 20	− 17	− 14	− 11	− 9	− 7	− 6	− 5

wie es für die Berechnung der Tabellen angenommen wurde, sondern k Kilogramm, so werden natürlich die Drehungsmomente für jede Haltung des Beines k mal so gross, als sie in den Tabellen angegeben sind; die Art der Veränderlichkeit derselben mit den beiden Gelenkwinkeln φ und ψ bleibt aber die gleiche.

d) Die Momentflächen.

Um sich von der Abhängigkeit der einzelnen Drehungsmomente von den Gelenkstellungen ein anschauliches Bild machen zu können, finden sich auf den Tafeln I bis VI die diese Abhängigkeit darstellenden Momentflächen in der schon oben angedeuteten Weise (vgl. Seite 519) unter zu Grundelegung der Tabellen 11 bis 20 aufgezeichnet. Die Figuren bedeuten Schrägprojectionen der Flächen und sind sämmtlich in gleichem Maassstabe ausgeführt, um eine Vergleichung der statischen Wirkung der einzelnen Muskeln zu ermöglichen. Das horizontal gedachte rechtwinklige Coordinatensystem, dessen Coordinaten den beiden Gelenkwinkeln φ und ψ proportional sind, ist durch ein schwarz gezeichnetes Coordinatennetz dargestellt. In dem letzteren findet sich für jeden zur Untersuchung herausgegriffenen Werth des Hüftgelenkwinkels φ eine Gerade der einen Schaar und für jeden verwendeten Werth des Kniegelenkwinkels ψ eine Gerade der anderen, zur ersten rechtwinkligen Schaar des Coordinatennetzes. Daher entspricht jeder Haltung des Beins, für welche die Drehungsmomente bestimmt worden sind, ein Schnittpunkt zweier sich rechtwinklig durchkreuzender Geraden des Netzes. Von jedem dieser 192 Kreuzungspunkte aus ist nun je nach dem Vorzeichen des Drehungsmomentes nach oben oder unten eine Strecke abgetragen, welche durch die Anzahl ihrer Millimeter direkt die Anzahl der Centimeterkilogramm für das Drehungsmoment angibt, mit welchem der Muskel bei einer Spannung von 1 Kilogramm pro Quadratcentimeter seines physiologischen Querschnittes auf den betreffenden Körpertheil in der dem Kreuzungspunkte des Netzes entsprechenden Haltung des Beins einwirkt.

Die Endpunkte aller dieser Strecken sind in ganz entsprechender Weise wie beim schwarzen horizontalen Coordinatennetz durch roth gezeichnete Curven verbunden, welche in ihrer Gesammtheit die Gestalt der Momentflächen deutlich erkennen lassen. Die so entstandenen beiden Schaaren rother Curven bilden ein Coordinatennetz auf der Momentfläche; sie stehen in engem Zusammenhange zu den beiden Schaaren schwarzer Curven des horizontalen ebenen Coordinatensystems, indem die letzteren die Orthogonalprojection der ersteren darstellen. Die eine Schaar rother Curven auf der Fläche gehört zu den 12 verwendeten Werthen des Hüftgelenkwinkels, die andere Schaar zu den 16 unter-

suchten Stellungen des Kniegelenks. Es kommt daher jeder Linie des rothen Netzes entweder ein bestimmter Werth von φ oder ein solcher von ψ zu. In den Figuren sind diese Werthe der beiden Gelenkwinkel nicht auch an die rothen Linien geschrieben worden, wie es bei den Geraden des schwarzen Netzes geschehen ist, um den plastischen Eindruck der Flächen nicht zu vermindern. Man wird aber leicht im Stande sein, durch Vergleich mit dem schwarzen Netz den einer jeden rothen Linie zukommenden Werth eines der beiden Gelenkwinkel festzustellen. Auch den zu einer bestimmten Haltung des ganzen Beins gehören den Kreuzungspunkt zweier rother Curven kann man leicht auffinden, wenn man beachtet, dass derselbe genau vertikal über dem entsprechenden Kreuzungspunkt im schwarzen Netz liegt.

Will man nun wissen, wie gross das Drehungsmoment bei irgend einer Haltung des Beins ist, so braucht man in der Figur nur den Abstand der beiden dieser Haltung entsprechenden Kreuzungspunkte des schwarzen und rothen Netzes zu messen. Die Anzahl der Millimeter dieser Strecke gibt dann direkt die Anzahl der Centimeterkilogramm des Drehungsmomentes an. Liegt die rothe Fläche, oder der betreffende Punkt derselben, über dem entsprechenden Punkt der schwarzen Fläche, so ist das Drehungsmoment positiv, d. h. der Muskel sucht den betreffenden Körpertheil von der rechten Seite aus im Sinne des Uhrzeigers zu drehen. Liegt der rothe Punkt unter dem schwarzen, so besitzt dagegen das Drehungsmoment einen negativen Werth, d. h. der Muskel sucht in diesem Falle den Körpertheil, von rechts betrachtet, im umgekehrten Sinne des Uhrzeigers zu drehen.

Auf Tafel I finden sich Momentflächen für die drei eingelenkigen Muskel aufgezeichnet, wobei wieder die drei eingelenkigen Köpfe des M. quadriceps femoris als ein Muskel aufgefasst sind. Wie schon früher angegeben wurde, brauchte man für diese Muskeln eigentlich nur Momentcurven zu zeichnen, da die Drehungsmomente, mit denen ein jeder auf zwei von den drei Körpertheilen einwirkt, immer nur von dem einen Gelenkwinkel abhängen. Um die statische Wirkung von diesen besser mit der von den zweigelenkigen Muskeln vergleichen zu können, sind aber ihre Momentflächen construirt worden. Die Curven jeder der beiden Schaaren sind hier unter einander congruent, und zwar stellen die einen, welche zu dem Gelenkwinkel gehören, von dem das Drehungs-

moment unabhängig ist, horizontale gerade Linien dar; dies ist eben eine Folge davon, dass zu jedem Werth des betreffenden Gelenkwinkels der gleiche Werth des Drehungsmomentes gehört. Man kann daher sagen, dass die Momentflächen der eingelenkigen Muskeln Theile von Cylinderflächen im allgemeinen Sinne darstellen. Da die beiden Drehungsmomente, mit denen ein eingelenkiger Muskel auf zwei von den drei Körpertheilen einwirkt, entgegengesetzt gleich sind, so findet sich auf Tafel I für jeden Muskel nur eine Momentfläche verzeichnet, und zwar nur die zum Oberschenkel gehörende, weil auf den Oberschenkel von allen untersuchten Muskeln Drehungsmomente ausgeübt werden. Die entsprechende zu dem anderen Körpertheil gehörende Momentfläche würde sich von der dargestellten nur dadurch unterscheiden, dass ein jeder Punkt in gleicher Entfernung auf der anderen Seite des schwarzen Coordinatennetzes liegt; man hat sich also einfach die rothe Fläche an der schwarzen gespiegelt zu denken.

Die linke obere Figur veranschaulicht die Werthe des Drehungsmomentes D_i, mit welchem der M. iliacus auf den Oberschenkel in den verschiedenen Haltungen des Beins einwirkt. Da die Momentfläche unter dem schwarzen Coordinatennetz liegt, so sucht dieser Muskel den Oberschenkel im umgekehrten Sinne des Uhrzeigers zu drehen. Das nur vom Hüftgelenkwinkel abhängige Drehungsmoment ist von $\varphi = -10^\circ$ bis zu $\varphi = +70^\circ$ constant und nimmt dann an absolutem Werth zu.

Die rechte Figur stellt die entsprechende Momentfläche für die drei eingelenkigen Köpfe des M. quadriceps femoris bei gemeinsamem Wirken dar. Wie man sieht, ist der absolute Werth des Drehungsmomentes sehr viel mal grösser als der des M. iliacus. Die Muskelgruppe sucht den Oberschenkel im Sinne des Uhrzeigers zu drehen, und zwar in der Nähe der Streckstellung des Knies mit grösserem Drehungsmoment als in der extremen Beugestellung. Dies ist ohne weiteres aus der starken Senkung der Fläche zu erkennen. Die treppenförmige Gestalt, welche dieselbe zuletzt annimmt, hat keine Bedeutung; sie ist allein dem Umstande zuzuschreiben, dass die Arme der Kräftepaare nur auf Millimeter angegeben werden konnten; bei der Multiplikation mit der grossen Querschnittszahl ist aber natürlich die hierin liegende Ungenauigkeit deutlicher zum Vorschein gekommen. Von dem Hüftgelenkwinkel ist dieses Drehungsmoment unabhängig.

Endlich gibt die linke untere Figur eine Anschauung von den Werthen des Drehungsmomentes D_f, mit dem der kurze Kopf des M. biceps femoris auf den Oberschenkel einwirkt. Wie man sieht, sucht dieser Muskel den Oberschenkel im umgekehrten Sinne des Uhrzeigers zu drehen, und zwar in der Streckstellung des Knies mit verhältnissmässig kleinem, bei wachsender Beugestellung aber zunächst mit zunehmendem und zuletzt mit wieder abnehmendem Drehungsmoment. In der extremen Beugestellung ist aber der absolute Werth des Drehungsmoments immer noch grösser als in der Streckstellung des Kniegelenks.

Auf Tafel II sind die Flächen für die drei Drehungsmomente D_b, D_f und D_t aufgezeichnet, mit denen der M. rectus femoris auf den Rumpf, Oberschenkel und Unterschenkel einwirkt. Auch hier stellen die erste und dritte dieser drei Momentflächen Theile von Cylinderflächen dar, weil D_b einerseits vom Kniegelenkwinkel ϑ, und D_t andererseits vom Hüftgelenkwinkel φ wenigstens mit grosser Annäherung unabhängig ist. Das Gleiche gilt für die entsprechenden Flächen auf den folgenden Tafeln III—VI. Die zweite Momentfläche, welche die Werthe von D_f veranschaulicht, besitzt dagegen eine complicirtere Gestalt. Beim M. rectus tritt das noch nicht so deutlich hervor wie bei den anderen zweigelenkigen Muskeln, weil hier das Drehungsmoment D_t sich auch mit dem Kniegelenkwinkel nur verhältnissmässig wenig ändert. Die drei Momentflächen stehen immer in der Beziehung zu einander, dass die algebraische Summe der zu einer bestimmten Haltung des Beins gehörenden Ordinaten von zwei derselben immer entgegengesetzt gleich der entsprechenden Ordinate der dritten Momentfläche ist. Diese Beziehung gilt natürlich auch bei den Flächen der anderen Muskeln, da allgemein die drei Drehungsmomente stets die Summe Null ergeben müssen.

Das auf den Rumpf einwirkende Drehungsmoment des M. rectus sucht diesen Körpertheil im Sinne des Uhrzeigers zu drehen, und zwar bei wachsender Beugung im Hüftgelenk zunächst mit wachsender, dann aber mit wieder abnehmender Grösse. Das Drehungsmoment, mit welchem der Muskel auf den Oberschenkel einwirkt, unterscheidet sich ganz wesentlich von dem entsprechenden Drehungsmoment der drei anderen Theile des M. quadriceps femoris. Abgesehen, dass es im Vergleich zu diesem nur sehr geringe Grösse besitzt, sucht es in manchen Haltungen des Beins den

Oberschenkel sogar im umgekehrten Sinne des Uhrzeigers zu drehen; denn die Momentfläche geht ja theilweise unter das schwarze Coordinatennetz. Dagegen stimmt das Drehungsmoment, mit welchem der M. rectus femoris auf den Unterschenkel einwirkt, in der Art vollkommen mit dem entsprechenden Drehungsmoment der drei anderen Köpfe des M. quadriceps femoris überein und unterscheidet sich von diesem nur durch die, dem geringeren Querschnitt entsprechende, geringere Grösse.

Die auf den Tafeln III, IV und V aufgezeichneten Momentflächen für die Mm. biceps femoris caput longum, semimembranosus und semitendinosus zeigen einen ziemlich übereinstimmenden Typus. Alle drei Muskeln suchen den Rumpf im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers zu drehen, und zwar bei wachsendem Beugungswinkel im Hüftgelenk mit zuerst merklich zunehmendem, und dann wieder abnehmendem Drehungsmoment. Das Maximum desselben entspricht ungefähr der Mitte zwischen der Streckstellung und der rechtwinkligen Beugestellung des Hüftgelenks. Den Unterschenkel suchen die drei Muskeln dagegen im Sinne des Uhrzeigers zu drehen, und zwar bei wachsender Kniebeugung ebenfalls zuerst mit zunehmendem, und dann wieder mit abnehmendem Drehungsmoment. Ein merklicher Unterschied stellt sich hier nur in der Lage des Maximums heraus; dasselbe entspricht beim M. semimembranosus einer geringeren Beugestellung im Kniegelenk als beim langen Kopf des M. biceps femoris, und bei diesem wiederum einem geringeren Beugegrade als beim M. semitendinosus.

Die Flächen für das Drehungsmoment, mit dem die drei Muskeln auf den Oberschenkel einwirken, besitzen bei allen in ausgesprochenem Maasse die Form einer Sattelfläche. Da diese Fläche theilweise unter das schwarze Coordinatennetz tritt, so suchen die Muskeln den Oberschenkel zum Theil im Sinne, zum Theil im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers zu drehen. Das letztere ist am meisten der Fall beim M. semitendinosus; denn hier liegt sogar der grössere Teil der Momentfläche unterhalb des schwarzen Coordinatennetzes. Weitere Einzelheiten lehrt die eingehende Betrachtung dieser so charakteristisch gestalteten Flächen.

Auf Tafel VI finden sich endlich die Momentflächen für den M. gracilis vor. Dieselben lassen sich in ihrer Gestalt annähernd mit denen des M. semitendinosus vergleichen. Man muss sich

die erste Fläche des letzteren nur hinten, die dritte Fläche rechts und die zweite hinten und rechts zum Theil gekürzt denken. Ein wesentlicher Unterschied ist aber bei der ersten und zweiten Fläche insofern zu constatiren, als die erste im Anfang über, und die zweite im Anfang unter dem schwarzen Coordinatennetz liegt. Daraus geht hervor, dass der M. gracilis den Rumpf in der Nähe der Streckstellung des Hüftgelenks im Sinne, und erst bei grösseren Beugegraden dieses Gelenks im umgekehrten Sinne des Uhrzeigers zu drehen sucht, während der M. semitendinosus den Rumpf nur im umgekehrten Sinne des Uhrzeigers drehen will. Ferner ist der M. gracilis bestrebt, den Oberschenkel in der Nähe der Streckstellung des Hüftgelenks und beliebiger Beugestellung des Kniegelenks im umgekehrten Sinne des Uhrzeigers zu drehen, während der M. semitendinosus in der Nähe der Streckstellung beider Gelenke auf den Oberschenkel im Sinne des Uhrzeigers drehend einwirkt. Ueberhaupt übt der M. gracilis nur bei grösseren Beugegraden des Hüftgelenks und gleichzeitiger geringer Beugung im Kniegelenk ein Drehungsbestreben im Sinne des Uhrzeigers auf den Oberschenkel aus.

Da es nicht möglich ist, im Rahmen einer Abhandlung alle Resultate in erschöpfender Weise auseinanderzusetzen, welche die Bilder auf den Tafeln I bis VI bei eingehender Betrachtung erkennen lassen, so muss das eingehende Studium dieser Momentflächen Jedem überlassen bleiben.

Während nun mit den Werthen der Drehungsmomente und den Momentflächen die statische Wirkung aller zur Untersuchung herausgegriffenen Muskeln vollkommen aufgeklärt ist, können dieselben, wie nochmals ausdrücklich hervorgehoben werden soll, doch in keiner Weise Aufschluss über die bewegende Wirkung dieser Muskeln geben.

V. Das kinetische Maass derselben Oberschenkelmuskeln.

a) Methode der Ableitung.

Nachdem für alle hier in Frage kommenden Muskeln die Drehungsmomente bestimmt worden sind, mit welchen sie bei der Einheit der Spannung auf die verschiedenen Abschnitte des Beins einwirken, kann nunmehr zur Ableitung des kinetischen Maasses aller dieser Muskeln übergegangen werden.

Hierzu ist vor allen Dingen erforderlich, dass man sich für das nur im Kniegelenk gegliederte und um eine zur Knieaxe parallele feste Axe des Hüftgelenks drehbare Bein die speciellen Werthe der Verhältnisse $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ und $\frac{\sigma_2}{l_1}$ verschafft.

Die Berechnung derselben erfordert die Kenntniss der Gewichte der beiden Abschnitte des Beins, der Lage ihrer Schwerpunkte, der Trägheitsmomente derselben um die zur Knieaxe parallelen Schwerpunktsaxen und der Entfernung der Knieaxe von der zu ihr parallelen Hüftaxe. Da die Formeln, welche dieser Berechnung zu Grunde liegen, schon früher abgeleitet worden sind[1]), so wird es genügen, dieselben an dieser Stelle noch einmal kurz anzugeben.

Das Gewicht des Oberschenkels sei mit G_1 und das Gesammtgewicht vom Unterschenkel und Fuss mit G_2 bezeichnet; das Gewicht des ganzen Beins beträgt dann $G_1 + G_2$. Da das Verhältniss der Gewichte zweier Körper gleich dem Verhältniss ihrer Massen ist, so kann man das Verhältniss μ_1 der Masse des Oberschenkels zu der Masse des ganzen Beins und das Verhältniss μ_2 der Masse vom Unterschenkel mit Fuss zu der Masse des ganzen Beins durch folgende Formeln aus den Gewichten berechnen:

$$\mu_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2} \quad \text{und} \quad \mu_2 = \frac{G_2}{G_1 + G_2}.$$

[1]) Abhandlungen der math.-phys. Classe der Königl. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch. Bd. XXIII, No. VI.

Die Entfernung der Knieaxe vom Mittelpunkt des Hüftgelenks ist mit l_1 bezeichnet worden. Der Abstand des Schwerpunktes S_1 des Oberschenkels von dem Mittelpunkt des Hüftgelenks sei r_1, und der Abstand des Schwerpunktes S_2 vom Unterschenkel + Fuss von der Knieaxe sei r_2; dabei ist der Fuss in einer mittleren Stellung gegen den Unterschenkel fixirt gedacht. Unter dem Hauptpunkt H_1 des Oberschenkels versteht man den Schwerpunkt des reducirten Oberschenkelsystems, d. h. also desjenigen Massensystems, welches man aus dem Oberschenkel erhält, wenn man demselben die im Mittelpunkt des Kniegelenks concentrirt gedachte Masse vom Unterschenkel mit Fuss hinzufügt. Derselbe ist ein fester Punkt der Längslinie des Oberschenkels; seine Entfernung vom Mittelpunkt des Hüftgelenks ist c_1. Der Hauptpunkt H_2 des Systems Unterschenkel + Fuss stellt den Schwerpunkt des reducirten Unterschenkel-Fusssystems dar, d. h. also des Massensystems, welches man erhält, wenn man die Masse des Oberschenkels im Mittelpunkt des Kniegelenks concentrirt und dem Unterschenkel hinzugefügt denkt. Derselbe nimmt eine bestimmte Lage auf der Längslinie des Unterschenkels ein; sein Abstand von der Knieaxe ist c_2. Es ist zu beachten, dass man bei dieser Definition der reducirten Systeme und Hauptpunkte das Bein isolirt, ohne Rücksicht auf den Zusammenhang mit dem übrigen Körper, in Betracht zieht; dies ist im vorliegenden Falle unbeschadet der Allgemeingültigkeit der Formeln erlaubt, weil ja der übrige Körper bei der Contraction der genannten Muskeln in erster Annäherung als unbeweglich aufgefasst werden kann. Für die Untersuchung von Bewegungen, an denen sich der ganze übrige Körper betheiligt, wie es z. B. der Fall ist, wenn sich die Muskeln contrahiren, während der Fuss fest auf dem Boden aufsteht, muss man bei der Ableitung der reducirten Systeme und Hauptpunkte im Mittelpunkt des proximalen Gelenks eines jeden der beiden Abschnitte des Beins ausserdem die ganze Masse des übrigen Körpers concentrirt annehmen.

Bei der eingeführten Bedeutung der einzelnen Grössen hat man zur Berechnung der beiden Hauptstrecken c_1 und c_2 die Formeln:

$$c_1 = \mu_1 r_1 + \mu_2 l_1 \quad \text{und} \quad c_2 = \mu_2 r_2.$$

Bezeichnet man weiterhin mit $\varkappa_1$ bezüglich $\varkappa_2$ den Trägheitsradius des Oberschenkels bezüglich Unterschenkels in Bezug auf

die zur Knieaxe parallele Axe durch den Schwerpunkt S_1 bezüglich S_2 und beachtet, dass diese Schwerpunktsaxen Hauptträgheitsaxen der beiden Körpertheile darstellen, so hat man zur Berechnung des Trägheitsradius λ_1 des reducirten Oberschenkelsystems in Bezug auf die zur Knieaxe parallele Axe des Hüftgelenks, und des Trägheitsradius λ_2 des reducirten Unterschenkel-Fusssystems in Bezug auf die Knieaxe die Formeln:

$$\lambda_1^2 = \mu_1 (\varkappa_1^2 + r_1^2) + \mu_2 l_1^2 \quad \text{und} \quad \lambda_2^2 = \mu_2 (\varkappa_2^2 + r_2^2).$$

Aus diesen Grössen lassen sich nach dem Früheren die Längen σ_1 und σ_2 der mathematischen Pendel, deren Schwingungsdauer mit derjenigen der beiden reducirten Systeme in Bezug auf die Hüftaxe resp. Knieaxe übereinstimmen, nach den Formeln berechnen:

$$\sigma_1 = \frac{\lambda_1^2}{c_1} \quad \text{und} \quad \sigma_2 = \frac{\lambda_2^2}{c_2}.$$

Endlich hat man zur Berechnung der Entfernung ϱ_2 des Richtpunktes des Unterschenkels von der Knieaxe die Formel:

$$\varrho_2 = \frac{c_2}{c_1} l_1.$$

Damit sind alle Mittel angegeben, mit denen man die für das kinetische Maass der Muskeln charakteristischen Constanten $\frac{\sigma_1}{\varrho_2}$ und $\frac{\sigma_2}{l_1}$ des zweigliedrigen Systems berechnen kann.

Zur Verfügung standen die beiden unteren Extremitäten von zwei Individuen, welche früher auf ihre Dimensionen, Schwerpunktslagen, Gewichte und Trägheitsmomente untersucht worden waren. Die Resultate dieser Untersuchung finden sich in den beiden Tabellen auf S. 433 und 456 der Arbeit über die „Bestimmung der Trägheitsmomente des menschlichen Körpers und seiner Glieder“[1]) niedergelegt. In der folgenden Tabelle sind nun die damals gefundenen Werthe von G_1, G_2, l_1, r_1, r_2, $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ noch einmal zusammengestellt und die aus denselben berechneten Werthe der Grössen μ_1, μ_2, c_1, c_2, λ_1, λ_2, σ_1, σ_2, ϱ_2, $\frac{\sigma_1}{\varrho_2}$ und $\frac{\sigma_2}{l_1}$ angefügt worden.

[1]) Abhandlungen der math.-phys. Classe der Kgl. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch. Bd. XVIII, No. VIII.

Tabelle 21.

	Körpertheile	G in g	l in cm	r in cm	$\varkappa$ in cm	μ	c in cm	λ in cm	σ in cm	ϱ in cm	$\frac{\sigma_1}{\varrho_2}$	$\frac{\sigma_2}{l_1}$
rechter	Oberschenkel	6450	40,0	17,7	10,3	0,637	25,79	29,12	32,88	—	2,335	0,853
	Unterschenkel mit Fuss	3680	—	25,0	15,1	0,363	9,08	17,60	34,10	14,08		
linker	Oberschenkel	6990	40,0	16,7	10,8	0,656	24,72	28,46	32,76	—	2,353	0,847
	Unterschenkel mit Fuss	3670	—	25,0	14,9	0,344	8,60	17,07	33,88	13,92		
rechter	Oberschenkel	4860	35,9	15,72	11,01	0,620	23,39	26,80	30,70	—	2,126	0,924
	Unterschenkel mit Fuss	2980	—	24,77	14,41	0,380	9,41	17,67	33,16	14,44		
linker	Oberschenkel	4810	36,65	15,90	11,43	0,632	23,54	27,14	31,29	—	2,491	0,883
	Unterschenkel mit Fuss	2800	—	21,94	15,10	0,368	8,07	16,16	32,35	12,56		

Aus dieser Tabelle ist zunächst ersichtlich, dass trotz grosser Verschiedenheiten in den Gewichten und den Dimensionen, die Grössen $\frac{\sigma_1}{\varrho_2}$ und $\frac{\sigma_2}{l_1}$ nahezu constante Werthe besitzen; es ergeben sich sogar grössere Unterschiede für die beiden unteren Extremitäten ein und desselben Individuums als zwischen den zu verschiedenen Individuen gehörenden Werthen. Der Grund für diese bemerkenswerthe Thatsache ist hauptsächlich darin zu suchen, dass die beiden für die Muskelwirkung in Frage kommenden Verhältnisszahlen nur von dem Verhältniss der Gewichte beider Körpertheile abhängen; das letztere ist aber bekanntlich bei allen normal gebauten Individuen annähernd das gleiche, mögen die Gewichte selbst noch so grosse Unterschiede aufweisen.

Es ist nun für die weitere Untersuchung von grossem Interesse, diese Werthe mit den entsprechenden Grössen an der oberen Extremität vergleichen zu können. Nimmt man an, dass die Hand gegen den Unterarm in einer mittleren Pronationstellung fixirt ist, so dass der Arm nur noch im Ellbogengelenk gegliedert erscheint, und zieht weiterhin im Schultergelenk nur Bewegungen um eine zur Ellbogenaxe parallele Axe in Betracht, so hat man ganz analoge Verhältnisse, wie sie bei der unteren Extremität vorausgesetzt waren. Unter zu Grundelegung der in den Tabellen auf S. 433 und 456 der oben angeführten Arbeit niedergelegten Werthe für die Dimensionen, Schwerpunktslagen, Gewichte und Trägheitsmomente der beiden Abschnitte des Armes erhält man dann nach den obigen Formeln die folgende Tabelle für die obere Extremität:

Tabelle 22.

Körpertheile		G in g	l in cm	r in cm	x in cm	μ	c in cm	λ in cm	σ in cm	ϱ in cm	$\frac{\sigma_1}{\varrho_2}$	$\frac{\sigma_2}{l_1}$
rechter	Oberarm	1710	28,5	13.5	7.7	0,543	20,35	22,41	24,69	—	2,269	0,783
	Unterarm mit Hand	1440	—	17,0	9.5	0,457	7.77	13.17	22,31	10,88		
linker	Oberarm	1850	29,5	13,6	8,1	0,566	20,50	22,79	25,34	—	2,460	0,765
	Unterarm mit Hand	1420	—	16,5	10,0	0,434	7,16	12,71	22,56	10,30		
rechter	Oberarm	1243	25,5	11,37	7.95	0,527	18,05	20,22	22,66	—	2,122	0,894
	Unterarm mit Hand	1117	—	15,99	10,43	0,473	7.56	13,13	22,80	10,68		
linker	Oberarm	1252	27,1	12,31	7.79	0,510	19,56	21,64	23,93	—	2,072	0,902
	Unterarm mit Hand	1205	—	17,02	11,24	0,490	8,34	14,28	24,44	11,55		

Auch aus dieser Tabelle ergibt sich zunächst, dass trotz grosser individueller Verschiedenheiten in den Gewichten die Verhältnisszahlen $\frac{\sigma_1}{\varrho_2}$ und $\frac{\sigma_2}{l_1}$ für beide Individuen nahezu gleiche Werthe besitzen.

Vergleicht man nun aber die in der letzten Tabelle angegebenen Grössen mit den entsprechenden in der vorhergehenden Tabelle, so erkennt man eine ganz überraschende Uebereinstimmung in den Werthen der für die Muskelwirkung allein maassgebenden Verhältnisszahlen $\frac{\sigma_1}{\varrho_2}$ und $\frac{\sigma_2}{l_1}$. Die Unterschiede zwischen beiden sind sogar geringer als die Unterschiede in den Werthen, welche zu derselben Extremität des gleichen Individuums gehören.

Hieraus ergibt sich die wichtige Thatsache, dass die allein im Kniegelenk gegliederte untere Extremität und die allein im Ellbogengelenk gegliederte obere Extremität sich unter den gemachten Voraussetzungen ganz gleich gegenüber den angreifenden Muskelkräften verhalten. Zwei Muskeln, von denen der eine auf die beiden Abschnitte des Beines mit Drehungsmomenten von demselben Verhältniss einwirkt, als der andere auf die beiden Abschnitte des Armes, rufen daher die gleichen Bewegungen an den beiden Extremitäten hervor. Würde man also irgend einen der oben angeführten Muskeln nach der oberen Extremität in der Weise verlegen können, dass das statische Maass seiner Wirkung für die obere Extremität das gleiche ist wie für die untere, so würde auch die kinetische Wirkung die gleiche geblieben sein.

Dass dies nicht von vornherein selbstverständlich ist, geht deutlich aus einem Vergleich mit den Verhältnissen bei anderen am menschlichen Körper vorkommenden zweigliedrigen Systemen

hervor. Nimmt man beispielsweise den Oberschenkel als fixirt an und betrachtet die Wirkung der über das Kniegelenk oder das Fussgelenk, oder über beide hinwegziehenden Muskeln auf das allein im oberen Sprunggelenk gegliederte, aus Unterschenkel und Fuss bestehende zweigliedrige System, so stellen sich ganz andere Verhältnisse heraus. Aus den schon wiederholt zu Rathe gezogenen beiden Tabellen auf S. 433 und S. 456 der Arbeit über die Trägheitsmomente des menschlichen Körpers erhält man nämlich folgende für dieses System geltenden Werthe der Grössen, welche das mechanische Verhalten des Systems charakterisiren.

Tabelle 23.

Körpertheile		G in g	l in cm	r in cm	$\varkappa$ in cm	μ	c in cm	λ in cm	σ in cm	ϱ in cm	$\frac{\sigma_1}{\varrho_2}$	$\frac{\sigma_2}{l_1}$
rechter	Unterschenkel	2680	39,0	16,5	9,8	0,730	22,58	26,07	30,09	—	10,746	0,308
	Fuss	990	—	6,0	6,0	0,270	1,62	4,41	12,00	2,80		
linker	Unterschenkel	2660	39,0	16,0	10,1	0,727	22,28	25,99	30,32	—	10,564	0,318
	Fuss	1000	—	6,0	6,2	0,273	1,64	4,51	12,39	2,87		
rechter	Unterschenkel	2070	37,9	16,13	9,16	0,695	22,77	26,02	29,74	—	9,182	0,312
	Fuss	910	—	6,38	5,91	0,305	1,95	4,80	11,83	3,25		
linker	Unterschenkel	1890	37,1	16,30	9,66	0,675	23,06	26,26	29,91	—	8,217	0,325
	Fuss	910	—	6,95	5,97	0,325	2,26	5,22	12,07	3,64		

Vergleicht man die hier gefundenen Werthe von $\frac{\sigma_1}{\varrho_2}$ und $\frac{\sigma_2}{l_1}$ mit denen, welche sich für die ganze untere Extremität und die obere Extremität ergeben haben, so erkennt man, dass von einer auch nur annähernd stattfindenden Uebereinstimmung keine Rede sein kann. Ein Muskel, welcher auf den Unterschenkel und den Fuss Drehungsmomente ausüben würde von demselben Verhältniss wie ein anderer Muskel an einer der ganzen Extremitäten, würde daher trotz dieser Gleichheit des statischen Maasses doch eine ganz andere kinetische Wirkung hervorbringen wie dieser. Es ist daher die Gleichheit des mechanischen Verhaltens der ganzen oberen und unteren Extremitäten gegenüber auf dieselben einwirkenden Muskelkräften eine sehr bemerkenswerthe Eigenschaft des menschlichen Körpers. Ob sich bei anderen Säugethieren ähnliche Verhältnisse herausstellen, ist von vornherein nicht zu sagen und bedarf noch der eingehenden Untersuchung. —

Die Uebereinstimmung zwischen den mechanischen Verhältnissen an den oberen und unteren Extremitäten ermöglicht es,

die vorliegende Untersuchung an die frühere[1]) anzuschliessen, welche sich mit der Wirkung einiger Muskeln des Oberarms beschäftigte. Denn es muss nun an der unteren Extremität die gleiche Beziehung zwischen den Drehungsmomenten der Muskeln und dem Verhältniss der Anfangsdrehungen in den Gelenken stattfinden, wie an der oberen, so dass auch im vorliegenden Falle das kinetische Maass $\frac{\varphi''}{\psi''}$ für die verschiedenen Muskeln durch den Ausdruck[2])

$$\frac{0{,}894\,\frac{D_f}{D_t} - \cos\psi}{(2{,}095 + \cos\psi) - (0{,}894 + \cos\psi)\,\frac{D_f}{D_t}}$$

dargestellt werden kann. Man ist daher in der Lage, zur Ableitung der jedem einzelnen Muskel zukommenden Werthe desselben die Tabellen auf S. 530 bis 533 und S. 543 bis 545, oder die Curven auf den Tafeln II und III der früheren Arbeit zu benutzen, welche ohne alle Rechnung aus den Werthen des Verhältnisses der Drehungsmomente direkt die zugehörigen Werthe des Verhältnisses der Winkelbeschleunigungen, bezw. der Anfangsdrehungen in den beiden Gelenken, abzulesen gestatten.

Von diesen verschiedenen Hülfsmitteln zur Bestimmung des kinetischen Maasses sollen im Folgenden nur die Curven auf Tafel II jener Arbeit verwendet werden, weil hierdurch die Untersuchung einen hohen Grad von Anschaulichkeit gewinnt. Um die Bedeutung und Verwendbarkeit dieser Curven noch einmal kurz erläutern zu können, findet sich die betreffende Tafel zunächst mit neuen, dem vorliegenden Fall angepassten Bezeichnungen und einer früher nicht vorhandenen Abtönung einzelner Felder als Tafel VII nochmals wiedergegeben. Das Verhältniss der Anfangsdrehungen ist, wie aus dem oben angegebenen Ausdruck ersichtlich wird, eine Function zweier Grössen, nämlich des Gelenkwinkels ψ im Kniegelenk und des Verhältnisses $\frac{D_f}{D_t}$ bezüglich des reciproken Verhältnisses $\frac{D_t}{D_f}$ der beiden von einem Muskel auf den Ober- und Unterschenkel ausgeübten Drehungsmomente. Dementsprechend findet sich in jedem der beiden recht-

1) Abhandlungen der math.-phys. Classe der Königl. Sächs. Gesellsch. d. Wissenschaften, Bd. XXIII, No. VI.

2) a. a. O. Seite 513.

winklig begrenzten Felder, in welche die Tafel zerfällt, ein rechtwinkliges Coordinatennetz eingezeichnet, dessen horizontale Abscissen dem Gelenkwinkel ψ, und dessen vertikale Ordinaten den Werthen eines dieser beiden Verhältnisse proportional sind. Auf dem linken Felde sind die Ordinaten ein Maass für das Verhältniss $\frac{D_f}{D_t}$, auf dem rechten ein solches für das reciproke Verhältniss $\frac{D_t}{D_f}$. Ausserdem finden sich einige horizontale Linien besonders hervorgehoben, welche bestimmten, um je 0,1 von einander verschiedenen Werthen des Verhältnisses $\frac{D_b}{D_t}$, bezüglich des reciproken Verhältnisses $\frac{D_t}{D_b}$ entsprechen, um wenigstens auch einen Ueberblick über die Beziehung dieses Verhältnisses zu dem Verhältniss der Anfangsdrehungen zu geben. Bei den Abscissen entspricht die Länge von 1 Millimeter einem Winkel von 1°, bei den Ordinaten die gleiche Länge dem Werthe 0,01 des Verhältnisses der Drehungsmomente D_f und D_t. Da von der in der Mitte verlaufenden Abscissenaxe aus in jedem der beiden Felder die Ordinaten nach oben und unten sich nur bis zur Länge von 1 Decimeter erstrecken, so können auf dem linken Felde nur Werthe des Verhältnisses $\frac{D_f}{D_t}$ dargestellt werden, welche zwischen -1 und $+1$ liegen, und desgleichen auf dem rechten Felde nur Werthe des reciproken Verhältnisses $\frac{D_t}{D_f}$ zwischen -1 und $+1$. Damit ist aber die Möglichkeit gegeben, alle Werthe dieses Verhältnisses zu berücksichtigen; denn wenn z. B. $\frac{D_f}{D_t}$, vom Vorzeichen abgesehen, grösser als 1 ist, so besitzt das reciproke Verhältniss einen Werth unter 1, und umgekehrt. Man sieht also, dass es stets einen Punkt in einem der beiden Felder geben wird, dessen Coordinaten bestimmten Werthen von ψ und $\frac{D_f}{D_t}$ entsprechen.

Zu jeder Combination eines bestimmten Werthes von ψ und eines solchen von $\frac{D_f}{D_t}$ gehört nun immer ein ganz bestimmter Werth des Verhältnisses $\frac{\varphi''}{\psi''}$ der Winkelbeschleunigungen, bezw. der Anfangsdrehungen im Hüft- und Kniegelenk, den man mit Hülfe der oben angegeben Formel berechnen kann. Umgekehrt zeigt

sich dagegen, dass zu einem bestimmten Werth von $\frac{\varphi''}{\psi''}$ unzählig viel verschiedene Werthcombinationen von ψ und $\frac{D_f}{D_t}$ gehören, oder mit anderen Worten, dass die gleiche Anfangsbewegung bei allen möglichen Stellungen im Kniegelenk hervorgebracht werden kann; natürlich gehört zu jedem neuen Werth von ψ auch ein bestimmter anderer Werth von $\frac{D_f}{D_t}$, den man leicht mit Hülfe der Formel berechnen kann. Denkt man sich nun alle Punkte in den beiden Coordinatensystemen aufgesucht, welche zu ein- und demselben Werth von $\frac{\varphi''}{\psi''}$ gehören, so liegen dieselben im Allgemeinen auf einer Curve, die entweder einem der beiden Felder ausschliesslich angehört oder theilweise in beiden verläuft. In der Tafel finden sich diese Curven eingezeichnet, welche zu allen Werthen des Verhältnisses $\frac{\varphi''}{\psi''}$ gehören, die zwischen -1 und $+1$ liegen und sich successive nur um 0,01 von einander unterscheiden. Nun kommen natürlich auch Werthe dieses Verhältnisses in Betracht, welche, vom Vorzeichen abgesehen, grösser wie 1 sind. Für diese Fälle finden sich dann noch die Curven eingezeichnet, welche zu Werthen des reciproken Verhältnisses $\frac{\psi''}{\varphi''}$ gehören, die zwischen -1 und $+1$ liegen und sich ebenfalls nur successive um 0,01 von einander unterscheiden.

So hat man denn in der ganzen Schaar von Curven innerhalb der beiden Coordinatenfelder ein anschauliches Bild der Abhängigkeit des Verhältnisses $\frac{\varphi''}{\psi''}$ von dem Winkel ψ des Kniegelenks und dem Verhältniss der beiden Drehungsmomente D_f und D_t. Das Verhältniss $\frac{\varphi''}{\psi''}$, welches das kinetische Maass darstellt, kann positiv und negativ ausfallen, und es kann einen Werth besitzen, der vom Vorzeichen abgesehen kleiner, und einen solchen, der grösser wie 1 ist. Um diese verschiedenen Fälle besser auseinander halten und leicht übersehen zu können, finden sich auf den Tafeln VII bis XII die durch Curven begrenzten Unterfelder, in denen nur Curven liegen, die zu positiven Werthen des kinetischen Maasses gehören, blau abgetönt. Ausserdem sind die Felder, in denen der absolute Werth des Verhältnisses grösser wie 1 ist, roth abgetönt worden. Da wo zwei verschieden gefärbte Felder übereinander greifen, findet sich dementsprechend die

Mischfarbe violett. Man kann daher sofort entscheiden, in welchen Grenzen der Werth des Verhältnisses $\frac{\varphi''}{\psi''}$ liegt. In den weiss gelassenen Feldern liegt er zwischen — 1 und 0, in den blauen Feldern zwischen 0 und + 1, in den violetten Feldern ist er grösser als + 1 und im rothen Felde kleiner als — 1. In den Curven, welche ein blaues Feld von einem weissen trennen, besitzt das Verhältniss $\frac{\varphi''}{\psi''}$ den Werth 0, in der Curve, welche das rothe Feld vom violetten trennt, dagegen einen unendlich grossen Werth. In der Begrenzungscurve zwischen dem blauen und violetten Feld hat es den Werth + 1, und in der Curve, welche das rothe Feld vom weissen trennt, den Werth — 1. Bezeichnet man eine Vorwärtsdrehung des Oberschenkels gegen das Becken als Beugung und eine Rückwärtsdrehung desselben als Streckung des Hüftgelenks, so kann man sagen, dass die weisse oder rothe Farbe eines Feldes auf gleichzeitige Beugung im Knie- und Hüftgelenk oder gleichzeitige Streckung in beiden Gelenken hindeutet; die blaue oder violette Farbe ist dagegen ein Zeichen dafür, dass entweder Beugung im Kniegelenk und gleichzeitig Streckung im Hüftgelenk, oder aber Streckung im Kniegelenk und gleichzeitig Beugung im Hüftgelenk stattfindet. Weiss oder blau gibt ausserdem an, dass die Anfangsdrehung im Hüftgelenk kleiner als die im Kniegelenk ist, während roth oder violett darauf hindeutet, dass umgekehrt die Anfangsdrehung im Hüftgelenk grösser als die im Kniegelenk ausfällt.

Wenn man nun für irgend einen Muskel entscheiden will, welche Anfangsbewegung er in einer bestimmten Stellung des Beins bei isolirter Contraction hervorbringt, so muss man sich zunächst den Kniegelenkwinkel und den Werth des Verhältnisses der beiden Drehungsmomente D_f und D_t verschaffen, welche zu der Stellung des Beins gehören. Durch diese beiden Werthe wird dann ein ganz bestimmter Punkt in einem der beiden rechtwinkligen Felder der Tafel VII angegeben. Man braucht nun nur zu entscheiden, welche Curve durch diesen Punkt hindurch geht, bezüglich welche demselben am nächsten liegt. Der zu dieser Curve gehörende Werth des Verhältnisses der beiden Winkelbeschleunigungen φ'' und ψ'' liefert dann direkt den Werth des kinetischen Maasses für die Wirkung des Muskels in der betreffenden Ausgangsstellung.

Ist beispielsweise $\psi = 43^0$ und $\frac{D_f}{D_t} = + 0{,}37$, so liegt der zugehörige Punkt in dem linken farblosen Feld der Tafel, und es ergibt sich für das kinetische Maass, wie man leicht bestätigen wird, der Werth — 0,18. Das negative Vorzeichen deutet hierbei an, dass die beiden Drehungen im Hüft- und Kniegelenk im entgegengesetzten Sinne stattfinden, und der absolute Werth 0,18 sagt aus, dass die Anfangsdrehung im Hüftgelenk nur 18% von der gleichzeitig im entgegengesetzten Sinne stattfindenden Anfangsdrehung im Kniegelenk beträgt. Es kann sich also entweder nur um Beugung im Hüftgelenk und gleichzeitige Beugung im Kniegelenk, oder um Streckung in beiden Gelenken handeln. Welcher der beiden möglichen Fälle eintritt, lässt sich meistens ohne Weiteres aus den anatomischen Verhältnissen des betreffenden Muskels entscheiden. Es ist aber in der früheren Arbeit über die Oberarmmuskeln auch ein allgemein gültiges Kriterium[1]) angegeben worden, um diese Frage auf dem Wege der Rechnung zu beantworten. Da es für die hier untersuchten Muskeln gar nicht nöthig ist, seine Zuflucht zu der Rechnung zu nehmen, so soll das Kriterium an dieser Stelle nicht noch einmal ausführlich angegeben werden.

Ist $\psi = 67^0$ und $\frac{D_f}{D_t} = - 1{,}45$, so liegt der zugehörige Punkt auf dem rechten Coordinatenfeld, weil der absolute Werth des Verhältnisses der Drehungsmomente grösser als 1 ist. Um den Punkt aufzufinden, hat man daher zunächst den reciproken Werth dieses Verhältnisses zu bestimmen; derselbe ergibt sich als $\frac{D_t}{D_f} = - 0{,}69$. Man bestätigt nun leicht, dass dem zugehörigen Punkte des rechten Coordinatenfeldes die Curve mit der Zahl — 0,39 am nächsten liegt. Da der Punkt wiederum in einem weissen Felde liegt, so gibt die Zahl, wie beim ersten Beispiel, das Verhältniss der Anfangsdrehungen im Hüft- und Kniegelenk an; die erstere beträgt also 39% von der letzteren, und es handelt sich dabei wieder entweder um gleichzeitige Beugungen oder um gleichzeitige Streckungen in beiden Gelenken.

Um auch noch ein Beispiel anzuführen, wo der Punkt in einem farbigen Felde erscheint, sei $\psi = 133^0$ und $\frac{D_t}{D_f} = + 1{,}19$.

1) a. a. O. S. 517 und 518.

Man erhält dann zunächst $\frac{D_t}{D_f} = + 0{,}84$ und findet, dass der zugehörige Punkt in dem rechten violetten Felde der Tafel liegt. Die zunächst liegende Curve trägt die Zahl $+ 0{,}67$. Da es sich um eine Curve im violetten Felde handelt, so gibt diese Zahl das Verhältniss der Anfangsdrehungen im Kniegelenk und Hüftgelenk an; es ist also in diesem Falle die Drehung im Kniegelenk die kleinere, und zwar beträgt sie 67% von der gleichzeitigen Drehung im Hüftgelenk. Das positive Vorzeichen deutet dabei an, dass es sich entweder um Beugung im Kniegelenk und gleichzeitige Streckung im Hüftgelenk, oder um Streckung im Kniegelenk und gleichzeitige Beugung im Hüftgelenk handelt.

Diese wenigen Beispiele werden hinreichen, um über die Verwendung der Tafel VII zur Ableitung des kinetischen Maasses eines Muskels für irgend eine Gelenkstellung Aufschluss zu geben. Es könnte scheinen, dass das kinetische Maass eines Oberschenkelmuskels allein von der Stellung im Kniegelenk und nicht auch von der Stellung des Hüftgelenks abhängt, da ja bei der Bestimmung desselben die Grösse des Hüftgelenkwinkels gar nicht in Betracht gezogen wird. Dies ist aber, wie schon aus den früheren allgemeinen Betrachtungen hervorgeht, nur scheinbar der Fall; denn man braucht ja den Wert des Verhältnisses der Drehungsmomente D_f und D_t, und diese hängen im Allgemeinen auch von der Grösse des Hüftgelenkwinkels ab. Eine Ausnahme davon machen nur die Muskeln, welche nicht über das Hüftgelenk, sondern allein über das Kniegelenk hinwegziehen; bei diesen stellt sich denn auch in der That Unabhängigkeit des kinetischen Maasses von der Stellung im Hüftgelenk heraus.

Es ist nun in der angegebenen Weise das kinetische Maass der zur Untersuchung herausgegriffenen Muskeln für die verschiedenen Haltungen des Beins bestimmt worden. Da das Verhältniss der Drehungsmomente D_f und D_t nicht von dem Querschnitt des Muskels, sondern allein von den Armen ihrer Kräftepaare abhängt, so sind der Berechnung dieser Verhältnisse die Tabellen 1 bis 10, welche nur die Werthe dieser Arme enthalten, zu Grunde gelegt worden. Die Punkte, welche den berechneten Werthen des Verhältnisses der Drehungsmomente und dem zugehörigen Werthe des Kniegelenkwinkels ϑ entsprechen, sind für jeden Muskel in eine besondere Tafel eingezeichnet worden. Verbindet man alle

zu ein und demselben Werthe des Hüftgelenkwinkels φ gehörenden Punkte durch eine Curve, wie es in den Tafeln ausgeführt worden ist (vgl. die roth gezeichneten Curven), so hat man in der Schaar dieser Curven nicht nur ein anschauliches Bild für die Abhängigkeit des Verhältnisses der Drehungsmomente D_f und D_t von der Haltung des Beins, sondern man gewinnt dadurch zugleich einen klaren Ueberblick über die kinetiche Wirkung des Muskels. Wenn man z. B. findet, dass diese Curven für den M. rectus femoris zum grösseren Theil in einem weissen Felde und nur zum kleineren Theil in einem blauen Felde der Tafel (vgl. Tafel VIII) verlaufen, so erkennt man daraus schon ohne näheres Eingehen auf die genaueren Verhältnisse, dass der M. rectus in den meisten Haltungen des Beins eine Bewegung hervorbringt, bei welcher im Hüft- und Kniegelenk Drehungen im entgegengesetzten Sinne stattfinden. Da es sich, wie noch genauer dargelegt werden wird, hierbei nur um Streckung des Kniegelenks handeln kann, so wird also der Muskel in den meisten Ausgangshaltungen des Beins bei seiner Contraction mit der Streckung des Kniegelenks gleichzeitig eine Streckung des Hüftgelenks, d. h. also eine Rückwärtsbeugung des Oberschenkels verbinden. Nur bei Ausgangshaltungen des Beines, in welchen der Unterschenkel von vornherein stark gegen den Oberschenkel im Kniegelenk gebeugt ist, wird der M. rectus im Verein mit der Streckung des Kniegelenks eine Beugung des Hüftgelenks hervorbringen. Schon daraus kann man erkennen, dass die gewöhnliche Annahme ganz falsch ist, nach welcher der Muskel das Hüftgelenk nur beugen kann. Da starke Beugestellungen des Kniegelenks selten vorkommen, und das Kniegelenk sich gewöhnlich zwischen der Streckstellung und der rechtwinkligen Beugestellung befinden wird, wenn der Muskel im Leben zur Contraction gelangt, so kann man ihn mit viel grösserem Rechte einen Strecker des Hüftgelenks nennen, trotzdem er auf der Beugeseite desselben vorüberzieht. Natürlich gilt, was nochmals ganz ausdrücklich hervorgehoben werden soll, diese Angabe nur für den Fall, dass beide Gelenke frei beweglich sind. Wäre dagegen das Kniegelenk in einer Beugestellung fixirt, oder befände sich dasselbe in der äussersten Streckstellung, von der aus eine weitere Streckung unmöglich ist, dann kann der M. rectus selbstverständlich das Hüftgelenk nur beugen. Er befindet sich dann aber ganz anderen mechanischen Verhältnissen gegenüber; er wirkt

in diesem Falle nicht mehr als zweigelenkiger, sondern nur noch als eingelenkiger Muskel. Das ist aber für ihn nicht die Regel, sondern eine Ausnahme. „Der als zweigelenkiger Muskel wirkende M. rectus streckt in der Regel das Hüftgelenk, der als eingelenkiger Muskel wirkende M. rectus beugt es“, müsste die Angabe lauten, wenn man die Wirkung dieses Muskels auf das Hüftgelenk mit wenigen Worten charakterisiren wollte.

In den folgenden Abschnitten finden sich nun die Werthe des Verhältnisses der Drehungsmomente D_f und D_t und die daraus abgeleiteten Werthe des kinetischen Maasses für die einzelnen Muskeln angegeben, und auf Grund dieser Angaben die Wirkungsweise derselben ausführlich auseinandergesetzt.

b) Die kinetische Wirkung des M. iliacus.

Da das Drehungsmoment D_t bei allen Stellungen des Beins für den M. iliacus verschwindet, so besitzt das Verhältniss $\frac{D_f}{D_t}$ stets einen unendlich grossen Werth, und das reciproke Verhältniss $\frac{D_t}{D_f}$ den Werth Null. Demnach fallen alle Curven, welche dieses Verhältniss veranschaulichen mit der Abscissenaxe des rechten Coordinatenfeldes der Tafel zusammen, so wie es auf Tafel VII zur Darstellung gekommen ist.

Aus dem Umstand, dass das reciproke Verhältniss der Drehungsmomente gleich Null ist, folgt nun nicht etwa, dass auch das reciproke Verhältniss $\frac{\psi''}{\varphi''}$ der beiden Anfangsdrehungen den Werth Null besitzt, oder mit anderen Worten, dass nur Bewegung im Hüftgelenk stattfindet. Die rechte Abscissenaxe trifft gar nicht mit der Curve zusammen, welche die Zahl o trägt, sondern liegt zum grösseren Theil in einem weissen, zum kleineren im rothen Felde. Demnach findet bei allen Haltungen des Beines Drehung im Kniegelenk statt, und zwar stets in entgegengesetztem Sinne wie die Drehung im Hüftgelenk. Da der M. iliacus als eingelenkiger Muskel bei seiner Lage zum Hüftgelenk dasselbe nur beugen kann, so wird er also gleichzeitig im Kniegelenk auch Beugung hervorrufen, trotzdem er gar nicht über dieses Gelenk hinwegzieht. Natürlich findet diese Kniebeugung nur dann statt, wenn das Kniegelenk vollständig frei beweglich, also nicht etwa arretirt ist. Von diesem Vorgang kann man sich leicht Rechen-

schaft geben, wenn man beachtet, dass der Oberschenkel bei seiner Drehung im Hüftgelenk an seinem unteren Ende den Unterschenkel mit fortzubewegen hat; er übt daher im Kniegelenk einen Druck auf denselben aus, welcher wie jede andere Kraft, die nicht gerade nach seinem Schwerpunkt gerichtet ist, den Unterschenkel nicht nur fortbewegt, sondern auch dreht.

So lange die Abscissenaxe im weissen Felde verläuft, hat das Verhältniss $\frac{\varphi''}{\psi''}$ einen absoluten Werth, der kleiner als 1 ist. Daraus geht aber hervor, dass die Drehung im Kniegelenk sogar von grösserem Umfang ist als die Drehung im Hüftgelenk. Dies findet statt von der äussersten Streckstellung des Kniegelenks an bis zur rechtwinkligen Beugestellung ($\psi = 90°$). In der letzteren besitzt das Drehungsverhältniss den Werth 1, da die Abscissenaxe sich jetzt auf der Grenze zwischen dem weissen und rothen Felde befindet; es haben also hier die beiden Drehungen die gleiche Grösse. Zwischen der rechtwinkligen und der äussersten Beugestellung ist dann die Beugung im Kniegelenk kleiner als die im Hüftgelenk, dem Umstande entsprechend, dass jetzt die Abscissenaxe im rothen Felde verläuft.

Die genaueren Werthe des kinetischen Maasses finden sich in der folgenden Tabelle niedergelegt.

Die Werthe des kinetischen Maasses für den M. iliacus.

Tabelle 24.

Kniegelenkwinkel															
0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°	110°	120°	130°	140°	150°
−0,47	−0,48	−0,49	−0,51	−0,54	−0,58	−0,64	−0,73	−0,84	−1,00	**−0,80**	**−0,62**	**−0,44**	**−0,28**	**−0,15**	**−0,03**

In dieser, wie in den entsprechenden späteren Tabellen sind die Zahlen fett gedruckt worden, wenn sie sich auf den reciproken Werth von $\frac{\varphi''}{\psi''}$, also auf das Verhältniss der Drehung im Kniegelenk zu der Drehung im Hüftgelenk beziehen.

Es ist bemerkenswerth, dass der Werth des kinetischen Maasses für den M. iliacus nicht von der Stellung im Hüftgelenk abhängt, dagegen von der Stellung im Kniegelenk in hohem Maasse beeinflusst wird, trotzdem der Muskel gar nicht über dieses Gelenk hinwegzieht. Aus der Tabelle geht weiterhin hervor, dass die Beugung des Kniegelenks in der Nähe der äussersten Streckstellung desselben ungefähr doppelt so gross ist als die

gleichzeitige Beugung des Hüftgelenks; sie nimmt aber mit höheren Beugegraden in der Ausgangsstellung des Kniegelenks allmählich ab, bis sie in der Nähe der extremen Beugestellung nahezu verschwindet gegen die Drehung im Hüftgelenk.

Fasst man das Resultat dieser Untersuchung kurz zusammen, so kann man sagen:

„Bei freier Beweglichkeit des Hüft- und Kniegelenks ist der M. iliacus sowohl ein Beuger des Hüftgelenks als auch ein Beuger des Kniegelenks."

c) Die kinetische Wirkung der Mm. vastus lateralis, vastus intermedius, vastus medialis und biceps femoris caput breve.

Diese vier Muskeln stimmen in der Art der Wirkung auf die beiden Gelenke insofern überein, als sie in jeder Haltung des Beins Anfangsdrehungen von übereinstimmendem Grössenverhältniss hervorrufen; nur werden natürlich die vom kurzen Kopf des M. biceps femoris bewirkten Gelenkbewegungen gerade in dem entgegengesetzten Drehungssinn vor sich gehen als bei den drei eingelenkigen Köpfen des M. quadriceps femoris. Die Uebereinstimmung in den Werten des kinetischen Maasses für alle vier Muskeln ist dem Umstande zuzuschreiben, dass alle diese Muskeln gleichen Werth des Verhältnisses der beiden Drehungsmomente $D_{,}$ und $D_{,}$ besitzen. Derselbe ist unabhängig von der Ausgangsstellung des Beins gleich — 1; denn die beiden Drehungsmomente sind ja hier stets entgegengesetzt gleich. Es fallen daher auch bei diesen Muskeln die sämmtlichen Curven, welche das Verhältniss der Drehungsmomente veranschaulichen, in eine Linie zusammen, nämlich in die unterste Horizontale eines jeden der beiden rechtwinkligen Felder, wie es auf der Tafel VII im linken Feld zum Ausdruck gebracht ist. Es ist dabei gleichgültig, ob man die Horizontale auf der linken oder rechten Seite der Tafel zu Grunde legt.

Wie man sieht, verläuft diese Linie nur im weissen Felde; daher finden auch hier immer die beiden Gelenkbewegungen in entgegengesetztem Drehungssinne statt, und zwar bewirken die drei eingelenkigen Köpfe des M. quadriceps femoris Streckung, und der kurze Kopf des M. biceps femoris Beugung in beiden Gelenken. Dabei ist die Drehung im Kniegelenk stets von grösserem Umfang als die gleichzeitige Drehung im Hüftgelenk. Der ge-

naue Werth des Verhältnisses der beiden Anfangsdrehungen ist aus folgender Tabelle ersichtlich.

Die Werthe des kinetischen Maasses für die Mm. vastus lateralis, vastus intermedius, vastus medialis und biceps femoris caput breve.

Tabelle 25.

Kniegelenkwinkel															
0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°	110°	120°	130°	140°	150°
−0,38	−0,38	−0,38	−0,37	−0,37	−0,36	−0,35	−0,34	−0,32	−0,30	−0,27	−0,24	−0,20	−0,15	−0,09	−0,02

Es wirken also die eingelenkigen Muskeln des Kniegelenks auch auf das Hüftgelenk, und zwar stets im entgegengesetzten Drehungssinne ein. Dieses Resultat entspricht genau der schon in einer früheren Arbeit aufgedeckten Thatsache, dass die eingelenkigen Muskeln des Ellbogengelenks bei ihrer Contraction auch das Schultergelenk bewegen. In der äussersten Streckstellung des Kniegelenks beträgt nach der Tabelle die Drehung des Hüftgelenks etwas mehr als den dritten Theil der Drehung des Kniegelenks. Dieses Verhältniss der Anfangsdrehungen vermindert sich zunächst nur sehr langsam, wenn man zu stärkeren Beugestellungen im Kniegelenk übergeht. Erst von der rechtwinkligen Beugestellung an nimmt es rasch ab, bis es in der Nähe der extremen Beugestellung nahezu auf den Werth Null gesunken ist; hier würde also dann das Hüftgelenk annähernd in Ruhe bleiben, wenn sich diese Extremstellung im Leben überhaupt erreichen liesse.

Das für die eingelenkigen Muskeln gefundene Resultat kann man etwa in folgender Weise kurz zusammenfassen:

„Bei freier Beweglichkeit des Hüft- und Kniegelenks stellen die Mm. vastus lateralis, vastus intermedius und vastus medialis sowohl Strecker des Kniegelenks, als auch Strecker des Hüftgelenks dar; der M. biceps femoris caput breve ist dagegen Beuger des Kniegelenks und gleichzeitig Beuger des Hüftgelenks."

d) Die kinetische Wirkung des M. rectus femoris.

Bei diesem und den anderen zweigelenkigen Muskeln hat das Verhältniss der beiden Drehungsmomente D_f und D_t nicht für alle Haltungen des Beins den gleichen Werth; dasselbe ändert

sich im Gegentheil sowohl mit der Stellung des Hüftgelenks, als auch mit der Stellung des Kniegelenks. Aus den Werthen von h_f und $h_{,,}$ die in den früheren Tabellen 6 und 5 auf den Seiten 536 und 534 niedergelegt sind, ergeben sich folgende

Werthe des Verhältnisses der beiden Drehungsmomente D_f und D_t für den M. rectus femoris.

Tabelle 26.

Kniegelenkwinkel ϑ	Hüftgelenkwinkel φ — 10°	0°	+ 10°	+ 20°	+ 30°	+ 40°	+ 50°	+ 60°	+ 70°	+ 80°	+ 90°	+ 100°
0°	—0,33	—0,33	—0,24	—0,18	—0,13	—0,11	—0,13	—0,18	—0,27	—0,36	—0,44	—0,53
10°	—0,33	—0,33	—0,24	—0,18	—0,13	—0,11	—0,13	—0,18	—0,27	—0,36	—0,44	—0,53
20°	—0,32	—0,32	—0,23	—0,16	—0,11	—0,09	—0,11	—0,16	—0,25	—0,34	—0,43	—0,52
30°	—0,30	—0,30	—0,21	—0,14	—0,09	—0,07	—0,09	—0,14	—0,23	—0,33	—0,42	—0,51
40°	—0,29	—0,29	—0,19	—0,12	—0,07	—0,05	—0,07	—0,12	—0,21	—0,31	—0,40	—0,50
50°	—0,27	—0,27	—0,17	—0,10	—0,05	—0,02	—0,05	—0,10	—0,20	—0,29	—0,39	—0,49
60°	—0,25	—0,25	—0,15	—0,08	—0,03	0	—0,03	—0,08	—0,18	0,28	—0,38	—0,48
70°	—0,23	—0,23	—0,13	—0,05	0	+0,03	0	—0,05	—0,15	—0,26	—0,36	—0,46
80°	—0,21	—0,21	—0,11	—0,03	+0,03	+0,05	+0,03	—0,03	—0,13	—0,24	—0,34	—0,45
90°	—0,21	—0,21	—0,11	—0,03	+0,03	+0,05	+0,03	—0,03	—0,13	—0,24	—0,34	—0,45
100°	—0,19	—0,19	—0,08	0	+0,05	+0,08	+0,05	0	—0,11	—0,22	—0,32	—0,43
110°	—0,19	—0,19	—0,08	0	+0,05	+0,08	+0,05	0	—0,11	—0,22	—0,32	—0,43
120°	—0,17	—0,17	—0,06	+0,03	+0,08	+0,11	+0,08	+0,03	—0,08	—0,19	—0,31	—0,42
130°	—0,17	—0,17	—0,06	+0,03	+0,08	+0,11	+0,08	+0,03	—0,08	—0,19	—0,31	—0,42
140°	—0,14	—0,14	—0,03	+0,06	+0,11	+0,14	+0,11	+0,06	—0,06	—0,17	—0,29	—0,40
150°	—0,14	—0,14	—0,03	+0,06	+0,11	+0,14	+0,11	+0,06	—0,06	—0,17	—0,29	—0,40

Die Curven, welche in der oben angegebenen Weise für die 12 verschiedenen Werthe des Hüftgelenkwinkels die Abhängigkeit des Verhältnisses $\frac{D_f}{D_t}$ vom Kniegelenkwinkel ϑ veranschaulichen, finden sich auf Tafel VIII roth eingezeichnet. Von denselben fallen dreimal je zwei zusammen, nämlich die, welche zu $\varphi = -10°$ und 0°, ferner zu $\varphi = +20°$ und $+60°$ und endlich zu $\varphi = 30°$ und 50° gehören. Da die Curven sich nicht auf die rechte Seite der Tafel ausdehnen, so ist die letztere fortgelassen worden. Es wurde schon oben hervorgehoben, dass die Curven zum grösseren Theile dem weissen Felde angehören. Die Punkte, an welchen sie die Grenze zwischen dem weissen und blauen Felde durchschneiden, geben die zugehörigen Gelenkstellungen des Kniegelenks an, in denen bei der Contraction des M. rectus femoris nur Drehung im Kniegelenk erfolgt. Es kann sich hierbei nur um Streckung des Kniegelenks handeln, weil der Muskel sich bei einer Beugung desselben ohne gleichzeitige Drehung im Hüftgelenk verlängern müsste. Man liest aus der Tafel ohne Mühe ab, dass dieser Fall isolirter Streckung des Kniegelenks bei den Haltungen des Beins eintritt, welche durch die folgenden zusammen-

gehörenden Werthe des Hüftgelenkwinkels φ und Kniegelenkwinkels ψ charakterisirt sind:

$\varphi =$	-10°	0°	$+10^\circ$	$+20^\circ$	$+30^\circ$	$+40^\circ$	$+50^\circ$	$+60^\circ$	$+70^\circ$	$+80^\circ$	$+90^\circ$	$+100^\circ$
und $\psi =$	100°	100°	95°	$91\frac{1}{2}^\circ$	89°	88°	89°	$91\frac{1}{2}^\circ$	96°	$101\frac{1}{2}^\circ$	$106\frac{1}{2}^\circ$	$112\frac{1}{2}^\circ$

Bei kleineren als den angegebenen, zu bestimmten Werthen von φ gehörenden Werthen von ψ bringt der Muskel Streckung in beiden Gelenken, bei grösseren Werthen von ψ Streckung im Kniegelenk und gleichzeitige Beugung im Hüftgelenk hervor. Beugung im Kniegelenk kommt nicht vor; denn sonst müsste es nach dem Princip der Stetigkeit auch eine Haltung des Beins geben, bei welcher nur Drehung im Hüftgelenk, dagegen keine Drehung im Kniegelenk eintritt, so dass $\frac{\varphi''}{\psi''}$ einen unendlich grossen Werth annimmt. Dies würde an den Curven dadurch zum Ausdruck kommen, dass dieselben die Grenze zwischen einem rothen und einem violetten Feld überschreiten.

Die genaueren Werthe des Verhältnisses der Anfangsdrehungen finden sich in der folgenden Tabelle niedergelegt.

Die Werthe des kinetischen Maasses für den M. rectus femoris.

Tabelle 27.

Kniegelenkwinkel ψ	Hüftgelenkwinkel φ: -10°	0°	$+10^\circ$	$+20^\circ$	$+30^\circ$	$+40^\circ$	$+50^\circ$	$+60^\circ$	$+70^\circ$	$+80^\circ$	$+90^\circ$	$+100^\circ$
0°	−0,35	−0,35	−0,34	−0,34	−0,33	−0,33	−0,33	−0,34	−0,34	−0,35	−0,35	−0,36
10°	−0,35	−0,35	−0,34	−0,33	−0,33	−0,33	−0,33	−0,33	−0,34	−0,35	−0,35	−0,36
20°	−0,34	−0,34	−0,33	−0,32	−0,32	−0,32	−0,32	−0,32	−0,33	−0,34	−0,35	−0,35
30°	−0,33	−0,33	−0,32	−0,31	−0,30	−0,30	−0,30	−0,31	−0,32	−0,33	−0,34	−0,34
40°	−0,31	−0,31	−0,29	−0,28	−0,28	−0,27	−0,28	−0,28	−0,29	−0,31	−0,32	−0,33
50°	−0,28	−0,28	−0,26	−0,25	−0,25	−0,24	−0,25	−0,25	−0,27	−0,28	−0,30	−0,31
60°	−0,25	−0,25	−0,23	−0,21	−0,20	−0,19	−0,20	−0,21	−0,23	−0,25	−0,27	−0,28
70°	−0,20	−0,20	−0,18	−0,16	−0,14	−0,13	−0,14	−0,16	−0,18	−0,21	−0,23	−0,25
80°	−0,15	−0,15	−0,12	−0,09	−0,07	−0,06	−0,07	−0,09	−0,12	−0,15	−0,18	−0,21
90°	−0,08	−0,08	−0,05	−0,01	+0,01	+0,02	+0,01	−0,01	−0,05	−0,09	−0,13	−0,16
100°	0	0	+0,05	+0,09	+0,12	+0,13	+0,12	+0,09	+0,04	−0,01	−0,05	−0,09
110°	+0,09	+0,09	+0,15	+0,20	+0,22	+0,24	+0,22	+0,20	+0,14	+0,08	+0,03	−0,02
120°	+0,21	+0,21	+0,28	+0,33	+0,37	+0,38	+0,37	+0,33	+0,26	+0,20	+0,13	+0,07
130°	+0,33	+0,33	+0,40	+0,46	+0,50	+0,51	+0,50	+0,46	+0,39	+0,32	+0,24	+0,17
140°	+0,47	+0,47	+0,55	+0,62	+0,66	+0,68	+0,66	+0,62	+0,53	+0,45	+0,37	+0,29
150°	+0,60	+0,60	+0,68	+0,75	+0,79	+0,81	+0,79	+0,75	+0,66	+0,58	+0,49	+0,42

Aus der Tabelle ist vor allen Dingen ersichtlich, dass die kinetische Wirkung des M. rectus femoris in viel grösserem Maasse von der Stellung im Kniegelenk als von der im Hüftgelenk beeinflusst wird. In der Nähe der Streckstellung des Kniegelenks macht die Streckung des Hüftgelenks, welche der Muskel bei seiner Contraction im Anfang hervorruft, nahezu unabhängig von der Ausgangsstellung im Hüftgelenk ungefähr den dritten Theil

der Kniestreckung aus. In der extremen Streckstellung selbst ist natürlich eine weitere Streckung nicht möglich; deshalb würden die Zahlen in der ersten, zu $\psi = 0^\circ$ gehörenden Horizontalspalte nur für den Fall gelten, dass das Knie noch etwas mehr gestreckt werden könnte. Das Verhältniss der Anfangsdrehungen wird um so kleiner, je mehr sich die Ausgangsstellung von der Streckstellung des Knies entfernt, bis es bei den oben besonders angeführten Haltungen des Beins, bei denen das Knie nahezu rechtwinklig gebeugt ist, den Werth Null erreicht. Da im Leben der Muskel nur selten in die Lage kommt, in der rechtwinkligen oder noch grösserer Beugestellung des Kniegelenks sich zu contrahiren, so kann man in der schon oben angedeuteten Weise die hauptsächliche Wirkung desselben kurz zusammenfassen:

„Bei freier Beweglichkeit des Hüft- und Kniegelenks ist der M. rectus femoris in der Hauptsache Strecker des Kniegelenks und auch Strecker des Hüftgelenks; in der Nähe der rechtwinkligen Beugestellung des Kniegelenks wirkt er auf das Hüftgelenk gar nicht, und bei noch grösseren Beugestellungen auf dasselbe beugend ein, während das Kniegelenk in sämmtlichen Ausgangsstellungen von ihm gestreckt wird."

e) Die kinetische Wirkung des M. biceps femoris caput logum.

Aus den Tabellen 7 und 5 auf den Seiten 536 und 534 ergeben sich zunächst für diesen Muskel die folgenden

Werthe des Verhältnisses der beiden Drehungsmomente D_f und D_t für den M. biceps femoris caput longum.

Tabelle 28.

Kniegelenkwinkel ψ	Hüftgelenkwinkel φ: −10°	0°	+10°	+20°	+30°	+40°	+50°	+60°	+70°	+80°	+90°	+100
0°	+0,64	+0,92	+1,20	+1,48	+1,68	+1,80	+1,76	+1,68	+1,48	+1,24	+0,96	+0,64
10°	+0,46	+0,71	+0,96	+1,21	+1,39	+1,50	+1,46	+1,39	+1,21	+1,00	+0,75	+0,46
20°	+0,24	+0,45	+0,66	+0,88	+1,03	+1,12	+1,09	+1,03	+0,88	+0,70	+0,48	+0,24
30°	+0,03	+0,20	+0,38	+0,55	+0,68	+0,75	+0,73	+0,68	+0,55	+0,40	+0,23	+0,03
40°	−0,11	+0,04	+0,20	+0,35	+0,46	+0,52	+0,50	+0,46	+0,35	+0,22	+0,07	−0,11
50°	−0,20	−0,06	+0,08	+0,22	+0,31	+0,37	+0,35	+0,31	+0,22	+0,10	−0,04	−0,20
60°	−0,25	−0,13	0	+0,13	+0,22	+0,27	+0,25	+0,22	+0,13	+0,02	−0,11	−0,25
70°	−0,28	−0,16	−0,04	+0,09	+0,18	+0,23	+0,21	+0,18	+0,09	−0,02	−0,14	−0,28
80°	−0,29	−0,17	−0,05	+0,07	+0,16	+0,21	+0,19	+0,16	+0,07	−0,03	−0,16	−0,29
90°	−0,27	−0,14	−0,02	+0,11	+0,20	+0,25	+0,23	+0,20	+0,11	0	−0,13	−0,27
100°	−0,23	−0,09	+0,04	+0,17	+0,26	+0,32	+0,30	+0,26	+0,17	+0,06	−0,08	−0,23
110°	−0,16	−0,02	+0,12	+0,27	+0,37	+0,43	+0,41	+0,37	+0,27	+0,14	0	−0,16
120°	−0,05	+0,12	+0,28	+0,44	+0,56	+0,63	+0,60	+0,56	+0,44	+0,30	+0,14	−0,05
130°	+0,08	+0,26	+0,45	+0,63	+0,76	+0,84	+0,82	+0,76	+0,63	+0,47	+0,29	+0,08
140°	+0,17	+0,37	+0,57	+0,77	+0,91	+1,00	+0,97	+0,91	+0,77	+0,60	+0,40	+0,17
150°	+0,24	+0,45	+0,66	+0,88	+1,03	+1,12	+1,09	+1,03	+0,88	+0,70	+0,48	+0,24

Während bei den bisher untersuchten Muskeln das Verhältniss $\frac{D_f}{D_t}$ durchweg absolute Werthe besass, die kleiner als 1 sind, zeigt dasselbe hier auch grössere absolute Werthe. Da die Tafeln in dem letzteren Falle das reciproke Verhältniss zur Darstellung bringen, so sind in der folgenden Ergänzungstabelle diese reciproken Werthe besonders angeführt.

Einige Werthe des reciproken Verhältnisses $\frac{D_t}{D_f}$.

Tabelle 28′.

Kniegelenkwinkel ψ	Hüftgelenkwinkel φ: -10°	0°	$+10^\circ$	$+20^\circ$	$+30^\circ$	$+40^\circ$	$+50^\circ$	$+60^\circ$	$+70^\circ$	$+80^\circ$	$+90^\circ$	$+100^\circ$
0°	—	—	+ 0,83	+ 0,68	+ 0,60	+ 0,56	+ 0,57	+ 0,60	+ 0,68	+ 0,81	—	—
10°				+ 0,83	+ 0,72	+ 0,67	+ 0,68	+ 0,72	+ 0,83	+ 1,00		
20°					+ 0,97	+ 0,89	+ 0,92	+ 0,97				
150°					+ 0,97	+ 0,89	+ 0,92	+ 0,97				

Die entsprechenden Curven finden sich roth auf Tafel IX eingezeichnet. Wie man sieht, verlaufen dieselben in wesentlich anderer Weise wie beim M. rectus femoris. Sie liegen auf beiden Seiten der Tafel und durchziehen dabei nicht nur weisse und blaue, sondern auch die beiden violetten Felder, mit einem allerdings sehr geringen Theil sogar das rothe Feld.

Um zunächst zu entscheiden, in welchen Stellungen der Muskel allein Bewegung im Kniegelenk auslöst, hat man auf die Punkte zu achten, an denen die Curven die Grenze zwischen einem weissen und einem blauen Feld überschreiten. Dies ist in folgenden Haltungen des Beins der Fall:

$\varphi = +10^\circ$	$+20_0$	$+30^\circ$	$+40^\circ$	$+50^\circ$	$+60^\circ$	$+70^\circ$	$+80^\circ$
$\psi = 4^\circ$	$14\frac{1}{2}^\circ$	19°	23°	$21\frac{1}{2}^\circ$	19°	$14\frac{1}{2}^\circ$	$5\frac{1}{2}^\circ$

und ferner bei

$\varphi = -10^\circ$	0°	$+10^\circ$	$+20^\circ$	$+30^\circ$	$+40^\circ$	$+50^\circ$	$+60^\circ$	$+70^\circ$	$+80^\circ$	$+90^\circ$	$+100^\circ$
$\psi = 101\frac{1}{2}^\circ$	96°	91°	86°	82°	79°	80°	82°	86°	90°	$95\frac{1}{2}^\circ$	$101\frac{1}{2}^\circ$

In den durch diese zusammengehörenden Werthe der beiden Gelenkwinkel charakterisirten Stellungen des Beins wird das Hüftgelenk nicht mit bewegt; der Muskel kann dann in Folge seiner Lage zum Kniegelenk in diesem nur Beugung hervorbringen. Man sieht, dass zu den meisten Hüftgelenkstellungen zwei Haltungen des Knies gehören, in denen dieser Fall eintritt, nämlich einmal in der Nähe der extremen Streckstellung, und dann in

der Nähe der rechtwinkligen Beugestellung des Kniegelenks. Zwischen diesen beiden, zu einem bestimmten Hüftgelenkwinkel gehörenden Stellungen des Kniegelenks bringt der Muskel Beugung im Kniegelenk und gleichzeitig Beugung im Hüftgelenk hervor. Bei Haltungen, welche näher an der extremen Streckstellung oder der extremen Beugestellung des Knies liegen, vereinigt er dagegen Streckung des Hüftgelenks mit Beugung im Kniegelenk.

Ausgenommen hiervon sind nur die Ausgangshaltungen des Beins, bei denen die Curven im rothen Feld verlaufen, oder die Grenze zwischen dem rothen und violetten Feld überschreiten. An dieser Grenze besitzt das Drehungsverhältniss einen unendlich grossen Werth und das reciproke Verhältniss den Werth Null. Es findet dann nur Drehung im Hüftgelenk, dagegen keine Bewegung des Kniegelenks statt; das Hüftgelenk kann in diesem Falle natürlich nur gestreckt werden. Dies ist nach der Tafel der Fall bei $\varphi = +30^\circ$ oder 60° und $\psi = 2^\circ$, ferner bei $\varphi = 40^\circ$ und $\psi = 5^\circ$, und endlich bei $\varphi = 50^\circ$ und $\psi = 4^\circ$. Bei denselben Werthen von φ, aber noch kleineren Werthen von ψ, müsste dagegen das Kniegelenk sogar gestreckt werden, da dann das Drehungsverhältniss einen negativen Werth besitzt (rothes Feld). Es ist sehr fraglich, ob dieser Fall überhaupt eintreten kann, da man sich hier so wie so schon in grösster Nähe der extremen Streckstellung befindet. Man wird daher die kleinen im rothen Felde verlaufenden Curvenstrecken unberücksichtigt lassen können.

Aus der Tafel lässt sich nun weiterhin ableiten, dass Beugung des Kniegelenks, verbunden mit gleich grosser Streckung des Hüftgelenks eintritt bei Ausgangsstellungen, die durch folgende Werthe der beiden Gelenkwinkel charakterisirt sind:

$\varphi = 0^\circ$	$+10^\circ$	$+20^\circ$	$+30^\circ$	$+40^\circ$	$+50^\circ$	$+60^\circ$	$+70^\circ$	$+80^\circ$	$+90^\circ$
$\psi = 147\frac{1}{2}^\circ$	$139\frac{1}{2}^\circ$	$132\frac{1}{2}^\circ$	$128\frac{1}{2}^\circ$	126°	127°	$128\frac{1}{2}^\circ$	$132\frac{1}{2}^\circ$	138°	$146\frac{1}{2}^\circ$

Bei denselben Werthen von φ, aber noch grösseren Werthen von ψ, überwiegt die Streckung im Hüftgelenk, während vor diesen Stellungen stets die Beugung des Kniegelenks umfangreicher war als die gleichzeitige Drehung des Hüftgelenks.

Die genauen Werthe des Drehungsverhältnisses finden sich für die sämmtlichen zur Untersuchung herausgegriffenen Haltungen des Beins in folgender Tabelle angegeben.

Die Werthe des kinetischen Maasses für den M. biceps femoris caput longum.

Tabelle 29.

Kniegelenkwinkel ψ \ Hüftgelenkwinkel φ	-10^0	0^0	$+10^0$	$+20^0$	$+30^0$	$+40^0$	$+50^0$	$+60^0$	$+70^0$	$+80^0$	$+90^0$	$+100^0$
0°	−0,23	−0,13	+0,09	+1,00	**−0,10**	**−0,50**	**−0,40**	**−0,10**	+1,00	+0,14	−0,11	−0,23
10°	−0,26	−0,20	−0,10	+0,12	+0,55	**+0,80**	**+0,95**	+0,55	+0,12	−0,08	−0,19	−0,26
20°	−0,28	−0,24	−0,19	−0,11	−0,02	+0,07	+0,03	−0,02	−0,11	−0,18	−0,24	−0,28
30°	−0,29	−0,26	−0,23	−0,19	−0,15	−0,12	−0,13	−0,15	−0,19	−0,23	−0,26	−0,29
40°	−0,28	−0,26	−0,23	−0,20	−0,17	−0,15	−0,16	−0,17	−0,20	−0,23	−0,26	−0,28
50°	−0,27	−0,25	−0,22	−0,19	−0,16	−0,14	−0,15	−0,16	−0,19	−0,21	−0,24	−0,27
60°	−0,25	−0,22	−0,19	−0,16	−0,13	−0,11	−0,12	−0,13	−0,16	−0,19	−0,22	−0,25
70°	−0,21	−0,18	−0,15	−0,11	−0,08	−0,06	−0,07	−0,08	−0,11	−0,15	−0,18	−0,21
80°	−0,17	−0,13	−0,10	−0,05	−0,01	+0,01	0	−0,01	−0,05	−0,09	−0,13	−0,17
90°	−0,10	−0,06	−0,01	+0,05	+0,09	+0,12	+0,11	+0,09	+0,05	0	−0,05	−0,10
100°	−0,01	+0,05	+0,11	+0,18	+0,23	+0,27	+0,26	+0,23	+0,18	+0,12	+0,05	−0,01
110°	+0,11	+0,19	+0,27	+0,36	+0,43	+0,47	+0,46	+0,43	+0,36	+0,28	+0,20	+0,11
120°	+0,28	+0,39	+0,51	+0,63	+0,73	+0,79	+0,76	+0,73	+0,63	+0,52	+0,41	+0,28
130°	+0,50	+0,63	+0,78	+0,94	**+0,96**	**+0,89**	**+0,91**	**+0,96**	+0,94	+0,79	+0,65	+0,50
140°	+0,70	+0,85	**+0,99**	**+0,85**	**+0,77**	**+0,73**	**+0,74**	**+0,77**	**+0,85**	**+0,97**	+0,88	+0,70
150°	+0,88	**+0,97**	**+0,84**	**+0,73**	**+0,67**	**+0,64**	**+0,65**	**+0,67**	**+0,73**	**+0,81**	**+0,95**	+0,88

Auch hier beziehen sich die fett gedruckten Zahlen auf das reciproke Drehungsverhältniss $\frac{\psi''}{\varphi''}$, d. h. also auf den Fall, dass die Anfangsdrehung im Hüftgelenk grösser ist als die gleichzeitige Anfangsbeugung des Kniegelenks. Ein positives Vorzeichen deutet an, dass das Kniegelenk gebeugt und das Hüftgelenk gestreckt wird, ein negatives Vorzeichen gibt zu erkennen, dass beide Gelenke gebeugt werden.

Aus der Tabelle ist zu ersehen, dass die Wirkung des langen Kopfes des M. biceps femoris durchaus nicht in so geringem Grade von der Stellung des Hüftgelenks beeinflusst wird, wie die Wirkung des M. rectus femoris.

Zusammenfassend kann man die Wirkung des langen Bicepskopfes etwa in folgender Weise schildern:

Bei freier Beweglichkeit des Hüft- und Kniegelenks ist in mittleren, nicht zu starken Beugestellungen des Kniegelenks der M. biceps femoris caput longum Beuger des Kniegelenks und auch Beuger des Hüftgelenks; in der Nähe der extremen Streckstellung und der rechtwinkligen Beugestellung des Kniegelenks wirkt er auf das Hüftgelenk gar nicht, und bei noch grösseren Streckstellungen einerseits und Beugestellungen andererseits auf dasselbe streckend ein, und zwar um so mehr, je näher das Bein

sich an der extremen Streck- oder Beugestellung befindet. Das Kniegelenk wird dagegen in sämmtlichen Ausgangsstellungen des Beins von dem Muskel gebeugt. —

f) Die kinetische Wirkung des M. semimembranosus.

Aus den Tabellen 8 und 5 auf den Seiten 536 und 534 erhält man zunächst die folgenden

Werthe des Verhältnisses der beiden Drehungsmomente D_f und D_t für den M. semimembranosus.

Tabelle 30.

Kniegelenkwinkel ψ	Hüftgelenkwinkel φ: −10°	0°	+10°	+20°	+30°	+40°	+50°	+60°	+70°	+80°	+90°	+100°
0°	+0,24	+0,56	+0,84	+1,04	+1,20	+1,24	+1,20	+1,12	+1,00	+0,84	+0,64	+0,36
10°	+0,24	+0,56	+0,84	+1,04	+1,20	+1,24	+1,20	+1,12	+1,00	+0,84	+0,64	+0,36
20°	+0,03	+0,30	+0,53	+0,70	+0,83	+0,87	+0,83	+0,77	+0,67	+0,53	+0,37	+0,13
30°	−0,06	+0,18	+0,39	+0,55	+0,67	+0,70	+0,67	+0,61	+0,52	+0,39	+0,24	+0,03
40°	−0,14	+0,08	+0,28	+0,42	+0,53	+0,56	+0,53	+0,47	+0,39	+0,28	+0,14	−0,06
50°	−0,21	0	+0,18	+0,31	+0,41	+0,44	+0,41	+0,36	+0,28	+0,18	+0,05	−0,13
60°	−0,24	−0,05	+0,12	+0,24	+0,34	+0,37	+0,34	+0,29	+0,22	+0,12	0	−0,17
70°	−0,24	−0,05	+0,12	+0,24	+0,34	+0,37	+0,34	+0,29	+0,22	+0,12	0	−0,17
80°	−0,23	−0,03	+0,15	+0,28	+0,38	+0,40	+0,38	+0,33	+0,25	+0,15	+0,03	−0,15
90°	−0,18	+0,03	+0,21	+0,34	+0,45	+0,47	+0,45	+0,39	+0,32	+0,21	+0,08	−0,11
100°	−0,14	+0,08	+0,28	+0,42	+0,53	+0,56	+0,53	+0,47	+0,39	+0,28	+0,14	−0,06
110°	−0,06	+0,18	+0,39	+0,55	+0,67	+0,70	+0,67	+0,61	+0,52	+0,39	+0,24	+0,03
120°	+0,07	+0,34	+0,59	+0,76	+0,90	+0,93	+0,90	+0,83	+0,72	+0,59	+0,41	+0,17
130°	+0,24	+0,56	+0,84	+1,04	+1,20	+1,24	+1,20	+1,12	+1,00	+0,84	+0,64	+0,36
140°	+0,55	+0,95	+1,30	+1,55	+1,75	+1,80	+1,75	+1,65	+1,50	+1,30	+1,05	+0,70
150°	+0,94	+1,44	+1,88	+2,19	+2,44	+2,50	+2,44	+2,31	+2,13	+1,88	+1,56	+1,13

Diese Tabelle ist durch die folgende zu ergänzen, welche die Werthe des reciproken Verhältnisses $\frac{D_t}{D_f}$ für alle die Fälle ergibt, in denen das Verhältniss $\frac{D_f}{D_t}$ einen absoluten Werth grösser als 1 besitzt.

Einige Werthe des reciproken Verhältnisses $\frac{D_f}{D_t}$.

Tabelle 30'.

Kniegelenkwinkel ψ	Hüftgelenkwinkel φ: −10°	0°	+10°	+20°	+30°	+40°	+50°	+60°	+70°	+80°	+90°	+100°
0°	—	—	—	+0,96	+0,83	+0,81	+0,83	+0,89	+1,00	—	—	—
10°				+0,96	+0,83	+0,81	+0,83	+0,89	+1,00			
130°				+0,96	+0,83	+0,81	+0,83	+0,89	+1,00			
140°			+0,77	+0,65	+0,57	+0,56	+0,57	+0,61	+0,67	+0,77	+0,95	
150°		+0,69	+0,53	+0,46	+0,41	+0,40	+0,41	+0,43	+0,47	+0,53	+0,64	+0,88

Die Curven, welche die Abhängigkeit dieser Verhältnisse von den beiden Gelenkwinkeln veranschaulichen, finden sich auf Tafel X eingezeichnet. Wie man sieht, ist der Charakter dieser Curven annähernd der gleiche wie beim langen Kopf des M. biceps femoris. Daher wird auch die Wirkung eine ganz ähnliche sein.

Gar keine Drehung des Hüftgelenks stellt sich heraus bei folgenden Ausgangshaltungen des Beins:

φ =	30°	40°	50°	60°
ψ =	13°	14½°	13°	11°

und ferner

φ =	−10°	0°	+10°	+20°	+30°	+40°	+50°	+60°	+70°	+80°	+90°	+100°
ψ =	98°	89½°	82°	76½°	72°	71°	72°	74°	77½°	82°	87°	95°

Wie man sieht, liegen die Beugestellungen des Kniegelenks, in denen nur Beugung des Kniegelenks, aber keine Drehung im Hüftgelenk stattfinden kann, wieder einerseits in der Nähe der Streckstellung und andererseits in der Nähe der rechtwinkligen Beugestellung des Knies. In mittleren, zwischen Streckstellung und rechtwinkliger Beugestellung liegenden Haltungen ruft der M. semimembranosus bei freier Beweglichkeit beider Gelenke Beugung im Kniegelenk und gleichzeitig Beugung im Hüftgelenk hervor. Von grösseren Beugestellungen des Kniegelenks aus wirkt er dagegen streckend auf das Hüftgelenk ein. In der Nähe der rechtwinkligen Beugestellung im Knie tritt jedoch die Streckung des Hüftgelenks noch sehr gegen die Beugung des Kniegelenks zurück. Dagegen überwiegt die erstere gegen die letztere in der Nähe der extremen Beugestellung des Kniegelenks. Gleich gross sind die Anfangsdrehungen in beiden Gelenken bei folgenden Haltungen des Beins

φ =	−10°	0°	+10°	+20°	+30°	+40°	+50°	+60°	+70°	+80°	+90°	+100°
ψ =	140°	133°	127°	122½°	119°	118°	119°	121°	123½°	127°	131°	137°

Die genauen Werthe des Verhältnisses der Anfangsdrehungen in beiden Gelenken gibt folgende Tabelle:

Die Werthe des kinetischen Maasses für den M. semimembranosus.

Tabelle 31.

Kniegelenkwinkel ψ	Hüftgelenkwinkel φ −10°	0°	+10°	+20°	+30°	+40°	+50°	+60°	+70°	+80°	+90°	+100°
0°	−0,30	−0,25	−0,16	−0,07	+0,09	+0,14	+0,09	+0,01	−0,09	−0,16	−0,23	−0,28
10°	−0,29	−0,24	−0,15	−0,05	+0,11	+0,17	+0,11	+0,02	−0,08	−0,15	−0,22	−0,28
20°	−0,31	−0,27	−0,21	−0,18	−0,13	−0,41	−0,13	−0,16	−0,19	−0,21	−0,26	−0,29
30°	−0,30	−0,27	−0,23	−0,19	−0,15	−0,14	−0,15	−0,17	−0,20	−0,23	−0,26	−0,29
40°	−0,29	−0,25	−0,22	−0,18	−0,15	−0,13	−0,15	−0,17	−0,19	−0,22	−0,24	−0,28
50°	−0,27	−0,23	−0,20	−0,16	−0,13	−0,12	−0,13	−0,15	−0,17	−0,20	−0,23	−0,26
60°	−0,25	−0,20	−0,16	−0,12	−0,09	−0,08	−0,09	−0,11	−0,13	−0,16	−0,19	−0,23
70°	−0,21	−0,16	−0,10	−0,06	−0,02	−0,01	−0,02	−0,04	−0,07	−0,10	−0,14	−0,19
80°	−0,15	−0,09	−0,02	+0,04	+0,09	+0,10	+0,09	+0,06	+0,03	−0,02	−0,07	−0,13
90°	−0,07	+0,01	+0,10	+0,17	+0,24	+0,25	+0,24	+0,20	+0,16	+0,10	+0,04	−0,05
100°	+0,02	+0,13	+0,25	+0,34	+0,42	+0,44	+0,42	+0,37	+0,32	+0,25	+0,16	+0,06
110°	+0,16	+0,30	+0,45	+0,57	+0,68	+0,71	+0,68	+0,63	+0,55	+0,45	+0,34	+0,21
120°	+0,36	+0,55	+0,75	+0,91	+0,95	+0,93	+0,95	+0,98	+0,87	+0,75	+0,61	+0,43
130°	+0,62	+0,87	+0,89	+0,76	+0,67	+0,66	+0,67	+0,71	+0,79	+0,89	+0,94	+0,71
140°	+1,00	+0,75	+0,60	+0,53	+0,47	+0,46	+0,47	+0,50	+0,54	+0,60	+0,70	+0,89
150°	+0,71	+0,55	+0,46	+0,41	+0,38	+0,36	+0,38	+0,39	+0,42	+0,46	+0,52	+0,64

Auch hier deuten die fett gedruckten Zahlen darauf hin, dass die Anfangsdrehung des Hüftgelenks grösser ist als die gleichzeitige Anfangsdrehung des Kniegelenks.

Die aus der Tafel X und Tabelle 31 sich ergebenden Resultate kann man wieder etwa in folgender Weise kurz zusammenfassen:

Bei freier Beweglichkeit des Hüft- und Kniegelenks ist in mittleren, nicht zu starken Beugestellungen des Knies der M. semimembranosus Beuger des Kniegelenks und auch Beuger des Hüftgelenks; in der Nähe der extremen Streckstellung und der rechtwinkligen Beugestellung des Kniegelenks wirkt er auf das Hüftgelenk gar nicht, und bei noch grösseren Streckstellungen einerseits und Beugestellungen andererseits auf dasselbe streckend ein, und zwar um so mehr, je näher das Bein sich der extremen Streck- oder Beugestellung des Knies befindet. Das Kniegelenk wird dagegen in allen Ausgangstellungen des Beins von dem Muskel gebeugt. —

g) Die kinetische Wirkung des M. semitendinosus.

Aus den Tabellen 9 und 5 auf den Seiten 537 und 534 berechnet man die folgenden

Werthe des Verhältnisses der beiden Drehungsmomente D_f und D_t für den M. semitendinosus.

Tabelle 32.

Kniegelenkwinkel ψ \ Hüftgelenkwinkel φ	−10°	0	+10°	+20°	+30°	+40°	+50°	+60°	+70°	+80°	+90°	+100°
0°	+0,40	+0,92	+1,36	+1,76	+2,08	+2,20	+2,24	+2,20	+2,00	+1,76	+1,48	+1,12
10°	+0,40	+0,92	+1,36	+1,76	+2,08	+2,20	+2,24	+2,20	+2,00	+1,76	+1,48	+1,12
20°	+0,40	+0,92	+1,36	+1,76	+2,08	+2,20	+2,24	+2,20	+2,00	+1,76	+1,48	+1,12
30°	+0,06	+0,45	+0,79	+1,09	+1,33	+1,42	+1,45	+1,42	+1,27	+1,09	+0,88	+0,61
40°	−0,24	+0,04	+0,28	+0,50	+0,67	+0,74	+0,76	+0,74	+0,63	+0,50	+0,35	+0,15
50°	−0,40	−0,17	+0,02	+0,19	+0,33	+0,38	+0,40	+0,38	+0,29	+0,19	+0,07	−0,09
60°	−0,49	−0,29	−0,13	+0,01	+0,13	+0,18	+0,19	+0,18	+0,10	+0,01	−0,09	−0,22
70°	−0,54	−0,37	−0,22	−0,09	+0,01	+0,05	+0,07	+0,05	−0,01	−0,09	−0,18	−0,30
80°	−0,58	−0,42	−0,29	−0,17	−0,07	−0,04	−0,02	−0,04	−0,10	−0,17	−0,25	−0,36
90°	−0,60	−0,45	−0,33	−0,22	−0,13	−0,09	−0,08	−0,09	−0,15	−0,22	−0,30	−0,40
100°	−0,62	−0,47	−0,35	−0,24	−0,15	−0,12	−0,11	−0,12	−0,18	−0,24	−0,32	−0,42
110°	−0,62	−0,48	−0,37	−0,26	−0,17	−0,14	−0,13	−0,14	−0,19	−0,26	−0,33	−0,43
120°	−0,62	−0,48	−0,36	−0,25	−0,16	−0,13	−0,12	−0,13	−0,18	−0,25	−0,33	−0,42
130°	−0,61	−0,47	−0,34	−0,23	−0,14	−0,11	−0,10	−0,11	−0,17	−0,23	−0,31	−0,41
140°	−0,59	−0,44	−0,31	−0,19	−0,09	−0,06	−0,05	−0,06	−0,12	−0,19	−0,27	−0,38
150°	−0,56	−0,40	−0,26	−0,14	−0,04	0	+0,01	0	−0,06	−0,14	−0,23	−0,34

Hierzu gehört als Ergänzungstabelle für

Einige Werthe des reciproken Verhältnisses $\frac{D_t}{D_f}$.

Tabelle 32'.

	Hüftgelenkwinkel φ	-10^0	0^0	$+10^0$	$+20^0$	$+30^0$	$+40^0$	$+50^0$	$+60^0$	$+70^0$	$+80^0$	$+90^0$	$+100^0$
Kniegelenkwinkel ψ	0^0	—	—	+0,74	+0,57	+0,48	+0,45	+0,45	+0,45	+0,50	+0,57	+0,68	+0,89
	10^0			+0,74	+0,57	+0,48	+0,45	+0,45	+0,45	+0,50	+0,57	+0,68	+0,89
	20^0			+0,74	+0,57	+0,48	+0,45	+0,45	+0,45	+0,50	+0,57	+0,68	+0,89
	30^0				+0,92	+0,75	+0,70	+0,69	+0,70	+0,79	+0,92		

Die zugehörigen Curven finden sich auf Tafel XI verzeichnet. Vergleicht man dieselben mit den Curven für den langen Kopf des M. biceps femoris und den M. semimembranosus, so erkennt man doch recht charakteristische Unterschiede. Einmal durchzieht ein grösserer Theil zu Anfang das rothe Feld, so dass man dieses Verhalten nicht unberücksichtigt lassen kann; ferner durchschneiden die sämmtlichen Curven die Grenze zwischen dem weissen und blauen Felde bei merklich grösseren Werthen von ψ, und endlich dringt keine zuletzt noch einmal in das violette Feld ein.

Die Curven, welche Werthen von φ zwischen $+20^0$ und $+80^0$ entsprechen, überschreiten die Grenze zwischen dem rothen und violetten Feld, was darauf hindeutet, dass es Haltungen gibt, in welchen nur Streckung des Hüftgelenks, dagegen keine Bewegung des Kniegelenks bei der Contraction des M. semitendinosus eintritt. Diese Haltungen sind durch die folgenden Werthe der beiden Gelenkwinkel charakterisirt

$\varphi =$	$+20^0$	$+30^0$	$+40^0$	$+50^0$	$+60^0$	$+70^0$	$+80^0$
$\psi =$	21^0	25^0	27^0	27^0	27^0	24^0	21^0

Bei denselben Stellungen des Hüftgelenks, aber grösseren Streckstellungen im Kniegelenk findet sogar Streckung des Hüftgelenks mit gleichzeitiger Streckung des Kniegelenks statt. Natürlich ist das nur möglich, so lange die äusserste Streckstellung bei der Ausgangshaltung noch nicht erreicht ist; im letzteren Falle wirkt dann der Muskel wie ein eingelenkiger, nur über das Hüftgelenk hinwegziehender. Die angedeutete Streckung des Kniegelenks ist keineswegs so gering, dass sie gegenüber der Streckung des Hüftgelenks nicht in Betracht käme. Im Gegentheil deutet der anfängliche Verlauf der zu $\varphi = +40^0$, $+50^0$ und $+60^0$ gehörenden Curve im weissen Felde darauf hin, dass bei diesen Stellungen im Hüftgelenk und Stellungen im Kniegelenk, für welche ψ kleiner als 20^0, die Streckung des Kniegelenks sogar an Umfang die gleichzeitige Streckung des Hüftgelenks überwiegt.

Der weitere Verlauf dieser und der zu $\varphi = +10^0$, $+90^0$ und $+100^0$ gehörenden Curven im violetten oder blauen Felde ergibt die Thatsache, dass bei den aus der Tabelle abzulesenden Beugegraden des Kniegelenks Streckung des Hüftgelenks und nunmehr gleichzeitige Beugung des Kniegelenks stattfindet. Dabei ändert sich das Verhältniss der Anfangsdrehungen mit zunehmenden Beugegraden im Knie immer mehr zu Gunsten der Beugung des Kniegelenks, bis schliesslich die Drehung im Hüftgelenk ganz verschwindet. Dies ist für die Stellungen des Beins der Fall, welche den Durchschnittspunkten der Grenzcurven des blauen und weissen Feldes entsprechen, nämlich für

$\varphi = +10^0$	$+20^0$	$+30^0$	$+40^0$	$+50^0$	$+60^0$	$+70^0$	$+80^0$	$+90^0$	$+100^0$
$\psi =$ 27^0	32^0	$36\frac{1}{2}^0$	38^0	39^0	38^0	35^0	32^0	29^0	22^0

Von nun an verlaufen alle Curven sehr lange im weissen Felde. Daraus geht hervor, dass bei den in der kleinen Tabelle angegebenen Werthen des Hüftgelenkwinkels, aber grösseren zugehörigen Werthen von ψ der Muskel nunmehr Beugung im Hüftgelenk und gleichzeitige Beugung im Kniegelenk hervorbringt. Die zu $\varphi = -10^0$ und 0^0 gehörenden Curven verlaufen gleich zu Anfang im weissen Felde. Daher wird bei diesen Stellungen des Hüftgelenks von der äussersten Streckstellung des Kniegelenks an Beugung in beiden Gelenken eintreten.

Die Grenze zwischen dem weissen und blauen Felde überschreiten die einzelnen Curven bei

$\varphi = -10^0$	0^0	$+10^0$	$+20^0$	$+30^0$	$+40^0$	$+50^0$	$+60^0$	$+70^0$	$+80^0$	$+90^0$	$+100^0$
$\psi - 123\frac{1}{2}^0$	$115\frac{1}{2}^0$	109^0	103^0	98^0	96^0	95^0	96^0	99^0	103^0	107^0	$112\frac{1}{2}^0$

In allen diesen Haltungen bringt der M. semitendinosus nur Beugung des Kniegelenks, aber keine Bewegung des Hüftgelenks hervor. Bei noch stärkeren Beugestellungen des Kniegelenks wirkt er dagegen auf das Kniegelenk beugend und gleichzeitig auf das Hüftgelenk streckend ein.

Die genauen Werthe des Verhältnisses der Anfangsdrehungen sind in der folgenden Tabelle niedergelegt worden:

Die Werthe des kinetischen Maasses für den M. semitendinosus.

Tabelle 33.

Kniegelenkwinkel ψ	Hüftgelenkwinkel φ −10°	0°	+10°	+20°	+30°	+40°	+50°	+60°	+70°	+80°	+90°	+100°
0°	−0,27	−0,13	+0,39	**−0,40**	**−0,98**	−0,89	−0,89	−0,89	**−0,87**	**−0,40**	**+0,98**	+0,01
10°	−0,27	−0,12	+0,41	**−0,36**	**−0,95**	−0,92	−0,92	−0,92	**−0,85**	**−0,36**	**+0,95**	+0,02
20°	−0,25	−0,09	+0,48	**−0,29**	**−0,85**	**−0,99**	**−0,99**	**−0,99**	**−0,75**	**−0,29**	**+0,90**	+0,07
30°	−0,28	−0,21	−0,10	+0,10	+0,52	+0,91	**+0,96**	+0,91	+0,36	+0,10	−0,06	−0,17
40°	−0,30	−0,26	−0,22	−0,16	−0,10	−0,06	−0,05	−0,06	−0,11	−0,16	−0,20	−0,24
50°	−0,30	−0,26	−0,23	−0,20	−0,16	−0,14	−0,13	−0,14	−0,17	−0,20	−0,22	−0,25
60°	−0,29	−0,25	−0,22	−0,19	−0,16	−0,15	−0,14	−0,15	−0,17	−0,19	−0,21	−0,24
70°	−0,27	−0,23	−0,20	−0,17	−0,14	−0,13	−0,12	−0,13	−0,15	−0,17	−0,19	−0,22
80°	−0,24	−0,20	−0,17	−0,13	−0,10	−0,09	−0,08	−0,09	−0,11	−0,13	−0,16	−0,19
90°	−0,20	−0,16	−0,12	−0,08	−0,05	−0,04	−0,03	−0,04	−0,06	−0,08	−0,11	−0,15
100°	−0,16	−0,11	−0,07	−0,02	+0,02	+0,03	+0,04	+0,03	0	−0,02	−0,05	−0,09
110°	−0,10	−0,06	+0,01	+0,06	+0,10	+0,12	+0,12	+0,12	+0,09	+0,06	+0,02	−0,02
120°	−0,03	+0,04	+0,10	+0,16	+0,22	+0,24	+0,24	+0,24	+0,20	+0,16	+0,12	+0,07
130°	+0,06	+0,14	+0,22	+0,29	+0,35	+0,37	+0,37	+0,37	+0,33	+0,29	+0,24	+0,18
140°	+0,17	+0,27	+0,36	+0,41	+0,51	+0,53	+0,54	+0,53	+0,49	+0,41	+0,38	+0,30
150°	+0,29	+0,41	+0,51	+0,60	+0,67	+0,70	+0,71	+0,70	+0,65	+0,60	+0,53	+0,45

Die fett gedruckten Zahlen gehören wieder zu den Fällen, in denen die Anfangsdrehung des Hüftgelenks grösseren Umfang hat als die gleichzeitige Anfangsdrehung des Kniegelenks.

Fasst man die Resultate der Untersuchung dieses Muskels kurz zusammen, so kann man sagen:

Bei freier Beweglichkeit des Hüft- und Kniegelenks ist der M. semitendinosus in mittleren Beugestellungen des Hüftgelenks und geringen Beugegraden des Kniegelenks zunächst Strecker des Hüftgelenks und gleichzeitig Strecker des Kniegelenks. Bei geringen Beugegraden des Hüftgelenks, sowie in der Nähe der rechtwinkligen Beugestellung desselben und nicht über ca. 30° bis 35° hinausgehenden Beugestellungen des Kniegelenks wirkt er dagegen von vornherein beugend auf das Kniegelenk und streckend auf das Hüftgelenk. In stärkeren Beugegraden des Kniegelenks bis über die rechtwinklige Beugestellung desselben hinaus ist er stets Beuger beider Gelenke; wenn das Hüftgelenk gestreckt oder etwas überstreckt ist, so beugt er sogar beide Gelenke schon von der extremen Streckstellung des Knies an. In der Nähe der extremen Beugestellung des Kniegelenks wird er dagegen wieder Beuger des Kniegelenks und Strecker des Hüftgelenks. —

h) Die kinetische Wirkung des M. gracilis.

Mit Hülfe der Tabellen 10 und 5 auf den Seiten 537 und 534 erhält man zunächst die folgenden

Werthe des Verhältnisses der beiden Drehungsmomente D_f und D_t für den M. gracilis.

Tabelle 34.

	Hüftgelenkwinkel φ											
Kniegelenkwinkel ψ	− 10°	0°	+ 10°	+ 20°	+ 30°	+ 40°	+ 50°	+ 60°	70 +°	+ 80°	+ 90°	+ 100°
0°	−2,44	−1,96	−1,48	−0,96	−0,44	0	+0,40	+0,80	+1,12	+1,36	+1,48	+1,56
10°	−2,44	−1,96	−1,48	−0,96	−0,44	0	+0,40	+0,80	+1,12	+1,36	+1,48	+1,56
20°	−2,44	−1,96	−1,48	−0,96	−0,44	0	+0,40	+0,80	+1,12	+1,36	+1,48	+1,56
30°	−2,44	−1,96	−1,48	−0,96	−0,44	0	+0,40	+0,80	+1,12	+1,36	+1,48	+1,56
40°	−2,44	−1,96	−1,48	−0,96	−0,44	0	+0,40	+0,80	+1,12	+1,36	+1,48	+1,56
50°	−2,03	−1,69	−1,34	−0,97	−0,60	−0,29	0	+0,29	+0,51	+0,69	+0,77	+0,83
60°	−1,82	−1,55	−1,27	−0,98	−0,68	−0,43	−0,20	+0,02	+0,20	+0,34	+0,41	+0,45
70°	−1,68	−1,45	−1,23	−0,98	−0,74	−0,53	−0,34	−0,15	0	+0,11	+0,17	+0,21
80°	−1,59	−1,39	−1,20	−0,98	−0,77	−0,59	−0,43	−0,26	−0,13	−0,03	+0,02	+0,05
90°	−1,53	−1,35	−1,18	−0,99	−0,79	−0,63	−0,49	−0,34	−0,22	−0,13	−0,09	−0,06
100°	−1,49	−1,32	−1,16	−0,99	−0,81	−0,66	−0,53	−0,39	−0,28	−0,20	−0,16	−0,14
110°	−1,46	−1,30	−1,15	−0,99	−0,82	−0,68	−0,56	−0,43	−0,33	−0,25	−0,22	−0,19
120°	−1,44	−1,29	−1,15	−0,99	−0,83	−0,70	−0,57	−0,45	−0,35	−0,28	−0,24	−0,22
130°	−1,43	−1,29	−1,14	−0,99	−0,83	−0,70	−0,58	−0,46	−0,37	−0,30	−0,26	−0,24
140°	−1,43	−1,29	−1,14	−0,99	−0,83	−0,70	−0,58	−0,46	−0,37	−0,30	−0,26	−0,24
150°	−1,44	−1,29	−1,15	−0,99	−0,83	−0,70	−0,57	−0,45	−0,35	−0,28	−0,24	−0,22

Hierzu gehört die folgende Ergänzungstabelle für

Einige Werthe des reciproken Verhältnisses $\frac{D_t}{D_f}$.

Tabelle 34′.

	Hüftgelenkwinkel φ							
Kniegelenkwinkel ψ	− 10°	0°	+ 10°		+ 70°	+ 80°	+ 90°	+ 100°
0°	− 0,41	− 0,51	− 0,68		+ 0,89	+ 0,74	+ 0,68	+ 0,64
10°	− 0,41	− 0,51	− 0,68		+ 0,89	+ 0,74	+ 0,68	+ 0,64
20°	− 0,41	− 0,51	− 0,68		+ 0,89	+ 0,74	+ 0,68	+ 0,64
30°	− 0,41	− 0,51	− 0,68		+ 0,89	+ 0,74	+ 0,68	+ 0,64
40°	− 0,41	− 0,51	− 0,68		+ 0,89	+ 0,74	+ 0,68	+ 0,64
50°	− 0,49	− 0,59	− 0,75					
60°	− 0,55	− 0,65	− 0,79					
70°	− 0,60	− 0,69	− 0,81					
80°	− 0,63	− 0,72	− 0,83					
90°	− 0,65	− 0,74	− 0,85					
100°	− 0,67	− 0,76	− 0,86					
110°	− 0,68	− 0,77	− 0,87					
120°	− 0,69	− 0,78	− 0,87					
130°	− 0,70	− 0,78	− 0,88					
140°	− 0,70	− 0,78	− 0,88					
150°	− 0,69	− 0,78	− 0,87					

Die entsprechenden Curven finden sich auf Tafel XII aufgezeichnet. Dieselben geben zwar den Typus der Curven des M. semitendinosus wieder, unterscheiden sich aber auch in wesentlichen Punkten von diesen.

Zunächst findet man hier Curven, welche von Anfang bis zu Ende im weissen Felde verlaufen, nämlich die zu den Werthen -10°, 0°, $+10^\circ$ und $+20^\circ$ des Hüftgelenkwinkels gehören. Daraus geht hervor, dass in diesen Stellungen des Hüftgelenks der Muskel nur Beugung im Kniegelenk und gleichzeitige Beugung im Hüftgelenk bewirkt, gleichgültig, wie dabei das Knie gestellt ist. Alle anderen Curven gehen zuletzt mit einem Theil in das blaue Feld der linken Tafel über, und zwar ist diese Strecke um so grösser, je mehr das Hüftgelenk vorher gebeugt worden ist. Die Curven durchschneiden dabei die Grenze zwischen dem weissen und blauen Feld bei

$\varphi = +30^\circ$	$+40^\circ$	$+50^\circ$	$+60^\circ$	$+70^\circ$	$+80^\circ$	$+90^\circ$	$+100^\circ$
$\psi = 138^\circ$	129°	121°	113°	106°	101°	98°	96°

In diesen Haltungen, bei denen das Knie durchweg über die rechtwinklige Stellung hinaus gebeugt ist, bringt der Muskel nur Beugung des Kniegelenks, aber keine Bewegung im Hüftgelenk hervor. Bei noch stärkeren Beugegraden streckt er das Hüftgelenk, bei geringeren Beugegraden beugt er es, während er gleichzeitig auf das Kniegelenk stets beugend einwirkt. Die Beugung des Hüftgelenks findet bei $\varphi = +30^\circ$ bis $+60^\circ$ wie bei den Stellungen $\varphi = -10^\circ$ bis $+20^\circ$ schon von der Streckstellung des Knies an statt. Dagegen wirkt der Muskel in den stärkeren Beugegraden des Hüftgelenks, so lange das Kniegelenk noch nicht über 40° bis 50° gebeugt ist, auf das Hüftgelenk streckend ein. In der Nähe der rechtwinkligen Beugestellung des Hüftgelenks ist sogar die Streckung des letzteren grösser als die gleichzeitige Beugung des Kniegelenks. Natürlich muss es nun für $\varphi = +70^\circ$ bis $+100^\circ$ noch einmal Stellungen des Kniegelenks geben, in denen der Muskel keine Wirkung auf das Hüftgelenk ausübt. Dies ist der Fall bei

$\varphi = +70^\circ$	$+80^\circ$	$+90^\circ$	$+100^\circ$
$\psi = 45^\circ$	49°	51°	53°

Bei kleineren Werthen von ψ und denselben Werthen von φ ist der Muskel Beuger des Kniegelenks und Strecker des Hüftgelenks, bei grösseren Werthen von ψ wirkt er auf beide Gelenke beugend ein.

Die genauen Werthe des Verhältnisses der Anfangsdrehungen findet man in folgender Tabelle niedergelegt.

Die Werthe des kinetischen Maasses für den M. gracilis.

Tabelle 35.

Kniegelenkwinkel ψ	Hüftgelenkwinkel φ −10°	0°	+10°	+20°	+30°	+40°	+50°	+60°	+70°	+80°	+90°	+100°
0°	−0,41	−0,40	−0,39	−0,38	−0,35	−0,32	−0,27	−0,18	+0,01	+0,39	**+0,98**	**+0,34**
10°	−0,41	−0,41	−0,39	−0,38	−0,35	−0,32	−0,27	−0,17	+0,02	+0,41	**+0,95**	**+0,35**
20°	−0,42	−0,41	−0,39	−0,37	−0,35	−0,31	−0,25	−0,15	+0,06	+0,48	**+0,90**	**+0,36**
30°	−0,42	−0,41	−0,39	−0,37	−0,34	−0,29	−0,23	−0,10	+0,14	+0,59	**+0,84**	**+0,40**
40°	−0,43	−0,41	−0,39	−0,36	−0,32	−0,27	−0,19	−0,03	+0,24	+0,72	**+0,77**	**+0,42**
50°	−0,42	−0,40	−0,38	−0,36	−0,32	−0,28	−0,24	−0,17	−0,10	−0,01	+0,03	+0,07
60°	−0,41	−0,40	−0,37	−0,35	−0,31	−0,28	−0,24	−0,19	−0,14	−0,09	−0,07	−0,05
70°	−0,41	−0,39	−0,37	−0,33	−0,30	−0,27	−0,23	−0,18	−0,14	−0,11	−0,09	−0,07
80°	−0,40	−0,38	−0,35	−0,32	−0,28	−0,24	−0,20	−0,16	−0,12	−0,09	−0,07	−0,06
90°	−0,39	−0,36	−0,34	−0,30	−0,25	−0,21	−0,17	−0,13	−0,09	−0,06	−0,04	−0,03
100°	−0,39	−0,35	−0,31	−0,27	−0,22	−0,17	−0,13	−0,08	−0,04	0	+0,01	+0,02
110°	−0,38	−0,33	−0,29	−0,24	−0,18	−0,13	−0,08	−0,02	+0,02	+0,06	+0,08	+0,09
120°	−0,37	−0,31	−0,26	−0,19	−0,13	−0,07	−0,01	+0,05	+0,11	+0,15	+0,17	+0,18
130°	−0,35	−0,28	−0,21	−0,14	−0,06	+0,01	+0,08	+0,15	+0,20	+0,25	+0,27	+0,28
140°	−0,34	−0,25	−0,17	−0,08	+0,01	+0,10	+0,17	+0,25	+0,31	+0,36	+0,39	+0,41
150°	−0,33	−0,22	−0,14	−0,01	+0,09	+0,20	+0,28	+0,37	+0,45	+0,50	+0,52	+0,54

Auch hier beziehen sich die fett gedruckten Zahlen in den beiden letzten Verticalreihen auf Werthe des reciproken Drehungsverhältnisses und deuten daher an, dass die Drehung im Hüftgelenk grösser ist als die gleichzeitige Drehung im Kniegelenk.

Das Resultat lässt sich für den M. gracilis in folgender Weise kurz zusammenfassen:

Bei freier Beweglichkeit des Hüft- und Kniegelenks ist der M. gracilis hauptsächlich sowohl Beuger des Kniegelenks, als auch Beuger des Hüftgelenks. Bei Haltungen des Hüftgelenks, welche der rechtwinkligen Beugestellung desselben nahe kommen und gleichzeitigen, nicht zu starken Beugestellungen des Kniegelenks wirkt er dagegen auf das Hüftgelenk streckend ein. Das letztere ist auch der Fall, wenn das Hüftgelenk um mindestens 30° gebeugt ist, und das Kniegelenk sich in der Nähe der äussersten Beugestellung befindet. Das Kniegelenk wird dagegen in allen Haltungen des Beins gebeugt.

VI. Rückblick.

In der vorliegenden Arbeit sind zunächst die Angaben der anatomischen Lehrbücher über die Wirkungsweise eines Muskels bei isolirter Contraction und die üblichen Methoden der Ableitung dieser Resultate einer eingehenden Kritik unterzogen worden. Dabei hat sich herausgestellt, dass diesen Angaben, so weit sie nicht direkt falsch sind, in den meisten Fällen nur sehr bedingte Geltung zugesprochen werden kann. Abgesehen davon, dass dieselben gewöhnlich gar nicht dem Umstande Rechnung tragen, dass die Wirkung eines Muskels je nach den Gelenkstellungen sehr verschieden ausfallen kann, so dass sie sich in der Regel überhaupt nicht mit wenigen Worten charakterisiren lässt, liegen den Angaben Voraussetzungen zu Grunde, welche nur selten mit ausreichender Genauigkeit bei der Contraction eines Muskels erfüllt sind.

So theilt man bei eingelenkigen Muskeln nur die Wirkung mit, welche ein Muskel hervorbringt, wenn eine der beiden Insertionsstellen, bezüglich der dieselbe tragende Körpertheil, nicht mit an der Bewegung theilnimmt. Im Leben sucht dagegen ein Muskel stets beide Körpertheile, an denen er inserirt, zu drehen, und nur in einigen Fällen, wie bei den Augenmuskeln, den vom Rumpf nach dem Kopf und den Extremitäten herüberziehenden Muskeln u. a., ist die Bewegung des den Ursprung tragenden Körperabschnittes so gering, dass man sie in erster Annäherung vernachlässigen darf. Bei den mehrgelenkigen Muskeln setzt man ausserdem gewöhnlich voraus, dass immer nur ein einziges von den Gelenken, über welche der Muskel sich ausspannt, frei beweglich ist. Hierdurch schafft man Verhältnisse, welche die für einen mehrgelenkigen Muskel charakteristische Function ganz unterdrücken, indem man den mehrgelenkigen Muskel auf das Niveau eines eingelenkigen herabsetzt. Ein mehrgelenkiger Muskel bewegt aber in der Regel alle Gelenke, die er überspannt, und

die Bewegungen, welche er bei Freiheit aller Gelenke verursacht, sind gewöhnlich von anderer Art als die, welche er hervorbringt, wenn er nur wie ein eingelenkiger wirken kann. Es ist bei dieser Enthaltsamkeit in den Mittheilungen auch nicht zu verwundern, dass man nirgends Angaben findet über die Wirkung eines Muskels auf Gelenke, welche nicht zwischen seinen Insertionsstellen eingeschaltet sind. Man sieht es eben als selbstverständlich an, dass ein Muskel immer nur auf solche Gelenke einwirken kann, über welche er thatsächlich hinwegzieht. Und doch dreht er im Allgemeinen auch Gelenke, welche scheinbar ganz ausserhalb seines Wirkungsbereiches liegen. Endlich findet man in den Angaben der Lehrbücher nirgends den Einfluss in Rücksicht gezogen, welchen die Massen der einzelnen Körpertheile und die Massenvertheilung innerhalb eines jeden durch Vermittelung des Gelenkzusammenhanges auf die Wirkungsweise der Muskeln ausüben, obgleich gerade diese Faktoren in hohem Grade bestimmend für die bei der isolirten Contraction eines Muskels eintretenden Bewegungen sind.

Es hat sich daher das Resultat ergeben, dass die Angaben der Lehrbücher nur für eingelenkige Muskeln Geltung haben können, und auch hier nur unter der Voraussetzung, dass der den einen Insertionspunkt tragende Körpertheil fixirt ist. Die eigentliche Function der mehrgelenkigen Muskeln lassen sie dagegen nicht erkennen, sondern nur die besondere Wirkungsweise derselben für den ganz speciellen Fall, dass alle Gelenke bis auf eins festgestellt, und die Muskeln daher nur noch als eingelenkige aufzufassen sind. Der Grund für diese Thatsache ist darin zu suchen, dass man mit durchaus unzulänglichen Methoden an die Lösung des Problems der Wirkung eines Muskels bei isolirter Contraction und Freiheit aller Gelenke herangegangen ist. Auch die schönen, zuerst von Duchenne angestellten Versuche, durch locale Faradisation der verschiedenen Muskeln ihre Function zu bestimmen, können keine genügende Antwort auf diese Frage geben, da bei denselben die einzelnen Körpertheile nicht allein der Krafteinwirkung des zu untersuchenden Muskels, sondern gleichzeitig der Einwirkung der Schwere und der rein elastischen Spannungen passiv gedehnter Muskeln unterliegen. Es ist im Gegentheil die Kenntniss der Wirkung der verschiedenen Muskeln infolge isolirter Contraction derselben eine nothwendige Voraus-

setzung, ohne welche ein klares Verständniss der bei den DUCHENNE'-schen Versuchen eintretenden Bewegungsvorgänge gar nicht gewonnen werden kann.

Die einzige exakte Methode für die Bestimmung der Wirkungsweise eines Muskels bei isolirter Contraction aus der Ruhe kann nur darin bestehen, dass man sich durch möglichst genaue Messungen an geeigneten Präparaten zunächst Aufschluss über die mechanischen Verhältnisse verschafft, unter denen der Muskel bei seiner Contraction zur Wirkung gelangt. Hat man die genügenden Unterlagen gewonnen, so ist es dann ein rein mechanisches, allerdings nicht immer ganz einfaches Problem, festzustellen, welche Bewegungen nothwendiger Weise eintreten müssen, wenn der Muskel sich contrahirt, und ausser ihm keine anderen Kräfte auf die in Bewegung zu setzenden Körpertheile einwirken.

Die Messungen sind in zweierlei Richtungen anzustellen. Einmal haben sie sich mit den Eigenschaften des Muskels selbst, insbesondere mit den Dimensionen, den Insertionsstellen und der anatomischen Lagerung desselben zu beschäftigen. Und dann haben sie die mechanischen Eigenschaften der in Bewegung zu setzenden Körpertheile, insbesondere die Massen, Schwerpunktslagen und Massenvertheilung innerhalb derselben festzustellen.

Jeder Muskel wirkt auf die Körpertheile, die er unmittelbar beeinflusst, mit Kräftepaaren ein. Es sind daher aus den Daten der direkten Messungen vor allen Dingen diese Kräftepaare abzuleiten und die Axenmomente derselben zu bestimmen. Die letzteren stellen dann die Drehungsmomente dar, welche der Muskel auf die verschiedenen Körpertheile ausübt. Diese Drehungsmomente geben jedoch allein noch kein Maass für die Drehungen ab, welche bei der isolirten Contraction des Muskels eintreten; dieselben lassen dagegen in vollkommen ausreichender Weise erkennen, welche Kräfte vom Muskel herrühren, sobald ein Körpertheil unter der gleichzeitigen Einwirkung mehrerer Kräfte steht, die sich gegenseitig das Gleichgewicht halten, und daher zusammen keinen Einfluss auf den Bewegungszustand ausüben. Die Drehungsmomente stellen daher in ihrer Gesammtheit nur ein statisches Maass für die Wirkung eines Muskels dar.

Dagegen hängt das Maass der eintretenden Gelenkbewegungen, welches man als das kinetische Maass für die Wirkung des

Muskels bezeichnen kann, ausser von den Drehungsmomenten noch von Grössen ab, welche mit den Massen und der Massenvertheilung innerhalb der einzelnen Körpertheile zusammenhängen. Die Anzahl dieser Grössen ist um so beträchtlicher, je grösser die Anzahl der Körpertheile ist, welche durch den Muskel in Bewegung gesetzt werden, und je grössere Freiheit die dieselben verbindenden Gelenke in ihrer Bewegung besitzen. Für ein zweigliedriges System, welches gegen einen nahezu festbleibenden dritten Körpertheil nur Bewegungen um eine Axe ausführt, und bei dem die beiden Glieder durch ein Charnirgelenk mit paralleler Axe verbunden sind, genügen zwei Grössen zur Charakterisirung des Einflusses der Massen und Massenverteilung auf die Bewegung. Diese Constanten stellen sich als Verhältnisse je zweier Längen dar. Versteht man unter l_1 die Länge des um die feste Axe drehbaren Gliedes, unter σ_1 die Länge des mathematischen Pendels, welches gleiche Schwingungsdauer mit diesem Glied besitzt, wenn man in der Axe des beide Glieder verbindenden Gelenkes die Masse des anderen Gliedes concentrirt und dem ersten hinzugefügt denkt, ferner unter ϱ_2 den Abstand des Richtpunktes[1]) des zweiten Gliedes vom Mittelpunkt des Zwischengelenks, und endlich unter σ_2 die Länge des mathematischen Pendels, welches mit dem zweiten Gliede gleiche Schwingungsdauer besitzt, so sind die beiden für die Bewegung maassgebenden Constanten durch die Verhältnisszahlen $\frac{\sigma_1}{\varrho_2}$ und $\frac{\sigma_2}{l_1}$ dargestellt.

Die Muskeln des Oberarms, deren resultirende Zugrichtung zur Axe des Ellbogengelenks senkrecht gerichtet ist, suchen nahezu nur Drehungen im Schultergelenk hervorzubringen, welche um eine zur Ellbogenaxe parallele Axe stattfinden. Desgleichen drehen die Muskeln des Oberschenkels, deren resultirende Zugrichtung zur Knieaxe senkrecht gerichtet ist, das Hüftgelenk nahezu nur um eine zur Knieaxe parallele Axe. Da bei der Contraction solcher Muskeln der Rumpf in Folge seiner grossen Masse wenigstens annähernd in Ruhe bleibt, so kann man für die Untersuchung ihrer Wirkung den allein im Ellbogengelenk gegliederten Arm

1) Unter dem Richtpunkt des zweiten Gliedes versteht man denjenigen festen Punkt der Längsaxe desselben, welcher bei allen Stellungen des Systems mit dem Gesammtschwerpunkt und dem Mittelpunkt des Gelenks mit fester Axe in einer geraden Linie liegt.

einerseits und das allein im Kniegelenk gegliederte Bein andererseits als ein derartiges zweigliedriges System auffassen, welches sich um eine nahezu feste Axe des Schultergelenks bezüglich Hüftgelenks dreht. Natürlich muss man dabei die Hand zum Unterarm im einen Falle, und den Fuss zum Unterschenkel im anderen Falle in einer mittleren Lage festgestellt annehmen. Verschafft man sich nun für diese beiden Systeme die Werthe der beiden Constanten $\frac{\sigma_1}{\varrho_2}$ und $\frac{\sigma_2}{l_1}$, so stellt sich das überraschende Resultat heraus, dass dieselben übereinstimmen; denn die Unterschiede zwischen ihnen bewegen sich in denselben engen Grenzen wie die Unterschiede in den Werthen der Constanten derselben Extremität bei verschiedenen Individuen. Es ist also der Einfluss der Massenvertheilung auf die kinetische Wirkung eines Muskels bei beiden Extremitätenarten der gleiche. Ein Muskel, welcher mit denselben Drehungsmomenten auf Ober- und Unterarm einwirkt, wie ein anderer auf Ober- und Unterschenkel, wird die obere Extremität in genau derselben Weise bewegen als die untere, trotzdem die Dimensionen und auch die Gestalt und Massenvertheilung am Arm und am Bein doch in nicht unwesentlichen Punkten verschieden sind. Dass diese Uebereinstimmung nicht etwa selbstverständlich, sondern eine bemerkenswerthe Eigenschaft der ganzen Extremitäten darstellt, geht daraus hervor, dass an dem aus dem Unterschenkel und Fuss zusammengesetzten zweigliedrigen System die beiden Constanten ganz andere Werthe besitzen.

Bei der Beurtheilung der kinetischen Wirkung eines Muskels kommt es weniger auf die absoluten Grössen der in den verschiedenen Gelenken stattfindenden Drehungen, als auf deren Verhältniss an. Die ersteren lassen sich überhaupt nicht bestimmen, wenn man nicht die Spannung des Muskels kennt; das letztere ist dagegen von der Spannung des Muskels ganz unabhängig. Es stellt daher das Verhältniss der im Schulter- und Ellbogengelenk, bezüglich im Hüft- und Kniegelenk stattfindenden Drehungen das angebbare kinetische Maass für die Wirkung der angedeuteten Muskeln dar. Dabei dürfen für jede Ruhehaltung der Extremität, von welcher aus der Muskel sich contrahirt, genau genommen nur sehr kleine Anfangsdrehungen in Betracht gezogen werden, weil mit merklicher Aenderung der Gelenkstellung im Allgemeinen auch Aenderung des Verhältnisses der Gelenkdrehungen einher-

geht. Das Verhältniss der kleinen Anfangsdrehungen hängt nun, wie in der Arbeit gezeigt wird, in relativ einfacher Weise von dem Verhältniss der Drehungsmomente, mit denen der Muskel auf die beiden Abschnitte einwirkt, dem Gelenkwinkel im Zwischengelenk und den beiden Constanten, welche den Einfluss der Massenvertheilung messen, ab. Der Ausdruck, welcher diese Abhängigkeit formulirt, stellt das kinetische Maass für die Wirkung der Muskeln dar, dessen Werth sich im gegebenen Falle leicht berechnen lässt.

Zwischen dem statischen und dem kinetischen Maass der Wirkung eines Muskels besteht insofern ein wesentlicher Unterschied, als das erste von den Bedingungen der Bewegung und von speciellen Voraussetzungen über die Beweglichkeit in den Gelenken ganz unabhängig ist, während das letztere sich sofort ändert, wenn einige Gelenke festgestellt sind, oder ein bestimmter Körpertheil gehindert ist, an der Bewegung theilzunehmen. So gelten die in der Arbeit mitgetheilten Werthe des statischen Maasses bestimmter Muskeln ganz allgemein, die Werthe des kinetischen Maasses dagegen nur unter den gemachten Annahmen über die Beweglichkeit in den Gelenken der unteren Extremität; die letzteren verlieren also z. B. sofort ihre Gültigkeit, wenn der Fuss auf dem Boden aufgesetzt ist.

Es ist nun für die Muskeln des Oberschenkels, welche den getroffenen Voraussetzungen sehr annähernd entsprechen, sowohl das statische als auch das kinetische Maass ihrer Wirkung bei den verschiedenen Haltungen des ganzen Beins bestimmt worden. Die Untersuchung hat sich auf die eingelenkigen Mm. iliacus, vastus lateralis, vastus intermedius, vastus medialis, biceps femoris caput breve und die zweigelenkigen Mm. rectus femoris, biceps femoris caput longum, semimembranosus, semitendinosus und gracilis erstreckt.

Zur Ableitung des statischen Maasses sind für eine genügende Anzahl von Haltungen des Beins die Arme der Kräftepaare an einem geeigneten Präparat gemessen, und aus ihnen die Werthe der Drehungsmomente, mit denen die einzelnen Muskeln auf die verschiedenenen Körpertheile einwirken, berechnet worden. Die Resultate dieser Untersuchung finden sich in den Tabellen 11 bis 20 niedergelegt. Um in anschaulicher Weise einen Vergleich zwischen der statischen Wirkung der verschiedenen Muskeln an-

stellen zu können, finden sich auf den Tafeln I bis VI die zugehörigen Momentflächen aufgezeichnet, welche die Abhängigkeit der einzelnen Drehungsmomente von der durch die beiden Gelenkwinkel eindeutig definirten Haltung des Beins zur Darstellung bringen. Die angegebenen Werthe der Drehungsmomente beziehen sich bei allen Muskeln auf eine Spannung von 1 Kilogramm pro Quadratcentimeter des physiologischen Querschnittes und sind in Centimeterkilogramm ausgedrückt. Die Ordinaten der Momentflächen sind in einem derartigen Maassstab gezeichnet, dass die Anzahl ihrer Millimeter direkt die Anzahl der Centimeterkilogramm des betreffenden Drehungsmomentes angibt.

Für die Ableitung des kinetischen Maasses ist unter Vermeidung aller Rechnung eine sehr anschauliche Methode verwendet worden. Auf Tafel VII findet sich in einem rechtwinkligen Coordinatensystem, dessen Abscissen den Werthen des Kniegelenkwinkels ψ, und dessen Ordinaten den Werthen des Verhältnisses der beiden von einem Muskel auf den Oberschenkel und den Unterschenkel ausgeübten Drehungsmomente D_f und D_t proportional sind, eine Schaar von schwarzen Curven aufgezeichnet. Diese Curven geben in ihrer Gesammtheit eine graphische Darstellung der Abhängigkeit des Verhältnisses der Anfangsdrehungen im Hüft- und Kniegelenk von dem Kniegelenkwinkel ψ einerseits und dem Verhältniss der Drehungsmomente D_f und D_t andererseits. Zeichnet man in dieses Coordinatensystem für jeden Muskel eine zweite Schaar von rothen Curven ein, welche als graphische Darstellung der für den betreffenden Muskel geltenden Abhängigkeit des Verhältnisses der beiden Drehungsmomente D_f und D_t von den beiden Winkeln φ und ψ des Hüft- und Kniegelenks aufgefasst werden kann, so lassen sich aus der Lage der rothen Curven zu den schwarzen ohne Mühe die Werthe des Verhältnisses der Anfangsdrehungen oder, mit anderen Worten, des kinetischen Maasses ablesen. Dies ist nach den ausführlichen Auseinandersetzungen in der Arbeit leicht zu verstehen.

Die auf diese Weise mit Hülfe der Tafeln VII bis XII abgeleiteten Werthe des kinetischen Maasses für die Wirkung der verschiedenen Muskeln finden sich in Tabellen niedergelegt. Die Tafeln VII bis XII gewähren aber auch ohne Eingehen auf die genaueren Werthe des kinetischen Maasses in sehr anschaulicher Weise einen Ueberblick über die hauptsächlichste kinetische Wirkung

der einzelnen Muskeln. Man erkennt auf den ersten Blick, dass die zweigelenkigen Muskeln zwischen der rechtwinkligen und der extremen Beugestellung des Kniegelenks, und einige auch in der Nähe der Streckstellung desselben, gewöhnlich die entgegengesetzte Bewegung des Hüftgelenks hervorbringen als in mittleren Beugegraden des Kniegelenks, während sie im Kniegelenk in der Regel bei allen Haltungen des Beins Bewegung von derselben Art hervorrufen.

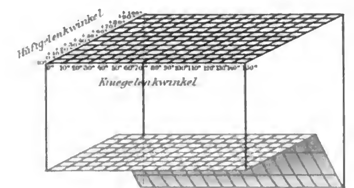
Im Leben werden Haltungen des Knies, welche sich zwischen der rechtwinkligen und der extremen Beugestellung desselben befinden, nur selten eingenommen; man findet das Knie meist zwischen der extremen Streckstellung und der rechtwinkligen Beugestellung vor. Beachtet man dies, so kann man weiterhin sagen, dass die sämmtlichen der Untersuchung unterworfenen Muskeln des Oberschenkels in der Hauptsache auf das Hüft- und Kniegelenk gleichzeitig in entgegengesetztem Sinne drehend einwirken.

Der M. iliacus, welcher allein über das Hüftgelenk hinwegzieht, beugt nicht nur das Hüftgelenk, sondern auch gleichzeitig das Kniegelenk. Die drei eingelenkigen Köpfe des M. quadriceps femoris strecken beide Gelenke, trotzdem sie nur über das Kniegelenk hinwegziehen, und der kurze Kopf des M. biceps femoris beugt sie beide.

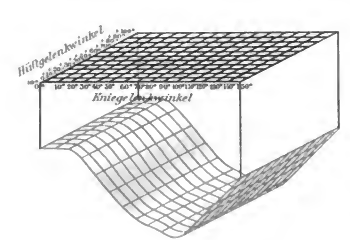
Von den zweigelenkigen Muskeln streckt der M. rectus femoris nicht allein das Kniegelenk, sondern in den am häufigsten im Leben vorkommenden Stellungen auch das Hüftgelenk, trotzdem er auf der Beugeseite über das letztere hinwegzieht. In entsprechender Weise sind der lange Kopf des M. biceps femoris und die drei Mm. semimembranosus, semitendinosus und gracilis in der Hauptsache Beuger des Kniegelenks und gleichzeitig Beuger des Hüftgelenks, trotzdem sie mit Ausnahme des M. gracilis, welcher aber auch nur in der Nähe der Streckstellung des Hüftgelenks ein abweichendes Verhalten zeigt, sämmtlich auf der Streckseite über das Hüftgelenk hinwegziehen.

Natürlich gelten diese Resultate nur unter der Bedingung, dass bei der Contraction der Muskeln beide Gelenke frei beweglich sind, und keine anderen Kräfte gleichzeitig auf das Bein einwirken.

Das statische Maaſs für die Wirkung eingelenkiger Muskeln des Oberschenkels.



Fläche des Drehungsmomentes D_f, welches der **M. iliacus** auf den Oberschenkel ausübt.



Fläche des Drehungsmomentes D_f, welches der **M. biceps femoris caput breve** auf den Oberschenkel ausübt.

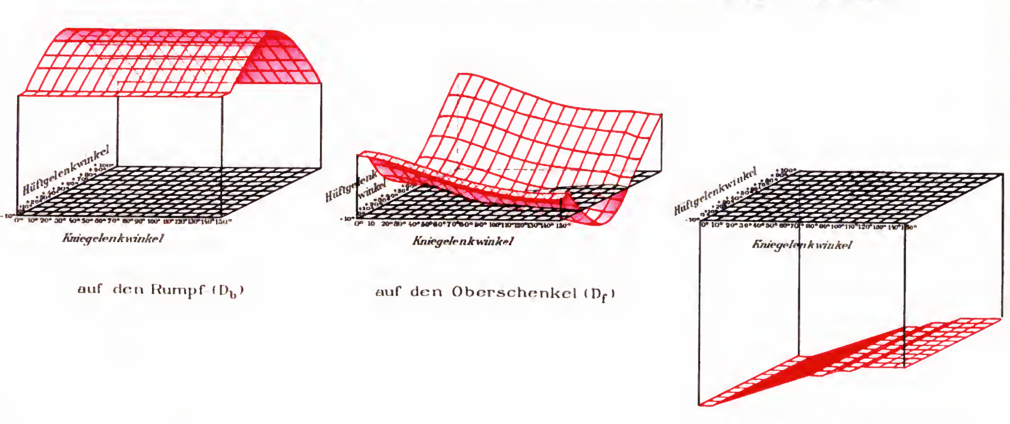
Hüftgelenkwinkel

Kniegelenkwinkel

Fläche des Drehungsmomentes D_f, welches die **Mm. vastus lateralis, vastus intermedius** und **vastus medialis** zusammen auf den Oberschenkel ausüben.

Lith. Anst. v. E. A.

Flächen der Drehungsmomente, welche der M. rectus femoris ausübt:



auf den Rumpf (D_b)

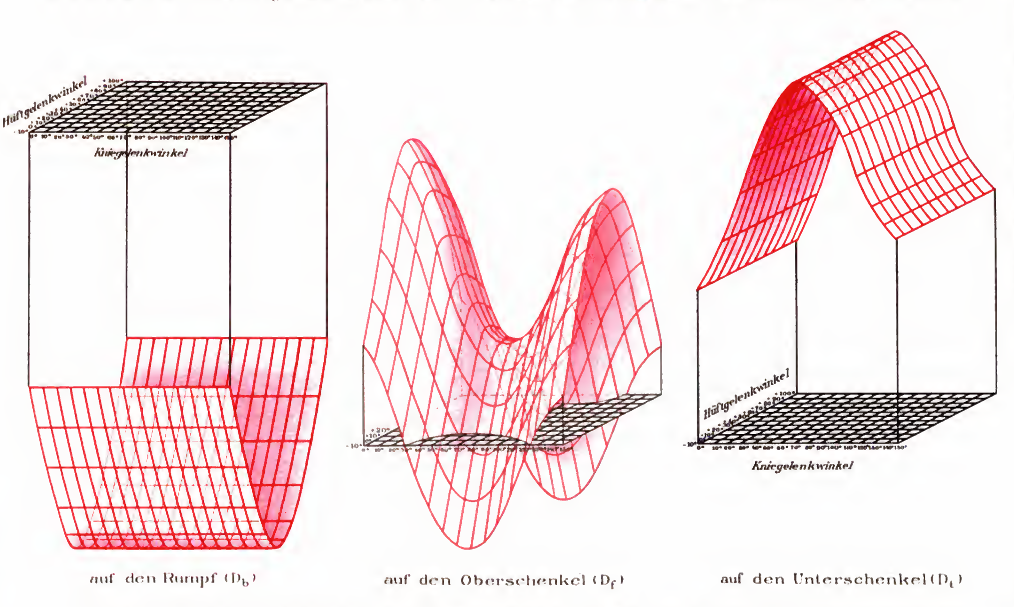
auf den Oberschenkel (D_f)

auf den Unterschenkel (D_t)

Das statische Maafs für die Wirkung des M. rectus femoris.

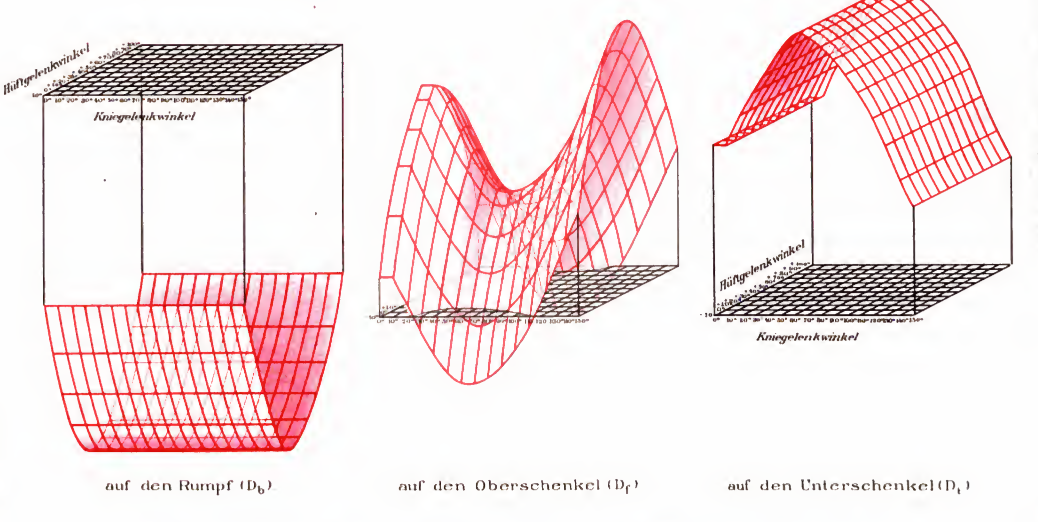
Lith. Anst. v. E. A. Funke, Leipzig

Flächen der Drehungsmomente, welche der M. biceps femoris caput longum ausübt:



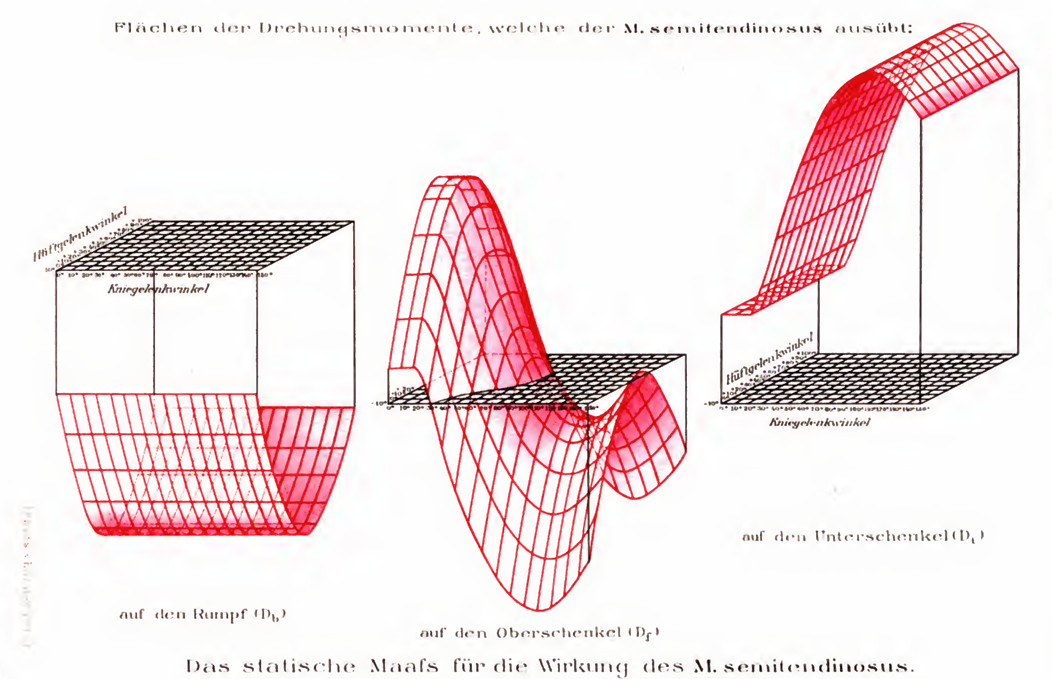
Das statische Maafs für die Wirkung des M. biceps femoris caput longum.

Flächen der Drehungsmomente, welche der M. semimembranosus ausübt:



Das statische Maafs für die Wirkung des M. semimembranosus.

Flächen der Drehungsmomente, welche der M. semitendinosus ausübt:



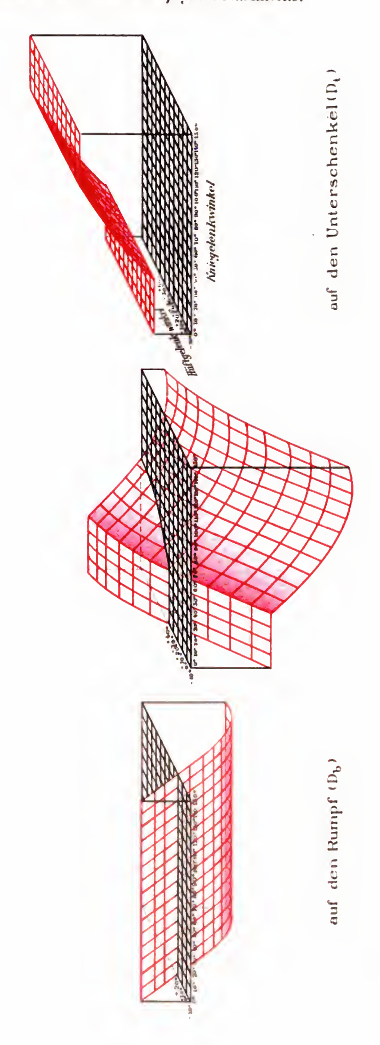
auf den Rumpf (D_b)

auf den Oberschenkel (D_f)

auf den Unterschenkel (D_t)

Das statische Maafs für die Wirkung des M. semitendinosus.

Flächen der Drehungsmomente, welche der M. gracilis ausübt:



auf den Rumpf (D_r)

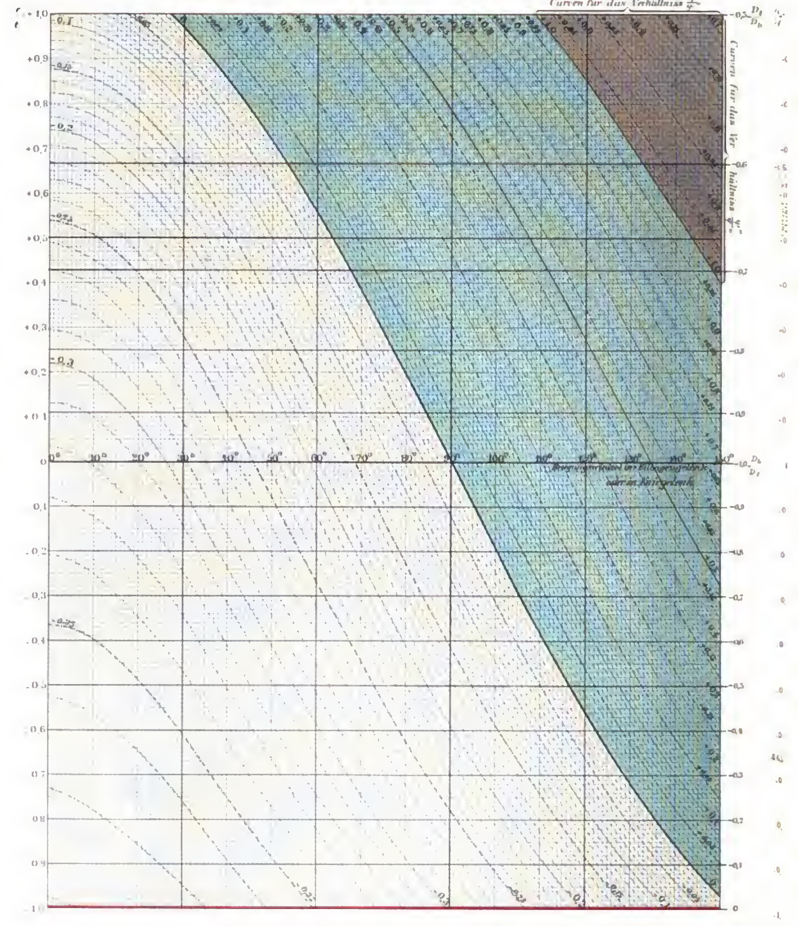
auf den Oberschenkel (D_f)

auf den Unterschenkel (D_t)

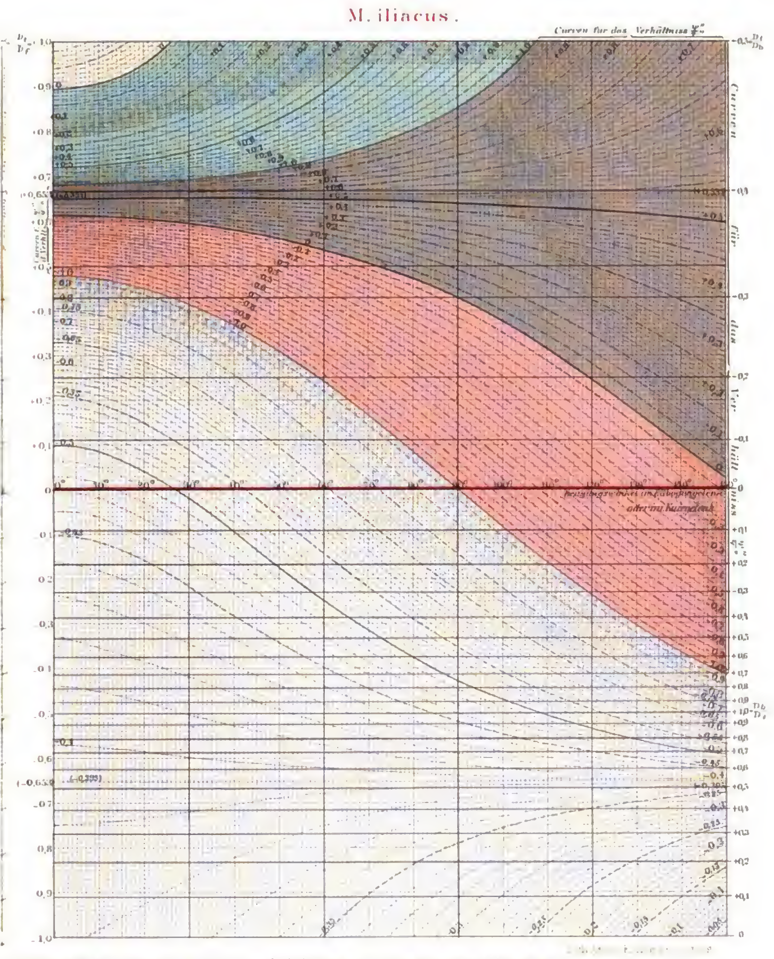
Das statische Maafs für die Wirkung des M. gracilis.

Lith. Anst. v. E. A. Funke

M. biceps femoris caput breve und Mm. vastus lateralis, vastus intermedius und vastus medialis.

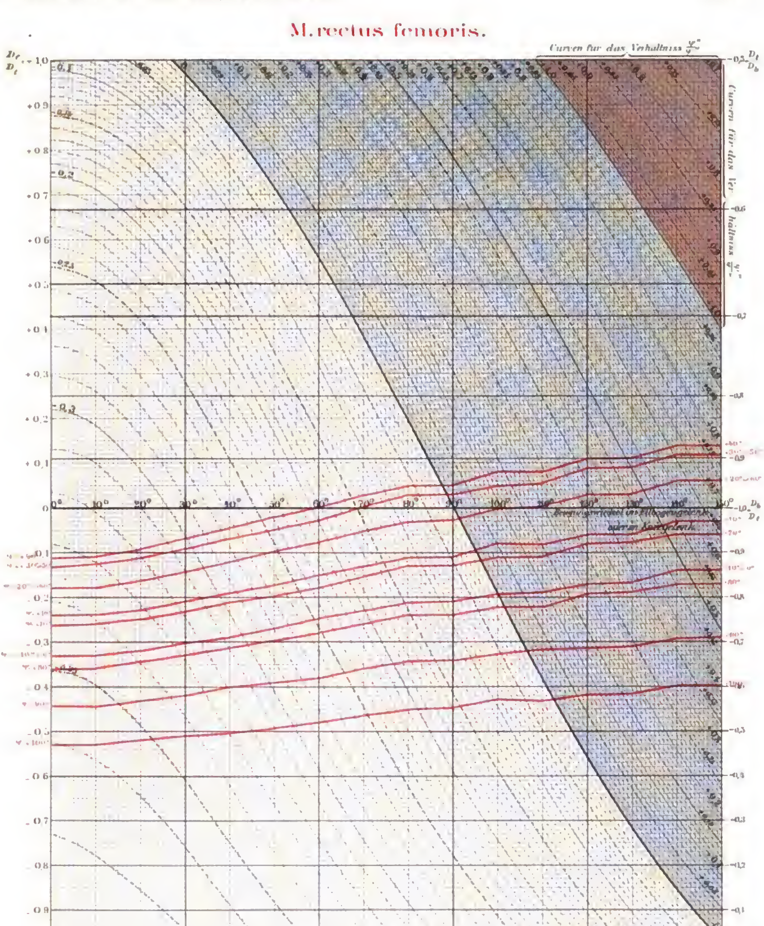


Graphische Darstellung der Abhängigkeit des Verhältnisses der ...
von dem Verhältniſs der Drehungsmomente (D_f und D_t) u...
Maaſses für die Wirkung eingelenk...

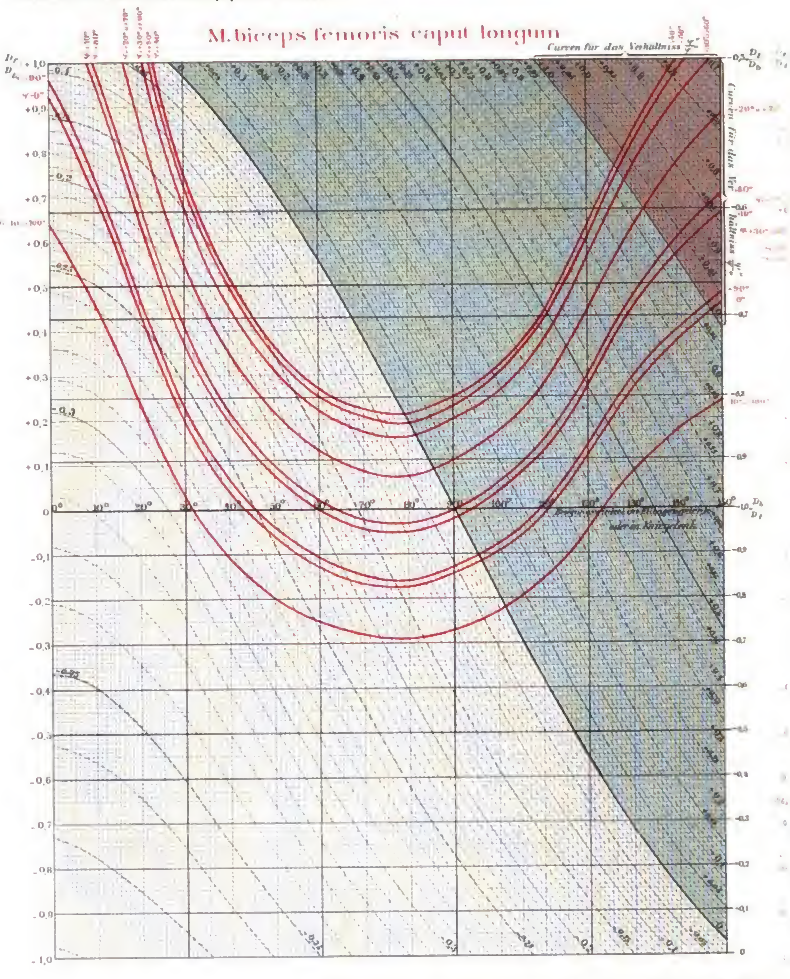


...nfangsdrehungen im Hüft- und Kniegelenk (kinetisches Maafs)
...nd dem Kniegelenkwinkel φ, sowie Ableitung des kinetischen
...ger Muskeln des Oberschenkels.

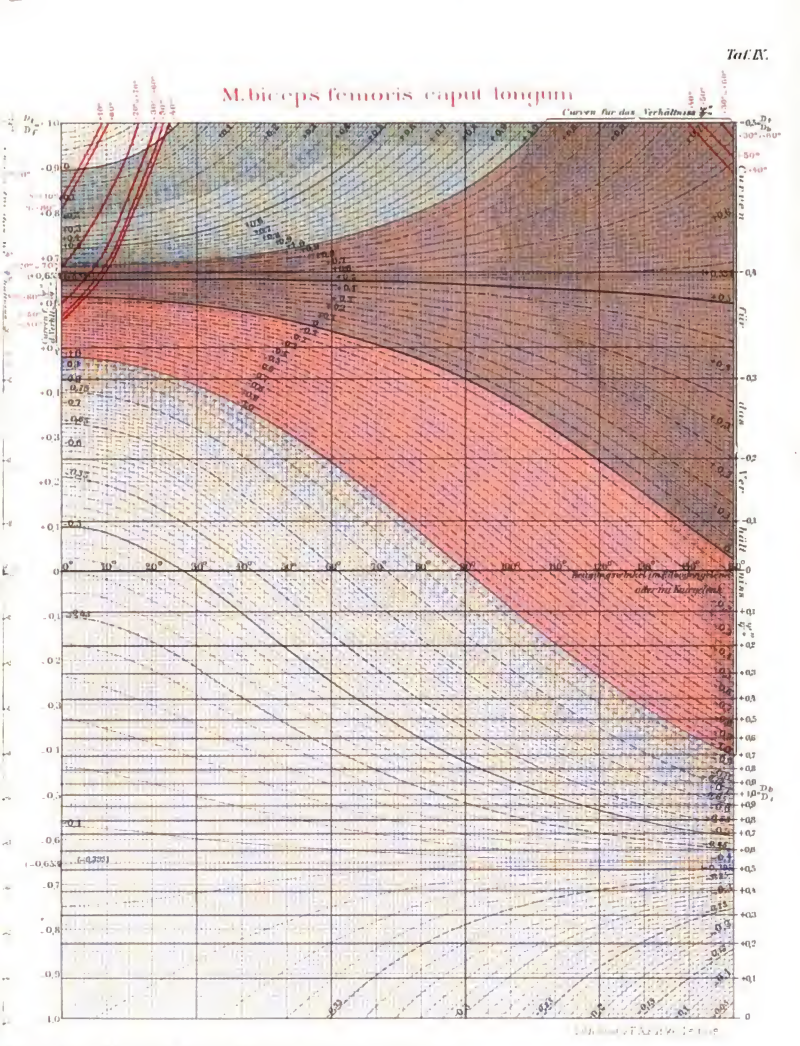
M. rectus femoris.



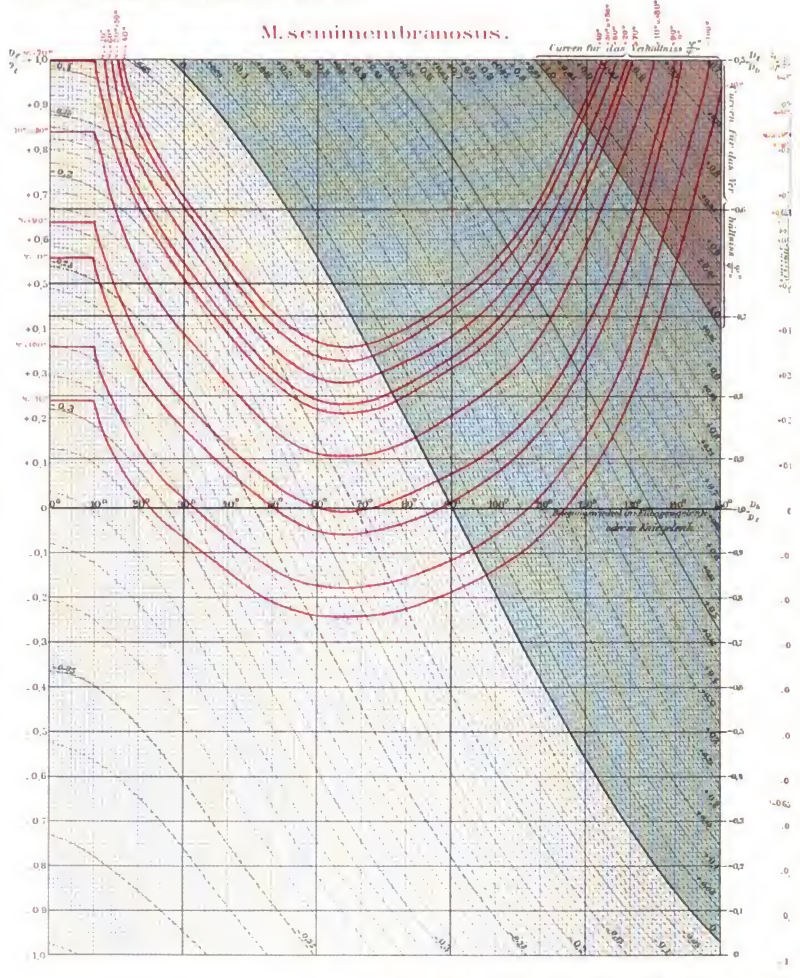
Ableitung des kinetischen Maafses für die Wirkung des M. rectus femoris.



Ableitung des kinetischen Maafses für die Wirkung



…ung des M. biceps femoris caput longum.



Ableitung des kinetischen Maafses für die W_{II}



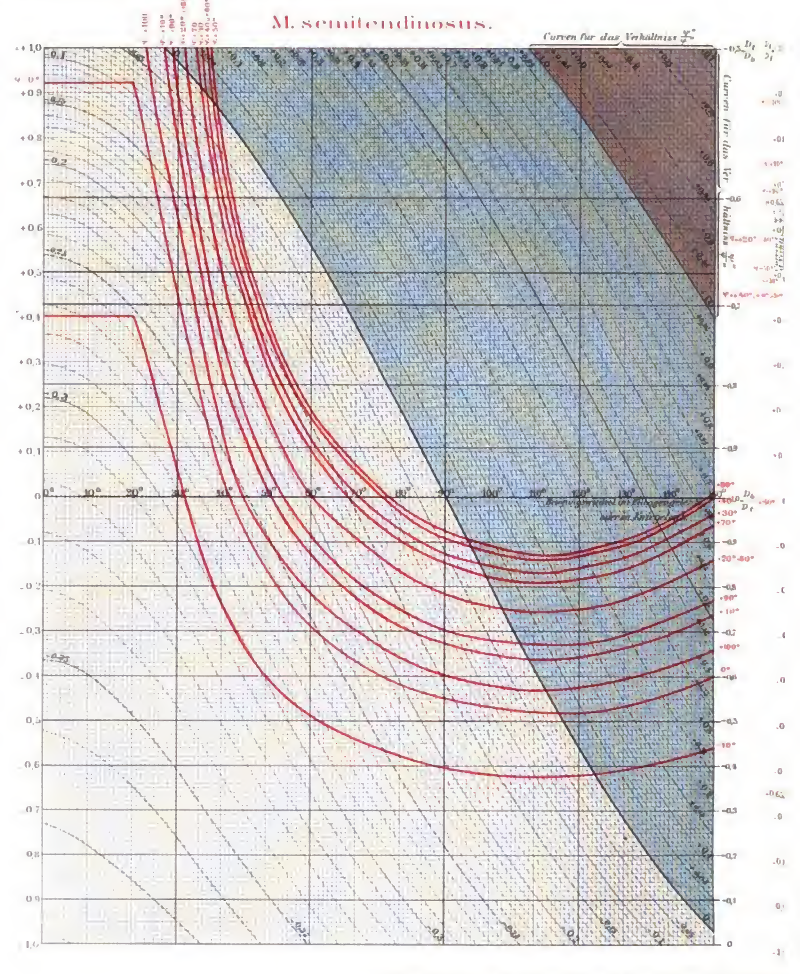
M. semimembranosus.

Curven für das Verhältniss

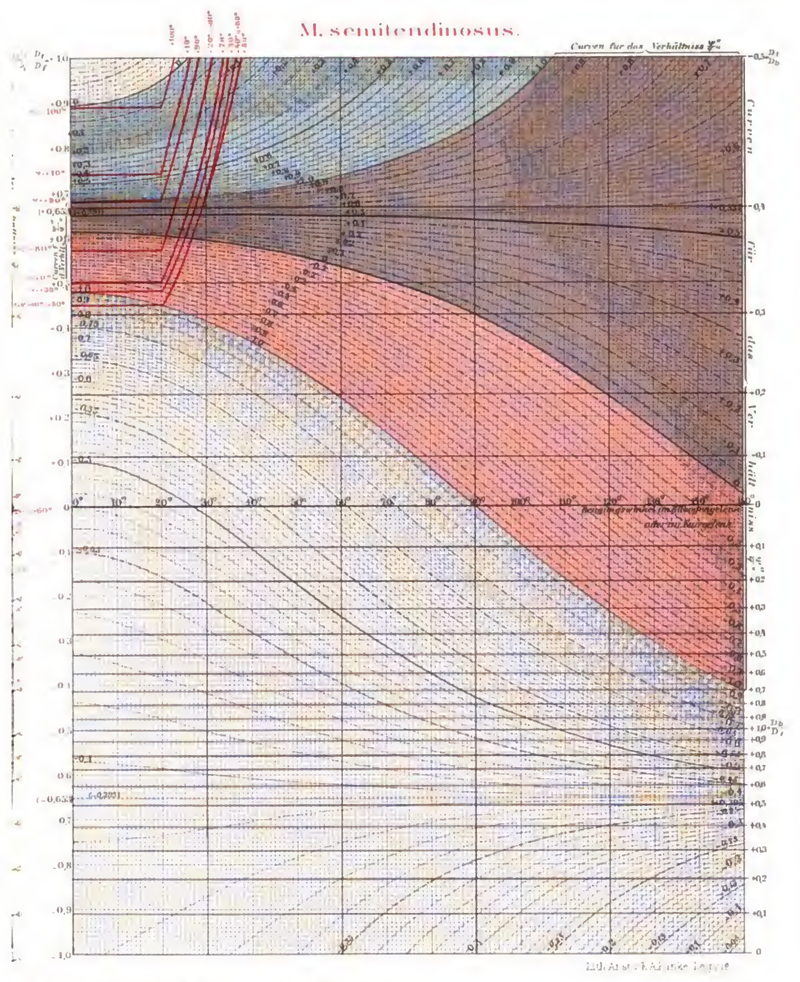
Beugungswinkel im Ellbogengelenk oder im Kniegelenk

0° 10° 20° 30° 40° 50° 60° 70° 80° 90° 100° 110° 120° 130° 140° 150° 160°

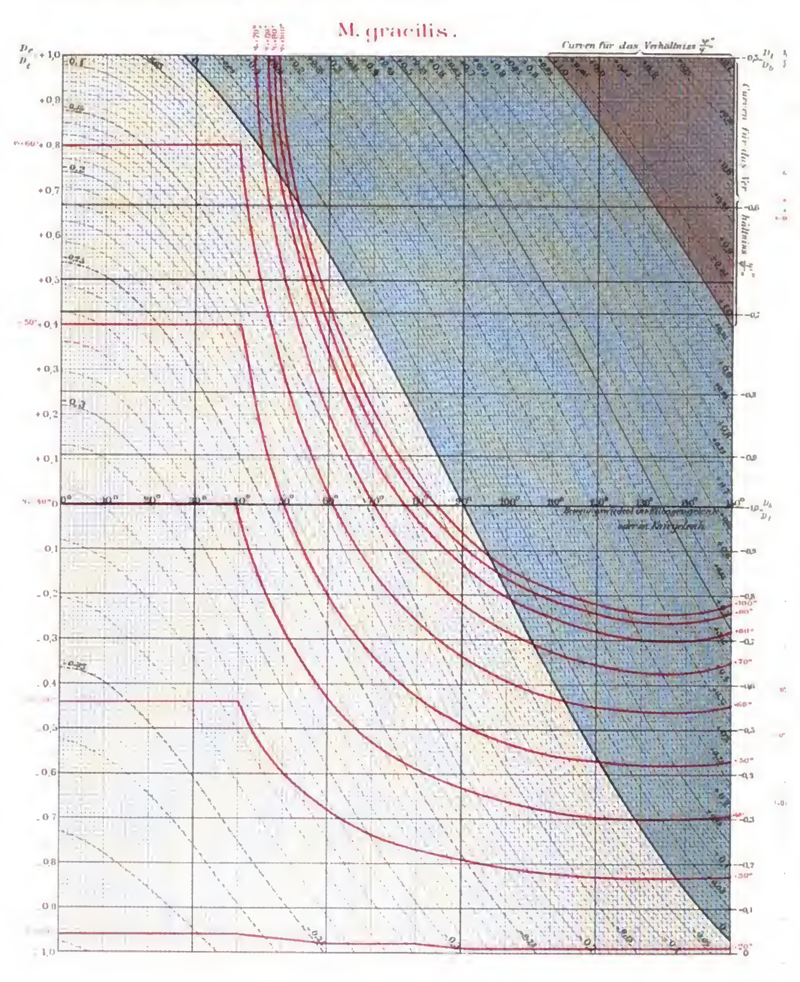
Wirkung des M. semimembranosus.



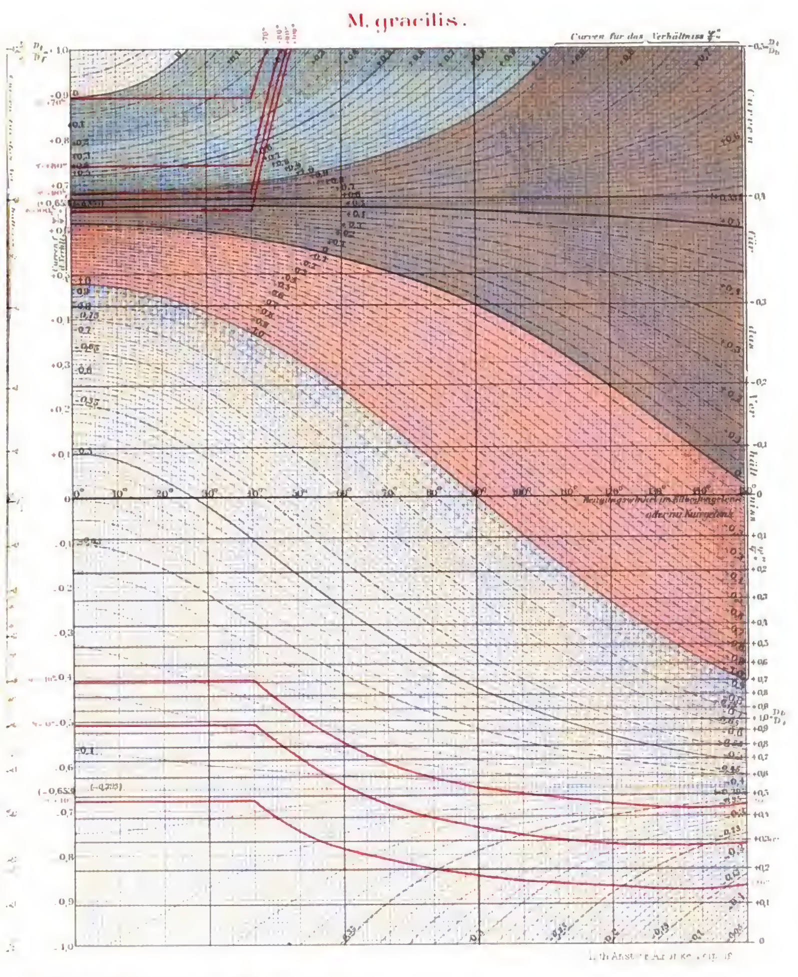
Ableitung des kinetischen Maafses für die W



...e Wirkung des M. semitendinosus.



Ableitung des kinetischen Maafses



...s für die Wirkung des M. gracilis.

BEOBACHTUNGEN

AM

SECHSZÖLLIGEN REPSOLDSCHEN HELIOMETER

DER

LEIPZIGER STERNWARTE

VON

BRUNO PETER.

III. ABHANDLUNG.

Des XXVII. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe
der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

Nº VI.

MIT EINER TAFEL.

LEIPZIG

BEI B. G. TEUBNER

1902.

Vorgetragen für die Abhandlungen am 14. März 1902.
Das Manuscript eingeliefert am 14. März 1902.
Den letzten Bogen druckfertig erklärt am 29. April 1902.

BEOBACHTUNGEN

AM

SECHSZÖLLIGEN REPSOLDSCHEN HELIOMETER

DER

LEIPZIGER STERNWARTE

VON

BRUNO PETER.

III. ABHANDLUNG.

MIT EINER TAFEL.

I. Bestimmung der Parallaxe von σ Draconis.

Bei der Bestimmung von Fixsternparallaxen durch Messung der Abstände von zwei den zu untersuchenden einschliessenden Sternen ist zur Erreichung einwandfreier Resultate Voraussetzung, dass die Differenz zweier in gleicher Stellung des Fernrohres unmittelbar hintereinander gemessenen Distanzen völlig frei von systematischen Fehlern sei. Werden die Distanzen mit dem Heliometer gemessen und ist durch Anwendung geeigneter Blendgitter Vorsorge getroffen, dass die beiden heliometrisch zu verbindenden Sterne gleich hell erscheinen, wird ferner rationeller Gebrauch vom Reversionsprisma gemacht, und werden endlich die Vergleichsterne so gewählt, dass ihre Distanzen vom Hauptstern sehr nahe gleich gross sind, so darf man bei den modernen Heliometern im Allgemeinen annehmen, dafs die genannte Voraussetzung wirklich auch zutrifft. Beschränkt man die Beobachtungen auf die Zeiten der parallaktischen Maxima und Minima, so wird allerdings mit dem geringsten Arbeitsaufwand die grösstmögliche Genauigkeit im Resultate erzielt, das einzige Criterium dafür, dass dies Resultat aber thatsächlich nicht durch systematische Beobachtungsfehler beeinflusst und entstellt ist, bietet dann aber nur die Uebereinstimmung der für den nämlichen Stern unter Benutzung verschiedener Vergleichsternpaare gefundenen Werthe für die Parallaxe. Es empfiehlt sich daher, für den einen oder anderen Stern die Parallaxe aus Beobachtungen abzuleiten, die über den ganzen Umkreis der parallaktischen Ellipse vertheilt sind, um die nach der Ausgleichung noch übrig bleibenden Widersprüche auf das Auftreten von systematischen Fehlern hin untersuchen zu

können. Für Beobachter, welche die Bestimmung von Fixsternparallaxen in grösserem Umfange vornehmen, erscheint eine derartige Beobachtungsreihe ebenso geboten wie eine Reihe, welche den Einfluss der atmosphärischen Dispersion auf ihre Distanzmessungen zum Gegenstande hat. Es sind dies die Gründe gewesen, welche mich veranlasst haben, fast drei volle Jahre hindurch σ Draconis einer andauernden Beobachtung zu unterwerfen. Um die Beobachtungen das ganze Jahr hindurch ausführen zu können, musste ein circumpolarer Stern gewählt werden. Für σ Draconis habe ich mich entschieden, weil dessen starke Eigenbewegung auf eine messbare Parallaxe schliessen liess; überdies liegen von diesem Sterne auch noch ältere Bestimmungen vor, für welche eine Controle sehr erwünscht sein musste.

Der Modus der Beobachtung ist bei σ Draconis genau der nämliche wie bei den schon früher von mir auf Parallaxe untersuchten Objecten. Das Gleiche gilt für die Reduction der Beobachtungen. Ich verweise in dieser Hinsicht auf meine beiden Veröffentlichungen von „Beobachtungen am sechszölligen Repsoldschen Heliometer der Leipziger Sternwarte", die als Nr. IV des XXII. Bandes und als Nr. III des XXIV. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe erschienen sind. Im Weiteren werde ich dieselben als *PI* und *PII* citiren. Bei der Aufstellung der Beobachtungsgleichungen ist gegen früher insofern eine Aenderung eingetreten, als noch eine vierte Unbekannte eingeführt wurde, durch welche ein etwaiger Einfluss der atmosphärischen Dispersion auf die Messung der Distanzen Berücksichtigung findet.

Der Stern σ Draconis liegt in der Nähe des Pols der Ekliptik; die infolge der Parallaxe im Laufe eines Jahres beschriebene Ellipse weicht daher nur wenig von einem Kreise ab. Die Axen derselben haben das Verhältniss 100:92. Trotz dieses günstigen Umstandes, welcher gestattet, die Vergleichsterne in jeder beliebigen Richtung zu wählen, bot dennoch die Auffindung passender Vergleichsterne Schwierigkeiten. Am geeignetesten erschienen zunächst B. D. $+70^\circ 1058$ und B. D. $+68^\circ 1077$, die beide nach der B.D. von der Grösse 7.5 sein sollen. Die Richtungen beider Distanzen weichen zwar um 13° von einander ab, die Distanzen sind aber bis auf $1'$ gleich. In der That erwies sich aber B.D. $+70^\circ 1058$ als viel zu schwach, um ihn als Vergleichstern

benutzen zu können, und es erschien fraglich, ob er in unterer Culmination bei etwas dunstigem Himmel überhaupt sichtbar sein würde. Deshalb wurden als Vergleichsterne schliesslich gewählt B.D. + 70°1073 und B.D. + 68°1077; die Grösse des ersteren ist nach der Durchmusterung 6.3, die des letzteren 7.5. Bei der Beobachtung wurde σ Drac. durch ein einfaches Gitter abgeblendet, seine Helligkeit wurde dadurch etwa auf die eines Sternes 7. Grösse reducirt.

Von den hier mit v und z bezeichneten Vergleichsternen sind nur die wenigen folgenden Positionen (m. Aeq. 1900.0) vorhanden.

v = B. D. + 70°1073		Epoche	
$19^h 31^m 48^s.63$	+ 70° 46′ 16″.3	1842	Arg. N.Z. 19454
48.37	17.7	1871.7	A.G.Z. Dorpat
z = B. D. + 68°1077			
$19^h 39^m 12^s.32$	+ 68° 25′ 4″.7	1790	Fedorenko 3260
12.08	5.2	1842	Arg. N.Z. 19579
12.09	5.7	$18\frac{75.2}{75.6}$	A.G.C. Christiania 3061

Einen Schluss auf merkliche Eigenbewegung gestatten diese Zahlen nicht, und es wurden daher ihre Mittelwerthe der Rechnung zu Grunde gelegt. Für σ Drac. (nachstehend mit x bezeichnet) wurde nach Porter (a catalogue of 1340 proper motion stars) angenommen

$19^h\ 32^m\ 33^s.05 + 69°\ 29'\ 2''.74$ Porter 1087 m.Aeq. 1900.0

Als Epoche für die Reduction der Beobachtungen und für das Aequinoctium wurde 1900.0 gewählt. Die vorstehenden Werthe ergeben dann für die Mitten der Distanzen

	xv	xz
A.R.	293° 2′.8	293° 59′.4
Decl.	70 7.9	68 57.4
Pos.-Winkel	177 12.2	150 55.0
Distanz	76′.9	73′.7

Da die Beobachtungen fast in allen Sternzeitstunden erlangt sind, wurde die Refraction für alle Stundenwinkel von 10^m zu

10^m tabulirt. Eine Berücksichtigung der höheren Glieder derselben war nicht erforderlich. Direct gerechnet wurde von 20^m zu 20^m, die dazwischen liegenden Werthe wurden durch Interpolation gefunden. Die direct berechneten Werthe sind die folgenden.

Mittlere Refraction.

t	xy	xz	t	xy	xz	t	xy	xz
$0^h\ 10^m$	0ᵖ0663	0ᵖ0618	$8^h\ 10^m$	0ᵖ1064	0ᵖ0673	$16^h\ 10^m$	0ᵖ1055	0ᵖ1380
30	0663	0626	30	1168	0727	30	0964	1278
50	0661	0633	50	1282	0794	50	0884	1180
1 10	0657	0640	9 10	1401	0874	17 10	0815	1088
30	0652	0645	30	1524	0968	30	0757	1003
50	0645	0649	50	1647	1073	50	0710	0925
2 10	0638	0651	10 10	1765	1188	18 10	0672	0856
30	0629	0651	30	1876	1310	30	0643	0796
50	0621	0649	50	1973	1434	50	0621	0743
3 10	0613	0646	11 10	2053	1556	19 10	0607	0699
30	0605	0640	30	2112	1672	30	0598	0662
50	0599	0633	50	2146	1777	50	0595	0633
4 10	0595	0624	12 10	2157	1865	20 10	0595	0610
30	0594	0615	30	2140	1933	30	0598	0593
50	0597	0604	50	2099	1978	50	0604	0581
5 10	0605	0593	13 10	2036	2000	21 10	0611	0573
30	0620	0584	30	1952	1997	30	0619	0570
50	0641	0576	50	1853	1971	50	0627	0570
6 10	0670	0570	14 10	1742	1924	22 10	0635	0572
30	0709	0569	30	1623	1858	30	0643	0577
50	0757	0573	50	1502	1778	50	0650	0584
7 10	0817	0584	15 10	1382	1686	23 10	0655	0591
30	0888	0603	30	1265	1587	30	0659	0600
50	0970	0632	50	1156	1484	50	0662	0609

Mit Benutzung der BESSELschen Tagesconstanten C und D wurde die Aberration berechnet nach den Ausdrücken

$$xy: (5.9917)C - (6.1367)D \qquad xz: (5.8795)C - (6.1582)D$$

Die eingeklammerten Zahlen sind Logarithmen und die Ausdrücke ergeben in Scalentheilen die Correction, welche an die gemessenen Distanzen anzubringen ist. Da eine grosse Anzahl von Werthen benöthigt wurde, die über das ganze Jahr hinweg vertheilt waren,

wurde die Correction — ausgehend vom Beginne des annus fictus — von vier zu vier Sterntagen berechnet und die zwischenliegenden Werthe durch Interpolation gefunden. Der Betrag der Aberration hält sich hier zwischen sehr engen Grenzen und schwankt nur zwischen $\pm$ 0ᵖ0033.

σ Drac. ist ein Bradleyscher Stern; nach Auwers ist seine Eigenbewegung + 0ˢ0973 und — 1″766. Der Rechnung ist die Bestimmung von Porter + 0ˢ100 und — 1″76 zu Grunde gelegt. Im Bogen grössten Kreises ergiebt sich daraus als jährliche Eigenbewegung 1″837 unter dem Positionswinkel 163°22′ (m. Aeq. 1900). Damit findet man als Reduction wegen Eigenbewegung

$$xv: -0^{p}08206\,t \qquad xz: +0^{p}08229\,t$$

Hierin ist t in Jahren ausgedrückt und von 1900.0 an zu zählen. Zur Herleitung der Parallaxe werden die Differenzen der Distanzen benutzt, die mit Hilfe der Summe der Distanzen auf einen gemeinsamen Scalenwerth zu reduciren sind. Alle der Grösse der Distanz proportionalen Einflüsse werden auf diese Weise berücksichtigt. Es wäre daher eigentlich nicht erforderlich gewesen, die einzelnen Distanzen auf Normalstellung des Oculars und auf gleiche Temperatur zu reduciren. Diese Reductionen sind jedoch an die einzelnen Distanzen angebracht worden, so dass schliesslich nur noch eine Umsetzung der Scalentheile in Bogenmaass erübrigen würde, um die absoluten Werthe der einzelnen Distanzen für 1900.0 zu erhalten. Auf diese Weise ist der Vortheil erreicht worden, ein werthvolles Material zu erhalten, um die schon bei früheren Reihen beobachteten Schwankungen der Summen der Distanzen auf ihre Ursache hin zu untersuchen. Für die Reduction auf Normalstellung habe ich wie früher den Coëfficienten 0ᵖ0469 benutzt, der für eine Ocularverschiebung von 1 mm und eine Distanz von 100 Scalentheilen gilt. Für die Reduction auf 0° wurden die Angaben des Thermometers an der Säule des Instruments als maassgebend angesehen und der aus den Untersuchungen des Polbogens sich ergebende Endwerth des Temperaturcoëfficienten — 0.00001064 benutzt, der sich auf einen Scalentheil bezieht. Die Herleitung dieses Coëfficienten behandelt der vorletzte Abschnitt dieser Abhandlung.

Die nachfolgende Tabelle giebt die Zusammenstellung der Beobachtungen. Es bedeutet

Θ Beobachtungszeit in Sternzeit.

G Lage des am Ende der Declinationsaxe befindlichen Gewichtes; f = Gewicht folgt, v = Gewicht voran.

$Oc.s$ Ablesung des Positionskreises. Von den beiden um 180° von einander verschiedenen Ablesungen am maassgebenden Mikroskop bezeichnet I die kleinere, II die grössere.

R Ruhe, S Schärfe der Sternbilder. Bei 1 sind Ruhe und Schärfe am besten, bei 4 am schlechtesten.

K Mittel der Ablesungen der Thermometer zu beiden Seiten des Objectivkopfes.

S Ablesung des Thermometers, das an der Säule des Instrumentes in 0.9 m Höhe über dem Fussboden angebracht ist.

Δ_g die gemessene Distanz, wie sie direct durch Mittelung der vier zu einer Messung gehörigen Einstellungen sich ergiebt. Die Ablesungen der Scalen sind nur wegen Run corrigirt. Benutzt wurde immer der aus jeder Messung sich ergebende Run, nicht Mittelwerthe desselben.

Σ_c Correction wegen Refraction + Correction wegen Aberration + Reduction auf Normalstellung + Reduction auf 0°.

RE Reduction wegen Eigenbewegung.

$\Delta_r = \Delta_g + \Sigma_c + RE$ = reducirte Distanz.

Einheit für Σ_c und RE ist 0°0001.

Die Klammern und Nummern der letzten Spalte beziehen sich auf die Anmerkungen am Fusse der Seiten.

Die gemessenen Distanzen zwischen σ Draconis und den Vergleichsternen v und z.

1898	Θ	G	Oc	P	R	S	K	K−S	Δ_g	Σ_c	RE	Δ_r	
Sept. 14	19ʰ 47ᵐ9	v	10.10	II	2—3	2—3	+ 16°2	— 2°0	212ᵖ3516	304	+ 1063	212ᵖ4883	1
	20 11.9				2—3	2—3	+ 15.9	— 2.1	203.4011	281	— 1066	203.3226	
	20 32.3			I	2—3	2—3	+ 15.5	— 2.2	203.4040	289	— 1066	203.3263	
	20 55.8				2—3	2—3	+ 15.1	— 2.3	212.3442	297	+ 1063	212.4802	
15	20 32.9	v	10.20	II	2—3	2	+ 17.6	— 1.8	203.4206	185	— 1063	203.3328	
	20 53.0				2—3	2	+ 17.4	— 1.9	212.3767	187	+ 1060	212.5014	
	21 9.8			I	3	2—3	+ 17.2	— 1.9	212.3674	183	+ 1060	212.4917	2
	21 27.1				3	2—3	+ 17.0	— 1.9	203.4137	200	— 1063	203.3274	
17	20 26.1	v	10.10	I	3—2	3—2	+ 15.2	— 3.1	203.4104	270	— 1059	203.3315	
	20 46.8				3	3	+ 14.8	— 3.0	212.3738	284	+ 1056	212.5078	
	21 0.9			II	3	3	+ 14.5	— 3.0	212.3701	283	+ 1056	212.5040	
	21 17.6				3	3	+ 14.2	— 3.0	203.4122	293	— 1059	203.3356	
Oct. 28	23 34.5	v	10.10	I	3	2—3	+ 10.7	— 1.2	203.3846	323	— 966	203.3203	3
	23 56.5				3	2—3	+ 10.5	— 1.2	212.3910	281	+ 964	212.5155	
	0 13.0			II	2—3	2	+ 10.3	— 1.3	212.3905	281	+ 964	212.5150	
	0 30.6				3—2	2	+ 10.1	— 1.3	203.3969	298	— 966	203.3301	
Nov. 2	23 52.7	v	10.10	I	3	3	+ 5.3	— 2.0	212.3812	313	+ 953	212.5078	4
	0 11.7				3—2	3	+ 5.1	— 2.1	203.3923	337	— 955	203.3305	
	0 28.2			II	3—2	3—2	+ 4.9	— 2.2	203.3882	327	— 955	203.3254	
	0 47.6				3—2	3	+ 4.6	— 2.3	212.3877	326	+ 953	212.5156	
4	23 48.0	v	10.00	I	2—3	2—1	+ 7.6	— 1.4	212.3808	398	+ 948	212.5154	5
	0 5.3				3—2	2	+ 7.3	— 1.6	203.3928	419	— 951	203.3396	
	0 19.9			II	2—3	2—3	+ 7.0	— 1.8	203.3849	410	— 951	203.3308	
	0 35.1				2—3	2	+ 6.8	— 1.9	212.3812	402	+ 948	212.5162	
8	1 57.4	v	10.00	II	3	2—3	+ 3.0	— 2.3	203.3823	403	— 942	203.3284	
	2 14.6				3	2—3	+ 2.8	— 2.4	212.3627	572	+ 939	212.5138	
	2 29.9			I	2—3	2	+ 2.6	— 2.5	212.3593	617	+ 939	212.5149	
	2 45.2				3—2	2	+ 2.4	— 2.6	203 3739	417	— 942	203.3214	
Decbr. 5	2 9.2	v	10.00	II	2—1	2—1	+ 3.8	— 2.3	212.3758	536	+ 878	212.5172	
	2 27.5				2	2—1	+ 3.7	— 2.3	203.3813	386	— 881	203.3318	
	2 45.2			I	2—3	2	+ 3.7	— 2.3	203.3761	397	— 881	203.3277	
	3 3.2				2—3	2—3	+ 3.6	— 2.3	212.3584	711	+ 878	212.5173	
6	2 1.4	v	10.00	II	3—2	2—3	+ 2.3	— 1.7	203.3687	407	— 879	203.3215	
	2 15.8				2—3	2	+ 2.2	— 1.8	212.3660	580	+ 876	212.5116	
	2 31.5			I	3	3—2	+ 2.0	— 1.9	212.3669	620	+ 876	212.5165	
	2 45.7				3—2	2—3	+ 1.8	— 2.0	203.3776	421	— 879	203.3318	
1899 Jan. 6	0 29.2	v	9.90	I	2	2	+ 1.4	— 1.0	212.3823	552	+ 807	212.5182	
	0 50.6				2—3	2	+ 1.1	— 1.2	203.3599	544	— 809	203.3334	
	1 10.2			II	2—3	2—3	+ 0.8	— 1.4	203.3577	532	— 809	203.3300	
	1 28.0				2—3	2—3	+ 0.5	— 1.6	212.3803	599	+ 807	212.5209	
9	0 44.6	v	9.90	I	3	2—3	+ 4.7	— 1.1	203.3663	507	— 802	203.3368	
	0 58.2				3	2	+ 4.4	— 1.3	212.3994	525	+ 800	212.5319	
	1 14.1			II	3	3—2	+ 4.1	— 1.4	212.3936	541	+ 800	212.5277	
	1 30.8				3	3	+ 3.7	— 1.5	203.3635	487	— 802	203.3320	

1) Sterne sehr zerfahren; es wurde bald darauf gleichmässig trübe.
2) Durch Wolkenlücken beobachtet.
3) Mondschein; fortwährend einzelne Wolken.
4) Mondschein; Luft sehr nass; Sterne ganz aufgeblasen.
5) Bilder sehr scharf, aber einzelne Wolken.

1899	Θ	G	Ocs	P	R	S	K	K—S	Δ_g	Σ	RE	Δ_r	
Jan. 10	$0^h 11^m.8$	v	9.90	I	3	3	+ 3".4	— 0".8	212^{p}3909	519	+ 798	212^{p}5226	
	0 25.5				3—2	3	+ 3.3	— 0.8	203.3506	531	— 800	203.3237	
	0 40.0			II	3	3	+ 3.1	— 0.9	203.3455	522	— 800	203.3177	
	0 54.6				3	3	+ 3.0	— 1.0	212.3851	537	+ 798	212.5186	
26	1 16.5	v	9.90	I	3—2	2	+ 0.7	— 0.7	203.3484	552	— 764	203.3272	
	1 31.0				2	2	+ 0.3	— 1.0	212.3903	623	+ 762	212.5288	
	1 50.0			II	2	2	— 0.4	— 1.5	212.3819	649	+ 762	212.5230	
	2 3.6				2	2	— 0.7	— 1.7	203.3551	528	— 764	203.3315	
27	1 14.9	v	9.90	I	2	2	— 0.1	— 0.6	212.3881	610	+ 760	212.5251	
	1 29.1				2—3	2—3	— 0.3	— 0.7	203.3487	550	— 762	203.3275	
	1 43.7			II	2	2	— 0.6	— 0.9	203.3509	546	— 762	203.3293	
	1 57.7				2	2	— 0.9	— 1.0	212.3819	678	+ 760	212.5257	
30	2 33.6	v	9.90	I	2—1	2—1	— 1.0	— 1.2	212.3701	762	+ 753	212.5216	6
	2 48.3				2—1	2—1	— 1.5	— 1.5	203.3535	548	— 755	203.3328	
	3 2.7			II	2—1	2—1	— 2.0	— 1.9	203.3535	559	— 755	203.3339	
	3 15.7				2—1	2—1	— 2.4	— 2.3	212.3634	907	+ 753	212.5294	
Febr. 1	5 53.2	v	9.80	II	2	2—3	— 2.3	— 1.2	203.2598	1309	— 750	203.3157	7
	6 9.1				3	2—3	— 2.6	— 1.3	212.2534	2008	+ 748	212.5290	
6	2 46.8	v	9.80	II	3	2—3	— 4.0	— 2.2	203.3308	661	— 739	203.3230	
	3 1.3				2—3	2—3	— 4.5	— 2.5	212.3529	980	+ 737	212.5246	
	3 22.5			I	3—2	2—3	— 5.4	— 2.9	212.3427	1071	+ 737	212.5235	
	3 41.0				3—2	2—3	— 6.1	— 3.3	203.3275	735	— 739	203.3271	
10	3 9.7	v	10.10	II	3—4	3	+ 13.6	+ 0.7	212.3851	·608	+ 728	212.5187	
	3 22.5				3	3	+ 13.2	+ 0.3	203.3649	320	— 730	203.3239	
	3 36.1			I	3	3	+ 12.8	— 0.1	203.3601	339	— 730	203.3210	
	3 47.8				3	3	+ 12.4	— 0.4	212.3717	767	+ 728	212.5212	
März 5	5 11.5	v	9.90	II	3—2	3—2	— 2.0	— 1.5	203.2884	1004	— 678	203.3210	
	5 26.4				2—3	2—3	— 2.4	— 1.8	212.2950	1710	+ 677	212.5337	
	5 43.1			I	2—3	2—3	— 2.9	— 2.0	212.2995	1813	+ 677	212.5485	
	5 58.1				2—3	2—3	— 3.3	— 2.3	203.2691	1290	— 678	203.3303	
12	6 4.4	v	10.00	II	2	3—2	+ 12.7	+ 0.7	212.2859	1690	+ 661	212.5210	8
	6 17.5				2	3—2	+ 12.3	+ 0.4	203.2795	1190	— 663	203.3322	
	6 32.4			I	2	2	+ 11.8	+ 0.1	203.2534	1282	— 663	203.3153	
	6 46.1				2	2	+ 11.4	— 0.2	212.2683	1862	+ 661	212.5206	
25	7 8.9	v	9.90	I	3—2	3—2	+ 1.9	— 0.8	203.2113	1736	— 633	203.3216	9
	7 24.1				2	2	+ 1.2	— 1.2	212.2353	2189	+ 631	212.5173	
	7 39.5			II	2—3	2—3	+ 0.5	— 1.6	212.2501	2200	+ 631	212.5332	
	7 58.9				3—2	3—2	— 0.4	— 2.2	203.2103	1948	— 633	203.3418	
28	7 5.3	v	10.00	I	2—3	2—3	+ 13.6	+ 1.4	212.2567	1923	+ 625	212.5115	
	7 20.4				2	2	+ 12.7	+ 0.8	203.2291	1560	— 627	203.3224	
	7 34.5			II	2	2	+ 12.0	+ 0.3	203.2168	1628	— 627	203.3169	
	7 48.5				2	2	+ 11.2	— 0.3	212.2691	1953	+ 625	212.5269	
Mai 24	13 3.1	f	10.10	I	3—2	2—3	+ 14.3	— 2.4	203.3173	658	— 498	203.3333	
	13 23.5				2—3	2	+ 14.0	— 2.4	212.4227	341	+ 496	212.5064	
	13 38.8			II	2	2	+ 13.7	— 2.5	212.4326	314	+ 496	212.5136	
	13 52.2				2—3	2	+ 13.4	— 2.5	203.3395	489	— 498	203.3386	

6) Plötzlich klar geworden.

7) Der Himmel hellte sich plötzlich auf kurze Zeit auf.

8) Sterne sehr schwach; Dunst und vielleicht auch leichte Wolkenschleier.

9) Starker Rauch ringsum, der die Bilder sehr schwächte.

1899	Θ	G	Ocs	P	R	S	K	K−S	Δ_g	Σ_r	RE	Δ_r	
Juni 4	$14^h\ 4^m3$	f	10.10	I	3−2	2−3	+ 14°6	− 3°5	212^p4293	265	+ 472	212^p5030	
	14 25.5				3	2−3	+ 14.1	− 3.4	203.3383	394	− 473	203.3304	
	14 48.5			II	3	3−2	+ 13.6	− 3.2	203.3556	351	− 473	203.3434	
	15 6.2				3−2	2−3	+ 13.2	− 3.1	212.4332	243	+ 472	212.5047	
5	14 7.4	f	10.10	II	2	2	+ 18.8	− 2.1	203.3312	425	− 471	203.3266	
	14 23.2				2	2	+ 18.4	− 2.3	212.4456	233	+ 470	212.5159	
	14 43.2			I	2	2	+ 17.8	− 2.6	212.4461	221	+ 470	212.5152	
	15 2.0				2−3	2−3	+ 17.3	− 2.9	203.3419	300	− 471	203.3248	
7	14 7.9	f	10.10	II	3−2	3−2	+ 15.5	− 2.0	212.4340	283	+ 465	212.5088	
	14 24.2				2−3	2−3	+ 15.1	− 2.1	203.3451	413	− 466	203.3398	
	14 38.5			I	2−3	2−3	+ 14.7	− 2.2	203.3468	382	− 466	203.3384	
	14 52.2				2−3	2−3	+ 14.4	− 2.3	212.4318	252	+ 465	212.5035	
8	13 59.5	f	10.10	II	2	2	+ 16.4	− 2.2	203.3355	468	− 464	203.3359	
	14 13.5				2	2	+ 16.0	− 2.3	212.4223	266	+ 463	212.4952	
	14 28.8			I	2	2	+ 15.7	− 2.3	212.4317	254	+ 463	212.5034	
	14 44.7				2	2	+ 15.3	− 2.4	203.3468	359	− 464	203.3363	
18	14 46.3	f	10.20	I	2	2−3	+ 18.2	− 1.7	212.4477	129	+ 440	212.5046	
	15 2.1				2−3	2−3	+ 17.8	− 1.8	203.3587	217	− 442	203.3362	
	15 19.5			II	2−3	2−3	+ 17.5	− 1.9	203.3610	190	− 442	203.3358	
	15 39.2				2−3	2−3	+ 17.0	− 2.1	212.4384	121	+ 440	212.4945	
28	15 40.1	f	10.10	I	3	2−3	+ 15.8	− 2.1	203.3547	281	− 419	203.3409	
	15 54.4				3	2−3	+ 15.5	− 2.2	212.4373	245	+ 418	212.5036	
	16 9.2			II	3	2−3	+ 15.1	− 2.3	212.4342	250	+ 418	212.5010	
	16 23.4				3	2−3	+ 14.8	− 2.4	203.3560	249	− 419	203.3390	
Juli 17	16 32.2	f	10.20	I	2−3	3−2	+ 20.7	− 2.0	203.3590	105	− 376	203.3319	
	16 44.8				2	2	+ 20.5	− 1.8	212.4606	122	+ 375	212.5103	
	16 59.4			II	3−2	3−2	+ 20.3	− 1.6	212.4555	134	+ 375	212.5064	
	17 13.7				3−2	3−2	+ 20.1	− 1.3	203.3585	117	− 376	203.3326	
19	16 40.9	f	10.20	I	2	2	+ 21.0	− 1.6	203.3638	108	− 372	203.3374	
	16 55.2				2	2	+ 20.8	− 1.7	212.4652	126	+ 371	212.5149	
	17 10.8			II	2	2	+ 20.6	− 1.7	212.4584	134	+ 371	212.5089	
	17 27.3				2	2	+ 20.3	− 1.8	203.3715	106	− 372	203.3449	
20	16 35.0	f	10.20	I	2−3	2	+ 23.1	− 1.6	212.4566	100	+ 368	212.5034	
	16 52.6				2−3	2	+ 22.7	− 1.7	203.3718	87	− 369	203.3436	
	17 9.0			II	2	2	+ 22.4	− 1.8	203.3703	86	− 369	203.3420	
	17 26.9				3	3	+ 22.1	− 1.9	212.4593	123	+ 368	212.5084	
21	16 40.8	f	10.40	I	3	3	+ 27.5	− 1.4	212.4775	− 127	+ 366	212.5014	10)
	16 55.1				3−2	3−2	+ 26.9	− 1.5	203.3842	− 133	− 367	203.3342	10)
	17 9.7			II	3−2	3−2	+ 26.2	− 1.7	203.3971	− 133	− 367	203.3471	10)
	17 24.9				3−2	3−2	+ 25.5	− 1.9	212.4801	− 107	+ 366	212.5060	10)
Aug. 1	17 18.5	f	10.20	II	2	2−3	+ 19.1	− 1.8	212.4629	157	+ 341	212.5127	
	17 35.6				2−3	2−3	+ 18.5	− 1.9	203.3678	127	− 342	203.3463	
	17 52.5			I	3	3−2	+ 18.0	− 2.0	203.3537	134	− 342	203.3329	
	18 8.9				3	3−2	+ 17.5	− 2.1	212.4507	187	+ 341	212.5035	
2	17 7.8	f	10.20	II	2−3	2	+ 22.3	− 1.4	203.3603	99	− 340	203.3362	
	17 20.9				2	2	+ 21.9	− 1.6	212.4528	133	+ 339	212.5000	
	17 35.3			I	2	2	+ 21.4	− 1.9	212.4533	135	+ 339	212.5007	
	17 49.7				2−3	2−3	+ 20.9	− 2.2	203.3644	98	− 340	203.3402	
6	17 21.8	f	10.30	II	3−2	2−3	+ 26.6	− 2.0	212.4668	− 27	+ 330	212.4971	
	17 36.5				3−2	3−2	+ 26.2	− 2.1	203.3732	− 52	− 331	203.3349	
	17 49.6			I	3−2	3−2	+ 25.9	− 2.2	203.3713	− 50	− 331	203.3332	
	18 3.6				3−2	2−3	+ 25.6	− 2.3	212.4806	− 9	+ 330	212.5127	

10) Mondschein, Himmel leicht überzogen.

1899		Θ	G	Ocs	P	R	S	K	K−S	J_g	Σ	RE	J_r	
Aug.	9	17h30m9	f	10.20	II	3−2	2−3	+17°7	−1°6	203p3542	130	−324	203p3348	
		17 45.7				3−2	2−3	+17.4	−1.6	212.4521	180	+324	212.5025	
		18 2.3			I	3−2	2−3	+17.1	−1.7	212.4534	186	+324	212.5044	
		18 20.3				3−2	2−3	+16.7	−1.8	203.3520	187	−324	203.3343	
	10	17 56.8	f	10.20	II	3−2	2−3	+18.6	−2.1	212.4516	165	+321	212.5002	
		18 13.6				3−2	2−3	+18.1	−2.3	203.3585	126	−322	203.3389	
		18 28.2			I	3−2	3−2	+17.7	−2.5	203.3505	129	−322	203.3312	
		18 42.9				3−2	3−2	+17.3	−2.7	212.4585	177	+321	212.5083	
	24	21 19.0	v	10.20	II	2−3	2	+12.8	−2.5	203.3381	233	−290	203.3324	11
		21 41.3				2−3	2	+12.6	−2.6	212.4458	206	+290	212.4954	
		21 56.7			I	3−2	2−3	+12.5	−2.6	212.4531	201	+290	212.5022	
		22 14.7				3	2−3	+12.3	−2.7	203.3238	237	−290	203.3185	
	26	21 26.4	v	10.20	I	2−3	3−2	+12.5	−2.3	203.3441	243	−286	203.3398	
		21 44.1				2−3	2−3	+12.1	−2.4	212.4502	215	+285	212.5002	
		22 4.9			II	2−3	3−2	+11.5	−2.5	212.4558	211	+285	212.5054	
		22 26.1				3−2	3−2	+10.9	−2.6	203.3467	252	−286	203.3433	
	27	21 15.7	v	10.10	I	2−3	3−2	+13.4	−2.9	212.4563	296	+283	212.5142	
		21 37.8				3−2	3	+13.1	−2.9	203.3235	314	−284	203.3265	
		21 55.7			II	3	3	+12.9	−2.9	203.3351	316	−284	203.3383	
		22 14.0				3	3	+12.7	−2.9	212.4479	279	+283	212.5041	
Oct.	9	19 55.9	v	10.00	I	2	2	+9.2	−1.8	203.3106	431	−187	203.3350	
		20 14.5				2	2	+8.5	−2.0	212.4617	468	+187	212.5272	
		20 30.2			II	3−2	2−3	+8.0	−2.2	212.4572	465	+187	212.5224	
		20 48.4				2	2	+7.4	−2.4	203.3096	452	−187	203.3361	
	13	22 23.8	v	10.00	I	2−3	3	+8.1	−1.7	212.4572	426	+177	212.5175	12
		22 38.9				2−3	2−3	+7.6	−1.9	203.3106	456	−178	203.3384	
		22 54.9			II	2−3	2−3	+7.1	−2.2	203.3163	450	−178	203.3435	
		23 11.5				3−2	2−3	+6.6	−2.4	212.4569	404	+177	212.5150	
	14	19 28.5	v	10.00	I	2−3	2−3	+8.8	−1.3	203.3136	425	−176	203.3385	13
		19 48.1				2−3	2−3	+8.3	−1.7	212.4578	469	+176	212.5223	
	15	19 9.8	v	10.00	I	2−3	2	+10.1	−0.6	212.4540	482	+173	212.5195	
		19 25.1				2	2	+9.5	−0.9	203.3096	431	−174	203.3353	
		19 41.2			II	2−3	2	+9.0	−1.1	203.3056	438	−174	203.3320	
		20 0.9				2−3	3−2	+8.3	−1.4	212.4498	480	+173	212.5151	
	16	19 4.8	v	10.00	I	3−2	3−2	+9.7	−1.1	203.3142	408	−171	203.3379	
		19 22.7				3	2−3	+9.2	−1.3	212.4424	469	+171	212.5064	
		19 40.4			II	3	3−2	+8.8	−1.5	212.4445	469	+171	212.5085	
		19 57.2				3	3−2	+8.4	−1.7	203.3138	432	−171	203.3399	
Nov.	5	19 42.2	v	10.20	I	2−1	2−1	+18.0	+0.1	212.4874	200	+126	212.5200	
		19 57.4				2	2	+17.5	−0.2	203.3264	173	−126	203.3311	
		20 13.5			II	2	2	+16.9	−0.5	203.3206	178	−126	203.3258	
		20 30.4				2	2	+16.4	−0.8	212.4911	191	+126	212.5228	
	6	19 51.1	v	10.20	II	2−3	2−3	+14.5	−0.6	203.3321	188	−124	203.3385	
		20 7.9				2−3	2−3	+14.0	−0.8	212.4758	217	+124	212.5099	
		20 25.1			I	3	3	+13.5	−1.1	212.4819	214	+124	212.5157	
		20 40.6				3	3	+13.0	−1.3	203.3251	207	−124	203.3336	
	11	19 56.9	v	10.00	II	2−3	3	+11.1	−0.2	212.4522	462	+113	212.5097	
		20 14.6				3	3	+10.4	−0.6	203.2960	429	−113	203.3276	
		20 32.5			I	3−2	3	+9.8	−0.9	203.2948	434	−113	203.3269	
		20 49.0				3−2	3	+9.2	−1.3	212.4535	445	+113	212.5093	

11) Mondschein, etwas dunstig.
12) Plötzlich klar geworden, Mondschein.
13) Mondschein, einzelne Wolken, dann völlig trübe.

1899	Θ	G	Ocs	P	R	S	K	K−S	Δ_g	Σ_c	RE	Δ_r	
Nov. 21	20ʰ53ᵐ6	v	9.90	II	3−2	2	+1°9	−2°1	203ᵖ2699	586	−90	203ᵖ3195	
	21 11.2				3−2	2−3	+1.4	−2.2	212.4572	595	+90	212.5257	
	21 29.1			I	3−2	2−3	+1.0	−2.4	212.4433	587	+90	212.5110	
	21 45.7				3−2	2−3	+0.6	−2.5	203.2767	594	−90	203.3271	
Dec. 1	21 18.0	v	10.00	II	2	2	+5.3	−1.5	212.4638	457	+68	212.5163	
	21 35.8				2−3	2−3	+5.1	−1.5	203.2898	468	−68	203.3298	
	21 49.9			I	2	2	+5.0	−1.6	203.2888	469	−68	203.3289	
	22 7.3				2	2	+4.8	−1.6	212.4649	438	+68	212.5155	
8	21 44.3	v	9.80	I	2	2	−2.2	−1.1	203.2700	737	−52	203.3385	
	22 0.2				2	2−3	−2.6	−1.3	212.4538	721	+52	212.5311	
	22 15.6			II	2−3	3−2	−3.1	−1.5	212.4548	714	+52	212.5314	
	22 31.4				2	2−3	−3.5	−1.7	203.2746	733	−52	203.3427	
18	22 30.9	v	9.90	I	3	3−2	−2.3	−1.1	212.4520	613	+30	212.5163	
	22 48.3				3−2	2−3	−3.2	−1.5	203.2732	643	−30	203.3345	
19	22 25.5	v	9.90	I	2−3	2−3	−2.3	−1.0	212.4599	618	+27	212.5244	14
	22 43.5				2−3	2−3	−2.9	−1.2	203.2684	648	−27	203.3305	
	23 3.8			II	3−2	3−2	−3.6	−1.5	203.2764	644	−27	203.3381	
	23 38.4				2−3	2−3	−4.6	−1.9	212.4717	598	+27	212.5342	
20	22 33.0	v	9.80	I	3	3	−2.9	−1.0	203.2486	749	−25	203.3210	15
	22 51.1				3	3	−3.6	−1.3	212.4388	712	+25	212.5125	
	23 9.0			II	3	3	−4.2	−1.6	212.4498	704	+25	212.5227	
	23 26.6				3	3	−4.8	−1.9	203.2630	729	−25	203.3334	
26	22 44.3	v	9.90	I	3−2	3−2	+0.2	−0.8	212.4732	575	+12	212.5319	
	23 10.1				3	3	−0.6	−1.2	203.2819	604	−12	203.3411	
	23 28.7			II	3	3−2	−1.1	−1.4	203.2775	597	−12	203.3360	
	23 44.1				3	3−2	−1.6	−1.7	212.4628	555	+12	212.5195	
1900 Jan. 15	0 30.6	v	9.80	I	3−2	2−3	−6.5	−0.9	203.2624	722	+34	203.3380	
	0 47.4				2−3	2	−6.9	−1.2	212.4779	731	−33	212.5477	
	1 8.0			II	3−2	3−2	−7.4	−1.5	212.4609	745	−33	212.5321	
	1 25.3				2−3	3−2	−7.7	−1.8	203.2691	684	+34	203.3409	
Febr. 1	2 12.3	v	9.90	II	2	3−2	−1.2	−1.4	212.4647	699	−72	212.5274	16
	2 30.0				3	3	−1.6	−1.6	203.2629	538	+72	203.3239	
2	2 10.1	v	9.90	II	3	3−2	+1.6	−0.2	203.2593	530	+74	203.3197	
	2 26.4				3	3	+1.0	−0.5	212.4465	731	−74	212.5122	
	2 44.9			I	3−2	2−3	+0.4	−0.9	212.4599	787	−74	212.5312	
	3 4.5				3	3	−0.2	−1.3	203.2567	555	+74	203.3196	
8	2 36.3	v	9.80	II	3−2	2−3	−4.1	−2.2	212.4423	886	−87	212.5222	
	2 53.7				3	3	−4.6	−2.4	203.2572	665	+88	203.3325	
	3 11.4			I	2−3	2	−5.1	−2.7	203.2401	682	+88	203.3171	
	3 31.2				2−3	2	−5.7	−2.9	212.4156	1108	−87	212.5177	
9	2 50.5	v	9.80	II	2−3	2	−4.2	−1.4	203.2434	679	+90	203.3203	17
	3 5.7				2	2	−4.6	−1.7	212.4387	1009	−90	212.5306	
	3 22.1			I	3−2	2−3	−5.1	−2.1	212.4188	1077	−90	212.5175	
	3 37.9				3−2	3−2	−5.5	−2.4	203.2440	740	+90	203.3270	
12	2 31.8	v	9.90	II	3−2	2−3	+1.4	−1.2	212.4672	726	−96	212.5302	18
	2 50.0				3−2	3−2	+0.6	−1.6	203.2654	526	+97	203.3277	
	3 9.6			I	3	3−2	−0.3	−2.0	203.2596	546	+97	203.3239	
	3 28.1				3	3	−1.1	−2.4	212.4343	940	−96	212.5187	

14) Am Schluss dichter Nebel.
15) Sterne sehr verwaschen.
16) Wurde total trübe.
17) War plötzlich klar geworden; Mondschein.
18) Meist durch leichtes Gewölk beobachtet, am Schluss völlig umzogen.

1900	Θ	G	Ocs	P	R	S	K	$K-S$	Δ_g	Σ_c	RE	Δ_r	
Febr. 13	$2^h 40^m.4$	v	9.90	II	3—2	3—2	+ 2°.4	— 0°.3	203p.2613	535	+ 99	203p.3247	
	2 59.0				2—3	2	+ 1.5	— 0.9	212.4428	833	— 99	212.5162	19
	3 20.3			I	3—2	2—3	+ 0.6	— 1.5	212.4296	916	— 99	212.5113	
	3 44.8				3	2—3	— 0.5	— 2.2	203.2548	610	+ 99	203.3257	
25	4 23.9	v	10.00	I	3—4	3—4	+ 14.3	+ 0.2	212.4268	1037	— 126	212.5179	
	4 39.4				3—2	2—3	+ 13.9	— 0.1	203.2601	605	+ 126	203.3332	
	4 59.4			II	3	3—2	+ 13.4	— 0.5	203.2405	690	+ 126	203.3221	
	5 25.9				3	3	+ 12.7	— 1.0	212.4061	1398	— 126	212.5333	
April 20	11 27.0	f	10.00	I	2—3	2	+ 12.0	— 2.1	203.1860	1264	+ 248	203.3372	
	11 47.5				3	2	+ 11.6	— 2.2	212.4700	802	— 247	212.5255	
	12 8.0			II	3	2	+ 11.2	— 2.4	212.4778	706	— 247	212.5237	
	12 34.1				3	2	+ 10.7	— 2.5	203.2131	927	+ 248	203.3306	
23	10 43.6	f	10.00	I	2	3—2	+ 10.2	— 2.5	212.4213	1131	— 254	212.5090	
	11 3.6				3—2	2—3	+ 9.8	— 2.5	203.1716	1378	+ 255	203.3349	
	11 23.2			II	3—2	2—3	+ 9.3	— 2.4	203.1893	1285	+ 255	203.3433	
	11 43.4				2	2	+ 8.9	— 2.3	212.4570	826	— 254	212.5142	
Mai 5	12 6.9	f	10.20	I	2—3	2—3	+ 15.2	— 2.3	203.2275	811	+ 282	203.3368	
	12 25.5				3—2	2—3	+ 14.8	— 2.1	212.4915	399	— 281	212.5033	
	12 50.8			II	3—2	3—2	+ 14.4	— 1.7	212.5008	311	— 281	212.5038	
	13 11.0				3—2	3—2	+ 14.2	— 1.6	203.2452	551	+ 282	203.3285	
Aug. 6	17 38.9	f	10.20	II	3—2	3—2	+ 17.2	— 2.4	212.5376	161	— 490	212.5047	
	18 3.1				2—3	3	+ 16.4	— 2.6	203.2680	127	+ 491	203.3298	20
9	17 32.7	f	10.20	II	2	2	+ 17.6	— 1.1	203.2693	145	+ 498	203.3336	
	17 47.5				2	2	+ 17.0	— 1.3	212.5313	192	— 497	212.5008	21
	18 5.3			I	3—2	2—3	+ 16.4	— 1.6	212.5301	198	— 497	212.5002	
	18 23.8				2—3	2	+ 15.7	— 1.9	203.2675	154	+ 498	203.3327	
12	18 54.8	f	10.10	II	2	3—2	+ 15.4	— 2.2	212.5113	311	— 503	212.4921	
	19 16.3				3	3	+ 14.8	— 2.4	203.2455	272	+ 505	203.3232	
	19 36.8			I	2—3	3—2	+ 14.3	— 2.5	203.2609	284	+ 505	203.3398	
	20 0.4				3	3	+ 13.7	— 2.6	212.5320	327	— 503	212.5144	
19	17 42.1	f	10.30	II	3	2—3	+ 26.1	— 1.9	203.2695	—47	+ 520	203.3168	
	17 59.6				3	2	+ 25.4	— 2.1	212.5500	— 1	— 519	212.4980	
	18 19.5			I	2—3	2	+ 24.7	— 2.2	212.5487	+ 9	— 519	212.4977	
	18 33.6				2	2	+ 24.1	— 2.3	203.2796	—23	+ 520	203.3293	
20	16 56.5	f	10.25	I	2—3	2	+ 26.4	— 1.5	212.5500	22	— 521	212.5001	
	17 15.9				3—2	2	+ 25.7	— 1.7	203.2835	2	+ 523	203.3360	
	17 33.2			II	3—2	2	+ 25.2	— 1.8	203.2751	6	+ 523	203.3280	
	17 48.5				3	2—3	+ 24.7	— 2.0	212.5518	47	— 521	212.5044	
31	17 29.2	f	10.20	I	2	2	+ 21.5	— 0.3	203.2764	127	+ 547	203.3438	
	17 42.3				2	2	+ 20.8	— 0.6	212.5483	173	— 546	212.5110	22
Sept. 9	17 48.2	f	10.20	I	2	2	+ 17.5	+ 0.4	212.5396	218	— 566	212.5048	
	18 3.2				2	2	+ 16.8	0.0	203.2656	170	+ 568	203.3394	23
	18 16.2			II	2	2	+ 16.2	— 0.4	203.2570	170	+ 568	203.3308	
	18 31.7				3	2—3	+ 15.5	— 0.8	212.5421	223	— 566	212.5078	
12	17 47.5	f	10.20	I	3—2	2—3	+ 17.3	+ 0.4	203.2551	177	+ 574	203.3302	
	18 4.0				2	2	+ 16.6	— 0.1	212.5470	229	— 573	212.5126	
	18 22.5			II	3—2	2	+ 15.8	— 0.6	212.5346	230	— 573	212.5003	
	18 37.4				2	2	+ 15.1	— 1.1	203.2533	178	+ 574	203.3285	

19) Bilder wegen starken Nebels sehr wechselnd; am Schluss Mondschein.

20) Sterne nur noch sehr schwer zu sehen.

21) Am Schluss trübe.

22) Trübe.

23) Am Schluss der ganze Himmel leicht überzogen.

1900	Θ	G	Ocs	P	R	S	K	$K-S$	Δ_g	Σ_c	RE	Δ_r	
Sept. 19	17ʰ58ᵐ9	f	10.20	II	2	2	+ 23°2	− 0″5	212ᴾ5428	145	− 588	212ᴾ4985	
	18 18.5				2	2	+ 22.4	− 1.0	203.2569	102	+ 590	203.3261	
	18 36.6			I	3—2	2—3	+ 21.7	− 1.4	203.2667	105	+ 590	203.3362	
	18 55.7				3—2	2	+ 20.9	− 1.9	212.5444	152	− 588	212.5008	
20	18 0.5	f	10.10	II	2	2	+ 16.8	− 0.7	203.2439	205	+ 592	203.3281	
	18 16.5				2	2	+ 16.3	− 0.9	212.5349	311	− 591	212.5069	
	18 35.3			I	3—2	2	+ 15.7	− 1.1	212.5288	318	− 591	212.5015	
	18 53.9				3	2	+ 15.1	− 1.4	203.2475	268	+ 592	203.3335	
29	18 17.5	f	10.20	II	2	2	+ 21.0	+ 0.5	212.5491	192	− 611	212.5072	24
	18 33.4				2	2	+ 20.3	0.0	203.2499	143	+ 613	203.3255	
Oct. 8	18 37.0	f	10.20	II	3	2	+ 20.2	− 0.5	203.2505	125	+ 633	203.3263	
	18 56.4				3	2	+ 19.5	− 0.7	212.5521	181	− 631	212.5071	
	19 14.2			I	3	2	+ 18.8	− 0.9	212.5521	185	− 631	212.5075	
	19 29.5				3	2	+ 18.2	− 1.1	203.2505	152	+ 633	203.3290	
9	18 41.4	f	10.20	I	3—2	2—3	+ 20.2	− 0.5	203.2604	133	+ 635	203.3372	
	18 58.0				3	2	+ 19.2	− 0.9	212.5599	186	− 633	212.5152	
	19 17.7			II	3	2	+ 18.3	− 1.3	212.5542	188	− 633	212.5097	
	19 34.9				3	3—2	+ 17.5	− 1.6	203.2457	155	+ 635	203.3247	
13	19 20.6	f	10.10	I	3	3—2	+ 13.4	− 1.0	212.5367	342	− 642	212.5067	
	19 34.9				3—2	2—3	+ 12.8	− 1.3	203.2373	299	+ 644	203.3316	
	19 49.3			II	3—2	2—3	+ 12.1	− 1.7	203.2363	302	+ 644	203.3309	
	20 5.8				3—2	2—3	+ 11.3	− 2.1	212.5410	335	− 642	212.5103	
Dec. 8	22 17.6	v	9.90	I	2	2	+ 0.6	− 1.3	203.1772	618	+ 770	203.3160	
	22 37.5				2	2	+ 0.3	− 1.6	212.5438	578	− 768	212.5248	
	23 1.6			II	2	2	− 0.2	− 1.9	212.5479	565	− 768	212.5276	
	23 23.2				2	2	− 0.6	− 2.2	203.1892	591	+ 770	203.3253	
9	21 57.3	v	9.90	I	2—3	3	+ 2.8	− 0.4	212.5216	593	− 770	212.5039	25
	22 14.4				2—3	3	+ 2.6	− 0.6	203.1875	608	+ 772	203.3255	
	22 32.6			II	2—3	3	+ 2.4	− 0.8	203.1830	603	+ 772	203.3205	
	22 51.0				2—3	3	+ 2.2	− 1 1	212.5313	556	− 770	212.5099	
20	2 37.1	v	9.90	II	3—2	3	+ 2.0	− 1.3	203.1896	516	+ 798	203.3210	
	2 52.6				3—2	3—2	+ 1.8	− 1.4	212.5319	795	− 795	212.5319	
	3 10.2			I	3—2	3—2	+ 1.6	− 1.5	212.5183	863	− 795	212.5251	
	3 30.5				3	3	+ 1.4	− 1.7	203.1904	575	+ 798	203.3277	
21	2 31.3	v	9.90	II	3	3	+ 4.5	− 0.5	212.5327	714	− 798	212.5243	
	2 46.1				3—2	3	+ 4.4	− 0.6	203.1850	510	+ 800	203.3160	
	3 3.4			I	3—2	2—3	+ 4.2	− 0.8	203.1919	524	+ 800	203.3243	
	3 18.6				2—3	2—3	+ 4.1	− 0.9	212.5091	883	− 798	212.5176	
1901 Jan. 2	0 12.7	v	9.80	II	2	2	− 8.8	− 1.8	203.1803	742	+ 827	203.3372	26
	0 33.3				2	2	− 9.1	− 2.2	212.5388	732	− 824	212.5296	
	0 52.2			I	2—3	2—3	− 9.5	− 2.5	212.5484	740	− 824	212.5400	
	1 11.5				3	3	− 9.7	− 2.7	203.1755	699	+ 827	203.3281	
3	23 46.9	v	9.80	II	2	2	− 8.6	− 1.4	212.5289	741	− 826	212.5204	
	0 11.1				3—2	2	− 9.1	− 1.7	203.1710	751	+ 829	203.3290	
	0 29.3			I	2—3	2—3	− 9.7	− 1.8	203.1705	744	+ 829	203.3278	
	0 45.3				2—3	2—3	− 9.9	− 2.0	212.5345	753	− 826	212.5272	
8	0 47.7	v	9.90	I	3	3	− 1.9	+ 0.1	203.1859	596	+ 840	203.3295	
	1 3.7				3	3	− 2.1	− 0.1	212.5632	623	− 838	212.5417	
	1 24.7			II	3	3—2	− 2.4	− 0.3	212.5568	641	− 838	212.5371	
	1 41.7				3	3—2	− 2.6	− 0.6	203.1802	564	+ 840	203.3206	

24) Am Schluss total trübe.

25) Verwaschenheit der Bilder sehr auffallend; bei Ocs = 10.10 scheinen dieselben schärfer zu werden; es wurde bald nach Schluss trübe.

26) Uhrwerk geheizt, geht trotzdem sehr schlecht; Spalt nahe am Uhrwerk.

1901	Θ	G	Oes	P	R	S	K	K—S	Δ_g	Σ_c	RE	Δ_r	
Jan. 17	2^h32^m1	v	9.80	I	3—2	2	—5°2	—0°9	212^{p}4787	913	— 858	212^{p}4842	
	2 50.5				3—2	2	—5.6	—1.2	203.1670	696	+ 860	203.3226	
	3 9.9			II	3	2	—6.2	—1.5	203.1781	718	+ 860	203.3359	
	3 30.8				3	2—3	—6.7	—1.8	212.5021	1150	— 858	212.5313	
18	1 28.5	v	9.80	I	3	3	—4.2	—0.3	203.1543	688	+ 863	203.3094	27
	1 44.9				3	3	—4.6	—0.7	212.5204	792	— 860	212.5136	
23	1 28.8	v	10.00	I	2	2	+6.1	—0.2	212.5603	482	— 871	212.5208	
	1 45.7				2—3	2	+5.5	—0.6	203.1886	404	+ 874	203.3164	
	2 1.8			II	2	2	+4.9	—0.9	203.1877	402	+ 874	203.3153	
	2 17.0				2	2	+4.3	—1.3	212.5529	571	— 871	212.5229	
25	5 14.4	v	9.90	II	3	3	+3.0	—1.1	203.1305	949	+ 879	203.3133	
	5 30.5				3—2	2—3	+2.9	—1.2	212.4551	1648	— 876	212.5323	
	5 49.2			I	3	2—3	+2.8	—1.3	212.4366	1757	— 876	212.5247	
	6 4.3				2—3	2—3	+2.7	—1.4	203.1050	1240	+ 879	203.3169	
Febr. 3	3 29.8	v	9.90	II	3	2	—0.5	—1.3	212.5095	981	— 896	212.5180	28
	3 44.6				3	2	—1.0	—1.6	203.1712	627	+ 899	203.3238	
	4 7.1			I	3	2—3	—1.7	—2.0	203.1662	687	+ 899	203.3248	
	4 22.2				3—2	2	—2.2	—2.3	212.4894	1251	— 896	212.5249	
7	5 24.7	v	9.80	II	3—2	2	—3.5	—1.6	203.1025	1186	+ 908	203.3119	29
	5 42.7				3	2	—4.0	—2.1	212.4364	1931	— 905	212.5390	
10	3 8.2	v	9.90	II	1	1	+0.3	—0.8	212.5228	891	— 912	212.5207	
	3 22.8				2—1	2—1	0.0	—1.0	203.1717	595	+ 915	203.3227	
	3 40.8			I	2—1	2—1	—0.4	—1.2	203.1658	632	+ 915	203.3205	
	3 55.0				2—1	2—1	—0.6	—1.3	212.5120	1116	— 912	212.5324	
11	4 2.5	v	9.90	I	3	3	—2.6	—1.2	203.1571	712	+ 917	203.3200	
	4 18.4				3	3	—3.3	—1.6	212.4767	1279	— 914	212.5132	
	4 34.3			II	3	3	—4.0	—2.1	212.4903	1375	— 914	212.5364	
	4 50.4				3	3	—4.7	—2.6	203.1492	891	+ 917	203.3300	
12	4 10.3	v	9.80	I	3	2	—3.0	—1.2	212.4751	1341	— 916	212.5176	
	4 23.4				3	2	—3.6	—1.6	203.1395	882	+ 919	203.3196	
	4 37.4			II	3	2	—4.3	—1.9	203.1329	938	+ 919	203.3186	
	4 52.2				3—4	2—3	—5.0	—2.3	212.4615	1602	— 916	212.5301	
März 13	5 38.7	f	10.00	I	3—2	2—3	+8.6	+0.2	203.1162	975	+ 984	203.3121	
	5 54.8				3—2	2—3	+8.1	0.0	212.4550	1662	— 982	212.5230	30
26	6 43.8	f	9.90	I	2	2	+0.3	—1.4	212.3872	2071	— 1011	212.4932	
	7 2.9				2	2	—0.4	—1.9	203.0511	1659	+ 1014	203.3184	
	7 25.1			II	3	2	—1.3	—2.5	203.0344	1777	+ 1014	203.3135	
	7 44.0				3	2	—2.0	—3.0	212.4129	2167	— 1011	212.5285	
29	7 3.2	f	9.90	II	3—2	2—3	+2.2	—1.5	203.0645	1637	+ 1020	203.3302	
	7 20.3				3—2	2	+1.7	—1.7	212.3974	2133	— 1018	212.5089	
	7 41.3			I	3	3	+1.0	—2.0	212.4241	2149	— 1018	212.5372	
	8 3.8				3	3	+0.3	—2.3	203.0516	1923	+ 1020	203.3459	
April 2	9 49.7	f	10.00	II	3	3	+8.8	—1.8	212.4597	1496	— 1027	212.5066	31
	10 9.1				3	3	+8.3	—1.9	203.0514	1664	+ 1030	203.3208	
	10 26.9			I	3	3	+7.7	—2.0	203.0643	1595	+ 1030	203.3268	
	10 44.2				3	3	+7.2	—2.1	212.5052	1174	— 1027	212.5199	

27) Weiteres Messen unmöglich wegen zu schlechten Bildern.

28) Fliegende Nebel, wurde bald nach Schluss trübe.

29) Fliegende Nebel; abgebrochen, da die Bilder rasch sehr schlecht wurden.

30) Durch Wolken; dann ganz trübe.

31) Himmel nicht ganz rein, Mondschein.

1901	Θ	G	Ocs	P	R	S	K	K—S	$\varDelta_g$	Σ_r	RE	$\varDelta_r$	
April 20	$12^{h}44^{m}.2$	f	10.00	II	2	2	+ 7°.2	— 1°.5	$212^{p}.5586$	629	— 1067	$212^{p}.5148$	32
	13 10.9				3	3—2	+ 6.3	— 1.9	203.1366	819	+ 1070	203.3255	
21	10 41.3	f	10.00	II	3—2	2—3	+ 10.6	— 2.2	203.0663	1488	+ 1073	203.3224	
	11 1.8				2—3	2—3	+ 10.1	— 2.3	212.5199	1036	— 1070	212.5165	
	11 19.8			I	3	3	+ 9.8	— 2.3	212.5276	940	— 1070	212.5146	
	11 37.6				2—3	3	+ 9.4	— 2.4	203.1269	1211	+ 1073	203.3553	
22	10 35.0	f	10.00	I	3—2	2—3	+ 11.2	— 1.8	212.5052	1194	— 1072	212.5174	
	10 51.0				3—2	2—3	+ 10.8	— 1.9	203.0881	1448	+ 1075	203.3404	
	11 10.0			II	3—2	3—2	+ 10.3	— 2.2	203.0801	1354	+ 1075	203.3230	
	11 30.1				3—2	2—3	+ 9.8	— 2.4	212.5295	885	— 1072	212.5108	
26	10 59.7	f	9.90	I	2—3	3	+ 7.3	— 0.7	203.0556	1563	+ 1084	203.3203	
	11 14.2				3—2	3	+ 6.8	— 1.0	212.4959	1130	— 1081	212.5008	
29	11 8.1	f	10.10	I	3—2	2—3	+ 14.9	— 0.8	212.5220	880	— 1088	212.5012	
	11 24.5				3—2	2—3	+ 14.2	— 1.1	203.1022	1154	+ 1090	203.3266	
	11 43.6			II	3—2	2—3	+ 13.4	— 1.5	203.1105	1054	+ 1090	203.3249	
	12 0.5				3	3	+ 12.7	— 1.9	212.5609	619	— 1088	212.5140	
Mai 4	12 14.2	f	10.10	I	3	3	+ 10.4	— 1.8	203.1103	937	+ 1102	203.3142	33
	12 33.4				3—2	3—2	+ 9.7	— 2.0	212.5535	529	— 1099	212.4965	
13	11 53.6	f	10.20	II	3	3—2	+ 18.1	— 1.5	212.5536	561	— 1119	212.4978	
	12 9.9				3	3—2	+ 17.7	— 1.6	203.1277	840	+ 1122	203.3239	
	12 23.8			I	3	3—2	+ 17.3	— 1.7	203.1420	769	+ 1122	203.3311	
	12 36.6				3	3	+ 16.9	— 1.7	212.5746	387	— 1119	212.5014	
22	12 53.9	f	10.10	II	3	3	+ 14.3	— 1.4	203.1319	739	+ 1142	203.3200	
	13 13.9				3—2	3—2	+ 13.6	— 1.6	212.5745	398	— 1139	212.5004	
	13 30.2			I	3—2	3	+ 13.0	— 1.8	212.5805	364	— 1139	212.5030	
	13 48.7				3	3	+ 12.4	— 2.0	203.1622	538	+ 1142	203.3302	
28	15 9.5	f	10.20	II	3	2	+ 18.7	— 2.0	212.6123	106	— 1153	212.5076	34
	15 25.7				3	2	+ 18.1	— 2.2	203.1961	168	+ 1156	203.3285	
	15 43.5			I	3	3—2	+ 17.6	— 2.5	203.1897	144	+ 1156	203.3197	
	15 57.3				3	2	+ 17.0	— 2.7	212.6023	107	— 1153	212.4977	
Juni 5	13 7.4	f	10.20	II	2	2	+ 21.8	— 1.5	203.1587	505	+ 1174	203.3266	
	13 23.1				2	2	+ 21.3	— 1.8	212.5925	200	— 1171	212.4954	
	13 39.0			I	3	3—2	+ 20.8	— 2.1	212.6007	168	— 1171	212.5004	
	13 54.4				3	3—2	+ 20.3	— 2.3	203.1688	340	+ 1174	203 3202	
7	13 40.4	f	10.10	I	3	3	+ 16.8	— 2.2	212.5947	301	— 1175	212.5073	
	13 55.1				3	3	+ 16.4	— 2.3	203.1590	470	+ 1178	203.3238	
	14 10.7			II	3	3	+ 16.0	— 2.5	203.1655	426	+ 1178	203.3259	
	14 27.7				3	3	+ 15.6	— 2.6	212.5937	246	— 1175	212.5008	
14	14 4.1	f	10.10	I	3	3—2	+ 18.2	— 0.4	203.1499	468	+ 1194	203 3161	35
	14 23 3				3	3—2	+ 17.4	— 0.8	212.5834	274	— 1191	212.4917	
	14 45.1			II	3	3	+ 16.5	— 1.3	212.6023	255	— 1191	212.5087	
	15 9.2				3	3	+ 15.6	— 1.9	203.1697	318	+ 1194	203.3209	
20	14 47.6	f	10.20	I	3	2—3	+ 19.2	— 1.5	212.5953	132	— 1204	212.4881	
	15 8.4				3—2	2—3	+ 18.7	— 1.6	203.1740	210	+ 1208	203.3158	
	15 30.7			II	3	3—2	+ 18.2	— 1.7	203.1812	181	+ 1208	203.3201	
	15 50.3				3	2—3	+ 17.7	— 1.8	212.6046	132	— 1204	212.4974	

32) Abgebrochen wegen kolossaler Refractionsschwankungen.

33) Alles bei wechselnder Bewölkung gemessen, am Schluss ganz trübe.

34) Mondschein, dunstig.

35) Vieles durch leichte vorüberziehende Wolken beobachtet.

1901	Θ	G	Ocs	P	R	S	K	K—S	Δ_g	Σ_c	RE	Δ_r	
Juni 23	$14^h 46^m 6$	f	10.30	I	3—2	2—3	$+23^{\circ}9$	$-1^{\circ}9$	$203^p 1983$	94	+ 1214	$203^p 3291$	36)
	15 7.3				3	2	+ 23.4	— 2.1	212.6167	—33	— 1211	212.4923	
28	15 33.0	f	10.20	II	3—2	2—3	+ 17.6	— 1.8	203.1988	184	+ 1226	203.3398	
	15 48.1				3	3—2	+ 17.2	— 1.9	212.6051	136	— 1222	212.4965	
	16 5.0			I	3	3—2	+ 16.7	— 2.0	212.6110	141	— 1222	212.5029	
	16 23.0				3	3	+ 16.2	— 2.1	203.1877	149	+ 1226	203.3252	
30	17 12.8	f	10.20	II	3	3	+ 19.9	— 1.6	212.6040	142	— 1227	212.4955	
	17 30.9				3	2—3	+ 19.2	— 1.8	203.1896	115	+ 1230	203.3241	
	17 50.0			I	3	2—3	+ 18.5	— 2.0	203.1858	117	+ 1230	203.3205	
	18 9.3				3	3	+ 17.8	— 2.2	212.5988	169	— 1227	212.4930	
Juli 7	18 0.2	f	10.20	II	2—3	2	+ 18.7	— 0.9	203.1851	148	+ 1246	203.3245	
	18 16.8				2	2	+ 18.1	— 1.2	212.6057	196	— 1242	212.5011	
	18 36.1			I	2	2	+ 17.4	— 1.4	212.6094	203	— 1242	212.5055	
	18 59.5				2	2	+ 16.5	— 1.8	203.1904	168	+ 1246	203.3318	
8	16 0.3	f	10.20	II	2	3—2	+ 19.5	— 0.6	212.6094	148	— 1245	212.4997	
	16 19.1				3—2	2—3	+ 19.0	— 0.9	203.1952	151	+ 1248	203.3351	
	16 36.1			I	2—3	2—3	+ 18.6	— 1.0	203.1826	145	+ 1248	203.3219	
	16 53.4				2—3	2—3	+ 18.2	— 1.2	212.6064	162	— 1245	212.4981	
10	16 26.1	f	10.20	I	3—2	3—2	+ 22.1	— 1.5	203.1784	104	+ 1253	203.3141	
	16 41.8				3	3	+ 21.8	— 1.5	212.6103	114	— 1249	212.4968	
	17 0.6			II	3—2	3—2	+ 21.5	— 1.5	212.6029	124	— 1249	212.4904	
	17 16.2				2—3	3—2	+ 21.2	— 1.5	203.1891	101	+ 1253	203.3245	
11	16 5.0	f	10.20	I	3—2	2—3	+ 23.6	— 2.1	212.6240	75	— 1252	212.5063	
	16 26.2				2—3	2	+ 22.9	— 2.3	203.1868	83	+ 1255	203.3206	
	16 48.6			II	3	2—3	+ 22.3	— 2.5	203.1889	76	+ 1255	203.3220	
	17 6.9				3	3—2	+ 21.7	— 2.7	212.6057	101	— 1252	212.4906	
16	16 1.7	f	10.20	I	2—3	3—2	+ 21.4	— 1.5	203.1762	130	+ 1266	203.3158	
	16 15.0				3—2	2—3	+ 21.1	— 1.6	212.6184	115	— 1262	212.5037	
	16 31.7			II	2—3	2—3	+ 20.8	— 1.6	212.6176	123	— 1262	212.5037	
	16 47.8				2—3	2—3	+ 20.4	— 1.7	203.1888	111	+ 1266	203.3265	
17	16 41.2	f	10.20	I	3	3	+ 22.8	— 1.6	212.6250	111	— 1265	212.5096	
	16 58.1				3	3	+ 22.4	— 1.6	203.1858	95	+ 1269	203.3222	
	17 13.7			II	3	3	+ 22.0	— 1.7	203.1827	95	+ 1269	203.3191	
	17 29.0				3	3	+ 21.7	— 1.7	212.6093	135	— 1265	212.4963	

36) Abgebrochen wegen Refractionsschwankungen langer Periode.

Zu erwähnen ist noch, dass die Beobachtungen durchweg bei mässig erhelltem Felde angestellt sind. Auch in den Fällen, wo der Anfang der Messungen in die helle Dämmerung fiel, wurde von vornherein die Feldbeleuchtung verwendet; das Gesichtsfeld erhielt dadurch den röthlich gelben Farbton, den es bei Feldbeleuchtung annimmt. — Die Kuppel wurde immer reichliche Zeit vor Beginn der Beobachtungen geöffnet, so dass ein ziemlich vollkommener Temperaturausgleich erreicht werden konnte. Nur in den Fällen plötzlich eingetretener Aufklärung erfolgte das Oeffnen der Kuppel erst unmittelbar vor der Beobachtung.

Dass zur Ablesung der Scalen immer die nämlichen Strichcombinationen benutzt wurden, um von den Theilungsfehlern ganz unabhängig zu sein und den rein differentiellen Character der Messungen zu wahren, bedarf nur der Erwähnung.

Für die Positionswinkel an σ Draconis nach den Vergleichsternen v und z findet man $357^\circ 15'.7$ und $150^\circ 7'.2$ und hiermit ergiebt sich für die Parallaxe in Distanz

$$\text{bei } xv: \quad 0.9999\,\pi R \cos(\odot - 294^\circ 18'.2)$$
$$\text{bei } xz: \quad 0.9982\,\pi R \cos(\odot - 141^\circ\ 7'.9)$$

Die Summe und die Differenz der Distanzen wird daher durch die Parallaxe von σ Draconis um die folgenden Beträge geändert

$$xv + xz: \quad 0.4635\,\pi R \cos(\odot - 217^\circ 55'.2)$$
$$xv - xz: \quad 1.9436\,\pi R \cos(\odot - 307^\circ 42'.3)$$

Auf die Differenz der Distanzen $xv - xz$ erreicht die Wirkung der Parallaxe ihr Maximum am 27. Januar und 30. Juli.

Für die Reduction auf gemeinsamen Scalenwerth sind zu Grunde gelegt

$$xv + xz = S_0 = 415^p.8438$$
$$xv - xz = D_0 = 9.1890$$

Es sind dies die Mittelwerthe der Beobachtungen bis 1901 Mai 22. Mit ihnen ergiebt sich für den Betrag der Reduction auf gemeinsamen Scalenwerth

$$c_s = \frac{D_0}{S_0}(S_0 - S) = 0.0221\,(S_0 - S).$$

Hierin sind S und D die einzelnen Abendwerthe von $xv + xz$ und $xv - xz$.

Theoretisch wäre es nöthig, hierbei die von Parallaxe befreiten Summen $xv + xz$ zu verwenden, wozu Kenntniss der Parallaxe erforderlich ist. Eventuell wäre also die Ausgleichung der Beobachtungen doppelt durchzuführen. Im vorliegenden Falle kann für die Reduction auf gleichen Scalenwerth der Einfluss der Parallaxe auf die Summen $xv + xz$ vollständig vernachlässigt werden. Nach Brünnows Bestimmung hat σ Draconis eine Parallaxe von $0''.25$. Es entspricht dies in Scalentheilen des Leipziger

Heliometers einem Betrage von 0ᵖ0113. Mit Benutzung dieses Werthes wäre der Einfluss der Parallaxe auf die Summe der Distanzen im Maximum $0.4635 \times 0^p0113 = 0^p0052$, die im Betrage von c_i begangene Vernachlässigung betrüge daher höchstens $0.0221 \times 0^p0052 = 0^p00011$.

In der nachfolgenden Tabelle sind die Grössen $(xv + xz)$ mit dem aus meinen eigenen Beobachtungen folgenden Werthe $\pi = 0^p0080$ von Parallaxe befreit worden. Es geschah dies, da diese Grössen weiterhin einer Discussion unterworfen werden sollen, bei der die Anbringung einer derartigen Reduction nothwendige Voraussetzung ist. Im Uebrigen bedürfen die nachstehenden Zahlen keiner weiteren Erläuterung. Halbes Gewicht haben diejenigen Tage erhalten, an denen Beobachtungen nur in einer Stellung des Positionskreises erhalten worden sind.

			xv	xz	$xv + xz$	$xv - xz + c_i$	
1898	Sept.	14	212ᵖ4842	203ᵖ3244	415ᵖ8060	9ᵖ1606	
		15	4965	3301	8240	1668	
		17	5059	3335	8367	1725	
	Oct.	28	5152	3252	8367	1901	
	Nov.	2	5117	3279	8359	1839	
		4	5158	3352	8473	1804	
		8	5143	3249	8356	1895	
	Dec.	5	5172	3297	8439	1874	
		6	5140	3266	8377	1875	
1899	Jan.	6	5195	3317	8498	1876	
		9	5298	3344	8630	1949	
		10	5206	3207	8402	2000	
		26	5259	3293	8551	1963	
		27	5254	3284	8538	1968	
		30	5255	3333	8590	1919	
	Febr.	1	5290	3157	8450	2133	Gew. ½
		6	5240	3250	8496	1989	
		10	5199	3224	8432	1975	
	März	5	5411	3256	8689	2150	
		12	5208	3237	8471	1971	
		25	5252	3317	8600	1932	
		28	5192	3196	8420	1997	
	Mai	24	5100	3359	8493	1741	
	Juni	4	5038	3369	8437	1670	
		5	5155	3257	8442	1899	
		7	5061	3391	8481	1670	
		8	4993	3361	8383	1634	
		18	4995	3360	8380	1637	
		28	5023	3399	8441	1624	
	Juli	17	5083	3322	8413	1762	

			xv	xz	$xv + xz$	$xv - xz + c_s$	
1899	Juli	19	212ᵖ5119	203ᵖ3411	415ᵖ8537	9ᵖ1706	
		20	5059	3428	8494	1630	
		21	5037	3406	8449	1631	
	Aug.	1	5081	3396	8476	1684	
		2	5003	3382	8383	1622	
		6	5049	3340	8385	1710	
		9	5034	3345	8373	1690	
		10	5042	3350	8385	1693	
		24	4988	3254	8227	1738	
		26	5028	3415	8427	1613	
		27	5091	3324	8398	1768	
	Oct.	9	5248	3355	8569	1889	
		13	5162	3409	8536	1750	
		14	5223	3385	8573	1834	Gew. $\frac{1}{2}$
		15	5173	3336	8473	1835	
		16	5074	3389	8427	1684	
	Nov.	5	5214	3284	8461	1929	
		6	5128	3360	8451	1767	
		11	5095	3272	8331	1825	
		21	5183	3233	8382	1950	
	Dec.	1	5159	3293	8421	1866	
		8	5312	3406	8689	1900	
		18	5163	3345	8484	1816	Gew. $\frac{1}{2}$
		19	5293	3343	8612	1946	
		20	5176	3272	8425	1904	
		26	5257	3385	8622	1867	
1900	Jan.	15	5399	3394	8785	1997	
	Febr.	1	5274	3239	8516	2033	Gew. $\frac{1}{2}$
		2	5217	3196	8417	2023	
		8	5199	3248	8454	1951	
		9	5240	3236	8484	2003	
		12	5244	3258	8512	1985	
		13	5137	3252	8399	1886	
		25	5256	3276	8550	1978	
	April	20	5246	3339	8622	1904	
		23	5116	3391	8544	1723	
	Mai	5	5035	3326	8398	1711	
	Aug.	6	5047	3298	8341	1751	Gew. $\frac{1}{2}$
		9	5005	3361	8360	1646	
		12	5032	3315	8339	1719	
		19	4978	3230	8196	1753	
		20	5022	3320	8330	1704	
		31	5110	3438	8529	1670	Gew. $\frac{1}{2}$
	Sept.	9	5063	3351	8391	1713	
		12	5064	3293	8332	1773	
		19	4996	3311	8279	1688	
		20	5042	3308	8322	1736	
		29	5072	3255	8295	1819	Gew. $\frac{1}{2}$
	Oct.	8	5073	3276	8315	1799	
		9	5124	3309	8399	1815	

			xv	xz	$xv+xz$	$xv-xz+c_4$	
1900	Oct.	13	212ᵖ5085	203ᵖ3312	415ᵖ8362	9ᵖ1774	
	Dec.	8	5262	3206	8439	2055	
		9	5069	3230	8271	1842	
		20	5285	3243	8505	2040	
		21	5209	3201	8387	2009	
1901	Jan.	2	5348	3326	8658	2017	
		3	5238	3284	8506	1952	
		8	5394	3250	8631	2139	
		17	5077	3292	8362	1787	
		18	5136	3094	8224	2047	Gew. $\frac{1}{2}$
		23	5221	3158	8376	2064	
		25	5285	3151	8434	2134	
	Febr.	3	5214	3243	8461	1971	
		7	5390	3119	8516	2269	Gew. $\frac{1}{2}$
		10	5265	3216	8489	2048	
		11	5248	3250	8507	1997	
		12	5238	3191	8439	2047	
	März	13	5230	3121	8377	2111	Gew. $\frac{1}{2}$
		26	5108	3159	8298	1953	
		29	5230	3380	8642	1846	
	April	2	5132	3238	8404	1895	
		20	5148	3255	8440	1894	Gew. $\frac{1}{2}$
		21	5155	3388	8580	1765	
		22	5141	3317	8495	1824	
		26	5008	3203	8248	1810	Gew. $\frac{1}{2}$
		29	5076	3257	8370	1821	
	Mai	4	4965	3142	8144	1830	Gew. $\frac{1}{2}$
		13	4996	3275	8307	1725	
		22	5017	3251	8303	1770	
		28	5026	3241	8300	1789	
	Juni	5	4979	3234	8243	1750	
		7	5040	3248	8317	1795	
		14	5002	3185	8214	1823	
		20	4927	3179	8130	1755	
		23	4923	3291	8236	1637	Gew. $\frac{1}{2}$
		28	4997	3325	8342	1675	
		30	4942	3223	8184	1725	
	Juli	7	5033	3281	8329	1745	
		8	4989	3285	8288	1708	
		10	4936	3193	8142	1750	
		11	4984	3213	8209	1776	
		16	5037	3211	8257	1830	
		17	5029	3206	8244	1827	

Bei der Aufstellung der Beobachtungsgleichungen ist auch auf den Einfluss der atmosphärischen Dispersion[1]) Rücksicht ge-

1) Näheres über diesen Gegenstand findet sich Monthly Notices Bd. 55 Nr. 3 (Rambaut), Bd. 58 Nr. 2 (Gill) und Astronomische Nachrichten Nr. 3715—6 (Peter).

nommen und eine wegen der Verschiedenheit des Spectrums bei Haupt- und Vergleichstern etwa nöthige Verbesserung $\varDelta\alpha$ der Besselschen Refractionsconstanten α eingeführt worden. Bezeichnen N_v und N_z die Positionswinkel der Vergleichsterne v und z gegen σ Draconis in Bezug auf den Verticalkreis, z_v und z_z die Zenithdistanzen der Mitten der gemessenen Distanzen xv und xz, so hat der Factor von $\varDelta\alpha$ in den Beobachtungsgleichungen die Form

$$(\cos N_v \operatorname{tang} z_v - \cos N_z \operatorname{tang} z_z)\varDelta\alpha = (A - B)\varDelta\alpha$$

Durch directe Rechnung sind die nachfolgenden, nach dem Argument Stundenwinkel fortschreitenden Werthe der Coëfficienten A und B gefunden worden.

t	A	B	t	A	B	t	A	B
$0^h 10^m$	−0.341	+0.291	$8^h 10^m$	+0.894	−0.432	$16^h 10^m$	+0.885	−1.199
30	−0.339	+0.315	30	+0.989	−0.531	30	+0.793	−1.121
50	−0.334	+0.336	50	+1.080	−0.633	50	+0.702	−1.040
1 10	−0.324	+0.353	9 10	+1.172	−0.738	17 10	+0.613	−0.958
30	−0.310	+0.365	30	+1.258	−0.843	30	+0.526	−0.876
50	−0.292	+0.374	50	+1.339	−0.948	50	+0.443	−0.793
2 10	−0.270	+0.379	10 10	+1.413	−1.051	18 10	+0.363	−0.713
30	−0.243	+0.380	30	+1.478	−1.150	30	+0.287	−0.633
50	−0.211	+0.376	50	+1.534	−1.243	50	+0.215	−0.555
3 10	−0.175	+0.367	11 10	+1.578	−1.328	19 10	+0.147	−0.479
30	−0.135	+0.354	30	+1.609	−1.403	30	+0.084	−0.406
50	−0.090	+0.336	50	+1.627	−1.468	50	+0.025	−0.335
4 10	−0.040	+0.312	12 10	+1.633	−1.521	20 10	−0.029	−0.268
30	+0.015	+0.283	30	+1.624	−1.560	30	−0.079	−0.203
50	+0.074	+0.248	50	+1.603	−1.586	50	−0.124	−0.142
5 10	+0.138	+0.208	13 10	+1.568	−1.597	21 10	−0.165	−0.083
30	+0.208	+0.162	30	+1.522	−1.595	30	−0.202	−0.028
50	+0.281	+0.109	50	+1.465	−1.580	50	−0.234	+0.023
6 10	+0.359	+0.050	14 10	+1.398	−1.553	22 10	−0.262	+0.072
30	+0.441	−0.015	30	+1.324	−1.515	30	−0.285	+0.117
50	+0.526	−0.086	50	+1.243	−1.466	50	−0.305	+0.159
7 10	+0.615	−0.164	15 10	+1.158	−1.409	23 10	−0.320	+0.197
30	+0.707	−0.248	30	+1.068	−1.345	30	−0.331	+0.232
50	+0.800	−0.337	50	+0.977	−1.274	50	−0.338	+0.263

Bezeichnet man mit D einen beliebigen Werth $(xv - xz + c_s)$, mit D_0 einen Mittelwerth von D, der noch der Verbesserung d bedarf, und ist ferner e eine der Zeit proportionale Grösse, R der zur Sonnenlänge ⊙ gehörige Abstand der Erde von der Sonne,

π die jährliche Parallaxe von σ Draconis, so giebt uns jeder Beobachtungsabend eine Gleichung von der Form

$$x + et + 1.9436\pi R \cos(\odot - 307^\circ 42'.3) - (A - B)\Delta\alpha = D - D_0.$$

Hierin ist t in Jahren ausgedrückt und von 1900 an gezählt. Für D_0 ist der gleiche Werth angenommen wie bei der Reduction auf gemeinsamen Scalenwerth, also $D_0 = 9^p1890$ gesetzt. Man erhält dann ein System von Gleichungen, dessen Coëfficienten in der nachfolgenden Tabelle gegeben sind. Für das unbenannte Glied $D - D_0$ ist 0^p0001 als Einheit gewählt. Die Grössen v und v'' sind die nach der Ausgleichung übrig bleibenden Widersprüche Beob.-Rech., v in der gleichen Einheit wie $D - D_0$, v'' in Bogenmaass.

x	e	π	$\Delta\alpha$	$D-D_0$	v	v''
1	− 1.295	− 1.399	+ 0.658	− 284	+ 91	+ 0.″20
1	− 1.292	− 1.375	+ 0.667	− 222	+ 31	+ 0.07
1	− 1.287	− 1.326	+ 0.669	− 165	− 22	− 0.05
1	− 1.174	− 0.075	+ 0.261	+ 11	− 94	− 0.20
1	− 1.161	+ 0.093	+ 0.184	− 51	− 19	− 0.04
1	− 1.155	+ 0.160	+ 0.226	− 86	+ 22	+ 0.05
1	− 1.144	+ 0.296	− 0.600	+ 5	− 58	− 0.13
1	− 1.070	+ 1.128	− 0.716	− 16	+ 32	+ 0.07
1	− 1.068	+ 1.154	− 0.615	− 15	+ 32	+ 0.07
1	− 0.983	+ 1.778	− 0.026	− 14	+ 82	+ 0.18
1	− 0.975	+ 1.813	− 0.070	+ 59	+ 13	+ 0.03
1	− 0.972	+ 1.823	+ 0.122	+ 110	− 37	− 0.08
1	− 0.928	+ 1.913	− 0.269	+ 73	+ 8	+ 0.02
1	− 0.926	+ 1.914	− 0.261	+ 78	+ 3	+ 0.01
1	− 0.917	+ 1.913	− 0.878	+ 29	+ 53	+ 0.12
0.707	− 0.645	+ 1.349	− 1.827	+ 172	− 114	− 0.25
1	− 0.898	+ 1.888	− 1.039	+ 99	− 19	− 0.04
1	− 0.887	+ 1.861	− 1.184	+ 85	− 7	− 0.02
1	− 0.824	+ 1.535	− 2.325	+ 260	− 205	− 0.44
1	− 0.805	+ 1.384	− 2.769	+ 81	− 38	− 0.08
1	− 0.769	+ 1.051	− 3.110	+ 42	− 25	− 0.05
1	− 0.761	+ 0.966	− 3.090	+ 107	− 97	− 0.21
1	− 0.605	− 0.854	− 1.195	− 149	+ 16	+ 0.03
1	− 0.575	− 1.166	− 0.794	− 220	+ 63	+ 0.14
1	− 0.572	− 1.193	− 0.803	+ 9	− 169	− 0.37
1	− 0.567	− 1.245	− 0.726	− 220	+ 56	+ 0.12
1	− 0.564	− 1.270	− 0.790	− 256	+ 90	+ 0.20
1	− 0.537	− 1.505	− 0.446	− 253	+ 67	+ 0.15
1	− 0.509	− 1.697	− 0.142	− 266	+ 66	+ 0.14
1	− 0.457	− 1.926	+ 0.119	− 128	− 89	− 0.19

x	e	π	$\Delta\alpha$	$D-D_0$	v	v''
1	−0.452	−1.940	+0.167	−184	−34	−0″.07
1	−0.449	−1.946	+0.155	−260	+41	+0.09
1	−0.446	−1.951	+0.162	−259	+40	+0.09
1	−0.416	−1.971	+0.277	−206	−14	−0.03
1	−0.413	−1.970	+0.272	−268	+48	+0.10
1	−0.402	−1.959	+0.324	−180	−39	−0.08
1	−0.394	−1.944	+0.366	−200	−18	−0.04
1	−0.391	−1.939	+0.448	−197	−20	−0.04
1	−0.353	−1.797	+0.635	−152	−54	−0.12
1	−0.347	−1.769	+0.628	−277	+73	+0.16
1	−0.345	−1.755	+0.640	−122	−80	−0.17
1	−0.227	−0.711	+0.661	−1	−115	−0.25
1	−0.216	−0.580	+0.527	−140	+36	+0.08
0.707	−0.151	−0.390	+0.428	−40	−32	−0.07
1	−0.211	−0.520	+0.609	−55	−45	−0.10
1	−0.208	−0.488	+0.606	−206	+109	+0.24
1	−0.154	+0.179	+0.649	+39	−83	−0.18
1	−0.151	+0.213	+0.658	−123	+82	+0.18
1	−0.137	+0.379	+0.662	−65	+37	+0.08
1	−0.110	+0.702	+0.661	+60	−61	−0.13
1	−0.082	+1.003	+0.643	−24	+47	+0.10
1	−0.063	+1.196	+0.609	+10	+31	+0.07
0.707	−0.025	+1.018	+0.397	−52	+96	+0.21
1	−0.033	+1.462	+0.489	+56	+6	+0.01
1	−0.030	+1.484	+0.493	+14	+50	+0.11
1	−0.014	+1.603	+0.444	−23	+97	+0.21
1	+0.041	+1.867	−0.017	+107	−10	−0.02
0.707	+0.062	+1.350	−0.413	+101	−30	−0.07
1	+0.090	+1.907	−0.720	+133	−31	−0.07
1	+0.106	+1.877	−0.948	+61	+38	+0.08
1	+0.109	+1.870	−1.049	+113	−14	−0.03
1	+0.117	+1.846	−0.922	+95	+2	0.00
1	+0.120	+1.837	−1.025	−4	+100	+0.22
1	+0.153	+1.684	−1.974	+88	−2	0.00
1	+0.301	+0.251	−1.951	+14	−40	−0.09
1	+0.309	+0.154	−2.332	−167	+133	+0.29
1	+0.342	−0.245	−1.616	−179	+113	+0.25
0.707	+0.422	−1.385	+0.260	−98	−43	−0.09
1	+0.605	−1.945	+0.376	−244	+47	+0.10
1	+0.613	−1.926	+0.596	−171	−25	−0.05
1	+0.632	−1.864	+0.410	−137	−53	−0.12
1	+0.635	−1.853	+0.249	−186	−3	−0.01
0.707	+0.470	−1.199	+0.206	−156	+31	+0.07
1	+0.690	−1.524	+0.415	−177	+15	+0.03
1	+0.698	−1.458	+0.423	−117	−40	−0.09
1	+0.717	−1.291	+0.466	−202	+59	+0.13
1	+0.720	−1.265	+0.464	−154	+13	+0.03
0.707	+0.526	−0.721	+0.334	−50	−35	−0.08
1	+0.769	−0.751	+0.556	−91	−8	−0.02
1	+0.772	−0.720	+0.564	−75	−22	−0.05

x	e	π	$\Delta\alpha$	$D-D_0$	r	v''
1	+ 0.783	− 0.592	+ 0.622	− 116	+ 31	+ 0″07
1	+ 0.936	+ 1.191	+ 0.517	+ 165	− 105	− 0.23
1	+ 0.939	+ 1.216	+ 0.580	− 48	+ 111	+ 0.24
1	+ 0.969	+ 1.482	+ 0.947	+ 150	− 67	− 0.15
1	+ 0.972	+ 1.499	+ 0.875	+ 119	− 35	− 0.08
1	+ 1.004	+ 1.717	+ 0.070	+ 127	− 24	− 0.05
1	+ 1.007	+ 1.731	+ 0.197	+ 62	+ 43	+ 0.09
1	+ 1.021	+ 1.797	− 0.120	+ 249	− 139	− 0.30
1	+ 1.046	+ 1.879	− 0.929	− 103	+ 221	+ 0.48
0.707	+ 0.741	+ 1.333	− 0.189	+ 111	− 27	− 0.06
1	+ 1.062	+ 1.907	− 0.382	+ 174	− 54	− 0.12
1	+ 1.068	+ 1.912	− 2.414	+ 244	− 122	− 0.26
1	+ 1.092	+ 1.904	− 1.440	+ 81	+ 40	+ 0.09
0.707	+ 0.780	+ 1.332	− 1.668	+ 268	− 182	− 0.39
1	+ 1.111	+ 1.865	− 1.211	+ 158	− 40	− 0.09
1	+ 1.114	+ 1.856	− 1.732	+ 107	+ 11	+ 0.02
1	+ 1.117	+ 1.848	− 1.774	+ 157	− 40	− 0.09
0.707	+ 0.846	+ 0.971	− 1.747	+ 156	− 98	− 0.21
1	+ 1.232	+ 1.036	− 3.035	+ 63	− 7	− 0.02
1	+ 1.240	+ 0.951	− 3.103	− 44	+ 93	+ 0.20
1	+ 1.251	+ 0.830	− 2.744	+ 5	+ 34	+ 0.07
0.707	+ 0.920	+ 0.182	− 1.032	+ 3	− 7	− 0.02
1	+ 1.303	+ 0.228	− 2.353	− 125	+ 117	+ 0.25
1	+ 1.306	+ 0.195	− 2.426	− 66	+ 56	+ 0.12
0.707	+ 0.931	− 0.044	− 1.681	− 57	+ 35	+ 0.08
1	+ 1.325	− 0.037	− 2.165	− 69	+ 40	+ 0.09
0.707	+ 0.947	− 0.144	− 1.232	− 42	+ 11	+ 0.02
1	+ 1.363	− 0.496	− 1.808	− 165	+ 99	+ 0.21
1	+ 1.388	− 0.779	− 1.256	− 120	+ 33	+ 0.07
1	+ 1.405	− 0.957	− 0.304	− 101	− 2	0.00
1	+ 1.426	− 1.178	− 1.183	− 140	+ 22	+ 0.05
1	+ 1.432	− 1.232	− 0.927	− 95	− 28	− 0.06
1	+ 1.451	− 1.404	− 0.692	− 67	− 69	− 0.15
1	+ 1.468	− 1.537	− 0.397	− 135	− 13	− 0.03
0.707	+ 1.043	− 1.128	− 0.385	− 179	+ 72	+ 0.16
1	+ 1.490	− 1.670	− 0.166	− 215	+ 57	+ 0.12
1	+ 1.495	− 1.723	+ 0.314	− 165	+ 3	+ 0.01
1	+ 1.514	− 1.823	+ 0.470	− 145	− 25	− 0.05
1	+ 1.517	− 1.835	− 0.007	− 182	+ 11	+ 0.02
1	+ 1.522	− 1.858	+ 0.110	− 140	− 33	− 0.07
1	+ 1.525	− 1.869	+ 0.040	− 114	− 60	− 0.13
1	+ 1.539	− 1.916	− 0.019	− 60	− 116	− 0.25
1	+ 1.542	− 1.923	+ 0.176	− 63	− 114	− 0.25

Diese Gleichungen lassen das Vorhandensein einer messbaren Parallaxe bei σ Draconis ohne weiteres erkennen. Das absolute Glied $(D - D_0)$ hat ein ausgesprochenes Maximum in den Wintermonaten und ein ebensolches Minimum in den Sommermonaten;

das An- und Abschwellen seiner Beträge tritt deutlich hervor. In der oberen Figur der Tafel am Schlusse der Abhandlung sind die Werthe $D - D_0$ als Ordinaten aufgetragen worden, während die zugehörigen Zeiten die Abscissen bilden. Der periodische Verlauf dieser Werthe tritt in dieser graphischen Darstellung sehr deutlich hervor. Der auf Grund der nachfolgenden Ausgleichung sich aus ihnen ergebende Curvenzug ist in der Figur gleichfalls dargestellt.

Bei einigen wenigen Beobachtungen — es kommen namentlich in Betracht 1899 März 5, Juni 5 und 1901 Jan. 17, Febr. 7 — ist schon vor der Ausgleichung zu erkennen, dass sie erheblichere Abweichungen von der Rechnung ergeben werden.

Eine Nachprüfung der Reductionen ergab keine Versehen in der Rechnung. Um den Beobachtungen in keinerlei Weise Zwang anzuthun, habe ich zunächst eine Ausgleichung durchgeführt unter Mitnahme sämmtlicher Abende; bei der grossen Anzahl derselben liess sich erwarten, dass das Resultat durch die Anwesenheit der einen oder anderen stark widersprechenden Beobachtung voraussichtlich nicht stark afficirt werden würde.

Um die Gleichungen homogen zu machen, wurden die Substitutionen eingeführt

$$y = 2e \qquad z = 2\pi \qquad u = 3\Delta a$$

und 300 als Einheit für das unbenannte Glied angenommen.

Es ergeben sich dann die folgenden Normalgleichungen

$$\begin{aligned}
115.9972x + 13.3236y - 1.4647z - 16.3016u &= -19.5770 \\
+13.3236x + 24.0908y - 3.7425z - 4.8883u &= -1.1230 \\
-1.4647x - 3.7425y + 62.7783z - 11.5683u &= +33.3839 \\
-16.3016x - 4.8883y - 11.5683z + 17.4205u &= -4.0596
\end{aligned}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen führt nach Wiedereinsetzung der ursprünglichen Unbekannten zu den nachstehenden Werthen:

$$\begin{aligned}
x &= -0^{p}0053 \pm 0^{p}0007 = -0''116 \pm 0''015 \\
e &= +0.0020 \pm 0.0007 = +0.043 \pm 0.016 \\
\pi &= +0.0080 \pm 0.0005 = +0.174 \pm 0.010 \\
\Delta a &= -0.0001 \pm 0.0007 = -0.002 \pm 0.014
\end{aligned}$$

Der mittlere Fehler[1]) einer Gleichung vom Gewicht 1 findet sich zu $\pm 0^s.00696 = \pm 0''.151$. Was zunächst den Werth von $\Delta\alpha$ anbelangt, so ist derselbe wegen seiner Kleinheit ohne jede praktische Bedeutung; überdies kann ihm wegen der Grösse des zugehörigen m. F. keine reelle Bedeutung zugesprochen werden. Dieses Resultat steht vollkommen in Einklang mit dem in Bd. 155 der A. N. von mir Gefundenen, wonach verbürgte, wenn auch ebenfalls nur sehr unerhebliche Werthe von $\Delta\alpha$ nur bei *sehr* starkem Farbencontraste der Sterne zu erwarten sind. Ein Farbenunterschied gegenüber seinen Vergleichsternen ist bei σ Draconis sicher vorhanden. Die Färbung von σ Draconis ist eine gelbliche, wenn der Farbenton auch nur wenig intensiv ist und etwa zwischen 2^c und 3^c der Schmidtschen Scala liegt; die Vergleichsterne sind mit einander vollkommen gleichfarbig, beide können als weisslich oder aschfarben bezeichnet werden. — Setzt man $\Delta\alpha = 0$, so bleibt der Werth von x, e und π völlig ungeändert. Nach Massgabe der m. F. von e ist anzunehmen, dass die Eigenbewegung im Bogen grössten Kreises von σ Draconis bei Porter noch einer kleinen positiven Correction bedarf. Diese Annahme ist sehr wahrscheinlich in Anbetracht des Umstandes, dass die Rectascension bei Bradley nach der Ausgleichung sich wesentlich grösser ($0^s.9$) ergiebt als bei Fedorenko und Groombridge. Ein Theil der Grösse e kann auch von Eigenbewegungen der Vergleichsterne herrühren, zu deren Untersuchung kein ausreichendes Material vorhanden ist.

Betrachtet man die in Bogenmaass angegebenen Widersprüche v'', so kommen auf 61 negative Beträge 59 positive; drei Mal wird der Betrag Null. Ferner kommen auf 59 Zeichenwechsel 65 Zeichenfolgen. In dieser Hinsicht bietet also die Fehlervertheilung nichts Auffälliges. Untersucht man nun auch noch die Häufigkeit, mit der die einzelnen Beträge auftreten, indem man die Gesammtmasse der v'' im Sinne Fechners als einen Kollectivgegenstand auffasst, so ergeben sich die Zahlen der nachstehenden kleinen Tabelle. Die Spalte v'' enthält die „Wechselpunkte", d. h. die Grenzen der Intervalle, die bei der Auszählung

1) Es sind durchweg die mittleren, nicht die wahrscheinlichen, Fehler angegeben, wie es auch in meinen beiden früheren Abhandlungen der Fall ist. Ich hebe dieses besonders noch hervor, da bei der Citirung meiner Werthe hierauf meist nicht Rücksicht genommen worden ist.

zu Grunde gelegt worden sind. Die Spalte *H* giebt die Menge der in jedes einzelne Intervall gehörenden v'' an, wobei die mit halbem Gewicht behafteten Zahlen als „halbe“ Fälle gezählt worden sind. Berechnet man aus diesen Zahlen zunächst das arithmetische Mittel oder den „Durchschnitt“ der v'', so erhält man den Werth Null. Weiter findet man für das quadratische Mittel aus den Abweichungen vom Durchschnitt oder für die „Streuung“ den Betrag 0″.149, der mit dem vorhin gefundenen mittleren Fehler der Gewichtseinheit merklich übereinstimmt. Berechnet man endlich mit der Präcision 4.74, die aus der angegebenen Streuung folgt, die theoretische Vertheilung, wie sie das Gausssche Fehlergesetz fordern würde, so erhält man die unter *B—R* aufgeführten und auf hundert Fälle reducirten Widersprüche Beobachtung minus Rechnung.

v''	*H*	*B—R*	v''	*H*	*B—R*	v''	*H*	*B—R*
−0″.525			−0″.175			+0″.175		
	0	0.0		6.0	−2.9		8.5	+1.9
−0.475			−0.125			+0.225		
	1.0	+0.7		13.0	+0.5		4.0	+0.1
−0.425			−0.075			+0.275		
	0.5	0.0		18.5	+3.4		1.0	−0.9
−0.375			−0.025			+0.325		
	1.0	0.0		15.0	−0.3		0	−0.8
−0.325			+0.025			+0.375		
	1.0	−0.9		13.5	−0.9		0	−0.4
−0.275			+0.075			+0.425		
	5.5	+1.4		16.5	+3.5		0	−0.1
−0.225			+0.125			+0.475		
	4.5	−1.5		5.5	−3.3		1.0	+0.8
−0.175			+0.175			+0.525		

Die Werthe *B — R* zeigen keinen Gang, sondern springen regellos hin und her. Die Vertheilung der bei der Ausgleichung übrig bleibenden Widersprüche nach ihrer Grösse giebt sonach durchaus keinen Anhalt für die Annahme, dass die Beobachtungen mit systematischen Fehlern behaftet seien.

Die übrig bleibenden Grössen v'' sind nunmehr daraufhin untersucht worden, ob ein Zusammenhang nachweisbar ist zwischen der Grösse von v'' — unter Rücksichtnahme auf das Zeichen — und der Bildbeschaffenheit. Das parallaktische Maximum fällt in den Winter, das Minimum in den Sommer; in den Wintermonaten

pflegt Ruhe und Schärfe meist wesentlich besser zu sein als in den Sommermonaten. Ist ein Zusammenhang zwischen der Bildbeschaffenheit und dem Zeichen des übrig bleibenden Widerspruches v'' vorhanden, so muss er auch das für die Parallaxe abgeleitete Resultat beeinflussen.

Die Abendwerthe für Ruhe und Schärfe sind durch directe Mittelbildung hergeleitet worden. Dabei wurde gesetzt 1 — 2 = 1.33, 2 — 1 = 1.66 etc. Mit Benutzung sämmtlicher vorhandenen Werthe findet sich dann

Ruhe	(v'')	Schärfe	(v'')
unter 2.5	— 0″.007	unter 2.3	— 0″.015
über 2.5	+ 0.009	über 2.3	+ 0.020

Hiernach würde es allerdings scheinen, als ob ein kleiner von der Bildbeschaffenheit abhängiger systematischer Messungsfehler vorhanden wäre. Besonders auffallend erscheint zunächst der parallele Verlauf der Werthe von (v'') in Bezug auf die Ruhe und Schärfe; dieser Parallelismus ist aber nothwendig bedingt durch den Umstand, dass durchschnittlich der Unterschied zwischen den Zahlenwerthen für die Ruhe und Schärfe nur gering ist. Daher wäre eigentlich zu erwarten gewesen, dass die Uebereinstimmung der Werthe von (v'') bei Ruhe und Schärfe eine noch grössere sein würde. Thatsächlich sind die für (v'') gefundenen Beträge völlig bedeutungslos; die ihnen zugehörigen m. F. sind zehn- und zwanzigmal so gross als sie selbst.

Dass wirklich kein reeller Zusammenhang zwischen der Bildbeschaffenheit und dem Zeichen des Fehlers vorhanden ist, ergiebt sich auch, wenn man für die Gesammtheit der positiven und die Gesammtheit der negativen Widersprüche die ihnen zugehörige mittlere Ruhe und Schärfe ableitet. Es findet sich dann

	Ruhe	Schärfe
negative Werthe	2.56	2.37
positive Werthe	2.53	2.39

Das Vorhandensein systematischer Fehler in den Messungen, die von der Bildbeschaffenheit abhängen, ist sonach nicht anzunehmen.

Ordnet man die Grössen v'' nach ihren zugehörigen Stundenwinkeln, so ist beim blossen Anblick der Zahlenreihe ein gesetzmässiger Verlauf in derselben nicht zu erkennen. Im Allgemeinen springen die Beträge regellos hin und her; nur zwischen 10^h und 11^h Stundenwinkel ist eine Anhäufung grosser negativer Werthe vorhanden. Da eine solche Anhäufung nur an dieser einen Stelle auftritt und sich in ihr die grössten vorkommenden Fehlerbeträge finden, kann man annehmen, dass sie nur auf Zufall beruht. Diese Annahme wird noch wahrscheinlicher dadurch, dass von den fünf Fehlern, um die es sich handelt, drei Beobachtungen mit halbem Gewichte angehören.

Einen Einblick in die einschlägigen Verhältnisse kann man nur erlangen, wenn man die Grössen v'' gruppenweise in Mittelwerthe zusammenzieht. Die Bildung von Gruppen, wenigstens von solchen kleineren Umfanges, stösst aber auf Schwierigkeiten wegen der ungleichen Vertheilung des Materials; speziell zwischen 4^h und 11^h Sternzeit sind nur 14 Beobachtungen vorhanden. Ich habe es daher vorgezogen, die Mittelbildung sich über je einen Quadranten erstrecken zu lassen. Auf diese Weise erhält man verhältnissmässig sichere Mittelwerthe, wenigstens für drei der Quadranten. Es finden sich folgende Werthe:

Stundenwinkel:	$0^h - 6^h$	$6^h - 12^h$	$12^h - 18^h$	$18^h - 0^h$
v'' :	$+0''010$	$-0''025$	$+0''042$	$-0''015$

Die Werthe für den 1., 2. und 4. Quadranten beruhen im Durchschnitt auf 36 Abenden, der Werth für den 3. Quadranten auf 16 Abenden. Da der m. F. einer Gleichung vom Gewicht Eins sich zu $\pm 0''151$ fand, würde unter Annahme durchweg gleicher Gewichte sich der m. F. eines auf 36 Abenden beruhenden Mittels zu $\pm 0''025$, der eines auf 16 Abenden beruhenden Mittels zu $\pm 0''038$ ergeben. Die m. F. sind demnach mindestens von derselben Ordnung wie die Werthe, zu denen sie gehören, so dass den letzteren keine reelle Bedeutung beizumessen ist.

Eine Abhängigkeit der v'' von der Jahreszeit ist nicht zu erwarten, da ja die Beobachtungen nach den Sonnenlängen ausgeglichen sind. Es zeigt sich dieses auch, wenn man die v'' über die ganze Beobachtungszeit hinweg innerhalb der einzelnen Monate zu Mitteln zusammenzieht. Es ergeben sich dann folgende Mittel-

werthe, denen in Klammern die Zahl der Abende beigefügt ist, auf denen sie beruhen.

Jan. 16	— 0″.03	(13)	Juli 15	— 0″.08	(10)
Feb. 9	— 0.02	(15)	Aug. 14	— 0.02	(14)
März 20	— 0.08	(7)	Sept. 17	+ 0.04	(8)
April 20	+ 0.11	(8)	Oct. 14	— 0.03	(9)
Mai 16	+ 0.10	(6)	Nov. 8	— 0.02	(7)
Juni 15	+ 0.03	(13)	Dec. 13	+ 0.05	(12)

Das angegebene Datum ist die Epoche der Mittelwerthe von v''.

Stellt man diese Werthe graphisch dar und gleicht sie unter Berücksichtigung ihrer Gewichte aus, so erhält man einen Curvenzug, der keinerlei periodischen Character trägt und unschwer erkennen lässt, dass die Fehler, welche er repräsentirt, keinen gesetzmässigen Verlauf haben, sondern als zufällige anzusehen sind.

Nach dem Vorstehenden liegt sonach kein Grund vor zu der Annahme, dass in den Differenzen der Distanzen $(xv - xz)$ noch systematische Messungsfehler vorhanden sind, welche den aus ihnen hergeleiteten Werth der Parallaxe zu beeinflussen vermögen.

Es sind nun ausser der obigen Auflösung der Gleichungen noch zwei andere vorgenommen worden, bei denen nicht das gesammte vorliegende Material, sondern nur ein ausgewählter Theil desselben zur Verwendung gekommen ist. Zunächst wurde das System aufgelöst, welches entsteht, wenn die 14 Gleichungen weggelassen werden, die nur auf Messungen in einer Stellung des Positionskreises beruhen und die daher in der ersten Auflösung nur halbes Gewicht erhalten hatten. Zugleich wurden dabei auch die beiden Gleichungen weggelassen, bei denen die übrig bleibenden Widersprüche 0″.4 übersteigen. Diese Weglassung beruht allerdings auf einer gewissen Willkür; da die zugehörigen Widersprüche aber das Dreifache des abgeleiteten m. Fehlers einer Beobachtung betragen und ganz isolirt dastehen, ist doch wohl anzunehmen, dass sie durch verfehlte Beobachtungen verursacht sind.

Die hiernach verbleibenden 107 Gleichungen führen zu dem nachstehenden Systeme von Normalgleichungen.

$$\begin{aligned}
+ 107.0000x + 10.7855y - 4.0640z - 13.2026u &= - 20.4234 \\
+ 10.7855x + 21.9752y - 3.7632z - 4.1221u &= - 0.4333 \\
- 4.0640x - 3.7632y + 57.6744z - 9.4649u &= + 30.4456 \\
- 13.2026x - 4.1221y - 9.4649z + 15.0020u &= - 2.3885
\end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich als Werthe der ursprünglichen Unbekannten

$$\begin{aligned}
x &= - 0^{\text{P}}.0054 \pm 0^{\text{P}}.00065 = - 0''.117 \pm 0''.014 \\
e &= + 0.0026 \pm 0.00070 = + 0.056 \pm 0.015 \\
\pi &= + 0.0081 \pm 0.00045 = + 0.176 \pm 0.010 \\
\Delta\alpha &= + 0.0007 \pm 0.00062 = + 0.015 \pm 0.013
\end{aligned}$$

Der mittlere Fehler einer Gleichung beträgt $\pm 0^{\text{P}}.00622 = \pm 0''.135$.

Auch hier hat die Grösse $\Delta\alpha$ keine reelle Bedeutung. Vernachlässigt man dieselbe, so erhält man für die Unbekannten

$$\begin{aligned}
x &= - 0''.135 \pm 0''.013 \\
e &= + 0.053 \pm 0.015 \\
\pi &= + 0.171 \pm 0.009
\end{aligned}$$

Der mittlere Fehler einer Gleichung behält genau den nämlichen Betrag wie vorher, so dass durch die Einführung von $\Delta\alpha$ nicht die geringste Verbesserung in der Darstellung der Beobachtungswerthe herbeigeführt worden ist. Der Werth für π in der zweiten Auflösung stimmt fast absolut genau mit dem in der ersten Auflösung überein; für die Grössen x und e liegt die Uebereinstimmung noch völlig innerhalb der zugehörigen mittleren Fehler. Das Resultat ist unter Beiseitelassung der minderwerthigen Beobachtungen, die etwa den zehnten Theil der Gesammtanzahl betragen, thatsächlich also das nämliche geblieben.

Die nach der Ausgleichung zurückbleibenden $B - R$ führe ich nicht an, da sie sich nur ganz unwesentlich von den pag. 614 unter v und v'' aufgeführten Beträgen unterscheiden.

Schliesslich habe ich noch eine dritte Ausgleichung durchgeführt, indem ich nur Beobachtungen zur Zeit des parallaktischen

Maximums und Minimums herangezogen habe; es sind deren im Ganzen 44. Um dabei den Beobachtungen keinen Zwang anzuthun, sind nicht einzelne derselben ausgelesen worden, sondern es sind stets die sämmtlichen an der betreffenden Stelle vorhandenen benutzt worden. Es sind dies die folgenden Beobachtungen:

1899	Januar	10	bis	1899	Februar	10
1899	Juli	17	„	1899	August	6
1900	Januar	15	„	1900	Februar	13
1900	August	6	„	1900	September	9
1901	Januar	18	„	1901	Februar	12
1901	Juni	28	„	1901	Juli	17.

Es ergeben sich dann die Normalgleichungen

$$\begin{aligned}
+ 40.9988x + 7.5983y - 0.8092z - 5.0894u &= - 4.3420 \\
+ 7.5983x + 9.0237y - 4.7328z - 0.8640u &= - 1.4862 \\
- 0.8092x - 4.7328y + 36.0544z - 7.7702u &= + 18.8254 \\
- 5.0894x - 0.8640y - 7.7702z + 3.5067u &= - 4.1340
\end{aligned}$$

Für die Werthe der ursprünglichen Unbekannten findet man hieraus

$$\left.\begin{aligned}
x &= - 0''.117 \pm 0''.023 \\
e &= + 0.064 \pm 0.023 \\
\pi &= + 0.153 \pm 0.017 \\
\Delta\alpha &= - 0.075 \pm 0.058
\end{aligned}\right\} \text{m. F. einer Gleichung: } \pm 0''.118.$$

Da die Benutzung des ganzen Beobachtungsmaterials deutlich erwiesen hatte, dass eine Beeinflussung der Distanzmessungen durch die atmosphärische Dispersion nicht vorhanden ist, hätte von der Einführung der Unbekannten $\Delta\alpha$ von vornherein abgesehen werden können. Die Einführung dieser Grösse ist hier auch nur erfolgt, um zu sehen, welchen Betrag das beschränktere Beobachtungsmaterial für sie ergeben würde; der grosse zu $\Delta\alpha$ gehörige m. F. zeigt auch hier, dass $\Delta\alpha$ im vorliegenden Falle keine reale Bedeutung hat. Setzt man $\Delta\alpha = 0$, so erhält man

$$\left.\begin{aligned}
x &= - 0''.091 \pm 0''.021 \\
e &= + 0.079 \pm 0.023 \\
\pi &= + 0.179 \pm 0.011
\end{aligned}\right\} \text{m. F. einer Gleichung: } \pm 0''.123$$

Die Werthe, welche sich bei den drei verschiedenen Auflösungen der Bedingungsgleichungen für x, e und π ergeben haben, stimmen vollständig innerhalb ihrer mittleren Fehler überein. Am engsten ist die Uebereinstimmung bei π. Der Umstand, dass sich fast genau der nämliche Werth für die jährliche Parallaxe findet, wenn man die sämmtlichen über den ganzen Umfang der parallaktischen Ellipse vertheilten Messungen benutzt und wenn man nur die auf die Zeiten des parallaktischen Maximums und Minimums fallenden verwendet, ist der beste Beweis dafür, dass die Messungen nicht mit systematischen Fehlern behaftet sein können, welche den Werth der aus ihnen hergeleiteten Parallaxe zu beeinflussen vermögen.

Wir haben für π die drei Werthe

$$+0''.174 \pm 0''.010, \quad +0''.171 \pm 0''.009, \quad +0''.179 \pm 0''.011,$$

so dass wir als definitives Resultat für die Parallaxe von σ Draconis annehmen können

$$\pi = +0''.175 \pm 0''.010.$$

Es entspricht dies einer Entfernung von 1 178 656 Erdbahnhalbmessern oder von 18.6 Lichtjahren.

Die für e erhaltenen Werthe machen es sehr wahrscheinlich, dass entweder die zu Grunde gelegte Grösse der Eigenbewegung von σ Drac. noch einer Correction bedarf oder dass einer der beiden Vergleichsterne eine kleine Eigenbewegung besitzt. Welcher der beiden vorläufig gleich wahrscheinlichen Fälle vorliegt, ist einstweilen nicht zu entscheiden.

Es liegen bereits zwei ältere Bestimmungen der Parallaxe von σ Draconis vor, beide von BRÜNNOW herrührend und auf Messungen von Declinationsdifferenzen mit dem Fadenmikrometer des Dubliner Refractors beruhend. Publicirt sind dieselben in den Astronomical Observations and Researches, 1. u. 2. Bd., der Sternwarte des Trinity College, Dublin (Dunsink).

Da σ Drac. sehr nahe dem Pole der Ekliptik steht, spricht sich fast der ganze Betrag der Parallaxe in Aenderungen seiner Declination aus; die von BRÜNNOW befolgte Methode, die Parallaxe aus Messungen von Declinationsdifferenzen herzuleiten, ist in diesem Falle also besonders zweckmässig. Beobachtet ist durch-

weg bei ruhendem Fernrohre, aber immer unter Benutzung zweier einander gegenüberstehenden Mikrometerschrauben; der Coincidenzpunkt der benutzten Fäden wurde durch Combination von Messungen in zwei um 180° von einander verschiedenen Stellungen des Positionskreises eliminirt. In jeder Stellung des Positionskreises wurden 6 Declinationsdifferenzen gemessen.

Die erste Beobachtungsreihe läuft von 1868 Sept. 24 bis 1869 Oktober 13 und umfasst 75 Abende, von denen 12 geringeres Gewicht haben. Der Vergleichstern ist 10. Grösse, folgt 1^m52^s und steht 1′ nördlich. Die zweite Reihe erstreckt sich von 1869 November 22 bis 1870 November 25. Von den 43 Beobachtungsabenden haben vier das Gewicht $\frac{5}{6}$. Der Vergleichstern ist hier etwas unter 9. Grösse und geht 3^m46^s voraus; seine Declination ist um 14″ nördlicher als die von σ Draconis.

Die Beobachtungen in beiden Reihen lassen ohne weiteres einen periodischen Verlauf erkennen. Ausgeglichen sind dieselben unter Einführung eines constanten, eines der Zeit proportionalen, eines von π abhängigen Gliedes und eines Gliedes, welches einen etwaigen Unterschied in der Aberrationsconstanten für den Haupt- und den Vergleichstern berücksichtigt.

Als Resultat findet sich

1. Reihe $\pi = +0''.224 \pm 0''.031$ m. F. einer Gleichung $\pm 0''.123$
2. Reihe $\pi = +0.262 \pm 0.030$ „ „ „ ± 0.100

Aus der inneren Uebereinstimmung der zu einem Abende gehörigen Messungen würde sich für den m. F. einer Beobachtung $\pm 0''.081$ resp. $\pm 0''.090$ ergeben, wonach auf das Vorhandensein systematischer Abendfehler namentlich in der 1. Reihe zu schliessen ist. Durch Weglassung der 8 Abende in dieser Reihe, bei denen der übrigbleibende Widerspruch grösser als $0''.2$ ist, geht der m. F. einer Gleichung auf $\pm 0''.078$ herab; für π ergiebt sich dann $+0''.230 \pm 0''.021$.

Die Vernachlässigung der vierten, einen Unterschied in der Aberrationsconstanten berücksichtigenden Unbekannten ergiebt für die erste Reihe $\pi = +0''.234$, für die zweite $\pi = +0''.259$.

Als Resultat der Brünnowschen Bestimmung kann man annehmen $\pi = +0''.245$; es besteht demnach gegenüber der Leipziger Messung ein Unterschied von $0''.07$, dem ein m. F. von etwa

$\pm 0''015$ zukommt. Diesen Unterschied lediglich durch eine Parallaxe der Vergleichsterne erklären zu wollen, ist nach unseren jetzigen Erfahrungen nicht angängig; thatsächlich dürfte er auch in der Hauptsache dem Brünnowschen Werthe zur Last fallen. Es beruht dieser zwar auf zwei von einander unabhängigen Reihen, deren Resultate innerhalb ihrer m. F. mit einander übereinstimmen, bei beiden Reihen ist aber ein Stern 9.—10. Grösse mit einem solchen 5. Grösse verbunden worden, und beide Male steht der helle Stern südlich vom schwachen. Bei einem so erheblichen Helligkeitsunterschiede kann man das Auftreten systematischer Messungsfehler, die in enger Beziehung zur Bildbeschaffenheit stehen, als sicher vorhanden ansehen. Da beide Male der schwache Stern nördlich vom hellen steht, ist auch beide Male die Tendenz vorhanden, das Resultat in der nämlichen Richtung zu beeinflussen.

II. Discussion der Summe der Distanzen bei σ Draconis.

Wie schon bei den früher publicirten Parallaxenbestimmungen sind auch bei σ Draconis die gemessenen Distanzen streng reducirt worden, so dass die auf pag. 610 unter xv und xz aufgeführten Grössen die absoluten Werthe dieser Distanzen in Scalentheilen darstellen. Dass sich in ihnen die durch das Vorhandensein einer Parallaxe bedingte Periodicität nicht deutlich ausprägt, darf nicht befremden. Maximum und Minimum der Periode liegen nur um den Betrag von 0^p0160 auseinander, und der m. F. eines Abendwerthes von xv oder xz muss etwa auf die Hälfte dieses Betrages veranschlagt werden. Ganz deutlich in die Erscheinung tritt die Periodicität bei den Werthen von $xv - xz$. Die Wirkung der Parallaxe geht in diese Grössen in doppeltem Betrage ein, und sie sind überdies völlig frei von den Unsicherheiten in den Reductionselementen und den Schwankungen des Scalenwerthes.

Die vom Einflusse der Parallaxe befreite Summe der Distanzen, die Grösse $xv + xz$ auf pag. 610, sollte eigentlich völlig constant

sein resp. dürfte nur wegen etwaiger ungenügend berücksichtigter Eigenbewegungen der Sterne höchstens einen der Zeit proportionalen Verlauf aufweisen. Hätten die Vergleichsterne keine merkliche Parallaxe und wären die Reductionselemente absolut sicher bekannt, so dürften in den Werthen von $(xv + xz)$ ausserdem nur noch Sprünge zufälliger Natur auftreten, wie sie durch die unvermeidlichen Fehler der Beobachtung bedingt sind. Die Schwankungen des Scalenwerthes werden nach den bei der früheren Untersuchung am Normalbogen gefundenen Resultaten im wesentlichen ebenfalls nur den Character zufälliger Fehler tragen, wenn es zuweilen auch den Anschein hat, dass sie sich als ganz flache Wellen bemerkbar machen. Nach den Ergebnissen des nächsten Abschnittes dieser Abhandlung kann man jetzt den m. F. einer einzelnen meiner Distanzmessungen auf $\pm 0^p.0075$ veranschlagen. Für den m. F. eines einzelnen Werthes von $(xv + xz)$ ergäbe sich daher $\pm 0^p.0106$. Thatsächlich ergiebt sich derselbe aber zu $\pm 0^p.0122$, wenn man alle Schwankungen von $(xv + xz)$ als rein zufällige Beobachtungsfehler auffasst. Die Annahme der Zeit proportionaler Aenderungen verbessert die Darstellung nur ganz unwesentlich. Gleicht man die Werthe von $(xv + xz)$ aus unter Annahme eines constanten Gliedes x und eines der Zeit proportionalen Gliedes mit dem Coëfficienten e, so findet sich

$$x = + 0^p.0012 \pm 0^p.0011 \qquad e = - 0^p.0045 \pm 0^p.0025$$
$$\text{m. F. einer Gleichung} = \pm 0^p.00119.$$

Es ist also sehr erheblicher Grund dafür vorhanden, dass noch eine Ursache vorhanden ist, welche Schwankungen von $(xv + xz)$ hervorruft, die nicht zufälliger Natur sind. Es liegt nahe anzunehmen, dass diese Ursache periodischer Natur ist. Die Periode des Jahres bietet sich naturgemäss von selbst dar, und es sind daher die Grössen $(xv + xz)$ nach cos und sin der Sonnenlänge ausgeglichen worden. Die Beobachtungsgleichungen haben dann die Form

$$X + Et + u \cos\odot + w \sin\odot = S - S_0.$$

Hierin bedeutet S den Abendwerth von $(xv + xz)$, S_0 das Gesammtmittel der Abendwerthe, für welches $415^p.8415$ gefunden wurde. Die Grösse t hat die nämliche Bedeutung wie in den

Gleichungen für $xv - xz$, X und E sind die x und e ebendaselbst entsprechenden Grössen. Als Einheit des unbenannten Gliedes ist wieder 0ᵖ0001 angenommen worden. Die nachfolgende Tabelle giebt unter X, E, u, w die Coëfficienten dieser Grössen in den aufeinanderfolgenden Beobachtungsgleichungen, unter n die Werthe von $S - S_0$ in der oben angegebenen Einheit. Die übrigen Columnen enthalten analoge Coëfficienten für noch zwei weitere Ausgleichungen, deren Bedeutung späterhin erklärt wird.

X	E	u	w	n	V	P	Q
1	− 1.295	− 0.990	+ 0.139	− 355	+ 17.8	+ 0.208	+ 0.978
1	− 1.292	− 0.992	+ 0.122	− 175	+ 19.2	+ 0.358	+ 0.934
1	− 1.287	− 0.996	+ 0.088	− 48	+ 17.7	+ 0.338	+ 0.941
1	− 1.174	− 0.814	− 0.580	− 48	+ 11.6	+ 0.922	+ 0.387
1	− 1.161	− 0.761	− 0.649	− 56	+ 7.1	+ 0.949	+ 0.317
1	− 1.155	− 0.738	− 0.675	+ 58	+ 8.8	+ 0.935	+ 0.354
1	− 1.144	− 0.688	− 0.726	− 59	+ 5.1	+ 0.978	− 0.208
1	− 1.070	− 0.279	− 0.960	+ 24	+ 6.0	+ 0.964	− 0.267
1	− 1.068	− 0.262	− 0.965	− 38	+ 3.9	+ 0.976	− 0.216
1	− 0.983	+ 0.279	− 0.960	+ 83	+ 2.2	+ 0.988	+ 0.152
1	− 0.975	+ 0.330	− 0.944	+ 215	+ 5.5	+ 0.993	+ 0.117
1	− 0.972	+ 0.346	− 0.938	− 13	+ 4.1	+ 0.965	+ 0.263
1	− 0.928	+ 0.596	− 0.803	+ 136	+ 1.2	+ 1.000	− 0.026
1	− 0.926	+ 0.610	− 0.793	+ 123	+ 0.4	+ 1.000	− 0.009
1	− 0.917	+ 0.652	− 0.759	+ 175	0.0	+ 0.938	− 0.346
0.707	− 0.645	+ 0.481	− 0.518	+ 25	− 1.2	+ 0.276	− 0.651
1	− 0.898	+ 0.740	− 0.672	+ 81	− 2.3	+ 0.908	− 0.419
1	− 0.887	+ 0.786	− 0.618	+ 17	+ 12.9	+ 0.877	− 0.481
1	− 0.824	+ 0.966	− 0.259	+ 274	− 0.7	+ 0.496	− 0.868
1	− 0.805	+ 0.990	− 0.140	+ 56	+ 11.8	+ 0.297	− 0.955
1	− 0.769	+ 0.996	+ 0.085	+ 185	+ 2.2	+ 0.004	− 1.000
1	− 0.761	+ 0.991	+ 0.137	+ 5	+ 11.8	+ 0.030	− 0.999
1	− 0.605	+ 0.448	+ 0.894	+ 78	+ 16.3	− 1.000	− 0.022
1	− 0.575	+ 0.276	+ 0.961	+ 22	+ 17.2	− 0.964	+ 0.267
1	− 0.572	+ 0.260	+ 0.966	+ 27	+ 20.5	− 0.966	+ 0.259
1	− 0.567	+ 0.228	+ 0.973	+ 66	+ 17.5	− 0.969	+ 0.246
1	− 0.564	+ 0.212	+ 0.977	− 32	+ 18.1	− 0.980	+ 0.199
1	− 0.537	+ 0.047	+ 0.999	− 35	+ 19.5	− 0.910	+ 0.415
1	− 0.509	− 0.120	+ 0.993	+ 26	+ 17.5	− 0.798	+ 0.602
1	− 0.457	− 0.422	+ 0.907	− 2	+ 22.1	− 0.646	+ 0.763
1	− 0.452	− 0.452	+ 0.892	+ 122	+ 22.4	− 0.612	+ 0.791
1	− 0.449	− 0.467	+ 0.884	+ 79	+ 24.3	− 0.619	+ 0.785
1	− 0.446	− 0.482	+ 0.876	+ 34	+ 28.1	− 0.616	+ 0.788
1	− 0.416	− 0.633	+ 0.774	+ 61	+ 20.2	− 0.462	+ 0.887
1	− 0.413	− 0.646	+ 0.763	− 32	+ 23.4	− 0.522	+ 0.853
1	− 0.402	− 0.695	+ 0.718	− 30	+ 28.2	− 0.466	+ 0.885
1	− 0.394	− 0.731	+ 0.683	− 42	+ 18.9	− 0.419	+ 0.908
1	− 0.391	− 0.742	+ 0.670	− 30	+ 20.4	− 0.317	+ 0.948

X	E	u	w	n	V	P	Q
1	−0.353	−0.879	+0.477	−188	+15.1	+0.552	+0.834
1	−0.347	−0.894	+0.447	+12	+14.2	+0.577	+0.817
1	−0.345	−0.902	+0.432	−17	+15.9	+0.545	+0.839
1	−0.227	−0.960	−0.279	+154	+10.4	+0.208	+0.978
1	−0.216	−0.938	−0.347	+121	+9.4	+0.746	+0.666
0.707	−0.151	−0.660	−0.255	+112	+10.0	+0.012	+0.707
1	−0.211	−0.926	−0.377	+58	+10.2	0.000	+1.000
1	−0.208	−0.920	−0.392	+12	+10.4	−0.013	+1.000
1	−0.154	−0.731	−0.683	+46	+17.5	+0.139	+0.990
1	−0.151	−0.719	−0.695	+36	+14.7	+0.182	+0.983
1	−0.137	−0.655	−0.755	−84	+10.9	+0.212	+0.977
1	−0.110	−0.512	−0.859	−33	+3.5	+0.446	+0.895
1	−0.082	−0.354	−0.935	+6	+6.6	+0.534	+0.846
1	−0.063	−0.235	−0.972	+274	−1.5	+0.623	+0.782
0.707	−0.025	−0.042	−0.706	+49	−1.4	+0.513	+0.487
1	−0.033	−0.042	−0.999	+197	−1.9	+0.777	+0.629
1	−0.030	−0.024	−0.999	+10	−2.4	+0.782	+0.623
1	−0.014	+0.082	−0.996	+207	+0.5	+0.827	+0.563
1	+0.041	+0.426	−0.905	+370	−5.8	+0.988	+0.156
0.707	+0.062	+0.476	−0.522	+71	+0.1	+0.692	−0.144
1	+0.090	+0.688	−0.726	+2	+1.4	+0.964	−0.267
1	+0.106	+0.761	−0.649	+39	−2.3	+0.925	−0.379
1	+0.109	+0.772	−0.636	+69	−2.9	+0.906	−0.423
1	+0.117	+0.804	−0.594	+97	+1.9	+0.930	−0.366
1	+0.120	+0.815	−0.580	−16	+2.2	+0.912	−0.411
1	+0.153	+0.919	−0.396	+135	+13.9	+0.649	−0.760
1	+0.301	+0.863	+0.505	+207	+13.7	−0.915	−0.403
1	+0.309	+0.837	+0.547	+129	+12.0	−0.817	−0.577
1	+0.342	+0.709	+0.706	−17	+16.6	−0.971	−0.238
0.707	+0.422	−0.490	+0.510	−52	+19.3	−0.307	+0.637
1	+0.605	−0.728	+0.686	−55	+18.1	−0.411	+0.912
1	+0.613	−0.762	+0.648	−76	+17.0	−0.030	+0.999
1	+0.632	−0.832	+0.555	−219	+27.2	−0.362	+0.932
1	+0.635	−0.841	+0.541	−85	+27.2	−0.541	+0.841
0.707	+0.470	−0.655	+0.266	+80	+21.6	−0.348	+0.615
1	+0.690	−0.973	+0.232	−24	+16.7	−0.358	+0.934
1	+0.698	−0.983	+0.183	−83	+16.5	−0.346	+0.938
1	+0.717	−0.998	+0.065	−136	+23.2	−0.288	+0.958
1	+0.720	−0.999	+0.048	−93	+17.0	−0.288	+0.958
0.707	+0.526	−0.703	−0.075	−85	+20.4	−0.210	+0.675
1	+0.769	−0.966	−0.258	−100	+20.0	−0.130	+0.991
1	+0.772	−0.962	−0.275	−16	+19.8	−0.113	+0.994
1	+0.783	−0.940	−0.340	−53	+13.9	+0.035	+0.999
1	+0.936	−0.239	−0.971	+24	+1.8	+0.755	+0.656
1	+0.939	−0.222	−0.975	−144	+3.2	+0.676	+0.737
1	+0.969	−0.026	−0.999	+90	+3.2	+0.925	−0.379
1	+0.972	−0.008	−1.000	−28	+5.0	+0.938	−0.346
1	+1.004	+0.202	−0.979	+243	−7.0	+0.975	+0.221
1	+1.007	+0.219	−0.976	+91	−7.6	+0.946	+0.325

X	E	u	w	n	V	P	Q
1	+ 1.021	+ 0.305	− 0.952	+ 216	− 2.0	+ 0.996	+ 0.087
1	+ 1.046	+ 0.454	− 0.891	− 53	− 4.6	+ 0.929	+ 0.371
0.707	+ 0.741	+ 0.331	− 0.624	− 136	− 3.9	+ 0.707	+ 0.009
1	+ 1.062	+ 0.545	− 0.838	− 39	+ 5.9	+ 0.996	− 0.083
1	+ 1.068	+ 0.577	− 0.817	+ 19	+ 4.1	+ 0.477	− 0.879
1	+ 1.092	+ 0.698	− 0.716	+ 46	+ 0.4	+ 0.814	− 0.581
0.707	+ 0.780	+ 0.528	− 0.469	+ 71	− 1.9	+ 0.353	− 0.612
1	+ 1.111	+ 0.780	− 0.625	+ 74	+ 0.9	+ 0.870	− 0.492
1	+ 1.114	+ 0.792	− 0.611	+ 92	− 1.8	+ 0.728	− 0.685
1	+ 1.117	+ 0.802	− 0.597	+ 24	− 2.2	+ 0.716	− 0.698
0.707	+ 0.846	+ 0.701	− 0.093	− 27	+ 8.2	+ 0.318	− 0.631
1	+ 1.232	+ 0.996	+ 0.094	− 117	− 1.3	+ 0.087	− 0.996
1	+ 1.240	+ 0.989	+ 0.145	+ 227	+ 3.2	+ 0.009	− 1.000
1	+ 1.251	+ 0.977	+ 0.215	− 11	+ 9.9	− 0.653	− 0.757
0.707	+ 0.920	+ 0.611	+ 0.355	+ 18	+ 8.4	− 0.698	− 0.111
1	+ 1.303	+ 0.857	+ 0.515	+ 165	+ 12.3	− 0.809	− 0.588
1	+ 1.306	+ 0.848	+ 0.530	+ 80	+ 12.6	− 0.785	− 0.619
0.707	+ 0.931	+ 0.573	+ 0.414	− 118	+ 7.9	− 0.566	− 0.423
1	+ 1.325	+ 0.779	+ 0.627	− 45	+ 15.1	− 0.866	− 0.500
0.707	+ 0.947	+ 0.512	+ 0.488	− 192	+ 12.0	− 0.674	− 0.213
1	+ 1.363	+ 0.611	+ 0.792	− 108	+ 19.1	− 0.942	− 0.334
1	+ 1.388	+ 0.485	+ 0.875	− 112	+ 15.0	− 0.999	− 0.052
1	+ 1.405	+ 0.393	+ 0.919	− 115	+ 20.2	− 0.866	+ 0.500
1	+ 1.426	+ 0.269	+ 0.963	− 172	+ 23.0	− 1.000	− 0.013
1	+ 1.432	+ 0.236	+ 0.972	− 98	+ 18.6	− 0.992	+ 0.126
1	+ 1.451	+ 0.122	+ 0.993	− 201	+ 18.0	− 0.965	+ 0.263
1	+ 1.468	+ 0.021	+ 0.999	− 285	+ 20.1	− 0.897	+ 0.442
0.707	+ 1.043	− 0.020	+ 0.706	− 127	+ 25.7	− 0.661	+ 0.250
1	+ 1.490	− 0.112	+ 0.994	− 73	+ 18.9	− 0.811	+ 0.584
1	+ 1.495	− 0.146	+ 0.989	− 231	+ 20.7	− 0.473	+ 0.881
1	+ 1.514	− 0.260	+ 0.966	− 86	+ 19.0	− 0.284	+ 0.959
1	+ 1.517	− 0.274	+ 0.962	− 127	+ 19.7	− 0.728	+ 0.685
1	+ 1.522	− 0.307	+ 0.952	− 273	+ 23.1	− 0.653	+ 0.757
1	+ 1.525	− 0.322	+ 0.947	− 206	+ 25.0	− 0.698	+ 0.716
1	+ 1.539	− 0.400	+ 0.917	− 158	+ 22.5	− 0.737	+ 0.676
1	+ 1.542	− 0.415	+ 0.910	− 171	+ 23.9	− 0.605	+ 0.796

Um die Gleichungen homogen zu machen, genügt es $Y = 2E$ zu setzen und 300 als Einheit für das unbenannte Glied anzunehmen. Es ergeben sich dann als Normalgleichungen

$$+115.9972\,X + 13.3236\,Y - 2.7665\,u - 1.5509\,w = +0.5193$$
$$-13.3236\,X + 24.0903\,Y + 6.1580\,u + 9.4400\,w = -6.7055$$
$$-2.7665\,X + 6.1580\,Y + 52.4549\,u - 7.3990\,w = +11.5606$$
$$-1.5509\,X + 9.4400\,Y - 7.3990\,u + 63.5529\,w = -16.3080$$

Die Auflösung führt zu folgenden Werthen der Unbekannten

$$X = +\,0^p0012 \pm 0^p00095 = +\,0''026 \pm 0''021$$
$$E = -\,0.0043 \pm 0.00110 = -\,0.093 \pm 0.024$$
$$u = +\,0.0069 \pm 0.00141 = +\,0.150 \pm 0.031$$
$$w = -\,0.0056 \pm 0.00130 = -\,0.121 \pm 0.028$$

Ein periodischer Verlauf der Werthe von $(xv + xz)$ und zwar ein solcher mit der Periodendauer von einem Jahre ist sonach sicher vorhanden. Das der Zeit proportionale, jedenfalls von kleinen Eigenbewegungen der Vergleichsterne herrührende Glied und ebenso das constante Glied haben genau den nämlichen Werth wie bei der Ausgleichung nur nach ihnen allein, nach Maassgabe der zugehörigen m. F. erscheint aber speciell der erstere wesentlich genauer bestimmt. Der m. F. einer Gleichung findet sich jetzt zu $\varepsilon = \pm\,0^p0098 = \pm\,0''213$, der einer einzelnen gemessenen Distanz würde sich nach Berücksichtigung der periodischen Aenderungen nunmehr sogar nur zu $\pm\,0^p0069$ ergeben, also noch etwas kleiner als der für die neueren Polbogenmessungen gefundene Werth. Die nach Berücksichtigung der jährlichen Periode noch übrig bleibenden Schwankungen von $(xv + xz)$ haben also nichts Auffälliges mehr und können lediglich als von Beobachtungsfehlern herrührend angesehen werden.

Die untere Figur der Tafel am Schlusse der Abhandlung giebt eine graphische Darstellung der Werthe $S - S_0$ und der aus ihrer Ausgleichung nach den Sonnenlängen sich ergebenden Curve.

Es fragt sich nun, wie das Auftreten einer Periode im vorliegenden Falle zu erklären ist. Wenn die Schwankungen wirklich direct von der Sonnenlänge abhängig sein sollen, so wäre die nächstliegende Erklärung, dass einer der Vergleichsterne selbst eine messbare Parallaxe besitzt. Nach pag. 609 haben wir für den Einfluss einer bei den *Vergleichsternen* vorhandenen Parallaxe π auf die Distanz

$$xv = (xv)_0 - 0.9999\,\pi_v\,R\cos(\odot - 294^\circ 18'2)$$
$$xz = (xz)_0 - 0.9982\,\pi_z\,R\cos(\odot - 141^\circ\ 7'9)$$

wo $(xv)_0$ und $(xz)_0$ die von Parallaxe freien Mittelwerthe darstellen. Sehen wir in dem Ausdrucke für $S - S_0$ von den Gliedern X und Et ab und bringen die dann noch verbleibenden Glieder

$+0''.150\cos\odot - 0''.121\sin\odot$, um sie mit $xv-(xv)_0$ resp. $xz-(xz)_0$ vergleichen zu können, auf die Form $-a\cos(\odot - A)$, so erhalten wir $S-S_0 = -0''.193\cos(\odot - 140°56')$. Die Uebereinstimmung im Argument des cos hier und bei $xz-(xz)_0$ ist eine vollkommene, und es würden dementsprechend die periodischen Schwankungen von $S-S_0$ auf eine Parallaxe des Vergleichsternes z zurückzuführen sein. Dem steht aber entgegen der hohe Betrag von $0''.2$, den diese Parallaxe dann haben müsste; σ Drac. und z hätten dann fast gleich grosse Parallaxe. Während σ Drac. aber eine sehr erhebliche Eigenbewegung von fast $2''$ besitzt, geben die — allerdings nur sehr spärlichen — Positionen von z keine Veranlassung bei ihm eine irgendwie merkliche Eigenbewegung vorauszusetzen. Die Ausgleichungen der Werthe von $S-S_0$ deuten allerdings darauf hin, dass einer der Vergleichsterne z oder v eine Eigenbewegung besitzt; der Betrag derselben bleibt aber jedenfalls noch unter $0''.1$. Da auch die Helligkeit von z keine bedeutende ist, muss es als im höchsten Grade unwahrscheinlich bezeichnet werden, dass seine Parallaxe einen erheblicheren Werth besitzt. Bei einem derartigen, sich durch keinerlei besondere Merkmale aus der grossen Zahl der Sterne heraushebenden Objecte erscheint nach unseren Erfahrungen schon eine Parallaxe von $0''.05$ sehr gross und wenig wahrscheinlich.[1]) Wenn auch wohl ein kleiner Theil der periodischen Schwankungen von einer Parallaxe von z herrühren mag, so liegen dem Haupttheile derselben doch sicher andere Ursachen zu Grunde. In Erscheinungen, die mit der Aberration zusammenhängen, sind dieselben jedenfalls auch nicht zu suchen. Selbst wenn eine Abhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit von der Wellenlänge vorhanden wäre, könnte diese die Messungen nicht beeinflussen, da beide Vergleichsterne, auf die es hier allein ankommen würde, genau gleiche Farbe haben.

Jedenfalls muss die Periode ihre Ursache in Vorgängen haben, die sich jedes Jahr wieder in wenigstens nahezu gleicher Weise abspielen. Es können, wenn Parallaxe und Aberration nicht in Frage kommen, im wesentlichen nur noch zwei solche Vorgänge in Betracht kommen: der Einfluss der Temperatur und der der

1) Dessen ungeachtet soll die Parallaxe von z am Leipziger Heliometer noch bestimmt werden.

Lage des Instrumentes. Dass im vorliegenden Falle eine sehr ausgeprägte Periode in der Lage des Instrumentes vorhanden ist, erklärt sich dadurch, dass die Beobachtungen möglichst bald nach Einbruch der Dunkelheit angestellt sind. Mit nur wenigen vereinzelten Ausnahmen fallen sie auf 5^h bis 10^h mittlere Zeit, so dass sie im Laufe des Jahres nach und nach durch alle Sternzeiten hindurch gehen.

Eine Ausgleichung der Beobachtungen ist vorgenommen worden nach der Temperatur und eine andere Ausgleichung nach der Instrumentlage. Bei beiden Ausgleichungen ist nothwendigerweise ein constantes und ein der Zeit proportionales Glied einzuführen. Als maassgebende Temperatur ist wie bei der Reduction der Distanzen auf 0° wieder die Temperatur an der Säule angesehen worden, die mit T bezeichnet werden soll. Für die Ausgleichung nach der Temperatur haben dann die Beobachtungsgleichungen die Form

$$X + Et + VT = S - S_0 .$$

Die Werthe der Coëfficienten von X und E und von $S - S_0$ sind uns bereits bekannt, diejenigen für V finden sich pag. 629 in der entsprechenden Spalte angegeben. Setzt man zur Herbeiführung der Homogenität bei den Coëfficienten $Y = 2E$, $Z = 30V$ und nimmt als Einheit für das unbenannte Glied 300 an, so finden sich als Normalgleichungen

$$+ 115.9972X + 13.3236Y + 43.3783Z = + 0.5193$$
$$+ 13.3236X + 24.0903Y + 6.5104Z = - 6.7055$$
$$+ 43.3783X + 6.5104Y + 27.3255Z = - 8.1804$$

Hieraus folgt für die Werthe der Unbekannten

$$X = + 0^p.0091 \quad \pm 0^p.00146 \quad = + 0''.197 \quad \pm 0''.032$$
$$E = - 0.0038 \quad \pm 0.00105 \quad = - 0.082 \quad \pm 0.023$$
$$V = - 0.000720 \pm 0.000100 = - 0.0156 \pm 0.0022$$

Der m. F. einer Gleichung beträgt $\varepsilon = \pm 0^p.0100 = \pm 0''.217$, die Beobachtungen werden auf Grund dieser Ausgleichung also fast genau so dargestellt wie bei derjenigen direct nach den Sonnenlängen. — Auffallend ist hier der sehr grosse und seinem m. F. nach gut verbürgte Werth für X; der Werth von E stimmt wieder sehr gut mit den früher gefundenen überein. Der Werth

von Y giebt an die Aenderung einer Distanz von 415ᴾ8 bei einer Temperaturerhöhung von 1° C.; es entspricht ihm eine Correction des den Reductionen zu Grunde gelegten Temperaturcoëfficienten des Scalenwerthes im Betrage von — 0.00000173 mit einem m. F. von 24 Einheiten der letzten Decimale. Die Correction ist $\frac{1}{6}$ des Coëfficienten selbst.

Für die Ausgleichung der Beobachtungen nach der Lage des Instrumentes ist den Gleichungen die Form

$$X + Et + P\sin(\theta - \alpha) + Q\cos(\theta - \alpha) = S - S_0$$

gegeben worden; auf den Umstand, ob die Beobachtung bei vorangehendem oder folgendem Gewichte erfolgte, wurde keine Rücksicht genommen.

Die Coëfficienten von P und Q finden sich pag. 629 aufgeführt. Zur Herbeiführung der Homogenität zwischen den Coëfficienten der Bedingungsgleichungen genügt es $Y = 2E$ zu setzen. Man erhält dann als Normalgleichungen

$$\begin{aligned}
+ 115.9972X + 13.3236Y + 8.3889P + 29.6369Q &= + 0.5193\\
+ 13.3236X + 24.0903Y - 11.8879P + 0.9903Q &= - 6.7055\\
+ 8.3889X - 11.8879Y + 61.5805P - 8.5939Q &= + 13.8025\\
+ 29.6369X + 0.9903Y - 8.5939P + 54.4164Q &= - 10.4194
\end{aligned}$$

Für die Werthe der Unbekannten ergiebt sich

$$\begin{aligned}
X &= + 0^{p}.0022 \pm 0^{p}.00116 = + 0''.049 \pm 0''.025\\
E &= - 0.0037 \pm 0.00123 = - 0.080 \pm 0.027\\
P &= + 0.0041 \pm 0.00151 = + 0.090 \pm 0.033\\
Q &= - 0.0062 \pm 0.00162 = - 0.134 \pm 0.035
\end{aligned}$$

Der m. F. einer Gleichung beträgt $\varepsilon = \pm 0^{p}.01075 = \pm 0''.233$. Es ist also nicht zu verkennen, dass die Darstellung der Beobachtungen durch dieses System der Unbekannten eine minder gute ist, als wenn man nach den Sonnenlängen oder den Temperaturen ausgleicht, und dass hier auch die m. F. der Unbekannten gegenüber den Werthen der Unbekannten selbst beträchtlich sind. Andererseits findet aber auch eine ganz auffallende Uebereinstimmung mit dem System der Unbekannten auf pag. 632 statt.

Es sind nun die Gründe, welche dafür sprechen, dass die periodischen Schwankungen der Werthe von $(xv + xz)$ in einer

noch nicht genügend vollkommenen Reduction derselben auf constante Temperatur zu suchen sind, abzuwägen gegen diejenigen, welche die nämlichen Schwankungen verursacht erscheinen lassen können durch die jeweilige Lage des Instrumentes.

Der für die Reduction der Beobachtungen verwendete Temperaturcoëfficient -0.00001064 beruht auf zwei ausgedehnten Reihen des Polbogens, die sehr gut mit einander stimmen. Die zweite Reihe ergiebt einen Werth, der nur um den 30sten Theil von dem der ersten Reihe abweicht; es erscheint daher im höchsten Grade unwahrscheinlich, dass dieser Werth thatsächlich noch einer reellen Correction in der Höhe von einem Sechstel seines Betrages bedürfen sollte, wie es die Ausgleichung der Grössen $(xv + xz)$ bei σ Draconis nach den Temperaturen erfordern würde. Auf der anderen Seite aber ist es durchaus nicht selbstverständlich, dass der aus der Beobachtung des Polbogens abgeleitete Temperaturcoëfficient für die Reduction anderer Bögen unverändert verwendet werden müsste. Die Zenithdistanz des Polbogens kann nämlich nur um etwa 6° schwanken, das Heliometerrohr befindet sich daher bei allen Beobachtungen desselben in annähernd gleicher Lage gegen die Horizontale. Die Temperaturvertheilung längs des Rohres dürfte daher auch für die ganze Beobachtungsreihe als immer die ziemlich gleiche vorauszusetzen sein. Allerdings kann nicht mit Sicherheit angegeben werden, von welchem Thermometer resp. von welcher Thermometercombination die Angabe als maassgebend für die Wärmereduction anzusehen ist; am besten werden die Beobachtungen dargestellt, wenn die Angabe des Thermometers an der Säule als die maassgebende angesehen wird. Dieser Sachlage gegenüber haben bei den Beobachtungen von σ Draconis die Zenithdistanzen einen Spielraum von beiläufig 40°, die Lage des Rohres gegen die Horizontale ist also sehr erheblichen Schwankungen unterworfen, und es ist nicht anzunehmen, dass die Temperaturvertheilung längs des Rohres immer die gleiche sein wird. Daraus würde dann die Folge sein, dass der zur Reduction auf constante Temperatur zu benutzende Coëfficient bei σ Draconis nicht der gleiche zu sein braucht wie beim Polbogen. Gleichzeitig ersieht man aber auch, dass dann die Wärmereduction in einer gewissen Abhängigkeit von der Lage des Instrumentes steht und dass der Einfluss der Temperatur und der Instrumentlage auf die gemessene Distanz sich überhaupt nicht

streng trennen lassen werden. Es wird dies namentlich dann nicht möglich sein, wenn auch die Lage des Instrumentes eine jährliche Periode aufweist, wie es bei σ Draconis stattfindet. Mit der Lage ändert sich auch die Durchbiegung und damit könnten gleichfalls kleine Aenderungen des Scalenwerthes verursacht werden. Bei den REPSOLDschen Heliometern ist eine merkbare Durchbiegung der das Ocularende tragenden Rohrhälfte wohl kaum anzunehmen, da diese im wesentlichen aus einem ziemlich massiven Gussstücke besteht. Hingegen ist es wohl möglich, dass die andere Rohrhälfte, die aus genietetem Stahlblech besteht und an ihrem oberen Ende den schweren Objectivkopf trägt, eine merkbare Durchbiegung hat. Bei dem ebenfalls aus genietetem Stahlblech bestehenden Rohre des Leipziger 30 cm-Refractors handelt es sich um Biegungsbewegungen von der Grössenordnung 1 mm auf 1 m.

Es ist sehr wohl denkbar, dass sich noch ein anderer Ausdruck als der durch sin und cos des Stundenwinkels finden lässt, durch welchen eine wesentlich bessere Darstellung der periodischen Schwankungen von $(xv + xz)$ als Function der Instrumentlage erzielt wird; zum mindesten dürften sich sin und cos der Zenithdistanz als gleich geeignet erweisen, vielleicht auch die Tangente der letzteren. Es sind jedoch weitere Untersuchungen in dieser Hinsicht unterlassen worden, da kaum zu erwarten ist, dass sie neue Aufklärungen zu erbringen vermögen. Es möge nur zum Schlusse noch darauf hingewiesen werden, dass ein kleiner Theil der periodischen Schwankungen auch in einer nicht völlig genügenden Berücksichtigung der Refraction seine Ursache haben kann. Eine Ausgleichung der Beobachtungen nach der Lage des Instrumentes nimmt auf diesen Theil im wesentlichen mit Rücksicht.

Aus dem Vorhergehenden dürfte sich als unzweifelhaft ergeben, dass bei der Verwendung des Heliometers für die Bestimmung absoluter Distanzwerthe zur Erreichung der höchsten Genauigkeit auch die Lage des Instrumentes mit in Rechnung zu ziehen ist. Die Schwierigkeiten, welche sich auf diese Weise ergeben, sind am einfachsten dadurch zu beheben, dass man die Reduction nicht auf einen festen Scalenwerth stützt, sondern diesen jeweilig direct durch Messung einer grossen gut bestimmten Distanz in unmittelbarer Nähe der zu bestimmenden ermittelt.

III. Bestimmung des Temperaturcoëfficienten des Scalenwerthes aus Beobachtungen des Polbogens.

Zur Bestimmung des Temperaturcoëfficienten des Scalenwerthes ist in den Jahren 1887 bis 1894 der Polbogen beobachtet worden. Die Details der Beobachtungen und die aus ihnen hergeleiteten Resultate finden sich in *PI.* Um eine Controle dieser Bestimmung zu haben, ist von mir in den Jahren 1898 bis 1900 eine zweite umfangreiche Beobachtungsreihe des Polbogens ausgeführt worden. Der eingehaltene Beobachtungsmodus ist der gleiche wie früher. Die zur Ablesung der Scalen benutzten Striche waren zwar andere als in den Jahren 1887—94, aber auch hier beruhen alle Messungen auf der gleichen Strichcombination.

Zunächst gebe ich nachfolgend die Beobachtungen selbst. Um eine Controle für den Temperaturausgleich der im Heliometerrohre eingeschlossenen Luft zu haben, ist nachträglich am Objectivkopf ein in das Rohr hineinragendes Quecksilberthermometer angebracht worden, dessen Angaben mit J bezeichnet werden. Die unter Σc zusammengefassten Correctionen sind

Refraction + Aberration + Reduction auf Normalstellung + Reduction wegen Eigenbewegung + Theilungscorrection.

Die Theilungscorrectionen sind bei der Reduction der ersten Beobachtungsreihe noch nicht berücksichtigt. Für die Bestimmung des Temperaturcoëfficienten ist dieser Umstand unwesentlich; er hat nur Einfluss auf die Herleitung des Scalenwerthes.

Die unter c_w aufgeführte Reduction auf 0° ist berechnet nach der Formel $-0.00001064 S\varDelta$, wo S die Temperatur der Säule angiebt.

Die Bedeutung der übrigen Spalten ist die nämliche wie auf pag. 598 angegeben ist.

Beobachtungen des Polbogens.

1898	Θ	G	Ocs	P	R	S	K	K-S	K-J	Δ_g	Σc	c_{10}	Δ_r	
Sept. 6	$20^h 13^m.4$	v	10.10	I	3—2	2—3	+ 15°.2	— 2°.4	— 0°.8	311°.9799	1244	— 584	312°.0459	
	20 38.4	v	10.10	II	3	2—3	+ 14.8	— 2.3	— 0.4	9790	1183	— 568	0405	
7	19 23.4	v	10.15	II	2	2	+ 20.2	— 2.0	— 1.3	9852	1319	— 737	0434	
	19 38.2	v	10.15	I	2—3	3—2	+ 19.9	— 1.9	— 1.3	9876	1298	— 724	0450	
8	19 44.8	v	10.20	II	3—2	3	+ 20.7	— 2.2	— 0.8	9953	1230	— 760	0423	
	20 3.3	v	10.20	I	3	3	+ 20.2	— 2.4	— 1.1	0118	1192	— 750	0560	
10	19 24.0	v	10.20	I	2	2	+ 23.8	— 1.7	— 0.7	9934	1302	— 847	0389	
	19 37.4	v	10.20	II	2	2	+ 23.4	— 1.9	— 0.7	0035	1280	— 840	0475	
15	19 29.5	v	10.20	I	3—2	2	+ 18.4	— 1.5	— 0.7	9770	1217	— 661	0326	
	19 43.4	v	10.20	II	2—3	2	+ 18.2	— 1.7	— 0.6	9763	1197	— 661	0299	
17	19 37.2	v	10.10	II	3—2	3	+ 16.3	— 2.8	— 1.0	9785	1315	— 634	0466	
	19 51.6	v	10.10	I	3—2	3—2	+ 15.9	— 3.0	— 1.2	9795	1289	— 627	0457	
Nov. 2	1 42.7	f	10.00	II	2	3	+ 4.8	— 2.0	— 0.4	9778	688	— 226	0240	1
	2 1.3	f	10.00	I	2	3	+ 4.5	— 2.1	— 0.5	9840	665	— 219	0286	1
6	2 34.8	f	10.00	II	2—3	3—2	+ 4.6	— 2.5	— 1.2	9617	822	— 236	0203	
	2 51.1	f	10.00	I	2—3	2—3	+ 4.3	— 2.5	— 1.1	9638	855	— 226	0267	
8	1 13.8	f	10.00	I	2—3	2—3	+ 3.7	— 2.1	— 1.2	9798	657	— 193	0262	
	1 31.0	f	10.00	II	3	2	+ 3.4	— 2.2	— 1.0	9892	671	— 186	0377	
Dec. 6	4 10.5	f	10.00	II	2	2	+ 1.4	— 1.7	— 1.2	9556	930	— 103	0383	
	4 21.3	f	10.00	I	2	2	+ 1.2	— 2.1	— 1.6	9556	950	— 110	0396	
1899														
Jan. 26	2 30.6	f	9.90	I	2	2	— 0.8	— 1.4	— 0.6	9644	698	— 20	0322	
	2 43.7	f	9.90	II	2	2	— 0.9	— 1.2	— 0.5	9745	727	— 10	0462	
27	7 42.0	f	9.80	II	2	2	— 4.4	— 2.0	— 0.9	9335	1117	+ 80	0532	
	7 58.1	f	9.80	I	2	2	— 4.6	— 1.9	— 1.5	9386	1084	+ 90	0560	
Juni 4	15 40.1	v	10.10	II	2—3	2—3	+ 12.7	— 2.9	—	0165	864	— 518	0511	
	15 56.9	v	10.10	I	2	2	+ 12.4	— 2.8	—	0118	898	— 505	0511	
5	15 27.4	v	10.10	I	2	2	+ 16.7	— 2.9	— 0.6	0063	910	— 651	0322	
	15 42.4	v	10.10	II	2	2	+ 16.3	— 2.8	— 0.5	0115	938	— 634	0419	
8	15 7.8	v	10.10	I	2	2	+ 15.0	— 2.3	— 0.4	0156	829	— 574	0411	
	15 20.6	v	10.10	II	2	2	+ 14.9	— 2.2	— 0.3	0166	858	— 568	0456	
18	16 37.6	v	10.20	II	3	2—3	+ 15.6	— 2.6	— 0.4	0037	913	— 604	0346	
	16 50.3	v	10.20	I	3—2	2—3	+ 15.4	— 2.7	— 0.4	9990	938	— 601	0327	
19	14 30.4	v	10.20	I	2	2	+ 20.2	— 1.7	— 0.6	0466	708	— 727	0447	2
	14 50.0	v	10.20	II	2	2	+ 19.6	— 1.9	— 0.6	0346	736	— 714	0368	2
Aug. 9	18 42.2	v	10.20	II	2	2	+ 16.3	— 1.9	— 0.6	0055	1162	— 604	0613	
	18 56.9	v	10.20	I	2—3	2	+ 16.1	— 2.0	— 0.5	9924	1157	— 601	0480	
10	19 7.6	v	10.20	II	3	3	+ 16.8	— 2.8	— 0.6	9999	1169	— 651	0517	
	19 20.4	v	10.20	I	2—3	2—3	+ 16.7	— 2.7	— 0.5	9945	1157	— 644	0458	
14	18 1.0	v	10.20	I	2	2	+ 21.8	— 2.1	— 0.7	9873	1254	— 793	0334	
	18 14.7	v	10.20	II	2	2	+ 21.5	— 2.2	— 0.7	9919	1261	— 787	0393	
24	20 32.2	v	10.20	II	3—2	2—3	+ 13.6	— 2.7	— 0.5	9936	1007	— 541	0402	
	20 51.5	v	10.20	I	3	3—2	+ 13.2	— 2.6	— 0.6	9958	961	— 525	0394	
26	20 22.3	v	10.20	II	3—2	2—3	+ 12.7	— 3.0	— 0.6	9982	1016	— 521	0477	
	20 36.5	v	10.20	I	2—3	2—3	+ 12.4	— 3.0	— 0.7	9989	980	— 511	0458	
27	20 37.0	v	10.10	I	3—2	3	+ 14.0	— 2.9	— 0.3	9851	1146	— 561	0436	
	20 50.9	v	10.10	II	2—3	3—2	+ 13.7	— 2.9	— 0.3	9785	1109	— 551	0343	
Sept. 6	20 0.4	v	10.20	II	3	3—2	+ 22.4	— 2.1	— 0.4	0061	1218	— 813	0466	3
	20 19.9	v	10.20	I	3	3	+ 22.1	— 2.0	— 0.4	0125	1180	— 800	0505	3
Oct. 15	20 26.9	v	10.00	I	2—3	2—3	+ 7.4	— 2.0	— 0.8	9573	1202	— 312	0463	
	20 42.4	v	10.00	II	2—3	2—3	+ 7.0	— 2.5	— 0.6	9617	1161	— 315	0463	
16	20 21.0	v	10.00	II	3	3	+ 7.9	— 2.0	— 0.8	9506	1216	— 329	0393	
	20 36.6	v	10.00	I	3	3	+ 7.5	— 2.1	— 0.7	9618	1175	— 319	0474	

1) Feldbeleuchtung sehr schwach.
2) Helle Dämmerung.
3) Sehr dunstig.

1899	Θ	G	Ocs	P	R	S	K	K-S	K-J	Δ_g	Σc	c_w	Δ_r	
Nov. 4	20ʰ45ᵐ4	v	10.20	I	2	2—3	+ 17°3	+ 0°4	— 0°4	311ᵖ9801	998	— 561	312ᵖ0238	
	21 1.5	v	10.20	II	2	2—3	+ 16.7	— 0.1	— 0.5	9855	950	— 558	0247	
5	20 54.4	v	10.20	II	2	2	+ 15.7	— 1.3	— 1.0	9941	950	— 564	0327	
	21 8.6	v	10.20	I	2	2	+ 15.3	— 1.5	— 0.9	0146	908	— 558	0496	
6	21 2.9	v	10.20	II	2—3	3	+ 12.3	— 1.7	— 0.5	0161	870	— 465	0566	
	21 18.4	v	10.20	I	3—2	3—2	+ 12.0	— 2.0	— 0.6	0166	823	— 465	0524	
21	22 13.2	v	9.90	I	2—3	3	+ 0.2	— 2.6	— 0.4	9682	887	— 93	0476	
	22 27.9	v	9.90	II	2—3	3	0.0	— 2.5	— 0.3	9550	847	— 83	0314	
Dec. 1	22 30.3	v	10.00	II	2	2	+ 4.5	— 1.6	— 0.4	9760	744	— 203	0301	
	22 47.6	v	10.00	I	2—3	2—3	+ 4.3	— 1.7	— 0.5	9896	702	— 199	0399	
7	22 53.8	v	9.90	I	2	2—3	— 1.0	— 1.2	— 0.5	9727	721	— 7	0441	
	23 7.8	v	9.90	II	2	2	— 1.6	— 1.7	— 0.6	9727	684	— 3	0408	
8	22 54.3	v	9.80	I	2	2	— 3.8	— 1.9	— 0.6	9616	817	+ 63	0496	
	23 9.4	v	9.80	II	2	2	— 3.9	— 2.0	— 0.3	9655	784	+ 63	0502	
12	22 36.4	v	9.80	II	2	3	— 8.4	— 2.5	— 1.6	9465	771	+ 196	0432	
	22 52.4	v	9.80	I	2	3—2	— 9.0	— 2.9	— 1.4	9562	721	+ 203	0486	4
20	23 58.6	v	9.80	II	3	3	— 5.5	— 2.4	— 0.8	9591	670	+ 103	0364	} 5
	0 14.5	v	9.80	I	3	3	— 5.8	— 2.6	— 0.7	9640	653	+ 106	0399	
21	0 1.7	v	9.80	II	3—2	3—2	— 5.4	— 1.5	— 0.2	9492	671	+ 129	0292	
	0 26.3	v	9.80	I	2—3	2—3	— 6.2	— 2.1	— 0.5	9682	644	+ 136	0462	
22	0 7.0	v	9.80	I	3—2	3—4	— 9.9	— 2.6	— 0.6	9611	585	+ 242	0438	
	0 27.3	v	9.80	II	3	3—4	— 10.2	— 2.8	— 0.5	9623	569	+ 246	0438	
23	23 2.6	v	9.80	II	2—3	3—2	— 7.2	— 1.2	— 0.7	9565	708	+ 199	0472	
	23 20.4	v	9.80	I	2—3	3—2	— 7.7	— 1.7	— 0.7	9558	665	+ 199	0422	
26	0 10.9	v	9.90	I	3—2	3—2	— 2.1	— 2.0	— 0.6	9702	553	+ 3	0258	
	0 25.3	v	9.90	II	2—3	2—3	— 2.3	— 2.2	— 0.5	9864	544	+ 3	0411	
27	23 14.5	v	9.90	II	2—3	2—3	— 2.4	— 1.1	— 0.3	9765	606	+ 43	0414	
	23 30.4	v	9.90	I	2	2	— 2.8	— 1.3	— 0.3	9797	571	+ 50	0418	6
1900														
Febr. 2	3 35.5	f	9.90	I	2—3	2—3	— 0.8	— 1.4	— 0.4	9616	808	— 20	0404	
	3 56.0	f	9.90	II	2	2	— 0.9	— 1.3	— 0.1	9555	856	— 13	0398	
8	4 3.9	f	9.80	I	2	2	— 6.4	— 3.1	— 0.9	9403	932	+ 110	0445	
	4 23.8	f	9.80	II	2	2	— 6.7	— 3.1	— 0.8	9364	974	+ 120	0458	
13	4 13.0	f	9.90	II	3—2	3—2	— 1.1	— 2.4	— 0.9	9583	881	— 43	0421	} 7
	4 30.3	f	9.90	I	2—3	2—3	— 1.2	— 2.2	— 0.8	9441	897	— 33	0305	

4) Am Schluss leichte Wolken, später völlig trübe.
5) Sterne sehr verwaschen, Feldbeleuchtung sehr schwach.
6) Wegen Wolken in der 2. Schieberlage nur eine Einstellung erhalten.
7) Starker Nebel.

Das Material der vorstehenden Reihe ist ein durchaus gleichartiges, so dass allen Abenden gleiches Gewicht zu ertheilen ist. Jeder Abend liefert eine Gleichung von der Form

$$ax + by + cz + \Delta_r = \Delta_0$$

Hierin bedeutet a die Kopftemperatur K, b den Unterschied zwischen der Kopftemperatur und der Angabe des Thermometers an der Säule $(K - S)$ und c den Unterschied zwischen der Kopftemperatur und der Temperatur im Inneren des Rohres $(K - J)$. Auf eine der Zeit proportionale Aenderung der Distanz ist nicht Rücksicht genommen auf Grund der an der ersten Messungsreihe gemachten Erfahrungen. Die gute Uebereinstimmung zwischen

den aus der ersten und zweiten Messungsreihe folgenden Werthen für die in Scalentheilen ausgedrückte Distanz des Polbogens zeigt auch, dass thatsächlich solche Aenderungen nicht vorhanden sind. Um den von vornherein unbekannten wahren Werth der Distanz für 0° d. h. Δ_0 aus den Bedingungsgleichungen zu eliminiren, ist das Gesammtmittel

$$+7.6x - 21.y - 0.6z + 312^{p}.0734 = \Delta_0$$

aus den obigen Gleichungen gebildet und dieses dann von jeder einzelnen abgezogen worden.

Um zu sehen, wie die Darstellung durch die einzelnen Unbekannten verbessert wird, sind die so erhaltenen neuen Gleichungen schrittweise nach diesen Unbekannten aufgelöst und die jeder Auflösung entsprechenden mittleren Fehler einer einzelnen Gleichung berechnet worden, wenn die im resultirenden Werthe der Unbekannten noch enthaltenen unbestimmten Parameter vernachlässigt werden.

Es ergeben sich die folgenden Resultate:

$$x = -0^{p}.003356 \pm 0^{p}.000127 + 0.00067y - 0.00286z \qquad \varepsilon = \pm 0^{p}.00828$$
$$y = +0.006109 \pm 0.001864 - 0.06796z \qquad \varepsilon = \pm 0.00740$$
$$z = +0.000310 \pm 0.003509 \qquad \varepsilon = \pm 0.00749$$

Unter ε sind hier und auf den folgenden Seiten die m. F. einer Gleichung angegeben.

Es ist sofort ersichtlich, dass die Einführung von z, d. h. der Temperatur im Rohrinnern, keine Verbesserung der Darstellung der Beobachtungen bewirkt. Dass z keine reelle Bedeutung hat, folgt auch daraus, dass sein zugehöriger m. F. den 12fachen Betrag seines eigenen Werthes hat.

Auch diese zweite Beobachtungsreihe des Polbogens zeigt, dass die Temperatur des Kopfes nicht ohne weiteres für die des gesammten Rohres substituirt werden darf. Zur Vergleichung führe ich die entsprechenden Werthe der ersten Beobachtungsreihe hier an. Diese sind erlangt auf Grund einer neuen Ausgleichung der Beobachtungen, bei welcher das der Zeit proportionale Glied von vornherein unberücksichtigt gelassen wurde. Ferner ist die Beobachtung von 1887 Aug. 1 ausgeschlossen worden, da nachträglich bemerkt wurde, dass nicht die normalen Striche auf den

Scalen eingestellt worden waren. Ausserdem sind auch die Theilungscorrectionen angebracht worden. Die betreffenden Werthe sind

$$x = -0^p003287 \pm 0^p000129 + 0.00473y \qquad \varepsilon = \pm 0^p00881$$
$$y = +0.003124 \pm 0.001414 \qquad \varepsilon = \pm 0.00837$$

Die Werthe von x und y aus beiden Reihen stimmen mithin innerhalb der ihnen zugehörigen m. F. überein; der Unterschied zwischen den beiden Werthen von y ist trotzdem wegen der Grösse des m. F. sehr erheblich. Da offenbar die Kopftemperatur die Temperatur des Rohres zu niedrig angiebt, habe ich noch zwei Ausgleichungen vorgenommen, bei denen nicht ein vom Argument $(K - S)$ abhängiges Correctionsglied eingeführt, sondern wo von vornherein die Rohrtemperatur höher als die Kopftemperatur angenommen wird. Das eine Mal wurde daher ausgeglichen nach dem Mittel aus den Angaben der Thermometer am Kopf und an der Säule, nämlich nach $\frac{1}{2}(K + S)$, das andere Mal direct nach der Angabe S des Thermometers an der Säule. Die Resultate waren die folgenden:

1. Reihe

$$\tfrac{1}{2}(K+S): \quad -0^p003289 \pm 0^p000118 \qquad \varepsilon = \pm 0^p00851$$
$$S: \quad -0.003271 \pm 0.000117 \qquad \varepsilon = \pm 0.00844$$

2. Reihe

$$\tfrac{1}{2}(K+S): \quad -0^p003372 \pm 0^p000120 \qquad \varepsilon = \pm 0^p00784$$
$$S: \quad -0.003366 \pm 0.000115 \qquad \varepsilon = \pm 0.00755$$

Die Ausgleichung nach $\frac{1}{2}(K + S)$ befriedigt am wenigsten; diejenigen nach K und $(K - S)$ und nach S allein können als gleichwerthig angesehen werden. Es liegt keinerlei Anhaltspunkt dafür vor, welcher von beiden man den Vorzug geben soll. Vereinigt man die aus beiden Messungsreihen folgenden Werthe der Temperaturcoëfficienten zu Mittelwerthen, so führen die mit K und $(K - S)$ und die mit S reducirten Distanzen fast genau zu den nämlichen Werthen selbst für ziemlich extreme Temperaturen und grosse Distanzen. Ich habe mich schliesslich der einfacheren Rechnung wegen dafür entschieden, für die Temperaturreduction lediglich die Angaben des Thermometers an der Säule als maassgebend anzusehen.

Für die Reduction der Distanz des Polbogens auf 0° C. hat man dann die Formel

$$-0^p 00332\, S$$

und daher für eine beliebige Distanz Δ (ausgedrückt in Scalentheilen)

$$-0^p 000001064\, S\Delta.$$

Reducirt man mit diesen Werthen die 52 zur Ausgleichung benutzten (und wegen Theilungsfehlern reducirten) Messungen des Polbogens der 1. Reihe, so erhält man als Mittelwerth derselben, giltig für die Epoche 1887.0,

$$312^p 0385.$$

Zieht man noch die weiteren an 11 Tagen vorliegenden Messungen hinzu, die wegen Anwendung anderer Striche etc. nicht bei der Ausgleichung verwendet werden konnten, so findet sich als Gesammtergebniss der 1. Beobachtungsreihe

$$312^p 0384.$$

Die 43 Tage der 2. Beobachtungsreihe ergeben in gleicher Weise, ebenfalls für die Epoche 1887.0,

$$312^p 0412.$$

Die Uebereinstimmung der Werthe ist eine sehr befriedigende und zeigt auch, da die Mitten der Beobachtungsreihen um etwa 8 Jahre auseinander liegen, dass keine der Zeit proportionalen Aenderungen der Distanz stattgefunden haben, möchten diese nun instrumenteller Natur oder von nicht genügend berücksichtigter Eigenbewegung der Sterne herrührend gewesen sein.

Für den Werth eines Scalentheiles ergeben die obigen Zahlen

1. Reihe: 21".7279 2. Reihe: 21".7277.

IV. Meteorologische Angaben.

Unter B sind die auf 0° reducirten Barometerstände, unter T die Lufttemperaturen nach Celsiusgraden aufgeführt. Θ giebt die zugehörige Sternzeit an.

1898	Θ	B	T
Sept. 6	$20^h\ 0^m$		+13°.0
	20 4	$757^{mm}.4$	
	20 48		+12.8
7	19 2		+19.3
	19 8	755.2	
	19 58		+18.2
8	19 30		+20.2
	20 13	755.2	+19.1
10	19 11		+23.0
	19 19	751.1	
	19 46		+22.2
14	19 19		+15.4
	19 35	758.5	
	20 21		+14.8
	20 35	758.5	
	21 5		+14.2
15	19 16		+17.5
	19 39	760.6	
	19 52		+17.3
	20 21		+16.4
	20 39	760.7	
	21 37		+16.8
	21 39	760.8	
17	19 25		+15.1
	19 47	757.4	
	20 0		+14.0
	20 47	757.3	
	21 27		+13.8
	21 47	757.3	
Oct. 28	23 19		+ 9.6
	23 29	753.3	
	0 5		+ 9.6
	0 29	753.3	
	0 41		+ 9.0
Nov. 2	22 48	756.0	
	23 29		+ 4.4
	0 20		+ 4.0
	0 49	755.4	
	0 58		+ 4.0
	1 16		+ 4.6
	2 12		+ 4.4
	2 49	755.0	

1898	Θ	B	T
Nov. 4	$22^h\ 54^m$	$750^{mm}.8$	
	23 33		+6°.5
	0 13		+7.4
	0 45		+5.5
	0 54	750.9	
6	2 4	759.6	
	2 12		+4.0
	3 1		+3.0
	3 4	760.0	
8	0 55		+2.6
	1 11	757.9	
	1 46		+2.0
	2 11	757.9	
	2 27		+1.6
	2 53		+1.5
Dec. 5	1 52		+4.0
	1 59	759.0	
	2 37		+3.9
	3 14		+4.0
	3 59	759.1	
6	1 47		+2.2
	2 3	757.2	
	2 34		+1.6
	2 55		+2.0
	3 3	757.2	
	3 44		+1.5
	4 3	756.9	
	4 30		+0.9
1899			
Jan. 6	0 4	761.3	
	0 17		+1.5
	1 1		+1.0
	1 38		+0.3
	2 4	761.6	
9	0 16	749.8	
	0 27		+4.2
	1 6		+3.5
	1 39		+3.0
	2 16	749.6	
10	23 20	745.6	
	0 1		+3.0
	0 32		+3.1
	1 7		+3.1

1899	Θ	B	T
Jan. 26	$0^h\ 23^m$	$766^{mm}.4$	
	1 3		+ 0°.1
	1 42		− 0.1
	2 1		− 0.2
	2 23	766.4	
	2 51		− 1.0
27	0 27	762.4	
	1 5		− 0.2
	1 36		− 0.4
	2 6		− 0.9
	2 27	761.9	
	6 27	761.4	
	7 19		− 4.7
	8 8		− 5.0
	8 27	760.9	
30	2 20		− 1.8
	2 39	749.6	
	2 55		− 2.8
	3 24		− 2.6
	4 39	749.5	
Febr. 1	5 39		− 2.5
	5 47	736.7	
	6 17		− 3.1
6	2 6	754.9	
	2 35		− 6.2
	3 12		− 7.1
	3 51		− 7.6
	4 6	754.4	
10	2 58		+14.1
	3 22	750.0	
	3 30		+13.0
	3 55		+12.7
	4 22	750.0	
März 5	4 51		− 3.5
	4 53	755.7	
	5 34		− 3.8
	6 6		− 4.0
	6 53	757.3	
12	5 21	761.6	
	5 44		+11.9
	6 24		+11.0

1899	Θ	B	T
März 12	$6^h 54^m$		$+11^\circ.0$
	7 21	$762^{mm}.6$	
25	6 12	758.6	
	6 54		+ 0.3
	7 31		− 1.0
	8 7		− 2.5
	8 12	759.2	
28	6 24	755.7	
	6 56		+11.7
	7 27		+10.8
	7 51		+ 9.0
	8 24	756.1	
Mai 24	12 9	745.3	
	12 47		+14.0
	13 32		+12.8
	14 0		+12.8
	14 9	744.8	
Juni 4	13 50		+12.2
	13 52	757.8	
	14 34		+12.0
	14 52	757.9	
	15 15		+11.4
	15 52	758.0	
	16 6		+10.2
5	13 53		+16.6
	13 56	758.8	
	14 31		+16.1
	14 56	759.0	
	15 12		+14.5
	15 52		+13.7
	15 56	759.0	
7	13 52		+14.6
	14 4	756.4	
	14 33		+13.9
	15 0		+13.2
	15 4	756.7	
8	13 48		+15.3
	14 8	757.4	
	14 21		+15.3
	14 54		+14.5
	15 8	757.4	
	15 29		+14.1
18	14 34		+16.8
	14 47	746.2	
	15 9		+16.1
	15 46		+15.9
	15 47	746.2	

1899	Θ	B	T
Juni 18	$16^h 24^m$		$+13^\circ.6$
	16 47	$746^{mm}.2$	
	17 1		+13.1
19	14 19		+18.9
	14 51	744.9	
	14 58		+18.5
28	15 26	754.1	+14.7
	16 2		+13.8
	16 27	754.0	
	16 32		+13.0
Juli 17	15 42	752.1	
	16 23		+20.0
	16 51		+19.1
	17 21		+18.8
	17 42	752.1	
19	15 49	753.3	
	16 31		+20.3
	17 35		+19.2
	17 49	753.7	
20	15 53	753.6	
	16 24		+21.9
	16 59		+21.5
	17 36		+20.5
	17 53	753.8	
21	15 57	753.1	
	16 24		+24.1
	17 2		+23.0
	17 32		+22.5
	17 57	753.2	
Aug. 1	16 41	760.2	
	17 7		+17.5
	17 44		+15.2
	18 20		+14.0
	18 41	759.9	
2	16 45	754.8	
	16 53		+20.0
	17 28		+19.0
	17 57		+18.1
	18 45	754.8	
6	17 0	749.1	
	17 12		+24.9
	17 44		+24.3
	18 13		+23.9
	19 0	749.0	
9	17 12	752.7	
	17 19		+16.4
	17 52		+16.1

1899	Θ	B	T
Aug. 9	$18^h 28^m$		$+15^\circ.8$
	19 6		+15.1
	19 12	$753^{mm}.1$	
10	17 16	755.0	
	17 45		+15.1
	18 22		+15.2
	18 52		+16.0
	19 16	755.1	
	19 30		+15.9
14	17 32	755.4	
	17 50		+21.0
	18 24		+19.5
	18 32	755.4	
24	20 7		+12.4
	20 11	756.2	
	21 1		+11.3
	22 11	756.2	
	22 25		+10.8
26	20 5		+11.1
	20 19	754.9	
	20 45		+10.9
	21 16		+10.1
	22 19	754.5	
	22 35		+ 8.1
27	20 22		+13.0
	20 24	750.8	
	20 59		+12.1
	22 24	750.7	+11.5
Sept. 6	19 3	750.1	
	19 43		+22.1
	20 30		+21.0
	21 3	750.5	
Oct. 9	19 12	760.7	
	19 43		+ 7.7
	20 56		+ 6.0
	21 12	760.4	
13	21 28	747.1	
	22 10		+ 5.5
	22 46		+ 5.5
	23 22		+ 5.5
	23 28	748.0	
14	19 15		+ 7.1
	19 32	753.8	
	20 6		+ 6.8
15	18 36	760.6	
	18 58		+ 7.7
	19 34		+ 6.9

1899	Θ	B	T
Oct. 15	20h 11m		+ 7.0°
	20 36	760.8mm	
	20 51		+ 6.0
16	18 40	757.9	
	18 51		+ 9.2
	19 31		+ 8.5
	19 40	757.9	
	20 5		+ 7.3
	20 40	757.9	
	20 47		+ 6.8
Nov. 4	20 31		+17.2
	20 55	751.8	
	21 9		+15.6
5	18 59	752.8	
	19 30		+17.5
	20 5		+16.3
	20 39		+15.1
	20 59	752.9	
	21 18		+14.1
6	19 2	750.4	
	19 15		+15.0
	20 17		+12.2
	20 49		+ 9.8
	21 2	750.8	
	21 26		+10.5
11	19 22	754.3	
	19 45		+ 9.0
	20 22		+ 8.5
	20 56		+ 8.1
	21 22	755.3	
21	20 2	760.8	
	20 36		+ 0.6
	21 20		− 0.2
	21 54		+ 0.1
	22 2	760.0	
	22 37		− 1.1
Dec. 1	20 41	753.8	
	21 3		+ 4.9
	21 43		+ 4.5
	22 16		+ 4.8
	22 41	753.5	
	22 56		+ 3.9
7	22 41		− 0.6
	23 5	751.0	
	23 17		− 3.0

1899	Θ	B	T
Dec. 8	21h 9m	753.3mm	
	21 33		− 3.0°
	22 7		− 3.6
	22 39		− 3.9
	23 9	754.2	
	23 19		− 3.9
12	22 24	752.2	−10.5
	23 4		−11.0
18	21 48	756.4	
	22 15		− 5.3
	22 57		− 6.5
	23 2		− 6.4
	23 48	756.7	
19	21 52	758.8	
	22 12		− 4.2
	22 51		− 6.8
	0 1		− 7.8
	0 52	759.0	
20	21 56	759.3	
	22 14		− 5.2
	23 1		− 5.9
	23 36		− 6.5
	23 56	759.2	
	0 25		− 7.0
21	23 0	763.3	
	23 48		− 6.4
	0 37		− 7.1
	1 0	763.8	
22	23 4	763.1	
	23 54		−11.1
	0 45		−10.8
	1 4	762.4	
23	22 8	756.0	
	22 48		− 8.1
	23 30		− 8.0
	0 8	755.7	
26	22 20	748.6	
	22 31		− 1.0
	23 18		− 2.5
	23 53		− 3.1
	0 20	748.4	
	0 36		− 3.2
27	22 24	743.3	
	23 0		− 3.9
	23 43		− 4.4
	0 24	743.4	

1900	Θ	B	T
Jan. 15	23h 38m	749.9mm	
	0 13		− 8.1°
	0 59		− 8.6
	1 36		− 8.1
	1 39	749.0	
Febr. 1	1 46	747.4	
	1 55		− 2.9
	2 42		− 4.1
	3 20		− 4.5
	3 46	747.3	
2	1 50	745.8	
	1 57		− 0.2
	2 36		− 0.9
	2 50	745.8	
	3 15		− 1.1
	3 50	745.8	
	4 5		− 1.2
8	2 13	750.2	− 6.5
	3 3		− 6.5
	3 13	750.6	
	3 43		− 6.9
	4 36		− 7.9
	5 13	751.0	
9	2 17	752.5	
	2 41		− 5.2
	3 13		− 5.6
	3 47		− 6.1
	4 17	752.1	
12	2 15		− 0.9
	2 29	739.9	
	2 59		− 1.8
	3 29	740.0	
	3 38		− 2.6
13	2 25		+ 0.9
	2 33	745.4	
	3 8		− 1.8
	3 55		− 0.9
	4 33	745.3	
	4 39		− 1.5
25	4 4		+13.4
	4 20	752.2	
	4 47		+12.9
	5 20	752.2	
	5 36		+12.3
April 20	11 1		+10.9
	11 53	764.2	
	11 56		+10.0

1900	Θ	B	T
April 20	$12^h 43^m$		+ $9^\circ 5$
	12 53	$764^{mm}2$	
23	10 5	751.1	
	10 30		+ 9.4
	11 15		+ 8.3
	11 52		+ 7.7
	12 5	751.6	
Mai 5	10 53	753.0	
	11 50		+14.8
	11 53	753.0	
	12 36		+14.1
	12 53	753.0	
	13 21		+13.1
Aug. 6	16 59	746.6	
	17 22		+14.9
	18 11		+13.1
	18 59	746.6	
9	17 11	750.3	
	17 14		+14.9
	17 55		+14.0
	18 31		+13.5
	19 11	750.1	
12	18 23	759.1	
	18 34		+15.0
	19 20		+14.2
	20 15		+10.9
	20 23	759.4	
19	17 25		+23.5
	17 51	750.0	
	18 11		+21.2
	18 42		+20.9
	18 51	750.0	
20	16 46		+24.3
	16 54	745.8	
	17 54	745.7	
	17 58		+22.5
31	16 38	757.7	
	16 52		+19.1
	17 51		+16.2
	18 38	757.8	
Sept. 9	17 13	751.1	
	17 17		+16.1
	18 9		+15.0
	18 42		+14.0
	19 13	751.7	

1900	Θ	B	T
Sept. 12	$17^h 25^m$	$760^{mm}3$	+ $15^\circ 0$
	18 13		+14.0
	18 45		+13.2
	19 25	760.4	
19	17 45		+21.7
	17 53	753.1	
	18 27		+18.6
	19 10		+18.6
	19 53	753.8	
20	17 47		+15.5
	17 57	759.5	
	18 25		+14.5
	18 57	759.8	
	19 4		+13.5
29	17 32	750.8	
	17 59		+17.0
	18 40		+16.1
	19 32	751.2	
Oct. 8	18 7	751.6	
	18 18		+19.5
	19 6		+16.5
	19 38		+17.1
	20 7	751.5	
9	18 11	757.7	
	18 22		+18.1
	19 6		+15.5
	19 47		+14.5
	20 11	756.9	
13	18 27	757.4	
	19 7		+10.5
	19 41		+10.1
	20 15		+ 9.5
	20 27	757.1	
Dec. 8	22 0		− 0.4
	22 8	762.6	
	22 49		− 0.9
	23 8	762.5	
	23 36		− 0.9
	0 8	762.4	
9	21 12	758.4	
	21 20		+ 2.2
	22 24		+ 2.2
	23 3		+ 2.7
	23 12	758.2	
20	1 57	752.7	
	2 17		+ 1.0
	3 1		+ 2.3

1900	Θ	B	T
Dec. 20	$3^h 42^m$		+ $1^\circ 5$
	3 57	$751^{mm}7$	
21	2 0	750.2	
	2 19		+ 4.9
	2 54		+ 5.0
	3 30		+ 4.9
	4 0	750.7	
1901			
Jan. 2	23 47	759.4	
	23 57		− 9.6
	0 42		−10.0
	0 47	759.4	
	1 21		−10.2
	1 47	759.6	
3	22 50	762.5	
	23 32		− 9.6
	0 19		−10.0
	0 50	763.4	
	0 57		−10.3
8	0 36		− 1.6
	1 10	755.8	
	1 14		− 1.9
	1 52		− 2.1
	2 10	755.9	
17	1 46	758.0	
	2 12		− 4.5
	2 59		− 6.5
	3 40		− 7.2
	3 46	758.2	
18	1 7		− 4.0
	1 50	757.1	
	1 55		− 5.5
23	1 9	765.6	
	1 12		+ 4.6
	1 53		+ 4.0
	2 9	765.6	
	2 26		+ 3.5
25	4 18	753.3	
	5 0		+ 3.4
	5 38		+ 3.1
	6 13		+ 3.0
	6 18	752.7	
Febr. 3	2 53	744.1	
	3 15		− 2.0
	3 59		− 2.9
	4 32		− 3.1
	4 53	743.7	

1901	Θ	B	T
Febr. 7	$5^h\ 8^m$	$757^{mm}.5$	$-\ 6^\circ.2$
	5 58		− 6.5
	7 9	757.6	
10	2 56		− 0.2
	3 20	757.0	
	3 31		− 0.5
	4 4		− 0.9
	5 20	757.2	
11	3 24	753.0	
	3 49		− 4.5
	4 27		− 5.3
	5 5		− 7.0
	5 24	753.0	
12	3 28	751.3	
	3 52		− 5.1
	4 30		− 7.0
	5 1		− 7.6
	5 28	751.5	
März 13	5 19		+ 8.3
	5 23	753.2	
	6 4		+ 7.0
	6 32		+ 6.9
	7 23	753.1	
26	6 14	745.7	
	6 22		− 1.7
	7 12		− 3.0
	7 53		− 3.9
	8 14	745.8	
29	6 26	748.3	
	6 37		+ 0.9
	7 31		− 0.1
	8 12		− 0.7
	8 26	749.2	
April 2	8 42	758.4	
	9 34		+ 7.9
	10 24		+ 6.9
	10 42	758.3	
	10 55		+ 6.5
20	11 53	756.7	
	12 24		+ 5.7
	13 31		+ 4.9
	13 53	756.8	
21	9 57	755.8	
	10 25		+ 10.2
	11 10		+ 9.9
	11 50		+ 8.9
	11 57	755.8	

1901	Θ	B	T
April 22	$10^h\ 1^m$	$755^{mm}.6$	
	10 20		$+10^\circ.5$
	11 1		+ 9.5
	11 40		+ 9.0
	12 1	756.0	
26	10 16	747.3	
	10 45		+ 5.2
	11 22		+ 5.2
	12 16	747.7	
29	10 28	749.3	
	10 55		+ 12.9
	11 34		+ 12.0
	12 10		+ 11.5
	12 28	749.5	
Mai 4	11 45		+ 9.5
	11 48	752.2	
	12 48	752.6	
	12 49		+ 8.0
13	11 23	756.4	
	11 41		+ 17.6
	12 17		+ 16.5
	12 46		+ 15.9
	13 23	756.5	
22	11 59	759.3	
	12 38		+ 13.1
	13 57		+ 11.0
	13 59	759.4	
28	14 23	750.7	
	14 51		+ 16.5
	16 6		+ 14.9
	16 23	750.6	
Juni 5	12 47		+ 20.6
	12 54	755.0	
	13 31		+ 19.9
	13 54	755.1	
	14 4		+ 19.1
7	13 2	752.9	
	13 30		+ 16.0
	14 3		+ 15.1
	14 38		+ 14.8
	15 2	752.9	
14	13 30	745.1	
	13 48		+ 15.1
	14 35		+ 14.1
	15 24		+ 13.0
	15 30	745.1	
20	13 53	757.9	
	14 31		+ 18.6

1901	Θ	B	T
Juni 20	$15^h\ 18^m$		$+17^\circ.9$
	15 53	$758^{mm}.0$	
	16 0		+ 17.0
23	14 5	750.5	
	14 26		+ 23.0
	15 33		+ 22.0
	16 5	751.0	
28	15 17		+ 16.2
	15 25	755.9	
	15 55		+ 15.2
	16 25	756.0	
	16 33		+ 14.9
30	16 33	752.5	
	16 56		+ 18.1
	17 41		+ 17.1
	18 23		+ 16.1
	18 33	752.3	
Juli 7	17 0	755.6	
	17 42		+ 16.7
	18 25		+ 15.6
	19 0	755.9	
	19 10		+ 15.0
8	15 4	754.0	
	15 46		+ 17.5
	16 28		+ 16.9
	17 1		+ 16.8
	17 4	754.2	
10	16 12	752.9	
	16 15		+ 21.3
	16 51		+ 20.8
	17 12	752.9	
	17 26		+ 20.0
11	15 16	752.3	
	15 50		+ 21.4
	16 36		+ 19.9
	17 16	752.5	
	17 17		+ 19.1
16	15 36	757.3	
	15 47		+ 20.2
	16 22		+ 19.8
	16 59		+ 19.8
	17 36	757.5	
17	15 40	757.8	
	16 30		+ 22.0
	17 5		+ 21.3
	17 39		+ 20.3
	17 40	758.4	

Inhaltsverzeichniss.

Erläuterungen zur Tafel.

In beiden Figuren der nebenstehenden Tafel ist die Einheit für die Werthe der Abscissen das tropische Jahr, für die Werthe der Ordinaten $0^{p}.0001$ des Scalenwerthes. — Die Werthe der Ordinaten der Curven wurden von 0.05 zu 0.05 Jahren direct berechnet und eingezeichnet und die so erhaltenen Punkte durch gerade Linien verbunden.

Die mit $xv - xz$ bezeichnete Figur giebt eine Darstellung des Anschlusses der Beobachtungen an die ermittelte Parallaxe. Die Ordinaten der Curve entsprechen der Formel

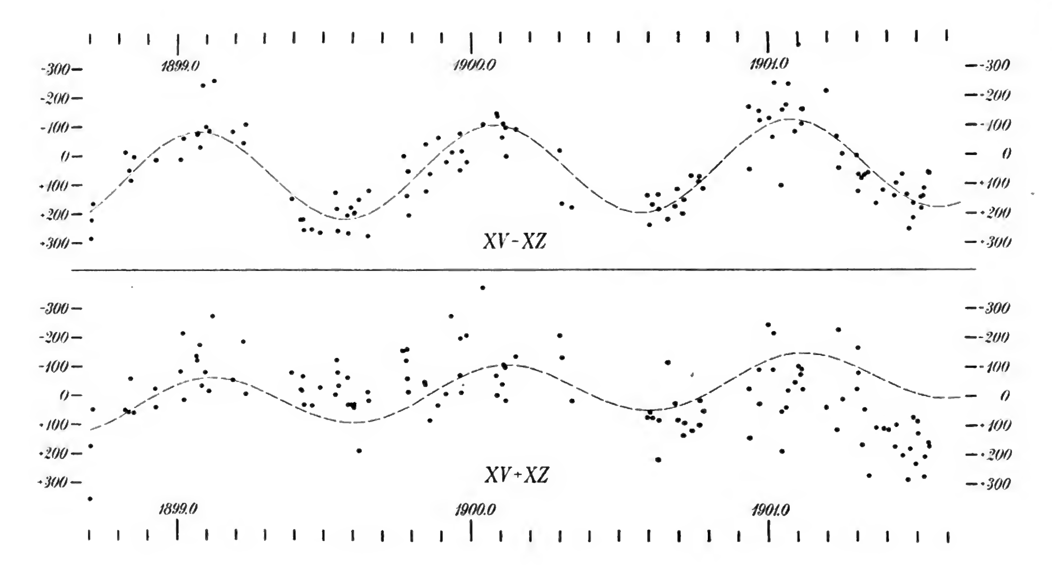
$$- 0^{p}.0053 + 0^{p}.0020 t + 1.944 R\ 0^{p}.0080 \cos (\odot - 307^{\circ}42'),$$

während die Ordinaten der Beobachtungswerthe den pag. 614 als $D - D_0$ bezeichneten Grössen entsprechen.

Die mit $xv + xz$ bezeichnete Figur zeigt, wie weit eine Ausgleichung der Summen der Distanzen nach den Sonnenlängen die Beobachtungen darstellt. Die Ordinaten der Curve entsprechen der Formel

$$+ 0^{p}.0012 - 0^{p}.0043 t - 0^{p}.0089 \cos (\odot - 140^{\circ}56'),$$

die Ordinaten der Beobachtungswerthe entsprechen den pag. 629 als n bezeichneten Grössen.



XV - XZ
XV + XZ
1899.0
1900.0
1901.0
-300
-200
-100
0
+100
+200
+300

ZUR THEORIE
DES LEGENDRE-JACOBI'SCHEN SYMBOLS $\left(\frac{n}{m}\right)$

INSBESONDERE ÜBER ZWEITHEILIGE COMPLEXE ZAHLEN.

ABHANDLUNG II.

VON

W. SCHEIBNER.

Des XXVII. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe
der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

N° VII.

LEIPZIG
BEI B. G. TEUBNER
1902.

Vorgetragen für die Abhandlungen am 2. Dezember 1901.
Das Manuscript eingeliefert am 29. Mai 1902.
Der letzte Bogen druckfertig erklärt am 14. August 1902.

ZUR THEORIE

DES LEGENDRE-JACOBI'SCHEN SYMBOLS $\left(\frac{n}{m}\right)$,

INSBESONDERE ÜBER ZWEITHEILIGE COMPLEXE ZAHLEN.

ABHANDLUNG II.

VON

W. SCHEIBNER.

Nachdem ich in meiner ersten Abhandlung über das Legendre-Jacobi'sche Symbol mich im Wesentlichen auf die Theorie der reellen Zahlen beschränkt, und nur in der Einleitung auf die Bedeutung und den Gebrauch des Symbols in der Theorie der complexen Zahlen hingewiesen hatte, beabsichtige ich in der gegenwärtigen Fortsetzung die cubischen, biquadratischen und bicubischen, nebst anderen zweitheiligen oder binomischen complexen Zahlen in Betracht zu ziehen. Ich erlaube mir hierzu die Eigenschaften der betreffenden Zahlen auf Grund älterer Vorlesungsaufzeichnungen in elementarer Darstellung zu entwickeln. Auf die an die Einführung idealer Primfactoren sich knüpfenden Untersuchungen bin ich dabei nicht eingegangen, sondern habe mich auf solche complexe Zahlen beschränkt, welche eine eindeutige Zerlegbarkeit zulassen.

Für die Multiplicationsformeln der elliptischen Thetafunctionen, welche namentlich im Falle der sogenannten complexen Multiplication in Betracht kommen, habe ich eine übersichtliche Zusammenstellung zu geben versucht. Auch ist bei den biquadratischen (oder lemniskatischen) und bicubischen (oder trifoliatischen) Zahlen der Zusammenhang mit den elliptischen Integralen und den zugehörigen Invarianten etwas näher ins Auge gefasst worden.

Schliesslich mag noch die Bemerkung Platz finden, dass abgesehen von den am Schlusse angezeigten Druckfehlern zu Abh. I, die Charakterisirung der kleinsten Reste μ eines complexen Moduls, S. 370 Z. 10 v. u., in der angeführten Form nur für biquadratische Zahlen Geltung besitzt, und dass ferner zu S. 371 Z. 5 v. u. das Citat der Arbeit von Eisenstein in Crelle's Journal, Bd. 35, S. 255 nachzutragen ist. Überhaupt haben, trotz einiger ungenauen Angaben betreffs der bicubischen Zahlen, die daselbst angewandten Methoden die Grundlage geliefert für die hier versuchte Herleitung der zugehörigen Reciprocitätssätze, die freilich auf dem eingeschlagenen Wege nicht ohne einigermaassen beschwerliche Rechnung

möglich gewesen ist.[1]) Im Übrigen darf ich wohl auf nachsichtige Beurtheilung hoffen, wenn es nicht allenthalben gelungen sein sollte, jede Incorrectheit aus den zuweilen etwas complicirten Formeln zu eliminiren: für die Richtigkeit der erhaltenen Resultate glaube ich einstehen zu dürfen.

---

1) Die inhaltsreiche Eisenstein'sche Abhandlung aus dem Jahre 1847 (Crelle's Journal Bd. 35, S. 153—276) „*Über elliptische unendliche Doppelproducte und Doppelreihen*, nebst arithmetischen Anwendungen auf die Theorie der Reste vierter und sechster Potenzen" (vgl. z. B. S. 190, 249) scheint den Arithmetikern weniger bekannt zu sein, zum mindesten findet sich dieselbe im *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, Bd. IV, S. 529 nicht aufgeführt, auch in den *Vorlesungen über Kreistheilung* von Herrn Bachmann wird sie nicht erwähnt.

Inhaltsübersicht.

I. Arithmetischer Theil.

a) Biquadratische und bicubische Zahlen.

1.

Da die cubischen, biquadratischen und bicubischen complexen Zahlen als binomisch oder zweigliedrig betrachtet werden können, bestehend aus einem reellen und einem imaginären Theile, so ist eine gemeinsame Behandlungsweise gestattet, wie sich namentlich auch bei der geometrischen Versinnlichungsweise zeigt, deren Grundlagen bekanntlich von GAUSS herrühren.[1]) Schreibt man für die complexen Einheiten

$$e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}} = i, \quad e^{\frac{1}{3}\pi\sqrt{-1}} = j,$$

so führt die Theorie der biquadratischen Reste auf complexe Zahlen von der Form $n = p + qi$ mit den reellen Zahlencoefficienten p und q, während die Sätze über cubische und bicubische Reste für Zahlen von der Form $n = p + qj$ zu entwickeln sind. In der That lassen sich Zahlen der allgemeineren Formen

$$a + bi + ci^2 + di^3,$$

resp.

$$a + bj^2 + cj^4 \quad \text{oder} \quad a + bj + cj^2 + dj^3 + ej^4 + fj^5$$

auf jene zweitheiligen Formen reduciren, wie aus den Gleichungen

$$i^2 = -1, \quad j^3 = -1 \quad \text{und} \quad j^2 = j - 1$$

sogleich hervorgeht. Die Gleichheit zweier complexer Zahlen setzt die Gleichheit ihrer beiden Theile, des reellen wie des imaginären, voraus. Die Producte complexer Zahlen sind wiederum complexe Zahlen von der gleichen Beschaffenheit.

---

1) GAUSS *Theoria residuorum biquadraticorum* II, 1831. — *Imaginare* = „abbilden", CAUCHY nennt deshalb die imaginären Größen *„quantités géométriques"*, vergl. z. B. seine *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, Bd. IV, S. 157, 1847.

Behufs der geometrischen Versinnlichung sollen die zweitheiligen complexen Grössen durch Punkte einer Ebene repräsentirt werden, dergestalt dass für $n = p + qi$ p und q die Coordinaten eines rechtwinkligen Coordinatensystems bezeichnen, während für $n = p + qj$ die Coordinaten auf ein schiefwinkliges System zu beziehen sind, dessen Axen sich unter dem Winkel $\frac{\pi}{3}$ schneiden. Da aber wegen $j = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$

$$n = p + qj = p + \tfrac{1}{2}q + \tfrac{1}{2}qi\sqrt{3}$$

oder

$$n = p + qi = p - \frac{1}{\sqrt{3}}q + \frac{2}{\sqrt{3}}qj$$

dieselbe complexe Grösse sowohl von i, wie von j abhängig wird, so kann der nämliche Punkt gleichzeitig auf das rechtwinklige und das schiefwinklige Coordinatensystem bezogen werden, und es gelten in beiden Fällen dieselben Regeln für die Addition und Multiplication. Seien r der Radiusvector und φ der Richtungswinkel von n, r_1 und φ_1 von n_1, so erfolgt die Addition von n und n_1 durch Parallelverschiebung des Radiusvectors r_1 vom Coordinatenursprung nach n, oder umgekehrt des Radiusvectors r nach n_1, während bei der Multiplication die Richtungswinkel φ und φ_1 addirt, und nur die Radienvectoren multiplicirt werden. Selbstverständlich wird dabei das Product rr_1 nur durch Längeneinheiten *einer* Dimension gemessen.

Für

$$n = p + qi, \quad n_1 = p_1 + q_1 i$$

folgt sogleich das Quadrat des Abstandes der Punkte n und n_1

$$\overline{nn_1}^2 = (p - p_1)^2 + (q - q_1)^2.$$

Dagegen erhält man für

$$n = p + qj, \quad p + \tfrac{1}{2}q = r\cos\varphi, \quad \tfrac{1}{2}q\sqrt{3} = r\sin\varphi$$

$$r^2 = p^2 + pq + q^2, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{q\sqrt{3}}{2p + q}.$$

Mithin wird

$$\overline{nn_1}^2 = r^2 + r_1^2 - 2rr_1\cos(\varphi - \varphi_1)$$
$$= (p - p_1)^2 + (p - p_1)(q - q_1) + (q - q_1)^2.$$

Das Quadrat des Abstandes zweier complexer Grössen liefert den Werth der sogen. *Norm* ihrer Differenz.

2.

Die Gesammtheit der *ganzen* complexen Zahlen, d. h. deren reelle und imaginäre Theile ganze reelle Zahlencoefficienten haben, wird durch die Schnittpunkte aller um die Längeneinheit von einander entfernten Parallellinien zu den Axen dargestellt; dabei ist es für die cubischen Zahlen offenbar gleichgültig, ob die Ordinatenaxe den Winkel $\frac{\pi}{3}$ oder $\frac{2\pi}{3}$ mit der Abscissenaxe macht. Wir werden die drei entsprechenden Axen beibehalten, welche die Ebene in sechs Sextanten theilen, gleichwie die biquadratischen Zahlen sich auf die vier rechtwinkligen Axenquadranten vertheilen. Ebenso wie im letzteren Falle die Zugehörigkeit zu den verschiedenen Quadranten durch die Vorzeichen der beiden Zahlencoefficienten p und q bestimmt wird, liegen die cubischen Zahlen im *ersten* Sextanten, wenn p und q positiv, im *zweiten* für $p < 0$, $p + q > 0$, im *dritten* für $q > 0$ und $p + q < 0$, im *vierten* wenn $p<0$, $q<0$, im *fünften* wenn $p>0$ und $p+q<0$, im *sechsten* endlich für $q < 0$ und $p + q > 0$.

Man kann die zweigliedrigen complexen ganzen Zahlen auch als die Schnittpunkte anderer, den Coordinatenaxen nicht paralleler Gitter darstellen. Wählt man z. B. eine *beliebige* complexe Zahl $m = k + li$ resp. $= k + lj$ *ohne reellen Theiler* und bestimmt eine *coordinirte* Zahl $m_1 = k_1 + l_1 i$ resp. $= k_1 + l_1 j$ durch die Bedingung, dass

$$kl_1 - k_1 l = \pm 1$$

sein soll, so lässt sich *jede* complexe Zahl $n = p + qi$ oder $p + qj$ auf die Form

$$n = p_1 m + q_1 m_1$$

bringen, denn die Auflösung der Gleichungen

$$p = kp_1 + k_1 q_1, \qquad q = lp_1 + l_1 q_1$$

ergibt

$$\pm p_1 = l_1 p - k_1 q\,, \quad \mp q_1 = lp - kq.$$

Man erhält zugleich die doppelten Dreiecksflächen

$$2\Delta = 2(0, 1, i) = 2(0, m, m_1) = \pm (kl_1 - lk_1) = 1$$

oder

$$2\Delta = 2(0, 1, j) = 2(0, m, m_1) = \pm (kl_1 - lk_1)\tfrac{1}{2}\sqrt{3} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,,$$

und die Schnittpunkte zweier Systeme von Parallellinien zu den Radienvectoren der coordinirten Zahlen m und m_1 liefern alle

complexen Zahlen $n = p + qi$ resp. $n = p + qj$. Da aber die durch die Gitterpunkte begrenzten Parallelogramme jetzt nicht gleichseitig sind, so betragen die Abstände der Parallelen zu den beiden Radienvectoren ϱ und ϱ_1 von m und m_1 resp. $\frac{2\Delta}{\varrho}$ und $\frac{2\Delta}{\varrho_1}$, also für die biquadratischen Zahlen $\frac{1}{\varrho}$ und $\frac{1}{\varrho_1}$, für die cubischen dagegen $\frac{\sqrt{3}}{2\varrho}$ und $\frac{\sqrt{3}}{2\varrho_1}$.

3.

Complexe Einheiten nennen wir die ganzen Zahlen, für welche $r = 1$ ist. Man hat also die entsprechenden Werthe von p und q aus den Gleichungen

$$p^2 + q^2 = 1 \quad \text{und resp.} \quad p^2 + pq + q^2 = 1$$

zu bestimmen. Für biquadratische Zahlen sind

$$1,\ i,\ -1 = i^2 \quad \text{und} \quad -i = i^3$$

die vier complexen Einheiten. Bei den cubischen und bicubischen Zahlen erhält man ebenso die sechs auf den Axen gelegenen Einheiten

$$1,\ j,\ -1 + j = j^2,\ -1 = j^3,\ -j = j^4 \quad \text{und} \quad 1 - j = j^5.$$

Durch die Multiplication mit einer complexen Einheit i oder j rückt eine Zahl $n = p + qi$ oder $p + qj$ ohne Änderung ihres Abstandes vom Nullpunkt in den nächstgelegenen Quadranten resp. Sextanten, einer Drehung des Radiusvectors um den Winkel $\frac{\pi}{2}$ oder $\frac{\pi}{3}$ entsprechend. Da die übrigen Einheiten durch Potenzen von i oder j ausgedrückt werden, so gelangt bei wiederholter Multiplication durch wiederholte Drehung das Produkt ni^ϱ oder nj^ϱ successive in alle Quadranten oder Sextanten. Die dadurch entstehenden Zahlen heissen *associirt*. Es gibt folglich, vom Nullpunkt abgesehen, in den vier Quadranten je vier associirte biquadratische Zahlen

$$p + qi, \quad -q + pi, \quad -p - qi \quad \text{und} \quad q - pi,$$

sowie sechs associirte cubische oder bicubische Zahlen:

$$p + qj, \quad -q + (p + q)j, \quad -(p + q) + pj,$$
$$-p - qj, \quad q - (p + q)j \quad \text{und} \quad (p + q) - pj,$$

welche den sechs aufeinanderfolgenden Sextanten angehören. Für p oder $q = 0$ sind die associirten Werthe

$$\pm p, \pm pi \quad \text{oder} \quad \pm q, \pm qi, \quad \text{resp.}$$
$$\pm p, \pm pj, \pm p(1-j) \quad \text{oder} \quad \pm q, \pm qj, \pm q(1-j).$$

Zwei Zahlen von der Form

$$n = p + qi \quad \text{und} \quad n' = p + \tfrac{q}{i} = p - qi$$

oder

$$n = p + qj \quad \text{und} \quad n' = p + \tfrac{q}{j} = p + q - qj$$

heissen *conjugirt*, ihr Product

$$nn' = N(n) = p^2 + q^2 \quad \text{resp.} \quad = p^2 + pq + q^2$$

ist reell und führt den Namen der *Norm* von n, dieselbe ist dem Quadrat des Radiusvectors gleich. Reelle Zahlen sind sich selbst conjugirt, und die Norm ihrem Quadrate gleich, wie sich sofort für $q = 0$ ergibt. Von speciellen Ausnahmefällen abgesehen[1]) können conjugirte Zahlen nicht gleichzeitig associirt sein, obgleich sie mit ihren associirten Zahlen sämmtlich die gleiche Norm besitzen. Denn die Norm einer complexen Einheit ist der positiven Einheit gleich, und die Norm eines Products wird durch das Product der Normen der einzelnen Factoren gebildet.

4.

Wir unterscheiden auch unter den complexen Zahlen *zusammengesetzte Zahlen* und *Primzahlen,* welche indess auch bei den eintheiligen Zahlen nicht mit der reellen Zahlentheorie übereinzustimmen brauchen. So ist z. B. die reelle Primzahl

$$2 = (1+i)\left(1+\tfrac{1}{i}\right) = i(1-i)^2$$

in zwei biquadratische Factoren auflösbar, sowie die reelle Primzahl

$$3 = (1+j)\left(1+\tfrac{1}{j}\right) = -(1-2j)^2$$

1) Diese Ausnahmefälle treten ein, wenn $p = 0$ oder $q = 0$ oder $p \pm q = 0$ ist, wozu für cubische Zahlen noch die Bedingungen $p + 2q = 0$ oder $2p + q = 0$ kommen. Auf diese Weise erhält man die den Normen 2 und 3 entsprechenden associirt-conjugirten Zahlen

$$1 \pm i; \quad 1 + j, \quad 2 - j \quad \text{oder} \quad \pm(1-2j)$$

nebst deren reellen Vielfachen.

in zwei cubische Factoren zerfällt. *Gerade* oder *ungerade* heissen die complexen Zahlen mit gerader oder ungerader Norm, also sind die ungeraden Zahlen relative Primzahlen zu 2.[1])

Wenn es sich um die Gesetze der Theilbarkeit complexer Zahlen handelt, so ist vor Allem zu zeigen, dass wie in der Theorie der reellen Zahlen, eine biquadratische oder bicubische Zahl sich nur auf *eine* Weise in Primfactoren zerlegen lässt.

Solches ergibt sich, sobald sich beweisen lässt, dass wenn das Product zweier complexer Zahlen durch eine Primzahl theilbar ist, diese einen der Factoren teilen muss. Bekanntlich führt dazu die Aufstellung eines Systems von Gleichungen von der Form

$$n = q_1 n_1 + n_2, \quad n_1 = q_2 n_2 + n_3, \quad \cdots$$
$$\text{bis } n_{\alpha-1} = q_{\alpha-1} n_{\alpha-1} + n_\alpha, \quad n_{\alpha-1} = q_\alpha n_\alpha,$$

wo α eine endliche Anzahl bedeutet. Denn da die Quotienten $\frac{n}{n_1}$ und $\frac{n_2}{n_1}$ sich um die complexe Zahl q_1 unterscheiden sollen, so kann man die letztere offenbar so bestimmen, dass die Coefficienten des reellen und des imaginären Theils von $\frac{n_2}{n_1}$ in dem Intervalle $\pm \frac{1}{2}$ enthalten sind. Dann wird

$$N(n_2) \leq \tfrac{1}{2} N(n_1) \quad \text{für biquadratische, und}$$
$$N(n_2) \leq \tfrac{3}{4} N(n_1) \quad \text{für cubische Zahlen.}$$

Verfährt man entsprechend mit den übrigen Gleichungen des Systems, so bilden die Normen der Reste $n_2 n_3 \cdots n_\alpha$ eine Reihe beständig abnehmender, positiver, reeller ganzer Zahlen, womit die Endlichkeit des Systems dargethan ist. Dann folgt aber weiter, dass n_α nicht allein gemeinschaftlicher Theiler von n und n_1 ist, sondern dass auch jeder solche Theiler n'_α theilt. Sind n und n_1 ohne gemeinschaftlichen Theiler, also *relative Primzahlen*, so wird n_α eine complexe Einheit, und umgekehrt. Multiplicirt man in diesem Falle die Gleichungen des Systems mit einem Factor m, so folgt, dass wenn mn theilbar ist durch n_1, m theilbar durch n_1 sein muss.

---

1) Gauss nennt die durch die erste Potenz von $1 + i$ theilbaren biquadratischen Zahlen *halbgerade* (semipares) und nur die durch 2 theilbaren *gerade* (*Theoria resid. biquadr.* Art. 35).

Wir sind hiernach, vermöge einer bekannten Schlussweise, berechtigt, jede complexe biquadratische oder bicubische Zahl

$$n = p_1 p_2 p_3 \cdots$$

als ein Product von (gleichen oder ungleichen) Primzahlen zu betrachten, und zwar auf eine einzige Weise, wenn man von der Hinzufügung complexer Einheitsfactoren (n_a) absieht, durch welche man nur zu associirten Zahlen gelangt.

Die vorstehende Darlegung reicht zur Begründung des bewiesenen Satzes vollständig aus, es ist aber wesentlich zu bemerken, dass die Reihe der Reste $n_1 n_2 n_3 \cdots n_a$ um so rascher abnehmen wird, je kleiner ihre Normen werden. Nun ist bei den biquadratischen Zahlen, wie schon Gauss im Art. 42 seiner *Theoria resid. biquadrat.* angemerkt hat, n_2 in der That *absolut kleinster Rest* von n_1, wenn die Coefficienten des reellen und des imaginären Theils von $\frac{n_2}{n_1}$ in dem Intervalle $\pm \frac{1}{2}$ enthalten sind, wodurch $N(n_2) \leqq \frac{1}{2} N(n_1)$ hervorgeht. Bei den cubischen Zahlen dagegen wird man auf eine abweichende Definition der absolut kleinsten Reste oder *Reste kleinster Norm* geführt, dergestalt, dass die Ungleichung $N(n_2) \leqq \frac{1}{3} N(n_1)$ gilt. In der That hat man, wenn der Werth des Quotienten $\frac{n}{n_1}$ dem Punkte p entspricht, unter den vier ganzzahligen Ecken des gleichseitigen Parallelogramms für q_1 die dem p zunächst gelegene Ecke zu wählen. Die Norm der Differenz (oder das Quadrat des Abstandes $\overline{pq_1}$) liefert dann die Ungleichung

$$N\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \leqq \frac{1}{3},$$

weil der Radius des dem gleichseitigen Dreieck umschriebenen Kreises gleich $\frac{1}{\sqrt{3}}$ erhalten wird.[1])

5.

Es fragt sich jetzt, wodurch man eine complexe Primzahl erkennen kann. Zunächst muss die Norm eine reelle Primzahl

---

1) Herr Bachmann findet in seiner *Kreistheilung* S. 189 die Ungleichung $N\left(\frac{n_2}{n_1}\right) < \frac{1}{2}$.

sein, und umgekehrt gehört zu einer reellen Primzahl als Norm eine complexe Primzahl, weil sonst

$$N(n) = (p + qi)(p - qi) \quad \text{resp.} \quad = (p + qj)(p + \tfrac{q}{j})$$

durch die Norm eines Factors $p' + q'i$ theilbar wäre, und weil andererseits ein reeller Primfactor von

$$N(n) = p^2 + q^2 \quad \text{resp.} \quad = p^2 + pq + q^2$$

n theilen müsste. Letzteres ist aber nur möglich, wenn p oder q verschwindet, und die Norm einer Quadratzahl gleich wird. Denn ist eine complexe Zahl durch eine reelle theilbar, so sind die Coefficienten beider Theile Vielfache des Divisors.

Daraus folgt, dass nur diejenigen reellen Primzahlen keine complexen Factoren besitzen, welche nicht die Form $p^2 + q^2$ resp. $p^2 + pq + q^2$ annehmen können. Da die 2 keine biquadratische Primzahl, sondern auf $1 + i$ reductibel ist, so bleiben im biquadratischen Gebiete nur Primzahlen $\varpi \equiv \pm 1 \bmod 4$ zu betrachten. Nun wird für

$$\varpi \equiv 1 \bmod 4, \quad \left(\frac{-1}{\varpi}\right) = 1,$$

folglich

$$\nu^2 + 1 = (\nu + i)(\nu - i) \equiv 0 \mod \varpi,$$

und da keiner der beiden Factoren durch ϖ theilbar ist, so muss ϖ in complexe Primfactoren auflösbar, kann also keine biquadratische Primzahl sein. Übrigens ist die Zerlegung der reellen Primzahl

$$\varpi = (p + qi)(p - qi) = p^2 + q^2$$

nur auf *eine* Weise möglich, weil sonst $p + qi$ mit $p' + q'i$ gemeinschaftliche Theiler haben müsste. Es bleiben also nur die Primzahlen $\varpi \equiv -1 \bmod 4$ nebst ihren associirten Werthen ohne biquadratische Theiler, weil die Summe zweier Quadrate nach dem Modul 4 nur $\equiv 0$, 1 oder 2 sein kann.

Die cubischen oder bicubischen Primzahlen verhalten sich ganz analog, nur dass jetzt der 3 die complexe Primzahl $1 + j$ entspricht, während die 2 unzerlegbar bleibt. Man hat also nur noch die reellen Primzahlen $\varpi \equiv \pm 1 \bmod. 6$ zu untersuchen. Da für

$$\varpi \equiv 1 \mod 6, \quad \left(\frac{-3}{\varpi}\right)_2 = 1, \quad \text{so ist}$$

$$\nu^2 + 3 = (\nu + 1 - 2j)(\nu - 1 + 2j) \equiv 0 \mod \varpi$$

durch ϖ theilbar, und folglich

$$\varpi = (p + qj)\left(p + \frac{q}{j}\right) = p^2 + pq + q^2,$$

also wiederum auf eine einzige Weise in complexe conjugirte Primfactoren zerlegbar. Ebenso schliessen wir analog wie früher, dass die Primzahlen $\varpi \equiv -1 \mod. 6$ keine complexen cubischen Factoren besitzen, weil

$$p^2 + pq + q^2 = (p - q)^2 + 3pq$$

nicht die Form $6l - 1$ haben kann. Die Norm einer solchen Primzahl nebst deren associirten Werthen ist selbstverständlich das Quadrat der reellen Primzahl.

Ist also n eine complexe Primzahl ohne reellen Theiler, — d. h. nicht selbst eine reelle Primzahl oder einer solchen associirt — so ist mit einziger Ausnahme von $1 + i$ resp. $1 + j$ die Norm stets eine reelle Primzahl von der Form $4l + 1$ oder $6l + 1$ und umgekehrt. Associirte und conjugirte Zahlen sind gleichzeitig Primzahlen oder zusammengesetzte Zahlen.

6.

Associirte Zahlen können nur in Ausnahmefällen nach einem complexen Modul m unter einander congruent sein. Denn aus

$$n \equiv n i^{\varrho} \quad \text{folgt} \quad n(1 - i^{\varrho}) \equiv 0 \mod m,$$

und wenn $n \equiv 0$ ausgeschlossen wird, muss m durch $1 - i^{\varrho}$, d. h. durch $1 + i$ oder durch 2, also durch die erste oder zweite Potenz von $1 + i$ theilbar sein. Bei den cubischen Zahlen ergibt sich analog

$$n(1 - j^{\varrho}) \equiv 0 \mod m,$$

sodass entweder n durch m, oder m sei es durch $1 + j$, sei es durch $1 - j^3 = 2$ theilbar wird.

Die Theilbarkeit der complexen Zahl $p + qi = n$ durch $1 + i$ erkennt man an dem Stattfinden der Congruenz

$$p - q \equiv (p - q)^2 + 2pq = N \equiv 0 \mod 2,$$

und wenn wir diese ausschliessen, so wird jede durch $1 + i$ untheilbare, d. h. also jede *ungerade* biquadratische Zahl — relative Primzahl zu $2(1 + i)$ — in Bezug auf diesen Modul einer biquadratischen Einheit i^{ϱ} congruent. Gleichzeitig erhält man

$$p - q \equiv 1 \mod 2 \quad \text{und} \quad N = 4l + 1 \equiv 1 \mod 4.$$

Analog ergibt die Theilbarkeit von $n = p + qj$ durch $1 + j$

$$p - q \equiv (p - q)^2 + 3pq = N \equiv 0 \mod 3.$$

Soll also diese Congruenz nicht stattfinden und auch p und q nicht gleichzeitig gerade sein — um die Theilbarkeit durch 2 auszuschliessen — so ist entweder

$$p - q \equiv \pm 1 \mod 6, \quad \text{also } p \cdot q \text{ gerade,}$$

oder

$$p - q \equiv \pm 2 \mod 6 \quad \text{und } p \cdot q \text{ ungerade.}$$

In beiden Fällen wird

$$N = 6l + 1 \equiv 1 \mod 6,$$

und für jede bicubische relative Primzahl zum Modul $2(1 + j)$ hat man

$$n = p + qj \equiv j^\varrho \mod 2(1 + j).$$

Zahlen, deren Norm die Form $4l + 1$ resp. $6l + 1$ hat, wollen wir kurz *normale* biquadratische resp. bicubische Zahlen nennen, wenn auch bei den biquadratischen Zahlen die Definition der ungeraden mit der der normalen Zahlen zusammenfällt.

Wir schliessen aus dem Vorstehenden, dass jede Gruppe associirter biquadratischer oder cubischer Zahlen der zugehörigen Gruppe complexer Einheiten modulo $2(1 + i)$ oder $2(1 + j)$ congruent ist: die der reellen positiven Einheit congruenten Zahlen heissen *primär*. Unter jeder Gruppe associirter Zahlen findet sich mithin *eine* primäre, und das Product von zwei (oder mehreren) primären Zahlen bleibt gleichfalls primär.[1]) Conjugirte Zahlen sind stets gleichzeitig primär. Reelle biquadratische Zahlen von der Form $4l - 1$, sowie bicubische von der Form $6l - 1$, müssen mit negativem Vorzeichen genommen werden, um primär zu sein.

Vielleicht empfiehlt es sich zur Erläuterung für eine normale complexe Zahl n die in Bezug auf die reellen Moduln 4 resp. 6 zulässigen Formen zusammenzustellen. Man findet nach den zusammengehörigen associirten Formen geordnet:

$$\left.\begin{aligned} n &\equiv 1,\ i,\ -1,\ -i \\ &\equiv -1 - 2i,\ 2 - i,\ 1 + 2i,\ -2 + i \end{aligned}\right\} \mod 4$$

und

$$\left.\begin{aligned} n &\equiv 1,\ j,\ -1 + j,\ -1,\ -j,\ 1 - j \\ &\equiv -1 - 2j,\ 2 - 3j,\ 3 - j,\ 1 + 2j,\ -2 + 3j,\ -3 + j \\ &\equiv \pm 3 + 2j,\ -2 - j,\ 1 - 3j,\ 3 - 2j,\ 2 + j,\ -1 + 3j \end{aligned}\right\} \mod 6$$

1) Gauss, *Theoria resid. biquadr.* Art. 36, *Werke* Bd. II, S. 107.

Primär werden die Formen $n \equiv 1$ und $\equiv -1 - 2i$ mod 4, sowie $n \equiv 1$, $\equiv -1 - 2j$ und $\equiv 3 + 2j$ mod 6. Zur Definition primärer Zahlen sind übrigens von den Arithmetikern verschiedene Annahmen gemacht worden. So z. B. bei biquadratischen Zahlen $n \equiv 1$ und $\equiv 1 + 2i$ mod 4, sowie bei cubischen Zahlen $n \equiv 1$, $\equiv -2 + 3j$ und $\equiv 1 - 3j$ mod 6 oder zusammengefasst $n \equiv 1$ mod 3. Wir werden später auf die EISENSTEIN'sche Definition $n \equiv \pm 1$ mod 3 zurückzukommen haben, bei welcher das Vorzeichen bestimmten Bedingungen zu unterliegen hat.

Im Uebrigen habe ich in den *Mathematischen Annalen* Bd. 34. S. 472 darauf aufmerksam gemacht, dass gerade wie unter den associirten biquadratischen Zahlen seit GAUSS und DIRICHLET eine primäre durch entweder $n \equiv 1$ oder $n \equiv \pm 1 + 2i$ mod 4 definirt wird, unter den associirten ungeraden bicubischen Zahlen eine primäre durch $n \equiv 1$ oder $n \equiv \pm 1 + 2j$ mod 4 definirt werden kann, und zwar bei beliebiger Wahl des Vorzeichens, weil die Producte solcher Zahlen, wie der Augenschein lehrt, wiederum primär sind. Dabei braucht die Theilbarkeit durch $1 + j$, resp. der Norm durch 3 nicht nothwendig ausgeschlossen zu werden.[1]

7.

Nach den Resultaten des vor. Art. kann man *jede* complexe biquadratische Zahl auf die Form bringen

$$n = i^{\varrho}(1 + i)^{\sigma} n_1$$

und jede cubische oder bicubische Zahl auf die Form

$$n = j^{\varrho}(1 + j)^{\sigma} 2^{\tau} n_1,\text{[2]}$$

wo vermöge des Exponenten ϱ n_1 primär genommen werden darf und in gleichfalls primäre Primfactoren $n_1 = p_1 p_2 p_3 \ldots$ auflösbar ist.

---

1) In der That sind die modulo 4 zulässigen Formen eines durch 2 untheilbaren cubischen n die folgenden:

$$\left.\begin{aligned} n \equiv\ & 1, \quad j, \quad j - 1, \quad -1, \quad -j, \quad 1 - j \\ \equiv\ & 1 + j, \quad 2j - 1, \quad j - 2, \quad -1 - j, \quad 1 - 2j, \quad 2 - j \end{aligned}\right\} \text{mod } 4$$

welche die Richtigkeit der obigen Behauptung bestätigen.

2) Herr BACHMANN (vergl. z. B. seine *Kreistheilung* S. 187/8) betrachtet nur cubische Zahlen *ohne* den Primfactor 2, und vernachlässigt demzufolge den Werth des Symbols $\left(\frac{2}{n}\right)$ resp. $\left[\frac{2}{n}\right]$.

Hieran schliessen sich einige weitere Folgerungen. Ist $n \equiv 1 \bmod 2(1+i)$, so wird für $p \equiv 1$, $q \equiv 0 \bmod 4$, und für $p \equiv -1$, $q \equiv -2$, also $p-1 \equiv \pm q \bmod 4$, auch überzeugt man sich leicht durch Einführung der Norm $N = 4l+1$, dass $q \equiv 2l \bmod 4$ ist. Bei einer cubischen Zahl $n \equiv 1 \bmod 2(1+j)$ hat man für $p \equiv 1$, $q \equiv 0 \bmod 6$, für $p \equiv -1$, $q \equiv -2$, und für $p \equiv 3$, $q \equiv 2$, folglich $p-1 \equiv q \bmod 6$. Durch die Substitution in den Werth von $N = 6l+1$ ergibt sich jetzt wiederum die Congruenz $q \equiv 2l \bmod 4$, also in der Regel *nicht* modulo 6.

Da bei der gewählten Definition primärer Zahlen jederzeit p ungerade und q gerade ist, so lässt sich jede solche primäre cubische Zahl auf die Form bringen

$$n = r + s\sqrt{-3},$$

weil $r = p + \frac{1}{2}q$ und $s = \frac{1}{2}q$ ganze (reelle) Zahlen werden. Die Zerlegung der *Norm*

$$N = r^2 + 3s^2$$

ist dagegen nicht auf primäre Zahlen beschränkt, weil associirte Zahlen gleiche Normen besitzen. So ergibt sich z. B. für

$$n_1 = 6 + 7j = \tfrac{5}{2} - \tfrac{7}{2}\sqrt{-3}, \quad n_2 = 7 - j = \tfrac{13}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-3},$$
$$N = 43 = \tfrac{1}{4}(5^2 + 3\cdot 7^2) = \tfrac{1}{4}(13^2 + 3\cdot 1^2) = 4^2 + 3\cdot 3^2,$$

weil n_1 und n_2 der primären Zahl $n = 1 + 6j = 4 + 3\sqrt{-3}$ associirt sind.

8.

Da die elementaren Congruenzsätze für unsere complexen Zahlen unverändert Gültigkeit behalten, so wenden wir uns zunächst zur Aufstellung eines *vollständigen Restensystems* für den complexen Modul $m = re^{\varphi i}$ mit der Norm $M = mm'$. Wir zeigen, dass ein solches System M Glieder besitzt, und dass darunter φm relative Primzahlen modulo m enthalten sind. Multiplicirt man jede Zahl eines Restensystems mit einer relativen Primzahl n zum Modul, so entsteht wieder ein Restensystem, ganz wie in der Theorie der reellen Zahlen, und wenn man die φm Reste μ ohne gemeinschaftlichen Theiler mit m berücksichtigt, so wird

$$n^{\varphi m}\,\Pi\mu \equiv \Pi\mu \quad \text{oder} \quad n^{\varphi m} \equiv 1 \bmod m.$$

Die Anzahl der incongruenten Reste, welche mit $m = a^\alpha b^\beta c^\gamma$ keinen Theiler gemein haben, ist durch

$$\varphi m = M(1 - \tfrac{1}{A})(1 - \tfrac{1}{B})(1 - \tfrac{1}{C}) \cdot\cdot$$

gegeben, wenn $M = A^\alpha B^\beta C^\gamma$ .. und ABC .. die *Normen* der ungleichen Primfactoren von m bedeuten.[1])

Wir nennen g eine *primitive Wurzel* zum Modul m, wenn die Potenzen $g\, g^2 g^3 \,..\, g^{\varphi m}$ sämmtlich incongruent sind, also ein System relativer Primzahlen zu m darstellen. Setzt man z. B.

$$m = 2(1+i), \quad m' = 2(1-i), \quad M = 8, \quad \varphi m = 4,$$

so wird $g = i$ und die Potenzen $i\, i^2 i^3 i^4$ bilden ein System relativer Primzahlen, mit anderen Worten, jede durch $1+i$ untheilbare, d. h. ungerade oder normale biquadratische Zahl ist modulo $2(1+i)$ einer biquadratischen Einheit congruent. Analog ist für

$$m = 2(1+j), \quad m' = 2(1+\tfrac{1}{j}), \quad M = 12, \quad \varphi m = 6, \quad g = j,$$

so dass alle normalen bicubischen Zahlen einander congruent oder associirt werden. Wir haben bereits früher die der positiven reellen Einheit congruenten Zahlen als *primär* bezeichnet.

Aus *einer* primitiven Wurzel g kann man $\varphi(\varphi m)$ primitive Wurzeln g^γ ableiten, sofern, wenn der *Index* γ[2]) eine relative Primzahl zu φm bedeutet, auch g^γ, $g^{2\gamma}$ .. $g^{\gamma\varphi m}$ nach dem Modul m incongruent sind. Es bleibt also nur die Frage zu beantworten, für welche Moduln überhaupt eine primitive Wurzel g existirt. Aus der reellen Zahlentheorie ist bekannt, dass wenn man sich auf ungerade Werthe des Moduls beschränkt, dieser einer Primzahlpotenz gleich sein muss, und der gleiche Satz gilt für die normalen (also durch $1+i$ resp. 2 und $1+j$ untheilbaren) biquadratischen und bicubischen Moduln. Selbstverständlich bilden

---

1) Dirichlet in Crelle's Journal Bd. 24, S. 305.

2) Bekanntlich hat Gauss in seinen nunmehr hundertjährigen *Disquisitiones arithmeticae* die Euler'schen Primitivwurzeln zur Einführung der einer gegebenen Primzahl als Modul entsprechenden *Indices* und eines darauf gegründeten *Algorithmus indicum* (Sect. I, Art. 58) benutzt. In der beigefügten Tabelle (Werke I S. 468) finden sich für die Primzahlen < 100 die zugehörigen Indices aufgeführt. Ausführlichere Tafeln sind dann von Jacobi in seinem *Canon arithmeticus* (1839) publicirt worden. Leider hat die 38 Quartseiten umfassende interessante zahlentheoretische Einleitung zu diesem Tafelwerke keine Aufnahme in die *Gesammelten Werke* gefunden.

für eine *Primzahl* m von der angedeuteten Beschaffenheit die Potenzen $g\ g^2 g^3\ ..\ g^{M-1}$ ein vollständiges Restensystem mit Ausschluss der Null.

Für *normale* Moduln können nach dem Früheren associirte Zahlen nicht einander congruent sein. Mithin wird ein vollständiges Restensystem — abgesehen von der durch m theilbaren Zahl — in lauter Gruppen associirter Werthe, oder wenigstens solcher Reste, die associirten Zahlen congruent sind, zerfallen. Nimmt man aus jeder Gruppe nur *eine* Zahl, so wird man neben einem vollständigen Restensystem ein sogenanntes *Theilsystem nicht associirter Reste* aufstellen und letzteres durch Hinzufügung der associirten Werthe (oder diesen congruenter Zahlen) zu einem vollständigen System ergänzen können. Auch verliert ein solches Theilsystem nicht seine Eigenschaft, wenn man die Zahlen des Systems mit einer relativen Primzahl zum Modul multiplicirt. Das Gleiche gilt jedoch *nicht*, wenn man den Resten eines Theilsystems die nämliche Zahl *hinzufügen* wollte, während diess bei einem *vollständigen* System erlaubt ist.

Ein Theilsystem biquadratischer resp. bicubischer Reste enthält $l = \frac{M-1}{4}$, resp. $l = \frac{M-1}{6}$ Werthe, und es ist leicht zu sehen, dass die Systeme relativer Primzahlreste sich ganz analog verhalten, nur dass ein Theilsystem nicht associirter Reste, welche relative Primzahlen zum Modul sind, aus $\frac{1}{4}\varphi m$ resp. $\frac{1}{6}\varphi m$ Gliedern besteht. Diess gilt natürlich auch, wenn m eine reelle (durch 2 und resp. auch durch 3 untheilbare) Zahl und $M = m^2$ bedeutet.

9.

Wenn eine reelle Zahl R durch eine complexe $m = p + qi$ oder $p + qj$ theilbar ist, so ist sie auch theilbar durch die conjugirte $m' = p + \frac{q}{i}$ oder $p + \frac{q}{j}$, weil

$$R = (p + qj)(p' + q'j) = (p + \tfrac{q}{j})(p' + \tfrac{q'}{j}).$$

Sind also p und q ohne gemeinschaftlichen Theiler, d. h. m ohne reellen Theiler, so gilt das Gleiche von $p + qj$ und $p + \frac{q}{j}$, folglich ist R theilbar durch die Norm

$$mm' = M = p^2 + q^2 \quad \text{oder} \quad = p^2 + pq + q^2.$$

Daraus schliesst man, dass M aufeinanderfolgende reelle Zahlen sämmtlich incongruent sind, weil keine reelle Zahl $R < M$ durch m theilbar sein kann. Selbstverständlich gilt das Gleiche von jedem reellen vollständigen Restensysteme nach dem Modul M. Ist z. B. — von $1+i$ resp. $1+j$ abgesehen — m eine nicht reelle complexe *Primzahl*, also M eine Primzahl von der Form $4l+1$ resp. $6l+1$, so kann man durch die aufeinanderfolgenden Potenzen einer zu M gehörigen Primitivwurzel g ein vollständiges Restensystem zum Modul m, mit Ausschluss des durch m theilbaren, also der Null congruenten Restes darstellen, und es ist selbstverständlich, dass die reelle Wurzel g auch durch eine ihr modulo m congruente complexe Zahl ersetzt werden kann.

Wenn der Modul m keinen reellen Theiler hat, so kann man die einer complexen Zahl congruenten reellen Zahlen bequem mittelst der reellen Zahl e bestimmen, welche der complexen Einheit i oder j congruent ist. Diese findet man durch Auflösung der reellen Congruenz

$$p + qe \equiv 0 \text{ mod. } M,$$

weil $p+qe$ sowohl durch m wie durch m' theilbar ist. Dabei wird

$$e^2 \equiv -1, \quad e^4 \equiv 1, \quad \text{resp.} \quad e^2 \equiv e - 1, \quad e^3 \equiv -1, \quad e^6 \equiv 1.$$

Aus der Congruenz

$$e \equiv i \text{ oder } j \text{ mod } m \text{ folgt zugleich } e \equiv \frac{1}{i} \text{ oder } \frac{1}{j} \text{ mod } m'.$$

Für eine beliebige complexe Zahl $m_1 = p_1 + q_1 i$ resp. $= p_1 + q_1 j$ erhält man[1])

$$m_1 \equiv p_1 + q_1 e \quad \text{und die conjugirte Zahl}$$

$$m_1' \equiv p_1 + q_1 e^3 \quad \text{resp.} \quad \equiv p_1 + q_1 e^5,$$

die Congruenzen modulo m genommen, während nach dem Modul m' die Werthe m_1 und m_1' zu vertauschen sind. Zugleich hat man

$$m' \equiv 2p \text{ resp. } 2p+q \text{ mod } m \quad \text{neben} \quad m \equiv 2p \text{ resp. } 2p+q \text{ mod } m'.$$

Bedeutet jetzt m eine biquadratische ungerade Primzahl, also M eine Primzahl von der Form $4l+1$, so erhält man

$$e^2 \equiv -1 \equiv g^{2l} \text{ oder } (g^l - e)(g^l + e) \equiv 0 \text{ mod } M,$$

---

1) Man kann auch $m_1 \equiv p\varepsilon + p_1$ mod m setzen und die reelle Zahl ε durch die Congruenz $q\varepsilon + q_1 \equiv 0$ mod M bestimmen.

falls g eine Primitivwurzel von M bedeutet, also

$$g^l \equiv \pm e \equiv i \text{ oder } \frac{1}{i} \text{ mod } m.$$

Das Stattfinden des einen oder des anderen von beiden Congruenzwerthen hängt von der Wahl der primitiven Wurzel g ab: für den conjugirten Modul m' sind die Werthe i und $\frac{1}{i}$ mit einander zu vertauschen.

Analog folgt für eine bicubische Primzahl m von der Form $6l+1$

$$e^3 \equiv -1 \equiv g^{3l} \text{ oder } (g^l+1)(g^l-e)(g^l+e^2) \equiv 0 \text{ mod } M,$$

und da g^l+1 nicht durch M theilbar sein kann, so wird entweder

$$g^l \equiv e, \text{ oder } g^l \equiv -e^2 \text{ d. h. } e \equiv g^{5l} \equiv g^{l(M-2)} \text{ mod } M,$$

folglich auch

$$g^l \equiv j, \text{ oder } g^l \equiv \frac{1}{j} \text{ d. h. } j \equiv g^{5l} \equiv g^{l(M-2)} \text{ mod } m.$$

Daraus schliesst man weiter, dass die Potenzen g^t und g^{t+l} associirten Zahlen nach dem Modul m congruent sind, und dass g^k ein Theilsystem nicht associirter Reste bildet, wenn der Exponent k ein Restensystem modulo l durchläuft. Hier mag noch die Bemerkung Platz finden, dass die reellen Zahlen von 1 bis $l = \frac{M-1}{4}$ resp. $\frac{M-1}{6}$ weder kleinste, noch nicht associirte Reste bilden, da wegen $p \equiv -qj$ mod m schon die Coefficienten p und q associirten Werthen congruent sind, während die *Normen* kleinster Reste $\frac{M}{2}$ resp. $\frac{M}{3}$ nicht übersteigen dürfen.

10.

Besitzen aber p und q einen grössten reellen Theiler r, so besteht die Congruenz i oder $j \equiv e$ nur für den Modul $\frac{m}{r}$, d. h. das Product

$$rj \equiv re \text{ mod } m$$

ist einer reellen Zahl congruent, welche der Congruenz

$$\frac{p}{r} + \frac{q}{r} e \equiv 0 \text{ mod } \frac{M}{r^2}$$

entspricht. Für $p + qe = \frac{M}{r}\alpha$ wird

$$ri - re = m(\beta + \alpha i), \quad rj - re = m(\beta + \alpha j).$$

Man kann diess auch so aussprechen[1]):

$$\text{für}\quad p\alpha + q\beta = r \quad \text{ist} \quad ri = q\alpha - p\beta + m(\beta + \alpha i),$$

während für $(p + q)\alpha + q\beta = r$

$$rj = q\alpha - p\beta + m(\beta + \alpha j), \quad \text{wobei } e = \frac{q}{r}\alpha - \frac{p}{r}\beta \text{ wird.}$$

Wenn m den grössten reellen Theiler r besitzt, so folgt aus der Theilbarkeit von R durch m nur die durch $\frac{M}{r}$, und um M incongruente Zahlen $u + vi$ resp. vj zu erhalten, kann man u $\frac{M}{r}$ und v r aufeinanderfolgende reelle Zahlen durchlaufen lassen (oder umgekehrt).[2]) Solche Zahlen sind in der That stets incongruent, denn wäre

$$u + vj \equiv u' + v'j \mod m,$$

so müsste diese Congruenz auch für mod r und mod $\frac{m}{r}$ bestehen. Dann folgt $v \equiv v'$ mod r, d. h. $v = v'$ und $\frac{u - u'}{r}$ theilbar durch $\frac{m}{r}$, also auch durch $\frac{m'}{r}$ und $\frac{M}{rr}$, d. h. $u \equiv u'$ mod $\frac{M}{r}$, folglich $u = u'$.

Es gibt aber auch nicht *mehr* als M incongruente complexe Zahlen, d. h. diese bilden ein *vollständiges* Restensystem modulo m. In der That können die oben definirten Werthe von u und v stets so gewählt werden, dass die Congruenz

$$u' + v'j \equiv u + vj \mod m$$

für eine beliebig gewählte complexe Zahl $u' + v'j$ erfüllt wird. Dazu müssen zuvörderst die Differenzen $u - u' = ru_1$ und $v - v' = rv_1$, durch r theilbar sein, wodurch v und v_1 bestimmt sind. Da ferner

$$j \equiv e \mod \frac{m}{r},$$

so soll die reelle Zahl $u_1 + v_1 e$ durch $\frac{m}{r}$ theilbar werden. Dazu muss

$$u_1 + v_1 e \equiv 0 \mod \frac{M}{r^2}$$

sein. Nun gibt es aber unter den $\frac{M}{r}$ Werthen von u $\frac{M}{r^2}$ aufeinanderfolgende Vielfache von r, mithin ist auch u_1 resp. u durch

1) Vergl. Gauss *Werke* Bd. II, S. 112.

2) Wenn q (oder p) verschwindet, so ist $r = \frac{M}{r} = p$. Dieser Fall tritt z. B. ein, wenn m eine reelle Primzahl von der Form $4l - 1$ oder $6l - 1$ bedeutet.

die vorstehende Congruenz völlig bestimmt und die Vollständigkeit des aufgestellten Restensystems nachgewiesen.

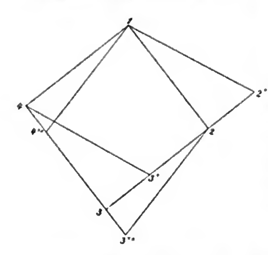
II.

Wir wollen jetzt ein vollständiges Restensystem zum Modul m auf geometrischem Wege zu construiren versuchen. Ein solches wird bei den hier betrachteten zweitheiligen complexen Zahlen erhalten durch ein über dem Radiusvector r des Moduls beschriebenes gleichseitiges Parallelogramm, welches für die biquadratischen Zahlen rechtwinklig, also ein Quadrat ist und für die cubischen oder bicubischen Zahlen die Winkel $\frac{\pi}{3}$ und $\frac{2\pi}{3}$ besitzt. Denn innerhalb eines derartigen Parallelogramms liegen lauter incongruente Zahlen, weil man durch Addition des Moduls m oder einer associirten Zahl nothwendig aus dem bezeichneten Gebiete hinausgelangt.

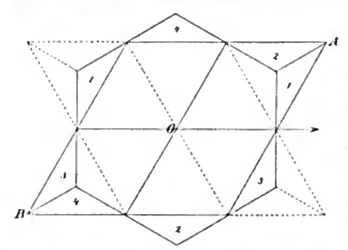
Bildet man durch Parallellinien ein Gitter von lauter Parallelogrammen mit der Seitenlänge r, so liegen an den entsprechenden Stellen dieser Parallelogramme lauter congruente Zahlen. Man darf folglich ein solches Parallelogramm in der Richtung seiner Seiten verschieben, ohne dass die Eigenschaft der zugehörigen Zahlen, ein vollständiges Restensystem zu bilden, verloren geht. Der Inhalt eines solchen Parallelogramms (Quadrat oder Rhombus) ist resp. $= r^2 \sin\frac{\pi}{2}$ oder $= r^2 \sin\frac{\pi}{3}$, reducirt sich also für $r = 1$ auf 1 oder auf $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, und enthält im Allgemeinen $r^2 = M$ ganze complexe Zahlen, welche zum vollständigen Restensysteme gehören. Wenn zufällig auf den Ecken, oder auf den gegenüberstehenden Seiten des Parallelogramms ganze Zahlen liegen sollten, so sind diese um m oder um eine dem Modul associirte Zahl verschieden, also congruent, so dass man nur *eine* davon beibehalten darf, was übrigens auch durch eine kleine Verschiebung des Parallelogramms in der Richtung seiner Seiten erreicht wird.

Offenbar ist es auch gestattet, in einem beliebig begrenzten Restensysteme einen Theil desselben durch ein anderes Gebiet zu ersetzen, welches lauter congruente Zahlen zu denen des abgetrennten Theiles enthält. Zu einem solchen Gebiete gelangt man z. B. durch Parallelverschiebung *um den Betrag der Quadrat-*

wurzel der Norm in der Richtung des Moduls oder seiner associirten Werthe. Man kann z. B. bei den biquadratischen Zahlen das Quadrat 1234 in das Parallelogramm 12*3*4 oder 123**4** verwandeln, weil die Dreiecke 122* und 434*, sowie 144** und 233** congruente Werthe enthalten. Die so entstandenen Figuren gestatten jedoch im Allgemeinen nicht mehr die Verschiebung parallel ihren Seiten, sondern stets nur in den Richtungen des Moduls und seiner Associirten.



Für die bicubischen Zahlen lässt sich das gleichseitige Parallelogramm in ein reguläres Sechseck verwandeln, dessen Seitenlänge durch $\sqrt{\frac{M}{3}}$ und dessen Inhalt gleich dem des ursprünglichen Rhombus durch $\frac{1}{2} M \sqrt{3}$ gegeben ist. Die Seiten dieses Sechseckes stehen aber senkrecht zu den Seiten des betreffenden Parallelogramms, es darf also das Sechseck nicht parallel seinen Seiten, wohl aber senkrecht zu denselben verschoben werden. Diess geht aus der nebenstehenden Figur hervor, in welcher die Theile an den Ecken A und B entsprechend verschoben worden sind. Es ist aber auch an sich klar, dass man durch Addition des Moduls oder einer associirten Zahl nothwendig aus dem Gebiete des Sechsecks herausgelangt, sowie dass jeder Zahl ausserhalb eine congruente im Innern entspricht. An Stelle des Rhombengitters kann man mithin die Ebene in ein Gitter von congruenten Sechsecken zerlegen, deren correspondirende Punkte congruenten cubischen Zahlen entsprechen, wenn die Norm des Moduls dem dreifachen Quadrat der Sechsecksseiten gleich ist. Nimmt man die Einheit als Norm, so erhält man ein Gitter von regulären



Sechsecken, deren Seiten senkrecht stehen zu den drei Coordinatenaxen, und deren Seitenmitten die Gesammtheit der ganzen cubischen oder bicubischen Zahlen darstellen.

12.

Unter den vollständigen Restensystemen hebt sich das System der *absolut kleinsten Reste* hervor, welches sich ergibt, wenn man den Mittelpunkt des Quadrats oder des cubischen Sechsecks mit den Seitenlängen $\sqrt{M}$ resp. $\sqrt{\frac{M}{3}}$ durch Parallelverschiebung nach dem Nullpunkt verlegt.

Wir sahen Art. 4, dass die absolut kleinsten Reste oder Reste kleinster Norm für $n \equiv \mu \bmod m$ bei den biquadratischen Zahlen die Bedingung $N\mu < \frac{1}{2} Nm$, bei den bicubischen die Ungleichung $N\mu \leqq \frac{1}{3} Nm$ erfüllen müssen. Da nun die Ecken des Quadrats durch $\pm \frac{1}{2} m(1+i)$ und $\pm \frac{1}{2} m(1-i)$ gegeben sind, die Ecken des Sechsecks dagegen den Werthen

$$\pm \tfrac{1}{3} m(1+j), \quad \pm \tfrac{1}{3} m(2-j) \quad \text{und} \quad \pm \tfrac{1}{3} m(1-2j)$$

entsprechen, so betragen in der That die zugehörigen Normen $\frac{1}{2} M$ und $\frac{1}{3} M$. Um den zu n gehörigen Rest $\mu \bmod m$ zu finden, wird man $\mu m'$ als kleinsten Rest zum reellen Modul M zu bestimmen haben, und bei den *biquadratischen* Zahlen den reellen, wie den imaginären Theil zwischen $\pm \frac{1}{2} M$ legen. Dann fällt der reelle und imaginäre Theil von $\frac{\mu m'}{M} = \frac{\mu}{m}$ zwischen $\pm \frac{1}{2}$. Da sich congruente Zahlen $n \equiv \mu \bmod m$ um ein beliebiges Vielfaches des Moduls von der Form $(a+bi)m$ unterscheiden, also $\frac{n}{m}$ und $\frac{\mu}{m}$ um eine complexe ganze Zahl $a+bi$, so kann man diese so wählen, dass für $\frac{\mu}{m} = \alpha + \beta i$ α und β in dem Intervalle $\pm \frac{1}{2}$ enthalten sind. Diess ist die GAUSS'sche Definition der absolut kleinsten biquadratischen Reste.[1])

Bei den bicubischen Zahlen dagegen erhält man auf diesem Wege nicht immer die Reste kleinster Norm. Als Beispiel diene

$$n = 1 + 2j \equiv -2 \bmod 3 + 2j,$$

wo für $m = 3 + 2j$, $m' = 5 - 2j$, $M = 19$, $\mu = -2$

$$(1+2j)m' = 9 + 4j \equiv -2m' = -10 + 4j.$$

1) *Theoria resid. biquadrat.* Art. 42.

Hier gehört nicht $9+4j$ mit der Norm 133, sondern $\mu m' = -10+4j$, Norm 76, zu dem Reste kleinster Norm, obgleich zwar 9 und $4 < \frac{19}{2}$, aber $10 > \frac{1}{2}M$ ist. Die Erklärung findet man in dem Umstande, dass der Punkt $9+4j$ zwar in dem Rhombus mit der grössten Norm $\frac{3}{4}M$, dagegen der Punkt $-10+4j$ in dem cubischen Sechseck liegt, dessen Ecken der Norm $\frac{1}{3}M$ entsprechen. Desshalb wird

$$N(1+2j) = 7 < \tfrac{3}{4}\cdot 19, \quad \text{aber} \quad N\mu = N(-2) = 4 < \tfrac{1}{3}\cdot 19.$$

Das Gebiet der complexen Werthe $\frac{\mu}{m} = \alpha + \beta i$ resp. $\frac{\mu}{m} = \alpha + \beta j$ besteht hiernach aus einem Quadrat oder einem regulären Sechseck, dessen den Coordinatenaxen parallele Seiten der Längeneinheit resp. $\sqrt{\frac{1}{3}}$ gleich sind, und dessen Mittelpunkt im Nullpunkt liegt. Daraus erhält man das den complexen *ganzen* Zahlen μ, also den kleinsten Resten für den Modul $m = re^{\varphi i}$ zugehörige Gebiet durch ein reguläres Vier- oder Sechseck mit den Seiten r und $\frac{r}{\sqrt{3}}$, welches einer Drehung um den Richtungswinkel φ entspricht, während der Mittelpunkt im Ursprunge bleibt.

Es ist nun leicht, ein sogen. *Theilsystem* nicht associirter Reste anzugeben, denn die vier oder sechs durch die Coordinatenaxen gebildeten Quadranten oder Sextanten theilen die Gebiete der kleinsten Reste in ebenso viele congruente Theile, welche die associirten Reste enthalten. *Ein* solcher Theil, z. B. der des ersten Quadranten oder Sextanten begreift ein Viertel- oder Sechstelsystem nicht associirter kleinster Reste für einen ungeraden biquadratischen oder bicubischen Modul.

13.

Da das Product

$$\frac{\mu n}{m} = n(\alpha + \beta i) \quad \text{resp.} \quad = n(\alpha + \beta j),$$

wenn m und n ohne gemeinschaftlichen Factor, keine ganze Zahl sein kann, so verstehen wir unter

$$\nu = \frac{\mu n}{m}$$

die *nächstgelegene* ganze (complexe) Zahl, wodurch

$$\mu n - \nu m = \mu n - \frac{\mu n}{m} m$$

in das Gebiet der kleinsten Reste modulo m gelangt. Die Producte $n(\alpha + \beta i)$ gehören in das Gebiet der kleinsten Reste modulo n, welche hervorgehen, wenn man $\alpha = \alpha'$ und $\beta = \beta'$ so wählt, dass das Product eine *ganze* Zahl

$$\nu = n(\alpha' + \beta' i) \quad \text{oder} \quad n(\alpha' + \beta' j)$$

darstellt, gleich wie $\mu = m(\alpha + \beta i)$ oder $m(\alpha + \beta j)$ eine ganze Zahl ist.

Wenn nun μ ein Theilsystem nicht associirter Reste durchläuft, mit den associirten Werthen $i^\lambda \mu$ resp. $j^\lambda \mu$, so kann man

$$\mu n - \nu m = i^\lambda r_\mu \text{ resp. } j^\lambda r_\mu$$

setzen, wo r_μ das nämliche Theilsystem mit μ durchläuft und

$$\prod_\mu (\mu n - \nu m) = i^{S\lambda} \prod \mu \text{ resp. } j^{S\lambda} \prod \mu$$

oder

$$\prod_\mu \left(n - \frac{\nu m}{\mu}\right) = \prod \left(n - \frac{\nu}{\alpha + \beta i}\right) = i^{S\lambda}$$

resp.

$$= \prod \left(n - \frac{\nu}{\alpha + \beta j}\right) = j^{S\lambda}$$

wird. Durch diese Ausdrücke, in denen zu jedem kleinsten Reste μ modulo m ein kleinster Rest ν modulo n gehört[1]), definiren wir den Werth des Symbols $\left(\frac{n}{m}\right)$ für biquadratische und bicubische Zahlen und schreiben $\left(\frac{n}{m}\right) = i^\varrho$ oder $= j^\varrho$, indem $S\lambda = \varrho$ gesetzt ist. Dabei wird m als *normal* vorausgesetzt, um das betreffende Theilsystem μ von l Gliedern bestimmen zu können. Ausgeschlossen sind also als Moduln die biquadratische Primzahl $m = 1 + i$, Norm 2, sowie die cubischen Primzahlen $m = 1 + j$, Norm 3 und $m = 2$, Norm 4 nebst ihren associirten Werthen. Im Übrigen ist selbstverständlich der so definirte Werth von $\left(\frac{n}{m}\right)$ unabhängig von der Wahl des Theilsystems für μ, auch wenn man sich nicht auf kleinste Reste beschränkt, wofern man nur ν immer so wählt, dass das zugehörige r_μ einem μ des Theilsystems gleich wird.

1) Streng genommen bliebe noch näher zu prüfen, ob mit $\frac{\mu n}{m}$ auch $\frac{\mu n}{m}$ *ohne Ausnahme* in das Gebiet der kleinsten Reste modulo n fallen müsse, wie diess z. B. für *reelle* Zahlen im Art. 4 der Abh. I nachgewiesen worden ist.

Für $n = j$ wird $\mu = r_\mu$, also

$$\lambda = 1,\ S\lambda = l \quad \text{und} \quad \left(\frac{j}{m}\right) = j^l, \quad \text{sowie} \quad \left(\frac{i}{m}\right) = i^l.$$

Schreibt man

$$\mu n \equiv i^\lambda r_\mu \quad \text{oder} \quad j^\lambda r_\mu \mod m$$

und lässt μ und r_μ das nämliche Theilsystem durchlaufen, so erhält man

$$n^l \prod \mu \equiv \left(\frac{n}{m}\right) \prod \mu \quad \text{oder} \quad \prod \mu \left\{n^l - \left(\frac{n}{m}\right)\right\} \equiv 0 \mod m.$$

Ist also m eine Primzahl, so hat man

$$\left(\frac{n}{m}\right) \equiv n^l \mod m.$$

In dem betrachteten Falle wird n ein biquadratischer resp. bicubischer Rest von m, wenn $\left(\frac{n}{m}\right) = 1$. Denn für $n^l \equiv 1 \mod m$ ist die Congruenz

$$x^4 \equiv n \quad \text{resp.} \quad x^6 \equiv n \mod m$$

lösbar, weil die Congruenz $x^{M-1} \equiv 1 \mod m$ erfüllt wird, während die Congruenz $x^{M-1} \equiv i^\varrho$ oder $\equiv j^\varrho$ keine Wurzeln hat, sobald ϱ nicht durch 4 oder 6 theilbar ist. Die Zahl ϱ oder ihr Rest nach dem Modul 4 oder 6 heisst der *biquadratische* oder *bicubische Charakter* oder *Decident* von n modulo m.[1]) Der *cubische* Decident ist durch 2ϱ gegeben.

Ist dagegen m keine Primzahl, so liegt es nahe, das Theilsystem μ und folglich auch r_μ nur solche Reste durchlaufen zu lassen, welche relative Primzahlen zu m sind, wodurch $l = \frac{1}{4}\varphi m$ resp. $\frac{1}{6}\varphi m$ wird. Bezeichnet man diese Einschränkung durch Beifügung eines * und setzt

$$\prod^{*} \left(n - \frac{\nu m}{\mu}\right) = \left(\left(\frac{n}{m}\right)\right) = i^{\overset{*}{S}\lambda} \quad \text{oder} \quad j^{\overset{*}{S}\lambda},$$

so wird allgemein

$$\left(\left(\frac{n}{m}\right)\right) \equiv n^l \mod m.$$

Die Gleichung

$$\mu(n + km) - (\nu + k\mu)m = i^\lambda r_\mu \quad \text{oder} \quad j^\lambda r_\mu$$

zeigt, dass $\left(\frac{n}{m}\right) = \left(\frac{n + km}{m}\right)$, mit anderen Worten, dass für

$$n \equiv n' \mod m, \quad \left(\frac{n}{m}\right) = \left(\frac{n'}{m}\right).$$

---

1) Gauss' *Werke*, Bd. II, S. 173 und 317.

Es wird folglich ausreichen, da m und n ohne gemeinschaftlichen Theiler sind, den Werth von $\left(\frac{n}{m}\right)$ für die φm Glieder eines Systems relativer Primzahlen zum Modul zu untersuchen.

Eine weitere Eigenschaft des Symbols $\left(\frac{n}{m}\right)$ ergibt sich aus der Multiplication der Congruenz für μn durch einen beliebigen Factor n', der gleich wie n mit dem Modul keinen Factor gemein hat. Denn setzt man

$$rn' \equiv r' i^{\lambda'} \quad \text{resp.} \quad r' j^{\lambda'} \mod m,$$

so erhält man

$$\mu n n' \equiv r' i^{\lambda+\lambda'} \quad \text{resp.} \quad r' j^{\lambda+\lambda'} \mod m,$$

wo $\mu r r'$ das nämliche Theilsystem nicht associirter Reste durchlaufen. Mithin folgt wegen

$$\left(\frac{n}{m}\right) = i^{S\lambda} \text{ resp. } j^{S\lambda} \quad \text{und} \quad \left(\frac{n'}{m}\right) = i^{S\lambda'} \text{ resp. } j^{S\lambda'}$$

$$\left(\frac{nn'}{m}\right) = \left(\frac{n}{m}\right)\left(\frac{n'}{m}\right).$$

Es geht hieraus hervor, dass vermöge der Gleichungen

$$n = i^{\varrho}(1+i)^{\sigma} n_1 \quad \text{resp.} \quad n = j^{\varrho}(1+j)^{\sigma} 2^{\tau} n_1$$

des Art. 7 man sich auf *primäre* Zahlen m und n beschränken darf, wenn

$$\left(\frac{1+i}{m}\right) \quad \text{resp.} \quad \left(\frac{1+j}{m}\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{2}{m}\right)$$

ergänzungsweise bestimmt werden. Wenn vermöge des vorläufig noch unbekannten Reciprocitätsgesetzes für primäre bicubische Zahlen

$$\left(\frac{n}{m}\right) = j^{\lambda}\left(\frac{m}{n}\right), \quad \left(\frac{n'}{m}\right) = j^{\lambda'}\left(\frac{m}{n'}\right), \quad \left(\frac{nn'}{m}\right) = j^{\lambda''}\left(\frac{m}{nn'}\right),$$

so folgt daraus

$$\left(\frac{n}{m}\right)\left(\frac{n'}{m}\right) = j^{\lambda+\lambda'}\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{m}{n'}\right) = j^{\lambda''}\left(\frac{m}{nn'}\right)$$

und für

$$\lambda + \lambda' \equiv \lambda'' \mod 6, \quad \left(\frac{m}{nn'}\right) = \left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{m}{n'}\right).$$

Die nämliche Gleichung gilt für biquadratische Zahlen, wenn $\lambda + \lambda' = \lambda'' \mod 4$. Bei der Definition der *primären* Werthe ist auf diese Congruenzen Rücksicht zu nehmen.

b) Allgemeine binomische complexe Zahlen.

14.

Bevor wir die Betrachtungen über biquadratische und bicubische Zahlen weiter fortsetzen, wollen wir die Frage erörtern, wie sich allgemeinere zweitheilige complexe Zahlen von der Form $\mathfrak{p} + \mathfrak{q}\mathfrak{h}$ mit dem imaginären Factor $\mathfrak{h}$ verhalten. Damit die Producte solcher Zahlen von der gleichen Beschaffenheit bleiben, hat man vermöge der Gleichung

$$(\mathfrak{p} + \mathfrak{q}\mathfrak{h})(\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{q}_1\mathfrak{h}) = \mathfrak{p}\mathfrak{p}_1 + (\mathfrak{p}\mathfrak{q}_1 + \mathfrak{q}\mathfrak{p}_1)\mathfrak{h} + \mathfrak{q}\mathfrak{q}_1\mathfrak{h}^2$$

$$\mathfrak{h}^2 = \sigma\mathfrak{h} - \tau$$

zu setzen, mit anderen Worten, der imaginäre Factor $\mathfrak{h}$ muss als Wurzel einer quadratischen Gleichung mit den ganzzahligen reellen Coefficienten $\sigma\ \tau$ gegeben sein. Damit ferner $\mathfrak{h} = \frac{1}{2}(\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - \mathfrak{h}\tau})$ nicht reell werde, nehmen wir

$$4\tau - \sigma^2 = D > 0.$$

Dann wird

$$\mathfrak{h} = \tfrac{1}{2}(\sigma + i\sqrt{D}) \quad \text{nebst} \quad \mathfrak{h}' = \tfrac{1}{2}(\sigma - i\sqrt{D}),$$

wobei wir voraussetzen wollen, dass der imaginäre Theil der Wurzel $\mathfrak{h}$ positiv genommen werden soll. Die complexen Zahlen

$$n = \mathfrak{p} + \mathfrak{q}\mathfrak{h} \quad \text{und} \quad n' = \mathfrak{p} + \mathfrak{q}\mathfrak{h}' = \mathfrak{p} + \mathfrak{q}\sigma - \mathfrak{q}\mathfrak{h}$$

sind conjugirt, mit der reellen positiven Norm

$$nn' = N = \mathfrak{p}^2 + \mathfrak{p}\mathfrak{q}\sigma + \mathfrak{q}^2\tau = (\mathfrak{p} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{q}\sigma)^2 + \tfrac{1}{4}D\mathfrak{q}^2,$$

deren Quadratwurzel dem Radiusvector des Punktes n gleich wird.

Eine complexe Zahl n nennen wir *gerade* oder *ungerade*, je nachdem ihre Norm N gerade oder ungerade ist. Man hat hierbei die folgenden *drei Gattungen* zu unterscheiden:

	n gerade, $N \equiv 0 \bmod 2$		n ungerade, $N \equiv 1 \bmod 2$
1)	$\mathfrak{p} \equiv 0,\ \mathfrak{q} \equiv 0$	1)	$\mathfrak{p} \equiv 1,\ \mathfrak{q} \equiv 0$
2)	$\mathfrak{p} \equiv 0,\ \mathfrak{q} \equiv 1,\ \tau \equiv 0$	2)	$\mathfrak{p} \equiv 0,\ \mathfrak{q} \equiv 1,\ \tau \equiv 1$
3)	$\mathfrak{p} \equiv \mathfrak{q} \equiv \tau - \sigma \equiv 1$	3)	$\mathfrak{p} \equiv \mathfrak{q} \equiv 1,\quad \tau \equiv \sigma.$

Die ungeraden Zahlen erster Gattung mögen nach Analogie der biquadratischen Zahlen des Art. 6 *normale binomische Zahlen* heissen, da bei ihnen die Norm $N \equiv 1 \bmod 4$ wird und n die Form $a + bi\sqrt{D}$ annimmt.

Die Norm der imaginären Wurzel $\mathfrak{h}$ ist

$$\tau = \mathfrak{h}\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}(\sigma - \mathfrak{h}),$$

also wird $\mathfrak{h}$ im Allgemeinen weder eine complexe Einheit, noch eine complexe Primzahl: $\mathfrak{h}$ ist *gerade*, wenn τ durch 2 theilbar ist. Für $\tau = 2$ enthält die Gleichung

$$2 = \mathfrak{h}(\sigma - \mathfrak{h})$$

die Zerlegung von 2 in zwei complexe Primfactoren. Die complexe Theilbarkeit von $n = \mathfrak{p} + \mathfrak{q}\mathfrak{h}$ durch die Wurzel $\mathfrak{h}$ wird durch die reelle Theilbarkeit von $\mathfrak{p}$ durch die Norm τ bedingt.

Da die Norm eines Productes dem Product der Normen der Factoren gleich ist, so muss eine complexe Primzahl eine reelle Primzahl zur Norm haben, und zwar muss die letztere auf die Form $\mathfrak{p}^2 + \mathfrak{p}\mathfrak{q}\sigma + \mathfrak{q}^2\tau$ gebracht werden können, wofür die nothwendigen Bedingungen der Theorie der quadratischen Formen zu entnehmen sind. Umgekehrt kann eine complexe Zahl nicht Primzahl sein, wenn die Norm einen reellen Primfactor f hat. Denn wäre $N = nn' = ff_1$, so würde eine nicht eindeutige Zerlegbarkeit die Folge sein, *welche wir von vorn herein ausschliessen.* Die einzige Ausnahme gilt für $n = n' = f$, wenn n selbst reell und die Norm dem Quadrat einer reellen Primzahl f gleich ist. Selbstverständlich darf aber alsdann f nicht selbst complex zerlegbar sein, d. h. nicht als Norm einer complexen Primzahl die Form $\mathfrak{p}^2 + \mathfrak{p}\mathfrak{q}\sigma + \mathfrak{q}^2\tau$ besitzen.

15.

Durch die entsprechenden Schlüsse wie Art. 9 und 10 überzeugt man sich, dass wenn eine reelle Zahl R durch $n = \mathfrak{p} + \mathfrak{q}\mathfrak{h}$ theilbar ist, die Theilbarkeit auch durch die conjugirte n' stattfindet, so dass wenn n ohne reellen Theiler, R ein reelles Vielfaches der Norm $N = nn'$ sein muss. Dann bilden N incongruente reelle Zahlen ein vollständiges Restensystem modulo n, und man findet die reelle Zahl

$$e \equiv \mathfrak{h} \bmod n \quad \text{mittelst} \quad \mathfrak{p} + \mathfrak{q}e \equiv 0 \bmod N.$$

Ist dagegen $\mathfrak{r}$ der grösste reelle Theiler von n $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$, so wird jede complexe Zahl

$$m \equiv \mathfrak{u} + \mathfrak{v}\mathfrak{h} \bmod n,$$

wenn man von den beiden Coefficienten $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ den einen aus $\frac{N}{\mathfrak{r}}$, den anderen aus $\mathfrak{r}$ aufeinanderfolgenden reellen Zahlen bestimmt. Auch ist jetzt

$$\mathfrak{r}\mathfrak{h} \equiv \mathfrak{r}e \bmod n, \quad \text{wenn} \quad \frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{r}} + \frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{r}}e \equiv 0 \bmod \frac{N}{\mathfrak{r}\mathfrak{r}}.$$

Die Zahlen $\mathfrak{p} + \mathfrak{q}\mathfrak{h}$ werden wiederum dargestellt durch die Schnittpunkte eines Gitters von Parallellinien zur reellen Axe und zum Radiusvector von $\mathfrak{h}$, — die Lage des Punktes $\mathfrak{h}$ ist dabei der Einschränkung unterworfen, dass auch der Punkt $\mathfrak{h}^2$ einen Gitterpunkt bilden soll. Die dadurch erzeugten Parallelogramme haben den Inhalt $\frac{1}{2}\sqrt{D}$, die Seiten 1 und $\sqrt{\tau}$, mit dem eingeschlossenen Winkel $\operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{D}}{\sigma}$. Vergrössert man die Seiten im Verhältniss von 1 zu $\sqrt{N}$, während gleichzeitig eine Drehung um den Winkel $\operatorname{arc\,tg} \frac{\mathfrak{q}\sqrt{D}}{2\mathfrak{p} + \mathfrak{q}\sigma}$ stattfindet, so bilden die Parallelogramme Gebiete *vollständiger Restensysteme* von je N incongruenten Zahlen, und zwar liegen die nach dem Modul $n = \mathfrak{p} + \mathfrak{q}\mathfrak{h}$ congruenten Zahlen in diesen Gebieten symmetrisch. Selbstverständlich können auch hier Verschiebungen in den beiden Hauptrichtungen vorgenommen werden.

Die beschränkte Anzahl der complexen Einheiten ist leicht anzugeben. Damit $N = 1$ werde, können die folgenden Fälle eintreten:

1) $\mathfrak{p} + \frac{1}{2}\mathfrak{q}\sigma = \pm 1, \quad \mathfrak{q} = 0,$

2) $\mathfrak{p} + \frac{1}{2}\mathfrak{q}\sigma = 0, \quad D\mathfrak{q}^2 = 4,$

3) $2\mathfrak{p} + \mathfrak{q}\sigma = \pm 1, \quad D\mathfrak{q}^2 = 3.$

Aus 1) entspringen die reellen Einheiten ± 1; 2) liefert für $\mathfrak{p} = \mp \frac{\sigma}{\sqrt{D}}$, $\mathfrak{q} = \pm \frac{\sigma}{\sqrt{D}}$ die imaginären Einheiten $\pm i$; 3) endlich ergibt

$$\mathfrak{p} = \tfrac{1}{2}\left(1 \mp \sigma\sqrt{\tfrac{3}{D}}\right) \quad \text{resp.} \quad \mathfrak{p} = -\tfrac{1}{2}\left(1 \pm \sigma\sqrt{\tfrac{3}{D}}\right), \quad \mathfrak{q} = \pm\sqrt{\tfrac{3}{D}}$$

$$\mathfrak{p} + \mathfrak{q}\mathfrak{h} = \tfrac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3}) \quad \text{resp.} \quad = \tfrac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3}),$$

d. h. die vier Einheiten j, $\frac{1}{j}$ sowie j^2 und $\frac{1}{j^2}$. Dabei ist jedoch zu bemerken: ad 2), dass $\pm i$ nur dann *complexe ganze* Zahlen von der Form $\mathfrak{p} + \mathfrak{q}\mathfrak{h}$ sind, wenn $D = 4$ oder $\sigma = 0$, $\tau = 1$ genommen wird, wodurch $\mathfrak{h} = i$, also die *biquadratischen* Zahlen hervorgehen; ad 3), dass $\pm j \pm j^2$ als Einheiten den Werth $D = 3$

oder $\sigma = \pm 1$, $\tau = 1$ voraussetzen, womit $\mathfrak{h} = j$, also die *cubischen* oder *bicubischen* Zahlen erhalten werden. Von diesen beiden Fällen abgesehen, gibt es folglich unter den zweitheiligen complexen Zahlen nur die beiden reellen Einheiten ± 1, und zwei Zahlen eines Restensystems modulo m entsprechen *associirten* Werthen, mit anderen Worten, können nur dann solchen Werthen congruent sein, wenn ihre Summe durch m theilbar ist.

Will man also ein *Theilsystem* incongruenter Werthe μ modulo m bilden, so hat man die Zahlen μ' auszuschliessen, für welche $\mu + \mu' \equiv 0 \mod m$, es bleiben also (abgesehen von $\mu \equiv 0$) $\frac{M-1}{2}$ Zahlen des Theilsystems μ, vorausgesetzt, dass nicht auch ausser $\mu \equiv 0$ $\mu \equiv -\mu$ werden kann. Dann wäre aber 2μ durch m theilbar: in diesem Falle könnten m und 2 nicht ohne gemeinschaftlichen Factor f sein, und für $m = fm_1$, $2 = ff_1$, folgt entweder $f = 2$ und $m = \mathfrak{p} + \mathfrak{q}\mathfrak{h}$ gerade, oder f hat die Norm 2, jedenfalls wird M durch 2 theilbar.

16.

Der im Art. 4 gelieferte Nachweis der eindeutigen Zerlegbarkeit complexer Zahlen in Primfactoren gründete sich auf die Herstellung der Ungleichung $N\left(\frac{n_2}{n_1}\right) < 1$, und man überzeugt sich leicht, dass

$$N\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \leqq R^2,$$

wenn R den Radius des durch die drei dem Werthe des Quotienten $\frac{n_1}{n}$ zunächst gelegenen Gitterpunkte bestimmten Kreises bezeichnet. Für zweitheilige Zahlen von der Form $\mathfrak{p} + \mathfrak{q}\mathfrak{h}$ kommt es auf das Dreieck mit den Seiten 1, $\sqrt{\tau}$ und $\sqrt{1 - \bar{\sigma} + \tau}$ an, wo $\bar{\sigma}$ den absoluten Werth der Zahl σ ausdrückt. Denn offenbar liefert der Ausdruck $\sqrt{1 \pm \sigma + \tau}$ die Längen der beiden Diagonalen des betreffenden Gitterparallelogramms. Da nun nach einem bekannten Satze

$$R^2 = \frac{\tau(1 - \bar{\sigma} + \tau)}{D},$$

so wird die *eindeutige Zerlegbarkeit* sicher stattfinden, falls

$$\tau(1 - \bar{\sigma} + \tau) < 4\tau - \sigma^2 \quad \text{oder} \quad \sigma^2 + \tau^2 < (3 + \bar{\sigma})\tau.$$

Für biquadratische Zahlen kann man entweder

$$\sigma = 0,\ \tau = 1,\ D = 4,\ R^2 = \tfrac{1}{2},\ \mathfrak{h} = i$$

oder

$$\sigma = 2,\ \tau = 2,\ D = 4,\ R^2 = \tfrac{1}{2},\ \mathfrak{h} = 1 + i$$

setzen, während bei cubischen Zahlen

$$\sigma = \pm 1,\ \tau = 1,\ D = 3,\ R^2 = \tfrac{1}{3},\ \mathfrak{h} = \tfrac{1}{2}(\pm 1 + i\sqrt{3}) = j \text{ oder } j^2$$

gefunden wird, in Uebereinstimmung mit den Resultaten des Art. 4.

Da vermöge der gemachten Annahmen für den kleinsten Rest n_2 modulo n_1 die Ungleichung $N(n_2) < R^2 N(n_1)$ bestehen soll, so darf die Norm eines kleinsten Restes modulo n den Werth $R^2 N$ nicht übersteigen, und das Gebiet der kleinsten Reste wird *innerhalb* eines mit dem Halbmesser $R\sqrt{N}$ aus dem Nullpunkte beschriebenen Kreises enthalten sein. Mithin kann der Inhalt $\frac{1}{2}N\sqrt{D}$ eines vollständigen Restensystems den Kreisinhalt $NR^2\pi$ nicht erreichen, jedenfalls muss für $R < 1$ $D < 4\pi^2$ sein. Im speciellen Falle werden sich durch geeignete Verschiebungen die verschiedenen Theile des Gitterparallelogramms in den obigen Kreis hineinverlegen lassen.

Für die eindeutige Zerlegbarkeit gibt die Gleichung $\tau = \mathfrak{h}(\sigma - \mathfrak{h})$ ein einfaches Beispiel, falls $R <$ ist. Setzt man etwa

$$\sigma = \tau = 2,\quad D = 4,$$
$$R^2 = \tfrac{1}{2},\ N = 2,\quad h = 1 + i,$$

so wird

$$2 = \mathfrak{h}(2 - \mathfrak{h}) = (1 + i)(1 - i).$$

Oder wenn

$$\sigma = 1,\quad \tau = 2,\quad D = 7,$$
$$R^2 = \tfrac{4}{7} < 1,\ N = 2,\ \mathfrak{h} = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{-7}),$$
$$2 = \mathfrak{h}(1 - \mathfrak{h}) = \frac{1 + i\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{1 - i\sqrt{7}}{2}.$$

Als Beispiele für eine mehrdeutige Zerlegbarkeit mögen dienen:

$$\sigma = 0,\quad \tau = 5,\quad D = 20,$$
$$R^2 = \tfrac{3}{2} > 1,\quad N = 6,\ \mathfrak{h} = i\sqrt{5},$$
$$6 = 2\cdot 3 = (1 + i\sqrt{5})(1 - i\sqrt{5})$$

oder

$$\sigma = 0,\quad \tau = 1,\quad D = 44,$$
$$R^2 = 3 > 1,\quad N = 15,\quad \mathfrak{h} = i\sqrt{11},$$
$$15 = 3\cdot 5 = (2 + i\sqrt{11})(2 - i\sqrt{11}).$$

Also sind hier die Zahlen 6 und 15 doppelt zerlegbar, ohne dass die complexen Factoren von der Form $p+q\sqrt{-5}$ oder $p+q\sqrt{-11}$ weiter zerlegt werden können, obschon ihre Normen 6 resp. 15 keine Primzahlen sind. Man sieht also, dass bei complexen Zahlen von mehrdeutiger Zerlegbarkeit die Primfactoren keine reellen Primzahlen zur Norm zu haben brauchen, und wenn diess bei obigen Beispielen durch eine weitere „*ideale*" Zerlegung der conjugirten Primfactoren erreicht werden sollte, so müssten die neuen idealen Factoren die Primzahlen 2 und 3, resp. 3 und 5 zu Normen erhalten.

Schon Jacobi, Dirichlet, Kummer und Eisenstein hatten erkannt, dass in der Theorie der aus Einheitswurzeln gebildeten complexen Zahlen die eindeutige Zerlegbarkeit in Primfactoren nicht immer stattfinde[1]): in neuerer Zeit ist namentlich durch die Einführung des Begriffs der *Primideale* an Stelle der Primfactoren und der *algebraischen Zahlkörper* durch Kummer und Dedekind, sowie durch Kronecker, Weber, Hilbert und Andere, die einschlagende Theorie der allgemeinen algebraischen Zahlen wesentlich weiter gefördert worden.

17.

Nehmen wir den Modul m als eine relative Primzahl zu 2, also ungerade, so entspricht in dem Restensystem jedem μ ein associirtes μ', für welches $\mu+\mu'\equiv 0$, die Norm M wird ungerade, und man kann ein Theilsystem von $\frac{M-1}{2}$ Zahlen auswählen, welche mit ihren entgegengesetzten Werthen nebst der Null ein vollständiges Restensystem erzeugen. Man wird nun mittelst einer relativen Primzahl n zu m wieder die Producte

$$\mu n = \nu m \pm r_\mu$$

zu bilden haben, wo μ und r_μ das nämliche Theilsystem durchlaufen, und wenn man wie früher unter ϱ die Anzahl der *negativen* Vorzeichen auf der rechten Seite versteht, durch die Gleichung

$$\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^\varrho = \prod_\mu \left(n - \frac{\nu m}{\mu}\right)$$

1) Kummer hat in seiner Festschrift zum 300jährigen Jubiläum der Universität Königsberg (1844) zuerst auf diese wichtige Eigenschaft der genannten Zahlen aufmerksam gemacht. In früheren Arbeiten, wie z. B. in der Abhandlung von Lamé über die Gleichung $x^n + y^n + z^n = 0$ (Liouville's Journal Bd. XII), ist dieser Unterschied nicht beachtet worden.

den Werth unseres Symbols definiren für solche binomische complexe Zahlen, welche der eindeutigen Zerlegbarkeit unterworfen und von den biquadratischen und bicubischen Zahlen verschieden sind.

Die Sätze des Art. 13 gelten im Wesentlichen auch für die binomischen Zahlen von der Form $\mathfrak{p}+\mathfrak{q}\mathfrak{h}$. Denn wiederum wird

$$n^{\frac{M-1}{2}} \Pi\mu \equiv \left(\frac{n}{m}\right) \Pi\mu \mod m,$$

also hat man für eine *ungerade Primzahl* m:

$$n^{\frac{M-1}{2}} \equiv \left(\frac{n}{m}\right) \mod m,$$

und die Congruenz $x^2 \equiv n \mod m$ ist lösbar, wenn $\left(\frac{n}{m}\right) = 1$, mit anderen Worten, dann ist n ein *Quadratrest* von m, während für $\left(\frac{n}{m}\right) = -1$ n nicht $\equiv x^2$ sein kann, also ein quadratischer *Nichtrest* zum Modul m wird, weil sonst $x^{M-1} \equiv -1$ sein müsste.

Ebenso bleiben die früher abgeleiteten Gleichungen

$$\left(\frac{n}{m}\right) = \left(\frac{n'}{m}\right) \quad \text{für} \quad n \equiv n' \mod m$$

sowie

$$\left(\frac{nn'}{m}\right) = \left(\frac{n}{m}\right)\left(\frac{n'}{m}\right)$$

für beliebige relative Primzahlen zum Modul in unveränderter Gültigkeit. Da ferner aus

$$\left(\frac{-1}{m}\right) = (-1)^{\frac{M-1}{2}}, \quad \left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\lambda}\left(\frac{m}{n}\right)$$

$$\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\frac{M-1}{2}}\left(\frac{-n}{m}\right), \quad \text{also} \quad \left(\frac{-n}{m}\right) = (-1)^{\lambda+\frac{M-N}{2}}\left(\frac{-m}{n}\right)$$

folgt, so hängt es von der Auswahl der *primären* Zahlen $\pm m$ $\pm n$ aus den beiden associirten ab, ob der Exponent λ oder $\lambda + \frac{M-N}{2}$ für das Reciprocitätsgesetz gelten soll. Wenn

$$\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\lambda}\left(\frac{m}{n}\right), \quad \left(\frac{n'}{m}\right) = (-1)^{\lambda'}\left(\frac{m}{n'}\right), \quad \left(\frac{nn'}{m}\right) = (-1)^{\lambda''}\left(\frac{m}{nn'}\right),$$

so ergibt sich

$$\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{m}{n'}\right) = \left(\frac{m}{nn'}\right), \quad \text{sobald} \quad \lambda + \lambda' \equiv \lambda'' \mod 2.$$

Die zweitheiligen complexen Zahlen $\mathfrak{p}+\mathfrak{q}\mathfrak{h}$ haben übrigens die Eigenschaft, dass für sie die sogen. complexe Multiplication

der Thetafunctionen stattfindet, wie diess z. B. in den *Mathemat. Annalen* Bd. 34, S. 465 nachgewiesen wird.

II. Analytischer Theil.

a) Die binomischen Zahlen $\mathfrak{p} + \mathfrak{q}\mathfrak{h}$ mit halben Theilsystemen und quadratischem Charakter.

18.

Wir versuchen jetzt mit Hülfe der elliptischen Thetafunctionen einen analytischen Ausdruck für den Werth des Symbols $\left(\frac{n}{m}\right)$ zu construiren, und beginnen mit dem Falle der allgemeinen binomischen Zahlen $\mathfrak{p} + \mathfrak{q}\mathfrak{h}$.[1])

Die Congruenz

$$\mu n \equiv \pm r_\mu \mod m$$

gibt, wenn m relative Primzahl zu 2, n relative Primzahl zu m sind, und μ nebst r_μ *ein bestimmtes Theilsystem* von $\frac{M-1}{2}$ incongruenten und nicht associirten Zahlen durchlaufen, deren Differenzen und Summen $\mu \pm \mu'$ also nicht durch m theilbar sein sollen:

$$\frac{\mu n \pi}{m} - \nu\pi = \pm \frac{r_\mu \pi}{m}.$$

Wie früher bezeichnet hier $\nu = \frac{\mu n}{m}$ die dem Quotienten $\frac{\mu n}{m}$ zunächst gelegene ganze complexe Zahl, wenn μ aus dem Gebiete der kleinsten Reste modulo m gewählt wird. Alsdann gehört $\frac{\mu n}{m}$ dem Gebiete der kleinsten Reste mod n an, so dass die Ungleichungen gelten[2])

$$N(\mu) \leqq MR^2, \quad N(\nu) \leqq NR^2.$$

---

1) In Bezug auf die Bezeichnung der elliptischen Functionen sei zum Voraus daran erinnert, dass wenn von den beiden Argumenten der Amplitude und des Moduls das *erste* fehlt, dafür $u = 0$ zu setzen ist, während für das fehlende *zweite* stets $q = e^{-h}$ genommen werden soll. Die Differentiationsstriche beziehen sich auf das erste Argument u, so dass z. B. $\vartheta_1' = \frac{\partial}{\partial u}\vartheta_1(u\,q)$ für $u = 0$, während $\vartheta''u = h\frac{\partial}{\partial h}\vartheta u$, also auch $\vartheta'' = h\frac{\partial\vartheta}{\partial h}$, $\vartheta_1''' = h\frac{\partial}{\partial h}\vartheta_1'$ u. s. w.

2) Vergl. die Anmerkung zu Art. 13.

Schreibt man nun

$$\mathfrak{h}\pi = hi, \quad q = e^{\mathfrak{h}\pi i} = e^{-h},$$

wodurch der absolute Werth $q < 1$ wird, so ergibt sich bei Einführung der ungeraden Function ϑ_1:

$$\prod_\mu \vartheta_1(\tfrac{\mu n \pi}{m} - \nu\pi,\ q) = (\tfrac{n}{m}) \prod_\mu \vartheta_1(\tfrac{\mu\pi}{m},\ q).$$

Sei hier

$$\nu = \alpha + \beta\mathfrak{h} \text{ mit der Norm } \gamma = \nu\nu',$$

so folgt wegen

$$\vartheta_1(u - \alpha\pi - \beta h i) = (-1)^{\alpha+\beta} q^{-\beta^2} e^{2\beta u i} \vartheta_1 u$$

$$(\tfrac{n}{m}) = (-1)^\varrho = P_\mu \prod_\mu \frac{\vartheta_1(\frac{\mu n \pi}{m},\ q)}{\vartheta_1(\frac{\mu\pi}{m},\ q)},$$

wenn

$$P_\mu = (-1)^{S(\alpha+\beta)} e^{hS\beta^2 + \frac{2n\pi i}{m} S\mu\beta}$$

gesetzt wird, wo jedem μ ein bestimmtes ν, also auch bestimmte reelle Zahlwerthe α und β entsprechen.

19.

Wie bereits Art. 8 bemerkt, dürfen die Zahlen eines Restensystems, resp. eines Theilsystemes, mit einer relativen Primzahl zum Modul multiplicirt werden. Demnach können wir nach dem Vorgange von EISENSTEIN (Crelle's Journal Bd. 35, S. 238) μ, und folglich auch ν, mit einer reellen Zahl r multipliciren, welche mit m keinen Factor gemein haben soll. Alsdann wird

$$(\tfrac{n}{m}) = (-1)^\varrho = (P_\mu)^{rr} \prod_\mu \frac{\vartheta_1(\frac{\mu r n \pi}{m})}{\vartheta_1(\frac{\mu r \pi}{m})}.$$

Es möge noch der Fall $n = 2$ besonders betrachtet werden. Für diesen wird

$$(\tfrac{2}{m}) = P_\mu \prod_\mu \frac{\vartheta_1(\frac{2\mu\pi}{m})}{\vartheta_1(\frac{\mu\pi}{m})}, \quad P_\mu = (-1)^{S(\alpha+\beta)} e^{hS\beta^2 + \frac{4\pi i}{m} S\mu\beta}.$$

Führt man hier die Kiepert'sche Function $X_1 u$ ein[1]), welche für für $u = 0$ den Werth

$$X_1 = \chi_1 = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^l q^{l(3l+1)} = \prod_{p=1}^{\infty} (1 - q^{2p-1})$$

ergibt, so wird

$$\frac{\vartheta_1(2u)}{\vartheta_1 u} = 2\frac{X_1 u}{\chi_1}.$$

Folglich

$$\left(\frac{2}{m}\right) = \left(\frac{2}{\chi_1}\right)^{\frac{M-1}{2}} P_\mu \prod_\mu X_1\left(\frac{\mu\pi}{m}\right),$$

oder nach Hinzufügung des Factors $r = 2$:

$$\left(\frac{2}{m}\right) = \left(\frac{2}{\chi_1}\right)^{\frac{M-1}{2}} P_\mu^4 \prod_\mu X_1\left(\frac{2\mu\pi}{m}\right),$$

mithin auch

$$\prod_\mu X_1^2\left(\frac{\mu\pi}{m}\right) = \left(\frac{\chi_1}{2}\right)^{M-1} e^{-2\lambda S\beta^2 - \frac{8\pi i}{m} S\mu\beta}.$$

Zur Beseitigung des unbequemen Factors P_μ betrachten wir noch die *geraden* Thetafunctionen $\vartheta_2 u$ ϑu $\vartheta_3 u$, für welche

$$\prod_\mu \Theta\left(\frac{\mu n \pi}{m} - \nu\pi,\ q\right) = \prod_\mu \Theta\left(\frac{\mu\pi}{m},\ q\right).$$

---

1) Vergl. Crelle's Journal Bd. 87, S. 213 und Bd. 102, S. 255f. Für die vier coordinirten Kiepert'sche Functionen

$$X_i u = \tfrac{1}{2}\chi_1 \frac{\vartheta_1(2u)}{\vartheta_i u} = (-1)^{i-1}\tfrac{1}{2}\chi_1\left(\frac{\vartheta_i u}{\vartheta_1'}\right)^3 \eta_i' u$$

gelten die Formeln

$$X_1 u = \frac{1}{2q^{1/4}\chi_1^2}\vartheta\, u\, \vartheta_2 u\, \vartheta_3 u = \sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^l q^{l(3l+1)}\cos(6l+1)u$$

$$X_2 u = \frac{1}{2q^{1/4}\chi_1^2}\vartheta\, u\, \vartheta_1 u\, \vartheta_3 u = \sum q^{l(3l+1)}\sin(6l+1)u$$

$$X\, u = \frac{1}{2q^{1/4}\chi_1^2}\vartheta_1 u\, \vartheta_2 u\, \vartheta_3 u = \sum(-1)^l q^{(l+\frac{1}{2})(3l+\frac{1}{2})}\sin(6l+2)u$$

$$X_3 u = \frac{1}{2q^{1/4}\chi_1^2}\vartheta\, u\, \vartheta_1 u\, \vartheta_2 u = \sum q^{(l+\frac{1}{2})(3l+\frac{1}{2})}\sin(6l+2)u$$

nebst den Gleichungen für $u = 0$:

$$\vartheta_1' X_1 = \vartheta_2 X_2' = \vartheta X' = \vartheta_3 X_3' = 2q^{1/4}\chi_1^4,$$

während

$$q^{1/4}\chi_1^2 = \left(\frac{\varkappa\varkappa'}{4}\right)^{1/4}\frac{2K}{\pi}.$$

Da nun

$$\vartheta_2(u-\alpha\pi-\beta hi)=(-1)^\alpha q^{-\beta^2}e^{2\beta ui}\vartheta_2 u$$
$$\vartheta\,(u-\alpha\pi-\beta hi)=(-1)^\beta q^{-\beta^2}e^{2\beta ui}\vartheta u$$
$$\vartheta_3(u-\alpha\pi-\beta hi)=q^{-\beta^2}e^{2\beta ui}\vartheta_3 u,$$

so wird

$$\prod_\mu(-1)^\alpha q^{-\beta^2}e^{\frac{2\beta\mu n\pi i}{m}}\vartheta_2\left(\frac{\mu n\pi}{m}\right)=\prod_\mu\vartheta_2\left(\frac{\mu\pi}{m}\right)$$

u. s. w., so dass

$$P_\mu=(-1)^\varrho\prod_\mu\frac{\vartheta_1\left(\frac{\mu\pi}{m}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\mu n\pi}{m}\right)}=(-1)^{S\beta}\prod_\mu\frac{\vartheta_2\left(\frac{\mu\pi}{m}\right)}{\vartheta_2\left(\frac{\mu n\pi}{m}\right)}=(-1)^{S\alpha}\prod_\mu\frac{\vartheta\left(\frac{\mu\pi}{m}\right)}{\vartheta\left(\frac{\mu n\pi}{m}\right)}$$
$$=(-1)^{S(\alpha+\beta)}\prod_\mu\frac{\vartheta_3\left(\frac{\mu\pi}{m}\right)}{\vartheta_3\left(\frac{\mu n\pi}{m}\right)}=\prod_\mu\frac{\vartheta_3\left(\frac{\mu n\pi}{m}\right)\vartheta_2\left(\frac{\mu\pi}{m}\right)\vartheta\left(\frac{\mu\pi}{m}\right)}{\vartheta_3\left(\frac{\mu\pi}{m}\right)\vartheta_2\left(\frac{\mu n\pi}{m}\right)\vartheta\left(\frac{\mu n\pi}{m}\right)}.$$

Damit erhält man wegen

$$\frac{\vartheta_1 u}{\vartheta u}=\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}\sin\varphi,\quad\frac{\vartheta_1 u}{\vartheta_2 u}=\frac{\vartheta}{\vartheta_3}\operatorname{tg}\varphi,\quad\frac{\vartheta_1 u}{\vartheta_3 u}=\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_3^2}\frac{\sin\varphi}{\Delta\varphi},$$
$$\varphi=\operatorname{am}\frac{2Ku}{\pi}=\operatorname{am}u\vartheta_3^2,\quad\varphi_\mu=\operatorname{am}\frac{2\mu K}{\pi},\quad\varphi_{\mu n}=\operatorname{am}\frac{2\mu nK}{\pi},$$
$$\left(\frac{n}{m}\right)=(-1)^{S\alpha}\prod_\mu\frac{\sin\varphi_{\mu n}}{\sin\varphi_\mu}=(-1)^{S\beta}\prod_\mu\frac{\operatorname{tg}\varphi_{\mu n}}{\operatorname{tg}\varphi_\mu}$$
$$=(-1)^{S(\alpha+\beta)}\prod_\mu\frac{\sin\varphi_{\mu n}\Delta\varphi_\mu}{\Delta\varphi_{\mu n}\sin\varphi_\mu}=\prod_\mu\frac{\operatorname{tg}\varphi_{\mu n}\Delta\varphi_{\mu n}}{\operatorname{tg}\varphi_\mu\ \Delta\varphi_\mu}.$$

Durch Hinzufügung des Factors $r=2$ wird etwas einfacher

$$\left(\frac{n}{m}\right)=\prod_\mu\frac{\sin\varphi_{2\mu n}}{\sin\varphi_{2\mu}}=\prod_\mu\left\{\frac{\vartheta_1\left(\frac{2\mu n\pi}{m}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{2\mu\pi}{m}\right)}:\frac{\vartheta\left(\frac{2\mu n\pi}{m}\right)}{\vartheta\left(\frac{2\mu\pi}{m}\right)}\right\}$$
$$=\prod_\mu\frac{\operatorname{tg}\varphi_{2\mu n}}{\operatorname{tg}\varphi_{2\mu}}=\prod_\mu\left\{\frac{\vartheta_1\left(\frac{2\mu n\pi}{m}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{2\mu\pi}{m}\right)}:\frac{\vartheta_2\left(\frac{2\mu n\pi}{m}\right)}{\vartheta_2\left(\frac{2\mu\pi}{m}\right)}\right\}$$

u. s. w., wenn μ ein *halbes* Theilsystem modulo m durchläuft.

20.

Die gefundenen Ausdrücke entsprechen der für den Fall reeller quadratischer Reste früher entwickelten Formel (Abh. I S. 382 u. 388)

$$\left(\frac{n}{m}\right)=\prod_{\mu=1}^{\frac{m-1}{2}}\frac{\sin\left(\frac{2\mu n\pi}{m}\right)}{\sin\left(\frac{2\mu\pi}{m}\right)}=\prod_\mu\frac{\sin\frac{\mu n\pi}{m}}{\sin\frac{\mu\pi}{m}},$$

wofür man wegen[1])

$$\prod_\mu \frac{\cos\left(\frac{2\mu n\pi}{m}\right)}{\cos\left(\frac{2\mu\pi}{m}\right)} = \prod_\mu \frac{\cos\left(\frac{\mu n\pi}{m}\right)}{\cos\left(\frac{\mu\pi}{m}\right)} = 1$$

auch schreiben darf:

$$\left(\frac{n}{m}\right) = \prod_\mu \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{2\mu n\pi}{m}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{2\mu\pi}{m}\right)} = \prod_\mu \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\mu n\pi}{m}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\mu\pi}{m}\right)}.$$

In Abh. I Art. 13 ist

$$\frac{\sin nu}{\sin u} = 2^{n-1}\prod_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(\sin^2\frac{2\nu\pi}{n} - \sin^2 u\right)$$

gesetzt worden, wir wollen hier den Multiplicationssatz für den Sinus in der Form anwenden:

$$2\sin nu = \prod_{\nu=0}^{n-1} 2\sin\left(u + \frac{\nu\pi}{n}\right) = (-1)^{\frac{n-1\cdot n'-1}{2}}\prod_{\nu=0}^{n-1} 2\sin\left(u + \frac{\nu n'\pi}{n}\right),$$

wo n und n' ohne gemeinschaftlichen Theiler zu nehmen sind. Für ungerade Werthe von n und $n' = 1$ schreiben wir

$$\frac{\sin nu}{\sin u} = 2^{n-1}\prod_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}}\sin\left(\frac{\nu\pi}{n} + u\right)\sin\left(\frac{\nu\pi}{n} - u\right)$$

nebst

$$\frac{\cos nu}{\cos u} = 2^{n-1}\prod\cos\left(\frac{\nu\pi}{n} + u\right)\cos\left(\frac{\nu\pi}{n} - u\right)$$

$$\frac{\operatorname{tg} nu}{\operatorname{tg} u} = \prod_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}}\operatorname{tg}\left(\frac{\nu\pi}{n} + u\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\nu\pi}{n} - u\right),$$

so dass für $u = \frac{\mu\pi}{m}$ sich ergibt:

$$\left(\frac{n}{m}\right) = 2^{\frac{m-1\cdot n-1}{2}}\prod_{\mu\nu}\sin\left(\frac{\nu\pi}{n} + \frac{\mu\pi}{m}\right)\sin\left(\frac{\nu\pi}{n} - \frac{\mu\pi}{m}\right)$$

$$= \prod_{\mu\nu}\operatorname{tg}\left(\frac{\nu\pi}{n} + \frac{\mu\pi}{m}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\nu\pi}{n} - \frac{\mu\pi}{m}\right).$$

1) In der Einleitung zu Abh. I ist nachgewiesen, dass für ein ungerades n die Summe $S\nu$ stets gerade wird. Für $n = 2$ erhält man

$$\left(\frac{2}{m}\right) = \prod_\mu \frac{\sin\frac{4\mu\pi}{m}}{\sin\frac{2\mu\pi}{m}} = 2^{\frac{m-1}{2}}\prod_{\mu=1}^{\frac{m-1}{2}}\cos\frac{2\mu\pi}{m} = (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}.$$

Durch Vertauschung von m und n geht hieraus sofort das quadratische Reciprocitätsgesetz hervor, bei welchem m und n positive ungerade Zahlen bedeuten.

Es mag bei dieser Gelegenheit einer schon Art. 13 angedeuteten Verallgemeinerung gedacht werden. Die daselbst zum Beweise der Gleichung $(\frac{nn'}{m}) = (\frac{n}{m})(\frac{n'}{m})$ angewandte Schlussweise bleibt ungeändert, wenn man das bezeichnete Theilsystem μ nur solche Reste durchlaufen lässt, welche einen bestimmten grössten Theiler mit m gemein haben, weil diess dann gleichzeitig von den Resten r und r' gilt. Wenn insbesondere die Reste μ relative Primzahlen zu m sind, so schrieben wir

$$((\tfrac{n}{m})) = i^{\dot{S}\lambda} \quad \text{oder} \quad = j^{\dot{S}\lambda} \quad \text{nebst} \quad ((\tfrac{nn'}{m})) = ((\tfrac{n}{m}))((\tfrac{n'}{m})),$$

wo die Summen $\dot{S}\lambda$ aus $\frac{1}{4}\varphi m$ resp. $\frac{1}{6}\varphi m$ Gliedern bestehen.

Für reelle quadratische Reste erhält man $\frac{1}{2}\varphi m$ Werthe von μ, und dem Bisherigen analog wird

$$((\tfrac{n}{m})) = \dot{\prod_\mu} \frac{\sin\frac{2\mu n\pi}{m}}{\sin\frac{2\mu\pi}{m}} = \dot{\prod_\mu} \frac{\sin\frac{\mu n\pi}{m}}{\sin\frac{\mu\pi}{m}}.$$

Trennt man nun in dem Producte

$$\prod_{\mu=1}^{\frac{m-1}{2}} 2\sin\frac{2\mu n\pi}{m} = (\tfrac{n}{m})\sqrt{m}$$

die relativen Primzahlen μ von denjenigen $\frac{m-1-\varphi m}{2}$ Resten, welche mit m gemeinschaftliche Theiler besitzen, und bezeichnet das letztere Product durch $\ddot{\prod}$, so erhält man

$$(\tfrac{n}{m})\sqrt{m} = \dot{\prod_\mu} \times \ddot{\prod_\mu} = ((\tfrac{n}{m}))\dot{\prod_\mu} 2\sin\frac{2\mu\pi}{m} \ddot{\prod_\mu} 2\sin\frac{2\mu n\pi}{m}.$$

Selbstverständlich kann man $\ddot{\prod_\mu}$ nach den grössten gemeinschaftlichen Theilern von μ und m in weitere Partialproducte zerlegen, deren Werthe den Quadratwurzeln aus den Theilern von m gleich werden.

21.

Kehren wir zu dem für $(\frac{n}{m}) = (-1)^\varrho$ aufgestellten Ausdruck zurück, so wird, um ein analoges Verfahren, wie bei den Quadrat-

resten reeller Zahlen anwenden zu können, zunächst das entsprechende Multiplicationstheorem für die Thetafunction zu entwickeln sein.

Excurs I.

Wir wollen in nachstehendem Excurse die aus der Theorie der Thetafunctionen bekannten und leicht beweislichen Multiplicationsformeln zunächst für einen *reellen* Multiplicator n und einen *beliebigen* Modul $q = e^{-h}$ übersichtlich zusammenstellen, um daran die Formeln der *complexen* Multiplication zu schliessen. Schreibt man zur Abkürzung

$$\varpi\pi = p\pi + p'hi,$$

so wird für *ungerade* Zahlen n:

$$\chi_1^{n^2-1}(q)\vartheta_1(nu, q) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \prod_{pp'} \vartheta_1\left(u + \frac{\varpi\pi}{n}\right) = -\prod \vartheta_2\left(u + \frac{(\varpi+\frac{1}{2})\pi}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{i} q^{1/4} e^{nui} \prod \vartheta\left(u + \frac{\varpi\pi + \frac{1}{2}hi}{n}\right) = \frac{1}{i} q^{1/4} e^{nui} \prod \vartheta_3\left(u + \frac{(\varpi+\frac{1}{2})\pi + \frac{1}{2}hi}{n}\right)$$

$$\chi_1^{n^2-1}(q)\vartheta_2(nu, q) = \prod \vartheta_2\left(u + \frac{\varpi\pi}{n}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \prod \vartheta_1\left(u + \frac{(\varpi+\frac{1}{2})\pi}{n}\right)$$

$$= q^{1/4} e^{nui} \prod \vartheta_3\left(u + \frac{\varpi\pi + \frac{1}{2}hi}{n}\right) = q^{1/4} e^{nui} \prod \vartheta\left(u + \frac{(\varpi+\frac{1}{2})\pi + \frac{1}{2}hi}{n}\right)$$

$$\chi_1^{n^2-1}(q)\vartheta(nu, q) = \prod \vartheta\left(u + \frac{\varpi\pi}{n}\right) = \prod \vartheta_3\left(u + \frac{(\varpi+\frac{1}{2})\pi}{n}\right)$$

$$= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{i} q^{1/4} e^{nui} \prod \vartheta_1\left(u + \frac{\varpi\pi + \frac{1}{2}hi}{n}\right) = i q^{1/4} e^{nui} \prod \vartheta_2\left(u + \frac{(\varpi+\frac{1}{2})\pi + \frac{1}{2}hi}{n}\right)$$

$$\chi_1^{n^2-1}(q)\vartheta_3(nu, q) = \prod \vartheta_3\left(u + \frac{\varpi\pi}{n}\right) = \prod \vartheta\left(u + \frac{(\varpi+\frac{1}{2})\pi}{n}\right)$$

$$= q^{1/4} e^{nui} \prod \vartheta_2\left(u + \frac{\varpi\pi + \frac{1}{2}hi}{n}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} q^{1/4} e^{nui} \prod \vartheta_1\left(u + \frac{(\varpi+\frac{1}{2})\pi + \frac{1}{2}hi}{n}\right),$$

wo p und p' die Werthe von $-\frac{n-1}{2}$ bis $\frac{n-1}{2}$ durchlaufen, während für eine *gerade* Zahl n:

$$\chi_1^{n^2-1}(q)\vartheta_1(nu, q) = i q^{1/4} e^{-nui} \prod_{pp'} \Theta\left(u + \frac{\varpi\pi}{n}\right)$$

$$\chi_1^{n^2-1}(q)\vartheta_2(nu, q) = q^{1/4} e^{-nui} \prod \Theta\left(u + \frac{(\varpi+\frac{1}{2})\pi}{n}\right)$$

$$\chi_1^{n^2-1}(q)\vartheta(nu, q) = \prod \Theta\left(u + \frac{\varpi\pi + \frac{1}{2}hi}{n}\right)$$

$$\chi_1^{n^2-1}(q)\vartheta_3(nu, q) = \prod \Theta\left(u + \frac{(\varpi+\frac{1}{2})\pi + \frac{1}{2}hi}{n}\right),$$

wenn man p und p' die Werthe von $-\frac{n}{2}$ bis $\frac{n-2}{2}$ durchlaufen lässt. Hier bedeutet Θ irgend eine der vier coordinirten Thetafunctionen, *welche für ein gerades n beliebig gewählt werden darf.*

Der elementare Beweis dieser Multiplicationsformeln gründet sich auf die einfachen Factorenzerlegungen

$$\vartheta_1(u, q) = \chi_1(q) 2q^{\frac{1}{4}} \sin u \prod_{p=1}^{\infty} (1 - q^{2p} e^{2ui})(1 - q^{2p} e^{-2ui})$$

u. s. w. und liefert die Doppelgleichungen für resp. ungerade und gerade Werthe von n:

$$\vartheta_1(nu, q^n) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \psi \prod_{p=-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \vartheta_1\left(u + \frac{p\pi}{n}\right) + (-1)^{\frac{n}{2}} \psi \prod_{-\frac{n}{2}}^{\frac{n-2}{2}} \vartheta_1\left(u + \frac{p\pi}{n}\right)$$

$$\vartheta_2(nu, q^n) = \psi \prod \vartheta_2\left(u + \frac{p\pi}{n}\right) + \psi \prod \vartheta_2\left(u + \frac{(p+\frac{1}{2})\pi}{n}\right)$$

$$\vartheta\ (nu, q^n) = \psi \prod \vartheta\left(u + \frac{p\pi}{n}\right) + \psi \prod \vartheta\left(u + \frac{p\pi}{n}\right)$$

$$\vartheta_3(nu, q^n) = \psi \prod \vartheta_3\left(u + \frac{p\pi}{n}\right) + \psi \prod \vartheta_3\left(u + \frac{(p+\frac{1}{2})\pi}{n}\right)$$

nebst

$$\vartheta_1(u, q^{\frac{1}{n}}) = \psi' \prod_{p'=-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \vartheta_1\left(u + \frac{p'hi}{n}\right) + i q^{\frac{1}{4n}} e^{-ui} \psi' \prod_{-\frac{n}{2}}^{\frac{n-2}{2}} \vartheta_1\left(u + \frac{p'hi}{n}\right)$$

$$\vartheta_2(u, q^{\frac{1}{n}}) = \psi' \prod \vartheta_2\left(u + \frac{p'hi}{n}\right) + q^{\frac{1}{4n}} e^{-ui} \psi' \prod \vartheta_2\left(u + \frac{p'hi}{n}\right)$$

$$\vartheta\ (u, q^{\frac{1}{n}}) = \psi' \prod \vartheta\left(u + \frac{p'hi}{n}\right) + \psi' \prod \vartheta\left(u + \frac{(p'+\frac{1}{2})hi}{n}\right)$$

$$\vartheta_3(u, q^{\frac{1}{n}}) = \psi' \prod \vartheta_3\left(u + \frac{p'hi}{n}\right) + \psi' \prod \vartheta_3\left(u + \frac{(p'+\frac{1}{2})hi}{n}\right),$$

wo zur Abkürzung

$$\psi = \frac{\chi_1(q^n)}{\chi_1^n(q)}, \quad \psi' = \frac{\chi_1(q^{\frac{1}{n}})}{\chi_1^n(q)}$$

geschrieben ist. Durch Zusammensetzung der entsprechenden Gleichungen ergeben sich die oben angeführten Multiplicationsformeln. Wir bemerken, dass in ihnen die complexe Grösse $\varpi = p + p'\mathfrak{h}$ ein vollständiges Restensystem modulo n durchläuft, weil eine reelle Zahl n gemeinschaftlicher Theiler von $n = \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q} = 0$ ist. Im Uebrigen ergeben sich für $u = 0$ eine grosse Anzahl

von Relationen zwischen den Modulfunctionen, deren Betrachtung von Interesse sein kann. So erhält man beispielshalber für ein *ungerades* n die Gleichungen

$$n\vartheta_1'(q^n) = \psi\vartheta_1'\prod_{p=1}^{\frac{n-1}{2}}\vartheta_1^2\left(\frac{p\pi}{n}\right)$$

$$\vartheta_1'(q^{\frac{1}{n}}) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\psi'\vartheta_1'\prod_{p'=1}^{\frac{n-1}{2}}\vartheta_1^2\left(\frac{p'hi}{n}\right)$$

$$n\chi_1^{n^2-1}(q) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\prod_p\vartheta_1^2\left(\frac{p\pi}{n}\right)\prod_{p'}\vartheta_1^2\left(\frac{p'hi}{n}\right)\prod_{pp'}\vartheta_1^2\left(\frac{\varpi\pi}{n}\right)\vartheta_1^2\left(\frac{\varpi'\pi}{n}\right)$$

$$\prod_p\vartheta_1^2\left(\frac{p\pi}{n}\right) = nq^{\frac{n-1}{4}}\chi_1^{n-3}\chi_1^2(q^n)$$

$$\prod_{p'}\vartheta_1^2\left(\frac{p'hi}{n}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}q^{-\frac{n-1}{4n}}\chi_1^{n-3}\chi_1^2(q^{\frac{1}{n}})$$

$$\prod_{pp'}\vartheta_1^2\left(\frac{\varpi\pi}{n}\right)\vartheta_1^2\left(\frac{\varpi'\pi}{n}\right) = q^{-\frac{(n-1)^2}{4n}}\chi_1^{(n-1)^2}\left[\frac{\chi_1\chi_1}{\chi_1(q^n)\chi_1(q^{\frac{1}{n}})}\right]^2,$$

in denen p und p' nur die *positiven* Werthe von 1 bis $\frac{n-1}{2}$ annehmen sollen, und $\varpi'\pi = p\pi - p'hi$ oder $\varpi' = p - p'\mathfrak{h}$ gesetzt worden ist.

22.

Für einen nicht reellen Multiplicator n, mit anderen Worten für die *complexe Multiplication* der Thetafunctionen wird vor Allem die Gleichheit der complementären Moduln q und q' erfordert, welche durch die lineare Transformation $\mathfrak{h}' = \frac{k'+l'\mathfrak{h}}{k+l\mathfrak{h}}$ zusammenhängen, so dass die quadratische Gleichung

$$\mathfrak{h} = \frac{k'+l'\mathfrak{h}}{k+l\mathfrak{h}} = \frac{k'-k\mathfrak{h}}{l\mathfrak{h}-l'} = \frac{hi}{\pi}$$

erfüllt sein muss. In den *Mathem. Annalen* Bd. 34, S. 468 f.[1]) finden sich unter dieser Voraussetzung die beiden Formeln abgeleitet:

1) $$C_3^2\Theta_3^2(nu, q) = e^{-\frac{2blnu^2i}{\pi}}\prod_p\Theta_3^2\left(u+\frac{p\pi}{n}, q\right)$$

2) $$C_3'^2\Theta_3^2(nu, q) = e^{-\frac{2blnu^2i}{\pi}}\prod_{p'}\Theta_3^2\left(u+\frac{p'hi}{n}, q\right),$$

1) Aus den Berichten der Leipziger Gesellschaft vom 14. Mai 1888.

wo p und p' die Werthe von $-\frac{N-1}{2}$ bis $\frac{N-1}{2}$ durchlaufen, während der von u unabhängige Factor C für gerade Thetafunctionen durch die Gleichungen erhalten wird:

$$1)\qquad C_\delta^\varepsilon = \prod_{p=1}^{\frac{N-1}{2}} \left\{\Theta_\delta^\varepsilon\left(\frac{p\pi}{n}\right)\right\}^2, \qquad 2)\qquad C'^\varepsilon_\delta = \prod_{p'}^{\frac{N-1}{2}} \left\{\Theta_\delta^\varepsilon\left(\frac{p'hi}{n}\right)\right\}^2.$$

Für $\delta = \varepsilon = -1$, $\Theta_{-1}^{-1} = \vartheta_1$ dagegen ergibt sich

$$1)\qquad C = (-1)^{\frac{N-1}{2}} \frac{1}{n} \prod_p \vartheta_1^2\left(\frac{p\pi}{n}\right), \qquad 2)\qquad C' = (-1)^{\frac{N-1}{2}} \frac{1}{n} \prod_{p'} \vartheta_1^2\left(\frac{p'hi}{n}\right).$$

Hier ist $q = e^{\mathfrak{h}\pi i} = e^{-h}$ gesetzt, wo nach dem Obigen $\mathfrak{h}$ die Wurzel einer quadratischen Gleichung mit reellen ganzzahligen Coefficienten und der negativen Determinante $-D$ bedeutet. Folglich wird

$$\sigma = \frac{l'-k}{l}, \quad \tau = -\frac{k'}{l}, \quad \frac{D}{l^2} = 4\tau - \sigma^2,$$

also für $l = 1$:

$$\sigma = l' - k, \quad \tau = -k', \quad D = 4\tau - \sigma^2.$$

Ferner bezeichnet

$$n = a + bi\sqrt{D} = \alpha + \beta\mathfrak{h}$$

den complexen Multiplicator, jedoch *ohne reellen Theiler*, damit die Reihen der aufeinanderfolgenden monomischen Zahlen p und $p'\mathfrak{h}$ vollständige Restensysteme bilden, während die Norm $N = a^2 + b^2 D$ ungerade, und $a\,b$ sowie der positive Factor l reelle ganze Zahlen sein sollen.

Da wir früher $n = \mathfrak{p} + \mathfrak{q}\mathfrak{h}$ mit beliebigen ganzen Coefficienten angenommen haben, so erhält man durch die Substitution von $\mathfrak{h} = \frac{1}{2}(\sigma + i\sqrt{D})$

$$n = \mathfrak{p} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{q}\sigma + \tfrac{1}{2}\mathfrak{q}i\sqrt{D},$$

so dass entweder σ oder $\mathfrak{q}$ gerade sein muss, wenn a und b ganze Zahlen werden sollen. Das Gleiche gilt, wenn τ oder die Norm von $\mathfrak{h}$ gerade, weil dann

$$N = \mathfrak{p}(\mathfrak{p} + \mathfrak{q}\sigma) + \mathfrak{q}^2\tau$$

nur ungerade wird, sobald $\mathfrak{p}$ ungerade und $\mathfrak{q}\sigma$ gerade sind.

Ist $\mathfrak{q}$ gerade, also N und $\mathfrak{p}$ ungerade, so kann das Vorzeichen einer *primären* Zahl $n = \mathfrak{p} + \mathfrak{q}\mathfrak{h}$ so bestimmt werden, dass $\mathfrak{p} \equiv 1$ mod 4, damit das Product solcher Zahlen primär bleibt.

Der nämliche Zweck wird erreicht, wenn man wie bei den biquadratischen (resp. bicubischen) Zahlen die alternativen Congruenzen

$$p \equiv 1, \; q \equiv 0 \quad \text{und} \quad p \equiv -1, \; q \equiv 2 \quad \text{oder} \quad p + q \equiv 1 \mod 4$$

der Definition *primärer* Zahlen zu Grunde legen will.

23.

Die oben angeführte Multiplicationsgleichung

$$(-1)^{\frac{N-1}{2}} \frac{1}{n} \vartheta_1(nu) \prod_{p=1}^{\frac{N-1}{2}} \vartheta_1^2\left(\frac{p\pi}{n}\right) = e^{-\frac{2blnu^2 i}{\pi}} \prod_{p=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \vartheta_1\left(u + \frac{p\pi}{n}\right)$$

können wir für gerade Werthe von $\mathfrak{q} = 2bl$ in der Form schreiben:

$$\frac{\vartheta_1(nu)}{\vartheta_1 u} \prod_p \vartheta_1^2\left(\frac{p\pi}{n}\right) = (-1)^{\frac{N-1}{2}} n e^{-\mathfrak{q}n\frac{u^2 i}{\pi}} \prod_{p=1}^{\frac{N-1}{2}} \vartheta_1\left(u + \frac{p\pi}{n}\right) \vartheta_1\left(u - \frac{p\pi}{n}\right).$$

Ändert man hier u um $\frac{\pi}{2}$, so erhält man wegen

$$\vartheta_1(nu + \tfrac{1}{2}\mathfrak{p}\pi + \tfrac{1}{2}\mathfrak{q}hi) = (-1)^{\frac{1}{2}(\mathfrak{p}-1)} e^{-\mathfrak{q}nui + \frac{1}{4}\mathfrak{q}\mathfrak{q}h} \vartheta_2(nu):$$

$$(-1)^{\frac{1}{2}(\mathfrak{p}-1)} e^{\frac{1}{4}\mathfrak{q}^2 h - \mathfrak{q}nui} \frac{\vartheta_2(nu)}{\vartheta_2 u} \prod_p \vartheta_1^2\left(\frac{p\pi}{n}\right) =$$

$$= (-1)^{\frac{N-1}{2}} n e^{\frac{1}{4}\mathfrak{q}^2 h - \mathfrak{p}\mathfrak{q}\frac{\pi i}{4} - \mathfrak{q}nui - \mathfrak{q}n\frac{u^2 i}{\pi}} \prod_p \vartheta_2\left(u + \frac{p\pi}{n}\right) \vartheta_2\left(u - \frac{p\pi}{n}\right)$$

oder

$$\frac{\vartheta_2(nu)}{\vartheta_2 u} \prod_p \vartheta_1^2\left(\frac{p\pi}{n}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}(N-\mathfrak{p})} i^{-\frac{1}{2}\mathfrak{p}\mathfrak{q}} n e^{-\mathfrak{q}n\frac{u^2 i}{\pi}} \prod_p \vartheta_2\left(u + \frac{p\pi}{n}\right) \vartheta_2\left(u - \frac{p\pi}{n}\right).$$

Für $u = 0$ ergibt sich hieraus

$$\prod_p \vartheta_1^2\left(\frac{p\pi}{n}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}(N-\mathfrak{p})} i^{-\frac{1}{2}\mathfrak{p}\mathfrak{q}} n \prod_p \vartheta_2^2\left(\frac{p\pi}{n}\right),$$

und für den Fall eines *primären* n, wenn $\mathfrak{p} \equiv N \equiv 1 \mod 4$ sein soll:

$$\prod \vartheta_1^2\left(\frac{p\pi}{n}\right) = i^{-\frac{1}{2}\mathfrak{q}} n \prod \vartheta_2^2\left(\frac{p\pi}{n}\right).$$

Dividirt man endlich die beiden für $\frac{\vartheta_1(nu)}{\vartheta_1 u}$ und $\frac{\vartheta_2(nu)}{\vartheta_2 u}$ erhaltenen Ausdrücke, so folgt für eine primäre complexe Zahl n

$$\frac{\operatorname{tg}\operatorname{am}(nu\vartheta_3^2)}{\operatorname{tg}\operatorname{am}(u\vartheta_3^2)} = i^{\frac{1}{2}\mathfrak{q}}\left(\frac{\vartheta}{\vartheta_3}\right)^{N-1}\prod_{p=1}^{\frac{N-1}{2}}\operatorname{tg}\operatorname{am}\vartheta_3^2\left(u+\frac{p\pi}{n}\right)\operatorname{tg}\operatorname{am}\vartheta_3^2\left(u-\frac{p\pi}{n}\right),$$

und für $u=\frac{\mu\pi}{m}$, wenn man μ die Werthe von 1 bis $\frac{M-1}{2}$ durchlaufen lässt:

$$\prod_\mu \frac{\operatorname{tg}\operatorname{am}\left(\frac{2\mu n}{m}K\right)}{\operatorname{tg}\operatorname{am}\left(\frac{2\mu}{m}K\right)} = (-1)^{S\beta}\left(\frac{n}{m}\right) =$$

$$= i^{\frac{1}{4}(M-1)\mathfrak{q}}\left(\frac{\vartheta}{\vartheta_3}\right)^{\frac{1}{2}(M-1)(N-1)}\prod_{\mu p}\operatorname{tg}\operatorname{am}2K\left(\frac{\mu}{m}+\frac{p}{n}\right)\operatorname{tg}\operatorname{am}2K\left(\frac{\mu}{m}-\frac{p}{n}\right).$$

Um durch Vertauschung von m und n das Reciprocitätsgesetz in treffender Form abzuleiten, stört nicht allein der Factor $(-1)^{S\beta}$, sondern es ist auch $\mathfrak{q}$ gerade vorausgesetzt und ein reeller Theiler von n ausgeschlossen worden. Da der Factor $(-1)^{S\beta}$ wegfallen würde, wenn die reellen Theilsysteme μ und p nur *gerade* Zahlen enthielten, so wollen wir versuchen, die Multiplicationsformeln zunächst für *beliebige* Restensysteme und *beliebige* complexe Zahlen n zu entwickeln.

24.

Um möglichst streng zu verfahren, legen wir der weiteren Untersuchung das von Eisenstein benutzte unendliche Doppelproduct für die Thetafunction in der Weierstrass'schen Form zu Grunde:

$$\vartheta_1(u,q) = \vartheta_1' e^{\frac{1}{2}g_1 u^2}\cdot u\prod_{\omega_1}\left(1-\frac{u}{\omega_1\pi}\right)e^{\frac{u}{\omega_1\pi}+\frac{u^2}{2\omega_1^2\pi^2}}$$

wo

$$g_1 = \frac{1}{3}\frac{\vartheta_1'''(0,q)}{\vartheta_1'(0,q)} = \frac{4}{3}\frac{\partial}{\partial h}\lg\vartheta_1'$$

gesetzt ist und $\omega_1 = p+p'\mathfrak{h}$ alle complexen Zahlen mit Ausschluss der Null durchläuft. Schreibt man nun

$$\omega_1 = n\omega - \varpi$$

und lässt ϖ ein vollständiges Restensystem modulo n bedeuten, so durchlaufen ω und ω_1 gleichzeitig *alle* complexen Zahlen. Schliesst man $\varpi \equiv 0 \bmod n$ aus, so fallen alle durch n theilbaren

Zahlen ω_1 fort, und soll ω nicht verschwinden, so fehlen auch die Zahlen $\omega_1 = -\varpi$. Um diese zu ergänzen, müssen die Werthe

$$\omega_1 = n\omega \quad \text{und} \quad \omega_1 = -\varpi$$

besonders hinzugefügt werden, d. h. man hat zu setzen

$$\vartheta_1(u, q) = \vartheta_1' e^{\frac{1}{2} g_1 u^2} u \prod_{\varpi} \left(1 + \frac{u}{\varpi\pi}\right) e^{-\frac{u}{\varpi\pi} + \frac{u^2}{2\varpi^2\pi^2}} \times$$

$$\times \prod_{\omega} \left(1 - \frac{u}{n\omega\pi}\right) e^{\frac{u}{n\omega\pi} + \frac{u^2}{2n^2\omega^2\pi^2}} \times$$

$$\times \prod_{\varpi} \prod_{\omega} \left(1 - \frac{u}{(n\omega - \varpi)\pi}\right) e^{\frac{u}{\pi} \frac{1}{n\omega - \varpi} + \frac{u^2}{2\pi^2} \frac{1}{(n\omega - \varpi)^2}}.$$

Gebraucht man hier die Substitution

$$1 - \frac{u}{(n\omega - \varpi)\pi} = \left(1 - \frac{u + \varpi\pi}{n\omega\pi}\right) : \left(1 - \frac{\varpi}{n\omega}\right),$$

so wird

$$\prod_{\varpi} \prod_{\omega} = \prod_{\varpi\omega} \left(1 - \frac{u + \varpi\pi}{n\omega\pi}\right) e^{\frac{1}{\pi}\left(\frac{u}{n\omega - \varpi} + \frac{\varpi\pi}{n\omega}\right) + \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{u^2}{(n\omega - \varpi)^2} + \frac{\varpi^2\pi^2}{n^2\omega^2}\right)} :$$

$$: \prod_{\varpi\omega} \left(1 - \frac{\varpi}{n\omega}\right) e^{\frac{\varpi}{n\omega} + \frac{\varpi^2}{2n^2\omega^2}}.$$

Nun ist

$$\prod_{\varpi} \vartheta_1\left(\frac{u + \varpi\pi}{n}\right) = \vartheta_1'^{N-1} e^{\frac{1}{2} g_1 \underset{\varpi}{S} \left(\frac{u + \varpi\pi}{n}\right)^2} \prod_{\varpi} \left(\frac{\varpi\pi}{n}\right) \prod_{\varpi} \left(1 + \frac{u}{\varpi\pi}\right) \times$$

$$\times \prod_{\varpi\omega} \left(1 - \frac{u + \varpi\pi}{n\omega\pi}\right) e^{\frac{u + \varpi\pi}{n\omega\pi} + \frac{(u + \varpi\pi)^2}{2n^2\omega^2\pi^2}},$$

neben

$$\vartheta_1\left(\frac{u}{n}\right) = \vartheta_1' e^{g_1 \frac{u^2}{2n^2}} \frac{u}{n} \prod_{\omega} \left(1 - \frac{u}{n\omega\pi}\right) e^{\frac{u}{n\omega\pi} + \frac{u^2}{2n^2\omega^2\pi^2}}$$

$$\prod_{\varpi} \vartheta_1\left(\frac{\varpi\pi}{n}\right) = \vartheta_1'^{N-1} e^{\frac{1}{2} g_1 \underset{\varpi}{S} \left(\frac{\varpi\pi}{n}\right)^2} \prod_{\varpi} \left(\frac{\varpi\pi}{n}\right) \prod_{\varpi\omega} \left(1 - \frac{\varpi}{n\omega}\right) e^{\frac{\varpi}{n\omega} + \frac{\varpi^2}{2n^2\omega^2}}.$$

Damit erhält man

$$\vartheta_1 u \prod_{\varpi} \vartheta_1\left(\frac{\varpi\pi}{n}\right) = e^{\xi_1 \frac{u}{\pi} + \frac{1}{2} \xi_2 \frac{u^2}{\pi^2}} n \vartheta_1\left(\frac{u}{n}\right) \prod_{\varpi} \vartheta_1\left(\frac{u + \varpi\pi}{n}\right),$$

oder wenn man u mit n multiplicirt:

$$\vartheta_1(nu) \prod_{\varpi} \vartheta_1\left(\frac{\varpi\pi}{n}\right) = e^{\xi_1 \frac{nu}{\pi} + \frac{1}{2} \xi_2 \frac{n^2u^2}{\pi^2}} n \vartheta_1 u \prod_{\varpi} \vartheta_1\left(u + \frac{\varpi\pi}{n}\right).$$

In dieser Multiplicationsformel sind die Coefficienten ξ_1 und ξ_2 durch die Ausdrücke gegeben

$$\xi_1 = -g_1 \frac{\pi^2}{n^2} \underset{\varpi}{\mathrm{S}} \varpi - \mathrm{S} \frac{1}{\varpi} + \underset{\varpi}{\mathrm{S}} \sum_{\omega} \frac{\varpi^2}{(n\omega - \varpi) n^2 \omega^2}$$

$$= -\mathrm{S} \frac{1}{\varpi} - g_1 \frac{\pi^2}{n^2} \mathrm{S} \varpi + \sum_{\omega} \left\{ \frac{\mathrm{S}\varpi^2}{n^3\omega^3} + \frac{\mathrm{S}\varpi^3}{n^4\omega^4} + \frac{\mathrm{S}\varpi^4}{n^5\omega^5} \cdots \right\}$$

$$\xi_2 = g_1 \pi^2 \frac{n^2 - N}{n^2} + \mathrm{S} \frac{1}{\varpi^2} + \underset{\varpi}{\mathrm{S}} \sum_{\omega} \frac{(2n\omega - \varpi)\varpi}{(n\omega - \varpi)^2 n^2 \omega^2}$$

$$= \mathrm{S} \frac{1}{\varpi^2} + g_1 \frac{\pi^2}{n} \mathfrak{q} i \sqrt{D} + \sum_{\omega} \left\{ \frac{2\mathrm{S}\varpi}{n^3\omega^3} + \frac{3\mathrm{S}\varpi^2}{n^4\omega^4} + \frac{4\mathrm{S}\varpi^3}{n^5\omega^5} \cdots \right\}.$$

Hier beziehen sich die Producte und Summen $\underset{\varpi}{\Pi}$ resp. $\underset{\varpi}{\mathrm{S}}$ auf ein vollständiges Restensystem ϖ mod n, mit Ausschluss der durch n theilbaren Zahl, und hängen natürlich von der Wahl dieses Restensystems ab. In den Entwickelungen von ξ_1 und ξ_2 fallen die durch ungerade Potenzen von ω dividirten Glieder von selbst fort, weil in $\sum \frac{1}{\omega^{2k+1}}$ je zwei entgegengesetzte Glieder einander aufheben. Ebenso werden die Summen S der ungeraden Potenzen von ϖ verschwinden, sobald man, was für ungerade Werthe von n oder N gestattet ist, ϖ zwei Theilsysteme von entgegengesetzten Vorzeichen durchlaufen lässt. Für gerade Potenzen erhält man dann $\underset{\varpi}{\mathrm{S}} = 2\overset{*}{\mathrm{S}} \varpi^{2k}$, wenn man durch $\overset{*}{\mathrm{S}}$ die Summirung über ein *halbes* Theilsystem bezeichnet.

25.

Um die Summen $\sum \frac{1}{\omega^{2k}}$ zu finden, wo $\omega = p + p'\mathfrak{h}$ alle complexen Zahlen mit Ausschluss der Null durchläuft, benutzen wir die für die vier coordinirten Functionen

$$\eta_i(u) = \left(\frac{d}{du}\right)^2 \log \vartheta_i(u, q)$$

in den *Berichten der Leipziger Gesellschaft* für 1889, S. 100 und 1890 S. 130 zusammengestellten Entwickelungen. Da gleichzeitig

$$\eta_i'(u) = \sum_{pp'} \frac{2}{(u + \omega_i)^3},$$

so erhält man auch

$$\eta_i'(u) = \sum_{pp'} \left\{ \frac{2}{\omega_i^{\,3}} - \frac{6u}{\omega_i^{\,4}} + \frac{12u^2}{\omega_i^{\,5}} - \frac{20u^3}{\omega_i^{\,6}} + \frac{30u^4}{\omega_i^{\,7}} \cdots \right\}$$

und nur für $i = 1$, unter Abtrennung des $\omega_i = 0$ entsprechenden Gliedes:

$$\eta_1'(u) = \frac{2}{u^3} - \sum_{pp'} \left\{ \frac{6u}{\omega_1^4} + \frac{20u^3}{\omega_1^6} + \frac{42u^5}{\omega_1^8} \cdots \right\},$$

wo

$$\omega_1 = \pi\omega = p\pi + p'hi$$

nicht verschwinden darf. Durch Integration folgt

$$\eta_1 u = \text{const.} - \frac{1}{u^2} - \sum_{pp'} \left\{ \frac{3u^2}{\omega_1^4} + \frac{5u^4}{\omega_1^6} + \frac{7u^6}{\omega_1^8} \cdots \right\}$$

neben

$$\eta_1 u = -\frac{1}{u^2} + g_1 - \frac{1}{20} g_2 u^2 - \frac{1}{28} g_3 u^4 - g_4 u^6 - g_5 u^8 \cdots$$

mit den beiden Invarianten

$$g_2 = \frac{4}{3}(\vartheta_3^8 - \vartheta^4 \vartheta_2^4), \quad g_3 = (\vartheta^4 - \vartheta_2^4)(2\vartheta_3^8 + \vartheta^4 \vartheta_2^4).$$

Die weiteren Coefficienten g_k bestimmen sich am bequemsten mit Hülfe der Differentialformeln

$$\begin{aligned}(\eta_i' u)^2 &= 4\left(\frac{\vartheta''}{\vartheta} - \eta_i u\right)\left(\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} - \eta_i u\right)\left(\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} - \eta_i u\right) \\ &= 4(g_1 - \eta_i u)^3 - g_2(g_1 - \eta_i u) - g_3\end{aligned}$$

$$\eta_1''(u) = \frac{1}{2} g_2 - 6(g_1 - \eta_i u)^2, \quad g_1 = \frac{1}{3}\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'},$$

also für $i = 1$:

$$\begin{aligned}\eta_1''(u) &= -\frac{6}{u^4} - \frac{1}{10} g_2 - \frac{3}{7} g_3 u^2 - 30 g_4 u^4 - 56 g_5 u^6 \cdots \\ &= \frac{1}{2} g_2 - 6\left[\frac{1}{u^2} + \frac{1}{20} g_2 u^2 + \frac{1}{28} g_3 u^4 + g_4 u^6 + g_5 u^8 \cdots\right]^2.\end{aligned}$$

Die Auflösung der betreffenden Coefficientengleichungen ergibt

$$g_4 = \frac{1}{1200} g_2^2, \quad g_5 = \frac{3}{6160} g_2 g_3, \ \ldots .$$

und damit die Werthe der Summen

$$\sum \frac{1}{\pi^4 \omega^4} = \frac{1}{60} g_2, \qquad \sum \frac{1}{\pi^6 \omega^6} = \frac{1}{140} g_3,$$

$$\sum \frac{1}{\pi^8 \omega^8} = \frac{1}{8400} g_2^2, \quad \sum \frac{1}{\pi^{10} \omega^{10}} = \frac{1}{18480} g_2 g_3,$$

u. s. w.

Es ist bemerkenswerth, dass sich auf kurzem directem Wege weit bequemere Ausdrücke für die Coefficienten ξ_1 und ξ_2 ermitteln

lassen, wodurch zugleich die Summation der oben aufgestellten Reihen geleistet wird. Denn schreibt man in der Gleichung

$$\frac{\vartheta_1(nu)}{\vartheta_1 u}\prod_{\varpi}\vartheta_1\left(\frac{\varpi\pi}{n}\right) = e^{n\xi_1\frac{u}{\pi}+\frac{1}{2}n^2\xi_2\frac{u^2}{\pi^2}}\, n\prod_{\varpi}\vartheta_1\left(u+\frac{\varpi\pi}{n}\right)$$

$u+\pi$ statt u, so erhält man wegen

$$n\pi = \mathfrak{p}\pi + \mathfrak{q}hi, \quad h^2 = \pi(\tau\pi - \sigma hi)$$

$$(-1)^{\mathfrak{p}+\mathfrak{q}} e^{\mathfrak{q}^2 h - 2n\mathfrak{q}ui}\frac{\vartheta_1(nu)}{\vartheta_1 u}\prod_{\varpi}\vartheta_1\left(\frac{\varpi\pi}{n}\right) =$$

$$= (-1)^N e^{n\xi_1\left(\frac{u}{\pi}+1\right)+\frac{1}{2}n^2\xi_2\left(\frac{u}{\pi}+1\right)^2}\, n\prod_{\varpi}\vartheta_1\left(u+\frac{\varpi\pi}{n}\right),$$

mithin

$$(-1)^{\mathfrak{p}+\mathfrak{q}} e^{\mathfrak{q}^2 h - 2n\mathfrak{q}ui} = (-1)^N e^{n\xi_1+\frac{1}{2}n^2\xi_2+n^2\xi_2\frac{u}{\pi}}.$$

Hieraus folgt sogleich

$$n\xi_2 = -2\mathfrak{q}\pi i$$

nebst

$$e^{(\mathfrak{p}+\mathfrak{q})\pi i+\mathfrak{q}^2 h} = e^{(N+2\mathfrak{r})\pi i - n\mathfrak{q}\pi i + n\xi_1}$$

d. h.

$$n\xi_1 = (\mathfrak{p}\mathfrak{q}+\mathfrak{p}+\mathfrak{q}-N-2\mathfrak{r})\pi i = \mathfrak{g}\pi i,$$

wo $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{g}$ positive oder negative reelle ganze Zahlen bedeuten, die von der Wahl des Restensystems ϖ abhängen. Für eine ungerade Norm N kann man z. B. ϖ aus zwei halben Theilsystemen $\pm\varpi$ von entgegengesetzten Vorzeichen zusammensetzen, wodurch ξ_1 und $\mathfrak{g}$ verschwinden, weil dann das Product $\prod_{\varpi}\vartheta_1\left(u+\frac{\varpi\pi}{n}\right)$ eine gerade Function von u wird.

26.

Von der *allgemeinen complexen Multiplicationsformel* für ϑ_1

$$\frac{\vartheta_1(nu)}{\vartheta_1 u}\prod_{\varpi}\vartheta_1\left(\frac{\varpi\pi}{n}\right) = e^{\mathfrak{g}ui-\frac{n}{\pi}\mathfrak{q}u^2 i}\, n\prod_{\varpi}\vartheta_1\left(u+\frac{\varpi\pi}{n}\right)$$

können wir durch Aenderung von u um $\frac{\pi}{2}$, $\frac{hi}{2}$ und $\frac{\pi+hi}{2}$ zu den coordinirten Thetafunctionen übergehen, wenigstens wenn n eine ungerade Zahl von der ersten Gattung, also eine *normale* bino-

mische Zahl ist, d. h. für $\mathfrak{p} - 1 \equiv \mathfrak{q} \equiv \mathfrak{g} \equiv 0 \mod 2$. Man erhält dann wegen

$$n\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(\mathfrak{p}-1)\pi + \frac{1}{2}\mathfrak{q}hi$$

$$n\frac{hi}{2} = \frac{hi}{2} - \frac{1}{2}\mathfrak{q}\tau\pi + \frac{1}{2}(\mathfrak{p}-1+\mathfrak{q}\sigma)hi$$

$$n\frac{\pi+hi}{2} = \frac{\pi+hi}{2} + \frac{1}{2}(\mathfrak{p}-1-\mathfrak{q}\tau)\pi + \frac{1}{2}(\mathfrak{p}-1+\mathfrak{q}+\mathfrak{q}\sigma)hi:$$

$$\vartheta_1\left(nu + \frac{n\pi}{2}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}(\mathfrak{p}-1)} e^{\frac{1}{4}\mathfrak{q}^2 h - n\mathfrak{q}ui}\,\vartheta_2(nu)$$

$$\vartheta_1\left(nu + \frac{nhi}{2}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}(\mathfrak{p}-1+\mathfrak{q}\sigma-\mathfrak{q}\tau)}\, i e^{\frac{1}{4}(\mathfrak{p}+\mathfrak{q}\sigma)^2 h - n(\mathfrak{p}+\mathfrak{q}\sigma)ui}\,\vartheta(nu)$$

$$\vartheta_1\left(nu + n\frac{\pi+hi}{2}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}(\mathfrak{p}-1+\mathfrak{q}\tau)} e^{\frac{1}{4}(\mathfrak{p}+\mathfrak{q}+\mathfrak{q}\sigma)^2 h - n(\mathfrak{p}+\mathfrak{q}+\mathfrak{q}\sigma)ui}\,\vartheta_3(nu).$$

Schreibt man nun zur Abkürzung

$$A = (-1)^{\frac{1}{2}(\mathfrak{p}-1+\mathfrak{g})}\, i^{-\frac{1}{2}\mathfrak{p}\mathfrak{q}}$$

$$B = (-1)^{\frac{1}{2}(\mathfrak{p}-1+\mathfrak{q}\tau+\mathfrak{q}\sigma\tau)}\, i^{\frac{1}{2}\mathfrak{p}\mathfrak{q}\tau}\, e^{-\frac{1}{2}\mathfrak{g}h - \frac{\pi i}{n}S\varpi}$$

$$C = (-1)^{\frac{1}{2}(\mathfrak{p}-1+\mathfrak{g}+\mathfrak{q}\tau+\mathfrak{q}\sigma\tau)}\, i^{\frac{1}{2}\mathfrak{p}\mathfrak{q}(\tau-1)}\, e^{-\frac{1}{2}\mathfrak{g}h - \frac{\pi i}{n}S\varpi},$$

so findet man

$$\frac{\vartheta_2(nu)}{\vartheta_2 u}\prod_{\varpi}\vartheta_1\left(\frac{\varpi\pi}{n}\right) = Ae^{\mathfrak{g}ui - \frac{n}{\pi}\mathfrak{q}u^2 i}\, n\prod_{\varpi}\vartheta_2\left(u + \frac{\varpi\pi}{n}\right)$$

$$\frac{\vartheta(nu)}{\vartheta u}\prod_{\varpi}\vartheta_1\left(\frac{\varpi\pi}{n}\right) = Be^{\mathfrak{g}ui - \frac{n}{\pi}\mathfrak{q}u^2 i}\, n\prod_{\varpi}\vartheta\left(u + \frac{\varpi\pi}{n}\right)$$

$$\frac{\vartheta_3(nu)}{\vartheta_2 u}\prod_{\varpi}\vartheta_1\left(\frac{\varpi\pi}{n}\right) = Ce^{\mathfrak{g}ui - \frac{n}{\pi}\mathfrak{q}u^2 i}\, n\prod_{\varpi}\vartheta_3\left(u + \frac{\varpi\pi}{n}\right).$$

Für $u = 0$ ergeben sich daraus die Gleichungen

$$\prod_{\varpi}\vartheta_1\left(\frac{\varpi\pi}{n}\right) = An\prod_{\varpi}\vartheta_2\left(\frac{\varpi\pi}{n}\right) = Bn\prod_{\varpi}\vartheta\left(\frac{\varpi\pi}{n}\right) = Cn\prod_{\varpi}\vartheta_3\left(\frac{\varpi\pi}{n}\right)$$

und folglich auch

$$\frac{\Theta(nu)}{\Theta u}\prod_{\varpi}\Theta\left(\frac{\varpi\pi}{n}\right) = e^{\mathfrak{g}ui - \frac{n}{\pi}\mathfrak{q}u^2 i}\prod_{\varpi}\Theta\left(u + \frac{\varpi\pi}{n}\right),$$

für alle *geraden* Thetafunctionen und für ein beliebiges Restensystem ϖ, aber im Allgemeinen nur für ein gerades $\mathfrak{q}$, resp. eine

normale ungerade Zahl n als Multiplicator. Für zwei halbe Systeme $\pm\varpi$ verschwinden $\mathfrak{g}$ sowie $S\varpi$, in jedem Falle ist $S\varpi$ durch n theilbar, da verschiedene Restensysteme sich nur durch Vielfache des Moduls unterscheiden. Wollte man die Geltung der abgeleiteten Formeln auch für andere nicht normale Zahlen n, resp. für *ungerade* Werthe von $\mathfrak{q}$ in Anspruch nehmen, so würde man auf Widersprüche geführt werden. Aendert man u um π, so folgt z. B.

$$\vartheta(nu + \mathfrak{p}\pi + \mathfrak{q}hi)\prod_{\varpi}\vartheta\left(\frac{\varpi\pi}{n}\right) = e^{(\mathfrak{g} - n\mathfrak{q})\pi i - 2n\mathfrak{q}ui + \mathfrak{g}ui - \frac{n}{\pi}\mathfrak{q}u^2 i}\,\vartheta u\prod_{\varpi}\vartheta\left(u + \frac{\varpi\pi}{n}\right)$$

oder

$$(-1)^{\mathfrak{q}}e^{\mathfrak{q}^2 h}\vartheta(nu)\prod\vartheta\left(\frac{\varpi\pi}{n}\right) = e^{(\mathfrak{g} - n\mathfrak{q})\pi i + \mathfrak{g}ui - \frac{n}{\pi}\mathfrak{q}u^2 i}\,\vartheta u\prod\vartheta\left(u + \frac{\varpi\pi}{n}\right),$$

also wegen $n\mathfrak{q}\pi i = \mathfrak{p}\mathfrak{q}\pi i - \mathfrak{q}^2 h$:

$$(-1)^{\mathfrak{q}} = e^{(\mathfrak{g} - \mathfrak{p}\mathfrak{q})\pi i}$$

oder

$$\mathfrak{g} = N + \mathfrak{p}\mathfrak{q} + \mathfrak{p} + \mathfrak{q} + 2\mathfrak{r} = \mathfrak{p}\mathfrak{q} + \mathfrak{q} + 2\mathfrak{r}'.$$

Diese Gleichung enthält einen Widerspruch, sobald $\mathfrak{p}$ gerade und $\mathfrak{q}$ nebst τ ungerade genommen werden, denn da $\mathfrak{g}$ für $\pm\varpi$ verschwindet, so kann es nur *gerade* und nicht mit $\mathfrak{q}$ *ungerade* sein.

Um Multiplicationsformeln aufzustellen, welche auch bei den *geraden* Thetafunctionen für *alle* ungeraden Zahlen n gelten, ändern wir in unserer Ausgangsgleichung u um $\frac{\pi}{2n}$, resp. $\frac{hi}{2n}$ und $\frac{\pi + hi}{2n}$ und erhalten nach leichter Rechnung

$$\vartheta_2(nu)\prod_0\vartheta_1\left(\frac{\overline{\varpi + \frac{1}{2}}\pi}{n}\right) = e^{(\mathfrak{g} - \mathfrak{q})ui - \frac{n}{\pi}\mathfrak{q}u^2 i}\,\vartheta_2\prod_0\vartheta_1\left(u + \frac{\overline{\varpi + \frac{1}{2}}\pi}{n}\right)$$

$$\vartheta(nu)\prod_0\vartheta_1\left(\frac{\varpi\pi + \frac{1}{2}hi}{n}\right) = e^{(\mathfrak{g} + \mathfrak{p})ui - \frac{n}{\pi}\mathfrak{q}u^2 i}\,\vartheta\prod_0\vartheta_1\left(u + \frac{\varpi\pi + \frac{1}{2}hi}{n}\right)$$

$$\vartheta_3(nu)\prod_0\vartheta_1\left(\frac{\overline{\varpi + \frac{1}{2}}\pi + \frac{1}{2}hi}{n}\right) = e^{(\mathfrak{g} + \mathfrak{p} - \mathfrak{q})ui - \frac{n}{\pi}\mathfrak{q}u^2 i}\,\vartheta_3\prod_0\vartheta_1\left(u + \frac{\overline{\varpi + \frac{1}{2}}\pi + \frac{1}{2}hi}{n}\right),$$

wo in den Producten $\prod\limits_0$ das Restensystem auch den Werth $\varpi \equiv 0 \bmod n$ enthält. Dazu treten die weiteren Gleichungen

$$\prod_{\varpi} \vartheta_1\left(\frac{\varpi\pi}{n}\right) = \frac{Dn}{\vartheta_2} \prod_0 \vartheta_1\left(\frac{\overline{\varpi + \frac{1}{2}\pi}}{n}\right) = \frac{En}{\vartheta} \prod_0 \vartheta_1\left(\frac{\varpi\pi + \frac{1}{2}hi}{n}\right)$$

$$= \frac{Fn}{\vartheta_3} \prod_0 \vartheta_1\left(\frac{\overline{\varpi + \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}hi}}{n}\right),$$

$$D = e^{\frac{1}{4n}(2\mathfrak{g} - \mathfrak{q})\pi i}$$

$$E = \frac{1}{i} e^{-\frac{1}{4n}(2\mathfrak{g} + \mathfrak{p})h} = e^{-\frac{1}{4n}[2\mathfrak{p}\pi i + (2\mathfrak{g} + \mathfrak{p} - 2\mathfrak{q})h]}$$

$$F = e^{\frac{1}{4n}[(2\mathfrak{g} - \mathfrak{q})\pi i - (2\mathfrak{g} + \mathfrak{p} - 2\mathfrak{q})h]}.$$

27.

Führen wir jetzt zwei halbe Restensysteme $\pm\varpi$ ein und lassen in $\prod^{*} \varpi$ *ein* solches durchlaufen, so wird analog wie Art. 23:

$$\frac{\vartheta_1(nu)}{\vartheta_1 u} \cdot \prod_{\varpi}^{*} \vartheta_1^2\left(\frac{\varpi\pi}{n}\right) = (-1)^{\frac{N-1}{2}} e^{-\frac{n}{\pi}\mathfrak{q}u^2 i} n \prod_{\varpi}^{*} \vartheta_1\left(u + \frac{\varpi\pi}{n}\right) \vartheta_1\left(u - \frac{\varpi\pi}{n}\right)$$

und für einen ungeraden Multiplicator erster Gattung:

$$\frac{\vartheta_2(nu)}{\vartheta_2 u} \prod_{\varpi}^{*} \vartheta_1^2\left(\frac{\varpi\pi}{n}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}(N-\mathfrak{p})} i^{-\frac{1}{2}\mathfrak{p}\mathfrak{q}} e^{-\frac{n}{\pi}\mathfrak{q}u^2 i} n \prod_{\varpi}^{*} \vartheta_2\left(u + \frac{\varpi\pi}{n}\right) \vartheta_2\left(u - \frac{\varpi\pi}{n}\right).$$

Die Division beider Formeln ergibt

$$\frac{\vartheta_1(nu)}{\vartheta_2(nu)} : \frac{\vartheta_1 u}{\vartheta_2 u} = (-1)^{\frac{1}{2}(\mathfrak{p}-1)} i^{\frac{1}{2}\mathfrak{p}\mathfrak{q}} \prod_{\varpi}^{*} \frac{\vartheta_1\left(u + \frac{\varpi\pi}{n}\right)}{\vartheta_2\left(u + \frac{\varpi\pi}{n}\right)} \cdot \frac{\vartheta_1\left(u - \frac{\varpi\pi}{n}\right)}{\vartheta_2\left(u - \frac{\varpi\pi}{n}\right)},$$

oder wenn man *n primär* wählt, also $p \equiv 1 \bmod 4$ setzt:

$$\frac{\operatorname{tg} \operatorname{am}(nu\vartheta_3^2)}{\operatorname{tg} \operatorname{am}(u\vartheta_3^2)} = i^{\frac{1}{2}\mathfrak{q}} \left(\frac{\vartheta}{\vartheta_3}\right)^{N-1} \prod_{\varpi}^{*} \operatorname{tg} \operatorname{am} \vartheta_3^2\left(u + \frac{\varpi\pi}{n}\right) \operatorname{tg} \operatorname{am} \vartheta_3^2\left(u - \frac{\varpi\pi}{n}\right).$$

Diess ist genau die nämliche Gleichung, welche Art. 23 für das reelle Theilsystem von 1 bis $\frac{N-1}{2}$ abgeleitet worden ist. Bei letzterem waren reelle Theiler von $n = \mathfrak{p} + \mathfrak{q}\mathfrak{h}$ von selbst ausgeschlossen. Jetzt dürfen wir, da n ungerade, 2ϖ statt ϖ schreiben, und wenn auch

$$m = \mathfrak{p}' + \mathfrak{q}'\mathfrak{h}$$

eine primäre complexe Zahl ohne gemeinschaftlichen Theiler mit n bezeichnet, $u = \frac{2\mu\pi}{m}$ setzen. Damit folgt

$$\prod_{\mu}^{*} \frac{\operatorname{tg am}\left(\frac{4\mu n}{m}K\right)}{\operatorname{tg am}\left(\frac{4\mu}{m}K\right)} = \left(\frac{n}{m}\right) =$$

$$= i^{\frac{1}{4}(M-1)\mathfrak{q}} \left(\frac{\vartheta}{\vartheta_3}\right)^{\frac{M-1\cdot N-1}{2}} \prod_{\mu\varpi}^{**} \operatorname{tg am} 4K\left(\frac{\mu}{m}+\frac{\varpi}{n}\right) \operatorname{tg am} 4K\left(\frac{\mu}{m}-\frac{\varpi}{n}\right),$$

und durch Vertauschung von m und n:

$$\left(\frac{m}{n}\right) = i^{\frac{1}{4}(N-1)\mathfrak{q}'} \left(\frac{\vartheta}{\vartheta_3}\right)^{\frac{M-1\cdot N-1}{2}} \prod_{\mu\varpi}^{**} \operatorname{tg am} 4K\left(\frac{\mu}{m}+\frac{\varpi}{n}\right) \operatorname{tg am} 4K\left(\frac{\varpi}{n}-\frac{\mu}{m}\right).$$

Da aber

$$i^{\frac{1}{4}(M-1)\mathfrak{q}'} = i^{\frac{1}{4}\mathfrak{q}\mathfrak{q}'(\sigma+\mathfrak{q}\tau)}$$

$$i^{\frac{1}{4}(M-1)\mathfrak{q}-\frac{1}{4}(N-1)\mathfrak{q}'} = i^{\frac{1}{4}\mathfrak{q}\mathfrak{q}'(\mathfrak{q}-\mathfrak{q}')\tau} = (-1)^{\frac{1}{8}\mathfrak{q}\mathfrak{q}'(\mathfrak{q}-\mathfrak{q}')\tau} = 1,$$

so wird

$$\left(\frac{m}{n}\right) = (-1)^{\frac{M-1}{2}\cdot\frac{N-1}{2}} \left(\frac{n}{m}\right).$$

Diese Gleichung enthält mithin das *quadratische Reciprocitätsgesetz*, wenigstens für normale und primäre complexe Zahlen $\mathfrak{p}+\mathfrak{q}\mathfrak{h}$ von eindeutiger Zerlegbarkeit, so dass

$$\mathfrak{p} \equiv 1 \mod 4, \quad \mathfrak{q} \equiv 0 \mod 2, \quad R < 1.$$

Für

$$\mathfrak{h} = i, \quad h = \pi, \quad N = \mathfrak{p}^2 + \mathfrak{q}^2, \quad M = \mathfrak{p}'^2 + \mathfrak{q}'^2$$

folgt sogleich der GAUSS'sche Satz $\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{n}{m}\right)$[1], während für cubische Zahlen

$$\mathfrak{h} = j, \quad N = \mathfrak{p}^2 + \mathfrak{p}\mathfrak{q} + \mathfrak{q}^2, \quad M = \mathfrak{p}'^2 + \mathfrak{p}'\mathfrak{q}' + \mathfrak{q}'^2$$

$$\left(\frac{m}{n}\right) = (-1)^{\frac{1}{4}\mathfrak{q}\mathfrak{q}'} \left(\frac{n}{m}\right)$$

erhalten wird. Auch ist die Gleichung

$$\left(\frac{n}{m}\right)\left(\frac{n}{m'}\right) = \left(\frac{n}{mm'}\right)$$

eine unmittelbare Folge des entwickelten Reciprocitätssatzes, da sie aus demselben mittelst $\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{m'}{n}\right) = \left(\frac{mm'}{n}\right)$ hervorgeht (vergl. Art. 17).

Wir lassen es vorläufig dahingestellt, wie weit für die beiden anderen Gattungen ungerader Zahlen, welche bei den früher

1) *Theoria resid. biquadrat.* Art. 60.

definirten primären biquadratischen und bicubischen Zahlen von selbst in Wegfall kommen, eine analoge Untersuchung sich durchführen lässt[1]), sowie welche Vorzeichen die Symbole $\left(\frac{2}{m}\right)$ und $\left(\frac{h}{m}\right)$ besitzen, die neben $\left(\frac{-1}{m}\right) = (-1)^{\frac{M-1}{2}}$ zu den sogen. Ergänzungssätzen gehören. Es mag nur noch kurz bemerkt werden, dass für den Fall

$$m = \mathfrak{p} + \mathfrak{q}\mathfrak{h} \equiv 1 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{q} \equiv M - 1 \equiv 0 \mod 4$$

aus der Gleichung

$$m + 1 = (-1)^{\frac{\mathfrak{p}-1}{4}} 2n,$$

in welcher $n = \frac{\mathfrak{p}+1}{2} + \frac{\mathfrak{q}}{2}\mathfrak{h}$ mit m normal und primär ist, die Relationen erhalten werden:

$$\left(\frac{-1}{m}\right)^{\frac{\mathfrak{p}-1}{4}} \left(\frac{2}{m}\right)\left(\frac{n}{m}\right) = 1 \quad \text{nebst} \quad \left(\frac{-1}{n}\right) = \left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{n}{m}\right),$$

wodurch nach leichter Rechnung

$$\left(\frac{2}{m}\right) = (-1)^{\frac{1}{4}\mathfrak{q}\sigma}$$

hervorgeht.

b) Die biquadratischen und bicubischen Zahlen.

28.

Wir wenden uns jetzt zu den Ausnahmefällen des Art. 15, in denen mehr als zwei complexe Einheiten vorhanden sind, mit anderen Worten, wir kehren nunmehr zu den früher betrachteten biquadratischen ($\sigma = 0$, $\tau = 1$) und bicubischen ($\sigma = 1$, $\tau = 1$) Zahlen m zurück, deren Theilsysteme bei den sogen. normalen Zahlen $l = \frac{M-1}{4}$ resp. $l = \frac{M-1}{6}$ nicht associirte Reste umfassen. Man erhält dann nach Art. 13

$$\left(\frac{n}{m}\right) = i^{\varrho} \quad \text{resp.} \quad \left(\frac{n}{m}\right) = j^{\varrho},$$

wenn in der Congruenz

$$\mu n \equiv i^{\lambda} r_{\mu} \quad \text{resp.} \quad \mu n \equiv j^{\lambda} r_{\mu} \mod m$$

---

1) Man würde eventuell $u = \frac{(\mu + \frac{1}{2})\pi}{m}$ resp. $= \frac{(2\mu + 1)\pi}{m}$ einzuführen versuchen.

μ und r_μ das nämliche Viertel- oder Sechstelsystem durchlaufen und $\varrho = \overset{*}{S}\lambda$ gesetzt wird.

Die hier einzuführenden Thetafunctionen haben die Moduln

$$q_1 = e^{-\pi}, \quad \mathfrak{h} = i, \quad h = \pi \quad \text{für die biquadratischen}$$

und

$$q_2 = ie^{-\pi\sqrt{\frac{3}{4}}}, \quad \mathfrak{h} = j, \quad h = -j\pi i \quad \text{für die cubischen Zahlen.}$$

Man überzeugt sich leicht, dass die Werthe q_1 und q_2 dem Verschwinden der Invarianten g_3 und g_2 entsprechen. Dann ergibt sich auf directem Wege, dass in der Gleichung (*Math. Annalen* Bd. 34, S. 507)

$$\vartheta_1(u\, q) = \vartheta_1' e^{\frac{1}{2}g_1 u^2} u\zeta_1(u\, q),$$

wo $g_1 = \frac{1}{3}\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'}$, die Reihenentwickelung von

$$\zeta_1 u = \prod_{\omega_1}\left(1 - \frac{u}{\omega_1 \pi}\right) e^{\frac{u}{\omega_1\pi} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{\omega_1\pi}\right)^2}$$

nach den Potenzen von u für $g_3 = 0$ nur Glieder von der Form $a_{4k} g_2^k u^{4k}$, und für $g_2 = 0$ nur Glieder von der Form $a_{6k} g_3^k a^{6k}$ enthält, welche beim Uebergang von u zu ui resp. zu uj ungeändert bleiben. Mithin wird

$$\zeta_1(ui^\lambda, q_1) = \zeta_1(u, q_1) \quad \text{und} \quad \zeta_1(uj^\lambda, q_2) = \zeta_1(u, q_2).$$

Bezeichnet man das Product

$$u\zeta_1 u = \frac{1}{\vartheta_1'} e^{-\frac{1}{2}g_1 u^2} \vartheta_1 u$$

der Kürze halber durch σu[1], so können wir die erhaltenen Gleichungen in der Form schreiben

$$\sigma(ui^\lambda, q_1) = i^\lambda \sigma(u, q_1) \quad \text{und} \quad \sigma(uj^\lambda, q_2) = j^\lambda \sigma(u, q_2).$$

1) Nach WEIERSTRASS' Bezeichnung würde

$$\sigma u = u\zeta_1\left(\frac{u}{\vartheta_3^2}\right) \quad \text{oder} \quad u\zeta_1 u = \frac{1}{\vartheta_3^2}\sigma(u\vartheta_3^2),$$

also

$$\vartheta_1 u = \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_3^2} e^{\frac{1}{2}g_1 u^2} \sigma(u\vartheta_3^2)$$

zu setzen sein.

Auf die Function ϑ_1 übertragen folgt

$$\vartheta_1(ui^\lambda, q_1) = i^\lambda e^{-\frac{1}{2}\eta_1[1-i^{2\lambda}]u^2}\,\vartheta_1(u, q_1)$$

$$\vartheta_1(uj^\lambda, q_2) = j^\lambda e^{-\frac{1}{2}\eta_2[1-j^{2\lambda}]u^2}\,\vartheta_1(u, q_2).$$

Die zugehörigen Werthe von q_1 findet man mit Hülfe der Formeln der linearen Transformation (Abh. I, S. 405), wenn man $q = q'$, $k = 0$, $l = 1$, $k' = -1$ substituirt (vergl. *Math. Annalen* Bd. 34, S. 470 f.) und

1) $l' = 0$, also $q = q_1$, 2) $l' = 1$, also $q = q_2$

setzt. Dann folgt

$$\vartheta_1(ui, q_1) = ie^{\frac{u^2}{\pi}}\vartheta_1(u, q_1), \quad \vartheta_1(uj, q_2) = je^{-j\frac{u^2 i}{\pi}}\vartheta_1(u, q_2)$$

nebst den entsprechenden Gleichungen für die coordinirten Functionen[1]):

$$\vartheta_2(ui, q_1) = e^{\frac{u^2}{\pi}}\vartheta\,(u, q_1), \quad \vartheta_2(uj, q_2) = e^{\frac{\pi i}{12}}e^{-j\frac{u^2 i}{\pi}}\vartheta_3(u, q_2)$$

$$\vartheta_3(ui, q_1) = e^{\frac{u^2}{\pi}}\vartheta_3(u, q_1), \quad \vartheta_3(uj, q_2) = e^{\frac{\pi i}{12}}e^{-j\frac{u^2 i}{\pi}}\vartheta\,(u, q_2)$$

$$\vartheta\,(ui, q_1) = e^{\frac{u^2}{\pi}}\vartheta_2(u, q_1), \quad \vartheta\,(uj, q_2) = e^{-\frac{\pi i}{6}}e^{-j\frac{u^2 i}{\pi}}\vartheta_2(u, q_2),$$

welche für $u = 0$ die Verhältnisse ergeben

$$\vartheta(q_1) : \vartheta_2(q_1) : \vartheta_3(q_1) = 1 : 1 : 2^{\frac{1}{4}}.$$

$$\vartheta(q_2) : \vartheta_2(q_2) : \vartheta_3(q_2) = e^{-\frac{\pi i}{12}} : e^{\frac{\pi i}{12}} : 1.$$

---

1) Die Formeln für $q = q_2$ gehören zum Fall 1, b) der Abh. I, S. 408, wo k gerade, l, k' und l' ungerade sind. Dann wird allgemein (S. 400) für

$$p = k\pi + lhi, \quad p' = k'\pi + l'hi, \quad kl' - lk' = 1,$$

$$pu' = \pi u, \quad q' = e^{\frac{p'}{p}\pi i}, \quad \omega = e^{\frac{\pi i}{4}}:$$

$$e^{\frac{lu^2 i}{p}}\vartheta_1(uq) = \omega^{-(kl+l-3)}\left(\frac{k}{l}\right)\sqrt{\frac{\pi}{p}}\,\vartheta_1(u'q')$$

$$e^{\frac{lu^2 i}{p}}\vartheta_2(uq) = \omega^{ll'-kl+l-1}\left(\frac{k}{l}\right)\sqrt{\frac{\pi}{p}}\,\vartheta_3(u'q')$$

$$e^{\frac{lu^2 i}{p}}\vartheta_3(uq) = \omega^{ll'+l-1}\left(\frac{k}{l}\right)\sqrt{\frac{\pi}{p}}\,\vartheta(u'q')$$

$$e^{\frac{lu^2 i}{p}}\vartheta(u\,q) = \omega^{l-1}\left(\frac{k}{l}\right)\sqrt{\frac{\pi}{p}}\,\vartheta_2(u'q').$$

Es sei noch bemerkt, dass für $k = 0$, $k' = -1$, $l = l' = 1$ *hier* $q' = e^{-\frac{\pi^2}{h}+\pi i}$ wird, so dass für $hi = j\pi$ ohne Weiteres $q = q' = q_2$ folgt.

Damit erhält man

$$g_1 = -\frac{1}{\pi} \text{ für } q = q_1 \quad \text{und} \quad g_1 = -\frac{2}{\pi\sqrt{3}} \text{ für } q = q_2 .$$

29.

Es kann von Interesse sein, die für die Fälle 1) und 2) abgeleiteten Formeln zu combiniren. Man erhält sogleich

$$\vartheta_1(uji, q_1) = ie^{\frac{j^2u^2}{\pi}}\vartheta_1(uj, q_1)$$

neben

$$\vartheta_1(uji, q_2) = je^{\frac{ju^2i}{\pi}}\vartheta_1(ui, q_2),$$

während allgemeiner für $q = e^{-h}$, $q' = e^{-\frac{\pi^2}{h}}$

$$\vartheta_1(uji, q) = i\sqrt{\frac{\pi}{h}}\,e^{\frac{j^2u^2}{h}}\vartheta_1(\tfrac{uj\pi}{h}, q').$$

In der That gehen für

1) $h = \pi$, $q_1 = q_1' = e^{-\pi}$, 2) $h = -j\pi i$, $q_2 = e^{j\pi i}$, $q_2' = e^{j^2\pi i}$

die speciellen Fälle wieder hervor, wenn man die Gleichung

$$\vartheta_1(u, q_2') = e^{(j^2-j)\frac{\pi i}{4}}\vartheta_1(u, q_2) = e^{-\frac{\pi i}{4}}\vartheta_1(u, q_2),$$

sowie den Umstand beachtet, dass da der reelle Theil von h positiv ist, auch $\sqrt{\frac{\pi}{hi}}$, $\sqrt{\frac{\pi}{h}}$ und $\sqrt{\frac{\pi i}{h}}$ gleichzeitig positive reelle Theile haben.

Benutzt man nun die Gleichung

$$\mu n - \nu m = i^\lambda r_\mu \quad \text{resp.} \quad = j^\lambda r_\mu$$

oder

$$\frac{\mu n\pi}{m} - \nu\pi = \frac{r_\mu \pi}{m} i^\lambda \quad \text{resp.} \quad = \frac{r_\mu\pi}{m} j^\lambda$$

und setzt $u = \frac{r_\mu \pi}{m}$, so wird

$$\sigma(\tfrac{\mu n\pi}{m} - \nu\pi, q_1) = \sigma(\tfrac{r_\mu\pi}{m} i^\lambda, q_1) = i^\lambda\sigma(\tfrac{r_\mu\pi}{m}, q_1).$$

Da ferner μ und r_μ das nämliche Theilsystem durchlaufen, so ergibt sich

$$\dot{\prod_\mu}\sigma(\tfrac{\mu n\pi}{m} - \nu\pi, q_1) = (\tfrac{n}{m})\dot{\prod_\mu}\sigma(\tfrac{\mu\pi}{m}, q_1)$$

für biquadratische, sowie ganz analog

$$\prod_{\mu}^{*} \sigma\left(\frac{\mu n \pi}{m} - \nu\pi, q_2\right) = \left(\frac{n}{m}\right) \prod_{\mu}^{*} \sigma\left(\frac{\mu\pi}{m}, q_2\right)$$

für bicubische Zahlen.

Sei jetzt wie früher $\nu = \alpha + \beta i$ resp. $= \alpha + \beta j$ mit der Norm $\gamma = \nu\nu'$, so wird entsprechend dem Art. 17

$$\vartheta_1(u - \nu\pi, q_1) = (-1)^{\alpha+\beta} e^{\beta^2\pi + 2\beta u i} \vartheta_1(u, q_1)$$

$$\vartheta_1(u - \nu\pi, q_2) = (-1)^{\alpha+\beta} e^{-\beta^2 j\pi i + 2\beta u i} \vartheta_1(u, q_2)$$

und auf die Function σ übertragen:

$$\sigma(u - \nu\pi, q_1) = (-1)^{\alpha\beta+\gamma} e^{\gamma\frac{\pi}{2} - \nu' u} \sigma(u, q_1)$$

$$\sigma(u - \nu\pi, q_2) = (-1)^{\gamma} e^{\gamma\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}}\nu' u} \sigma(u, q_2).$$

Damit gehen die Ausdrücke hervor:

$$\left(\frac{n}{m}\right) \prod_{\mu}^{*} \sigma\left(\frac{\mu\pi}{m}, q_1\right) = e^{\overset{*}{S}(\alpha\beta+\gamma)\pi i + \frac{\pi}{2}\overset{*}{S}\gamma - \frac{n\pi}{m}\overset{*}{S}\mu\nu'} \prod_{\mu}^{*} \sigma\left(\frac{\mu n \pi}{m}, q_1\right)$$

$$\left(\frac{n}{m}\right) \prod_{\mu}^{*} \sigma\left(\frac{\mu\pi}{m}, q_2\right) = e^{\overset{*}{S}\gamma\pi i + \frac{\pi}{\sqrt{3}}\overset{*}{S}\gamma - \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{n\pi}{m}\overset{*}{S}\mu\nu'} \prod_{\mu}^{*} \sigma\left(\frac{\mu n \pi}{m}, q_2\right),$$

von denen man leicht zur Function ϑ_1 zurückkehren kann. Man erhält alsdann die Gleichungen

$$\left(\frac{n}{m}\right)_4 = (-1)^{\overset{*}{S}(\alpha\beta+\gamma)} P_\mu \prod_{\mu}^{*} \frac{\vartheta_1\left(\frac{\mu n \pi}{m}, q_1\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\mu\pi}{m}, q_1\right)}$$

$$P_\mu = e^{\frac{\pi}{2}\left(\overset{*}{S}\gamma + \frac{n^2-1}{m^2}\overset{*}{S}\mu^2\right) - \frac{n\pi}{m}\overset{*}{S}\mu\nu'},$$

$$\left(\frac{n}{m}\right)_6 = (-1)^{\overset{*}{S}\gamma} P_\mu \prod_{\mu}^{*} \frac{\vartheta_1\left(\frac{\mu n \pi}{m}, q_2\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\mu\pi}{m}, q_2\right)}$$

$$P_\mu = e^{\frac{\pi}{\sqrt{3}}\left(\overset{*}{S}\gamma + \frac{n^2-1}{m^2}\overset{*}{S}\mu^2 - \frac{2n}{m}\overset{*}{S}\mu\nu'\right)}.$$

Excurs II.

30.

Zur Ableitung des Zusammenhanges der Functionen $\vartheta_1(u\ q_1)$ und $\vartheta_1(u\ q_2)$ mit den elliptischen Integralen und den zugehörigen

Invarianten dienen nach den Vorschriften meiner Abhandlung in den *Mathem. Annalen* Bd. 34, S. 502 f. die nachstehenden Formeln. Wir schreiben

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{\vartheta_3^4 \cos^2\varphi + \vartheta^4 \sin^2\varphi}} = \frac{1}{\vartheta_3^2}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi\varkappa)}$$

und führen als doppeltperiodische Function mit den Perioden π und hi ein:

$$\eta_1 u = \left(\frac{d}{du}\right)^2 \lg \vartheta_1 u = \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} - \frac{\vartheta_3^4}{\operatorname{tg}^2\varphi},$$

für welche (vergl. l. c. S. 501 und *Leipziger Berichte* 1890, S. 130)

$$\eta_1' u = \vartheta_1'^2 \frac{\vartheta_1(2u)}{\vartheta_1^4 u} = \sum_{pp'} \frac{2}{(u+\omega_1)^3},$$

wenn $\omega_1 = p\pi + p'hi$ geschrieben wird, und p und p' alle Zahlen zwischen $\pm\infty$ durchlaufen. Hierdurch wird

$$u = \int_{-\infty}^{\eta} \frac{d\eta}{H},$$

wo

$$H^2 = 4\left(\frac{\vartheta''}{\vartheta} - \eta\right)\left(\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} - \eta\right)\left(\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} - \eta\right)$$

$$= 4\left(\frac{1}{3}\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} - \eta\right)^3 - g_2\left(\frac{1}{3}\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} - \eta\right) - g_3,$$

mit den Invarianten

$$g_2 = \frac{4}{3}(\vartheta_3^8 - \vartheta^4\vartheta_2^4), \quad g_3 = \frac{4}{27}(\vartheta^4 - \vartheta_2^4)(2\vartheta_3^8 + \vartheta^4\vartheta_2^4)$$

$$g_2^3 - 27g_3^2 = 16\vartheta_1'^8 = 16\vartheta^8\vartheta_2^8\vartheta_3^8.$$

Setzt man nun

$$\lambda = \frac{1}{3}\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} - \eta, \quad \text{wodurch } 4\lambda^3 = g_2\lambda + g_3,$$

so werden die drei reellen Wurzeln der cubischen Resolvente für $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$

$$\lambda_1 = \frac{1}{3}\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} - \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} = \frac{1}{3}(\vartheta^4 + \vartheta_3^4)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{3}\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} - \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} = \frac{1}{3}(\vartheta_2^4 - \vartheta^4)$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{3}\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} - \frac{\vartheta''}{\vartheta} = -\frac{1}{3}(\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4),$$

weil nicht allein $\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} = \frac{\vartheta''}{\vartheta} + \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} + \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}$, sondern auch

$$\frac{\vartheta''}{\vartheta} - \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} = \vartheta_2^4, \quad \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} - \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} = \vartheta^4, \quad \frac{\vartheta''}{\vartheta} - \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} = \vartheta_3^4.$$

Weiter erhält man

$$u = \int_\lambda^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{4\lambda^3 - g_2\lambda - g_3}} \quad \text{und für} \quad u = \frac{\pi}{2}, \quad \eta = \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}, \quad \lambda = \lambda_1$$

$$\frac{\pi}{2} = \int_{-\infty}^{\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}} \frac{d\eta}{H} = \int_{\lambda_1}^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{4\lambda^3 - g_2\lambda - g_3}}.$$

Lässt man hier g_3 verschwinden, so folgt nicht bloss $\lambda_2 = 0$ oder $\vartheta = \vartheta_2$, und weiter

$$\vartheta_3^4 = 2\vartheta^4, \quad \varkappa^2 = \varkappa'^2 = \tfrac{1}{2}, \quad q = q' = q_1,$$

sondern auch

$$g_2 = \vartheta_3^8, \quad \lambda_1 = \vartheta^4 = \frac{(\Gamma\frac{1}{4})^4}{(2\pi)^2}, \quad \lambda_3 = -\vartheta^4,$$

nebst

$$\frac{1}{3}\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} = \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} = \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} + \vartheta^4 = \frac{\vartheta''}{\vartheta} - \vartheta^4 = \frac{1}{\lg q_1} = -\frac{1}{\pi}$$

$$\frac{\vartheta''}{\vartheta} = \frac{(\Gamma\frac{1}{4})^4}{(2\pi)^3} - \frac{1}{\pi}, \quad \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} = -\frac{(\Gamma\frac{1}{4})^4}{(2\pi)^3} - \frac{1}{\pi}, \quad \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} = -\frac{1}{\pi}.$$

Mithin hat man jetzt

$$u = \int_\lambda^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{4\lambda^3 - g_2\lambda}}, \quad \text{und für} \quad \lambda = \frac{\vartheta^4}{r^2} \quad u = \frac{1}{\vartheta^2}\int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - r^4}},$$

$$\frac{\pi}{2} = \int_{\vartheta^4}^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{4\lambda^2 - \vartheta_3^8 \cdot \lambda}} = \frac{1}{\vartheta^2}\int_0^1 \frac{dr}{\sqrt{1 - r^4}} = \tfrac{1}{2}\lg\frac{1}{q_1}$$

oder

$$\frac{\pi}{2}\vartheta_3^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi, \sqrt{\frac{1}{2}})} = K = \sqrt{2}\int_0^1 \frac{dr}{\sqrt{1 - r^4}}$$

$$= \frac{\Gamma\frac{5}{4}}{\Gamma\frac{3}{4}}\sqrt{2\pi} = \frac{(\Gamma\frac{1}{4})^2}{4\sqrt{\pi}},$$

also gleich dem Quadranten der Lemniskate, deren Halbaxe gleich $\sqrt{2}$ ist.

31.

Die Schleifencurve, deren Polargleichung

$$r^n = a^n \cos nw \quad (\text{oder } a^n \sin nw)$$

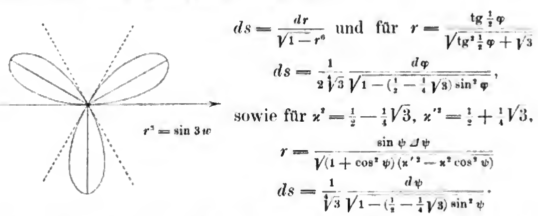
ist, ergibt für das Bogenelement den Werth

$$ds = \frac{dr}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^{2n}}},$$

also für $a = 1$, $n = 2$ oder die Lemniskate:

$$ds = \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}}, \quad \text{und wenn} \quad r = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}}, \quad ds = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}},$$

während für $a = 1$, $n = 3$ das Bogenelement der Tripelschleife oder Trifoliate $r^3 = \sin 3w$ erhalten wird:



$$ds = \frac{dr}{\sqrt{1-r^6}} \quad \text{und für} \quad r = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\varphi + \sqrt{3}}}$$

$$ds = \frac{1}{2\sqrt[4]{3}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sqrt{3})\sin^2\varphi}},$$

sowie für $\varkappa^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{3}$, $\varkappa'^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{3}$,

$$r = \frac{\sin\psi\,\Delta\psi}{\sqrt{(1+\cos^2\psi)(\varkappa'^2 - \varkappa^2\cos^2\psi)}}$$

$$ds = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\frac{d\psi}{\sqrt{1-(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sqrt{3})\sin^2\psi}}.$$

Die complexe Theilung des Sextanten der Trifoliate in $n = \mathfrak{p} + \mathfrak{q}j$ gleiche Theile entspricht der Gauss-Abel'schen Theilung des Quadranten der Lemniskate in $n = \mathfrak{p} + \mathfrak{q}i$ Theile.

Auch der Fall der vierblätterigen Schleifencurve

$$r^4 = \sin 4w, \quad ds = \frac{dr}{\sqrt{1-r^8}}$$

lässt sich auf die Form elliptischer Integrale mittelst imaginärer Substitutionen zurückführen.[1]) Wir schreiben hierzu

$$\omega = e^{\frac{\pi i}{4}}, \quad \sin\varphi = \frac{(1+\omega)r}{1+r^2\omega}, \quad \operatorname{tg}\varphi' = \frac{(1+\omega)r}{1-r^2\omega}$$

und erhalten

$$\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi\,\varkappa)} = (1+\omega)\frac{1-r^2\omega}{\sqrt{1-r^8}}dr, \quad \frac{d\varphi'}{\Delta(\varphi'\varkappa')} = (1+\omega)\frac{1+r^2\omega}{\sqrt{1-r^8}}dr,$$

mithin

$$ds = \frac{dr}{\sqrt{1-r^8}} = \frac{1}{2(1+\omega)}\left\{\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi\varkappa)} + \frac{d\varphi'}{\Delta(\varphi'\varkappa')}\right\}.$$

Hier ist

$$\varkappa = \sqrt{2} - 1, \quad \varkappa'^2 = 2\varkappa,$$

während die zugehörigen Werthe von $\mathfrak{h}$ und q durch

$$\mathfrak{h} = i\sqrt{2}, \quad \mathfrak{h}^2 + 2 = 0, \quad \sigma = 0, \quad \tau = 2$$

$$q = e^{-\pi\sqrt{2}} \quad q' = e^{-\frac{\pi}{\sqrt{2}}}$$

gegeben sind.

---

1) Vergl. Legendre, *Traité des fonctions elliptiques*, P. I, p. 255, No. VII.

Uebrigens hängen die Variabeln r und s dergestalt von einander ab, dass beide gleichzeitig in $r\omega$ und $s\omega$ übergehen. Es möge bei dieser Gelegenheit noch der Arbeiten von Jacobi (*Berliner Monatsberichte* vom 16. Mai 1839) und Eisenstein (*Crelle's Journal* Bd. 39, S. 381) über die Theorie der *achten* Potenzreste gedacht werden.

32.

Wenden wir uns zu dem Falle $q_2 = ie^{-\pi\sqrt{\frac{3}{4}}}$, so haben wir zunächst, um mit reellen Werthen zu rechnen, nach Vorschrift des Art. 14 a. a. O. $q_2 = iq^{\frac{1}{2}}$ zu setzen und erhalten

$$\frac{\vartheta_1(\frac{1}{2}u,\ q_2)}{\vartheta_2(\frac{1}{2}u,\ q_2)} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi.$$

Für

$$\eta_4 u = \left(\frac{d}{du}\right)^2 \lg\vartheta_1(\tfrac{1}{2}u,\ q_2) = \tfrac{1}{4}\left\{\frac{\vartheta''}{\vartheta} + \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} - \frac{\vartheta_3^4}{\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\varphi}\right\}$$

ergibt sich wiederum

$$u = \int_{-\infty}^{\eta_4}\frac{d\eta}{H} \quad \text{nebst} \quad \pi = \int_{-\infty}^{\varepsilon}\frac{d\eta}{H},$$

wo jetzt

$$\varepsilon = \frac{1}{4}\frac{\vartheta_2''(q_2)}{\vartheta_2(q_2)} = \tfrac{1}{4}\left(\frac{\vartheta''}{\vartheta} + \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\right) = \tfrac{1}{4}\left(\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} - \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}\right),$$

während

$$\begin{aligned} H^2 &= (\varepsilon - \eta)\left\{\left(\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} - 2\eta\right)^2 + \vartheta^4\vartheta_2^4\right\} \\ &= 4(\varepsilon_0 - \eta)^3 - g_2(\varepsilon_0 - \eta) - g_3, \end{aligned}$$

wenn

$$\varepsilon_0 = \tfrac{1}{3}\left(\varepsilon + \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}\right) = \frac{1}{12}\frac{\vartheta_1'''(q_2)}{\vartheta_1'(q_2)}$$

und die Invarianten

$$g_2 = \tfrac{1}{12}(\vartheta_3^8 - 16\vartheta^4\vartheta_2^4), \quad g_3 = \tfrac{1}{216}(\vartheta^4 - \vartheta_2^4)(\vartheta_3^8 + 32\vartheta^4\vartheta_2^4)$$

gesetzt werden. Da die Discriminante

$$g_2^3 - 27g_3^2 = (\tfrac{1}{2}\vartheta_1'q_2)^8 = -\tfrac{1}{16}\vartheta^4\vartheta_2^4\vartheta_3^{16} < 0$$

ist, so hat die cubische Resolvente $4\lambda^3 = g_2\lambda + g_3$ nur *eine* reelle Wurzel

$$\lambda_0 = \varepsilon_0 - \varepsilon = \tfrac{1}{6}(\vartheta^4 - \vartheta_2^4)$$

und man erhält für $\lambda = \varepsilon_0 - \eta$:

$$u = \int_{\lambda}^{\infty}\frac{d\lambda}{\sqrt{4\lambda^3 - g_2\lambda - g_3}}, \quad \text{nebst} \quad \pi = \int_{-\infty}^{\varepsilon}\frac{d\eta}{H} = \int_{\lambda_0}^{\infty}\frac{d\lambda}{\sqrt{4\lambda^3 - g_2\lambda - g_3}}.$$

Lässt man nun g_2 verschwinden, so folgt

$$\vartheta_3^2 = 2\vartheta\vartheta_2 \quad \text{oder} \quad \varkappa\varkappa' = \tfrac{1}{4} \quad \text{nebst} \quad g_3 = \tfrac{1}{12}\lambda_0\vartheta_3^8,$$

also

$$u = \int_{-\infty}^{\eta} = \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda}{\sqrt{4\lambda^3 - \frac{1}{12}\lambda_0\vartheta_3^8}}, \quad \pi = \int_{-\infty}^{\varepsilon} = \int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{d\lambda}{\sqrt{4\lambda^3 - \frac{1}{12}\lambda_0\vartheta_3^8}},$$

sowie

$$2\varepsilon_0 = \frac{1}{6}\frac{\vartheta_1'''(q_2)}{\vartheta_1'(q_2)} = \frac{1}{3}\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} + \lambda_0 = \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} - \lambda_0 = -\frac{1}{\pi\sqrt{3}},$$

und ferner

$$\frac{1}{3}\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} = -\frac{(\Gamma\frac{1}{3})^6}{16\pi^4\sqrt[3]{4}} - \frac{1}{\pi\sqrt{3}}, \quad \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} = \frac{(\Gamma\frac{1}{3})^6}{16\pi^4\sqrt[3]{4}} - \frac{1}{\pi\sqrt{3}}$$

$$\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} = -\frac{\varkappa^2(\Gamma\frac{1}{3})^6}{4\pi^4\sqrt[3]{4}} - \frac{1}{\pi\sqrt{3}}, \quad \frac{\vartheta''}{\vartheta} = -\frac{\varkappa'^2(\Gamma\frac{1}{3})^6}{4\pi^4\sqrt[3]{4}} - \frac{1}{\pi\sqrt{3}}.$$

Wir unterscheiden jetzt die beiden Fälle

$$\vartheta > \vartheta_2, \quad \lambda_0 > 0 \quad \text{und} \quad \vartheta < \vartheta_2, \quad \lambda_0 < 0.$$

Im ersten Falle ergibt sich

$$\varkappa^2 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\sqrt{3}, \quad \varkappa'^2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\sqrt{3} \quad \text{oder}$$

$$\varkappa = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{8}} = \sin\frac{\pi}{12}, \quad \varkappa' = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{8}} = \cos\frac{\pi}{12}$$

$$\lambda_0 = \frac{1}{4\sqrt{3}}\vartheta_3^4(q), \quad g_3 = \frac{1}{48\sqrt{3}}\vartheta_3^{12} = 4\lambda_0^3 \quad \text{und}$$

$$u = \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda}{\sqrt{4(\lambda^3 - \lambda_0^3)}}, \quad \pi = \int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{d\lambda}{\sqrt{4(\lambda^3 - \lambda_0^3)}} = \frac{1}{2\sqrt{\lambda_0}}\int_1^{\infty} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^3 - 1}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\lambda_0}}\int_0^1 \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(1-\lambda^3)}} = \frac{1}{6\sqrt{\lambda_0}}\frac{\Gamma\frac{1}{6}\,\Gamma\frac{1}{2}}{\Gamma\frac{2}{3}}.$$

Setzt man endlich $\lambda = \frac{\lambda_0}{r^2}$, so wird

$$u = \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}}\int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-r^6}}, \quad \text{nebst}$$

$$\frac{\pi}{2}\vartheta_3^2(q) = \sqrt[4]{3}\int_0^1 \frac{dr}{\sqrt{1-r^6}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\varDelta(\varphi\varkappa)} = K = (\Gamma\tfrac{1}{3})^3\,\frac{\sqrt[4]{3}}{4\pi\sqrt[3]{2}}.$$

Für $\vartheta < \vartheta_2$ sind die Werthe von $\varkappa$ und $\varkappa'$, also auch von q und $q' = e^{\frac{\pi^2}{\lg q}}$[1]) zu vertauschen, während λ_0 das Vorzeichen umkehrt, so dass

$$\lambda_0 = -\lambda_0' = -\frac{1}{4\sqrt{3}}\vartheta_3^4(q'), \quad g_3 = -\frac{1}{48\sqrt{3}}\vartheta_3^{12}(q') = -4\lambda_0'^3$$

geschrieben werden kann. Dann folgt

$$u = \int_\lambda^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{4(\lambda^3 + \lambda_0'^3)}}$$

$$\pi = \int_{-\lambda_0'}^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(4\lambda^3 + \lambda_0'^3)}} = \frac{1}{2\sqrt{\lambda_0'}}\int_{-1}^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^3+1}} = \frac{1}{2\sqrt{\lambda_0'}}\left\{\int_0^1 \frac{d\lambda}{\sqrt{1-\lambda^3}} + \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{1+\lambda^3}}\right\}$$

$$= \frac{1}{6\sqrt{\lambda_0'}}\left\{\int_0^1 x^{\frac{1}{3}-1}(1-x)^{\frac{1}{2}-1}dx + \int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{3}-1}}{(1+x)^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}}dx\right\}$$

$$= \frac{1}{6\sqrt{\lambda_0'}}\left\{\frac{\Gamma\frac{1}{3}\,\Gamma\frac{1}{2}}{\Gamma\frac{5}{6}} + \frac{\Gamma\frac{1}{3}\,\Gamma\frac{1}{6}}{\Gamma\frac{1}{2}}\right\}.$$

Damit ergibt sich

$$\sqrt{\frac{\lambda_0'}{\lambda_0}} = \frac{\vartheta_3^2(q')}{\vartheta_3^2(q)} = \frac{K'}{K} = \frac{\Gamma\frac{1}{3}\,\Gamma\frac{2}{3}}{\Gamma\frac{1}{6}\,\Gamma\frac{5}{6}} + \frac{\Gamma\frac{1}{3}\,\Gamma\frac{2}{3}}{\Gamma\frac{1}{2}\,\Gamma\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sin\frac{1}{3}\pi}\{\sin\tfrac{1}{6}\pi + \sin\tfrac{1}{2}\pi\} = \sqrt{3},$$

folglich

$$q = e^{-\pi\sqrt{3}}, \quad q_2 = ie^{-\pi\sqrt{\frac{3}{4}}}, \text{ während } q' = e^{-\frac{\pi}{\sqrt{3}}}, \quad q_2' = \frac{1}{i}e^{-\pi\sqrt{\frac{3}{4}}}.^{2)}$$

Bei der vorstehenden Ableitung ist nur auf die Werthe von q zwischen $-\infty$ und $\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}$, resp. $-\infty$ und ε Rücksicht genommen

1) Wie schon in der Anmerkung zu S. 711 hervorgehoben, darf die obige Bezeichnung von q' nicht mit der früher gebrauchten bei der linearen Transformation verwechselt werden.

2) Die mit Hülfe der Γfunctionen gefundenen Ausdrücke kann man umgekehrt zur Berechnung der Werthe von $\Gamma\frac{1}{4}$ und $\Gamma\frac{1}{3}$ mittelst der rasch convergirenden Thetareihen anwenden. Denn wenn

$$q = e^{-\pi}, \quad \text{so ist} \quad \Gamma\tfrac{1}{4} = \sqrt{2}\,\pi^{3/4}\cdot\vartheta_3(0, q),$$

und wenn

$$q = e^{-\pi\sqrt{3}}, \quad \text{so ist} \quad (\Gamma\tfrac{1}{3})^3 = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{3}}2\pi^2\,\vartheta_3^2(0, q).$$

Diese Werthe hat bereits Herr Bigler abgeleitet: Crelle's Journal Bd. 102, S. 251/4.

worden. Will man stattdessen die Werthe zwischen $\frac{\vartheta''}{\vartheta}$ und ∞ resp. zwischen ε und ∞ umfassen, so hat man auszugehen von den Formeln

$$u = \int_0^{\varphi'} \frac{d\varphi}{\sqrt{\vartheta_3^4 \cos^2\varphi + \vartheta_2^4 \sin^2\varphi}} = \frac{1}{\vartheta_3^2} \int_0^{\varphi'} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi, \varkappa')}$$

$$\bar{\eta}_1 u = \eta_1(ui) = \frac{\vartheta''}{\vartheta} + \frac{\vartheta_3^4}{\operatorname{tg}^2\varphi'}, \quad \operatorname{tg}\varphi' = \frac{\vartheta_3}{\vartheta_2} \frac{\vartheta_1(ui)}{i\vartheta(ui)}$$

resp.

$$\bar{\eta}_4 u = \tfrac{1}{4}\left\{\frac{\vartheta''}{\vartheta} + \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} + \frac{\vartheta_3^4}{\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\varphi'}\right\}, \ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi' = \frac{\vartheta_1(\frac{1}{2}ui,\ q_2)}{i\vartheta_2(\frac{1}{2}ui,\ q_2)}.$$

Betreffs der Werthe von η zwischen $\frac{\vartheta''}{\vartheta}$ und $\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}$, sowie von $\bar{\eta}$ zwischen $\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}$ und $\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}$ vergl. a. a. O. Art. 8 und 9.

33.

Die oben gefundenen Ausdrücke

$$u = \frac{1}{\vartheta^2} \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}}, \quad u = \frac{\pi}{2} \ \text{für} \ r = 1,$$

und

$$u = \frac{2\sqrt[4]{3}}{\vartheta_3^2} \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-r^6}}, \quad u = \pi \ \text{für} \ r = 1,$$

vermöge deren sich für $r = si$ resp. $= sj$ u in ui resp. in uj verwandelt, zeigen, dass wenn man umgekehrt $r = f(u, q)$ als Function von u und q betrachtet, diese Function die Gleichungen $f(ui) = ifu$ resp. $f(uj) = jfu$ erfüllt. Man erhält damit wie früher

$$i^\lambda = \frac{f(ui^\lambda)}{fu}, \quad j^\lambda = \frac{f(uj^\lambda)}{fu}$$

und für

$$i^\lambda \frac{r_\mu \pi}{m} = \frac{\mu n \pi}{m} - \nu\pi, \quad u = \frac{\mu\pi}{m}$$

$$i^{\overset{*}{S}\lambda} = i^\varrho = \left(\frac{n}{m}\right)_4 = \prod_\mu^* \frac{f\left(\frac{\mu n \pi}{m} - \nu\pi,\ q_1\right)}{f\left(\frac{\mu\pi}{m},\ q_1\right)}$$

und

$$j^{\overset{*}{S}\lambda} = j^\varrho = \left(\frac{n}{m}\right)_6 = \prod_\mu^* \frac{f\left(\frac{\mu n \pi}{m} - \nu\pi,\ q_2\right)}{f\left(\frac{\mu\pi}{m},\ q_2\right)},$$

wenn μ mit r_μ ein Theilsystem modulo m durchläuft.

Es ist auch nicht schwer, nach dem Vorhergehenden die Function fu in den beiden in Rede stehenden Fällen zu bestimmen. Für den biquadratischen Modul

$$\varkappa^2 = \tfrac{1}{2}, \quad q = e^{-\pi}, \quad u = \frac{1}{\vartheta_3^2}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi\varkappa)} = \frac{1}{\vartheta^2}\int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}}$$

wird

$$r = \sqrt{\varkappa\varkappa'}\,\frac{\sin\varphi}{\Delta(\varphi\varkappa)} = \frac{\vartheta_1 u}{\vartheta_3 u}.$$

Dagegen erhält man für den bicubischen Modul

$$\varkappa^2 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\sqrt{3}, \; q = e^{-\pi\sqrt{3}}, \; u = \frac{1}{\vartheta_3^2}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi\varkappa)} = \frac{2\sqrt[4]{3}}{\vartheta_3^2}\int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-r^6}}$$

$$r = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\varphi + \sqrt{3}}}, \quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{\vartheta_1(\frac{1}{2}u, q_2)}{\vartheta_2(\frac{1}{2}u, q_2)} = \frac{\vartheta_1(\frac{1}{2}u)\vartheta_3(\frac{1}{2}u)}{\vartheta(\frac{1}{2}u)\vartheta_2(\frac{1}{2}u)},$$

also für

$$\tfrac{1}{2}u = v = \frac{1}{\vartheta_3^2}\int_0^\psi \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi\varkappa)} = \frac{\sqrt[4]{3}}{\vartheta_3^2}\int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-r^6}}.$$

$$r = \frac{\operatorname{tg}\psi\Delta(\psi\varkappa)}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\psi\Delta^2(\psi\varkappa) + \sqrt{3}}}, \quad \operatorname{tg}\psi\Delta(\psi\varkappa) = \frac{\vartheta_1 v\,\vartheta_3 v}{\vartheta v\,\vartheta_2 v},$$

wozu man Bd. 34 der *Mathem. Annalen* S. 516 und Bd. XII der Abhandlungen der mathem.-phys. Classe der *Leipziger Gesellschaft* S. 92 vergleichen kann.

Wir dürfen jetzt schliessen, dass

$$rj = \frac{\vartheta_1(vj, q_2)}{\sqrt{\vartheta_1^2(vj, q_2) + \sqrt{3}\,\vartheta_2^2(vj, q_2)}}$$

sein muss. Substituirt man hier die Werthe

$$\vartheta_1(vj, q_2) = je^{-j\frac{v^2 i}{\pi}}\vartheta_1(v, q_2) \text{ und } \vartheta_2(vj, q_2) = e^{-\frac{\pi i}{4}}je^{-j\frac{v^2 i}{\pi}}\vartheta_3(v, q_2),$$

so ergibt sich

$$\frac{j\vartheta_1(v, q_2)}{\sqrt{\vartheta_1^2(v, q_2) + \sqrt{3}\,\vartheta_2^2(v, q_2)}} = \frac{\vartheta_1(v, q_2)}{\sqrt{\vartheta_1^2(v, q_2) - i\sqrt{3}\,\vartheta_3^2(v, q_2)}},$$

mithin bei Weglassung der Argumente v und q_2:

$$\vartheta_1^2 + \sqrt{3}\,\vartheta_2^2 = (-\tfrac{1}{2} + \tfrac{i}{2}\sqrt{3})(\vartheta_1^2 - i\sqrt{3}\,\vartheta_3^2)$$

oder

$$j\vartheta_1^2 + i\vartheta_2^2 + \tfrac{1}{j}\vartheta_3^2 = j\vartheta_2^2 + i\vartheta_1^2 + \tfrac{1}{j}\vartheta^2 = 0$$

$$-j\vartheta_3^2 + i\vartheta^2 + \tfrac{1}{j}\vartheta_1^2 = -j\vartheta^2 + i\vartheta_3^2 + \tfrac{1}{j}\vartheta_2^2 = 0.$$

Für $r = fu$ aber erhalten wir

$$fu = \frac{\vartheta_1}{\sqrt{\vartheta_2^2 + \sqrt{3}\,\vartheta_3^2}} = \frac{\vartheta_1}{j\sqrt{\vartheta_2^2 - i\sqrt{3}\,\vartheta_3^2}} = \frac{\vartheta_1}{\sqrt{j}\sqrt{\vartheta_2^2 - i\,\vartheta_3^2}}.$$

Diese Relationen gelten für *beliebige* Werthe des Arguments u, wenn $q = q_3$ ist, während für $u = 0$ $\vartheta : \vartheta_2 : \vartheta_3 = 1 : e^{\frac{\pi i}{6}} : e^{\frac{\pi i}{12}}$. Die Einführung der Werthe für $\vartheta_1(u - \nu\pi)$ resp. $\vartheta_2(u - \nu\pi)$ und $\vartheta_3(u - \nu\pi)$ ergibt sowohl für $\nu = \alpha + \beta i$, wie für $\nu = \alpha + \beta j$,

$$f(u - \nu\pi) = (-1)^{\alpha+\beta} fu,$$

folglich

$$\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\dot{S}(\alpha+\beta)} \dot{\prod_\mu} \frac{f\left(\frac{\mu n\pi}{m}\right)}{f\left(\frac{\mu\pi}{m}\right)} = \dot{\prod_\mu} \frac{f\left(\frac{2\mu n\pi}{m}\right)}{f\left(\frac{2\mu\pi}{m}\right)}$$

für ein beliebiges Theilsystem $\dot{\mu}$ im biquadratischen wie im bicubischen Falle.

34.

Indem wir nach vorstehendem Excurs wieder anknüpfen an die Resultate des Art. 29, wollen wir jetzt die biquadratischen und die bicubischen Zahlen getrennt betrachten.

Für den ersteren Fall hat man bekanntlich

$$\vartheta_3(ui, q_1) = e^{\frac{u^2}{\pi}} \vartheta_3(u, q_1),$$

während in

$$\vartheta_3(u, q_1) = \vartheta_3(q_1) e^{\frac{1}{2} g_3 u^2} \zeta_3(u, q_1)^{1)}$$

$\zeta_3 u$ nur Glieder von der Form $a_k u^{4k}$ enthält, weil die ungeraden Potenzen von u^2 wegen des Factors ϑ_3 oder $\vartheta_2^4 - \vartheta^4$ wegfallen (vergl. in *Crelle's Journal* Bd. 54, S. 95 die Jacobi'sche Gleichung

$$r_{2i+3} = 8\varkappa^2\varkappa'^2(\varkappa'^2 - \varkappa^2)\varphi_i,$$

sowie *Mathemat. Annalen* Bd. 34, S. 507/8). Damit folgt

$$\zeta_3(ui, q_1) = \zeta_3(u, q_1) \text{ und } g_3 = \frac{\vartheta_3''(q_1)}{\vartheta_3(q_1)} = -\frac{1}{\pi},$$

ferner

$$\zeta_3\left(\frac{\mu n\pi}{m} - \nu\pi, q_1\right) = \zeta_3\left(\frac{r_\mu \pi}{m}, q_1\right)$$

$$\dot{\prod_\mu} \zeta_3\left(\frac{\mu n\pi}{m} - \nu\pi, q_1\right) = \dot{\prod_\mu} \zeta_3\left(\frac{\mu\pi}{m}, q_1\right).$$

1) Natürlich ist hier g_3 nicht mit der Invariante g_3 zu verwechseln.

Da nun

$$\vartheta_3(u - \nu\pi,\ q_1) = e^{\beta^2\pi + 2\beta u i}\,\vartheta_3(u,\ q_1),$$

so ergibt eine analoge Rechnung wie bei ϑ_1:

$$1 = (-1)^{\mathrm{S}\alpha\beta} P_\mu \prod_\mu^{*} \frac{\vartheta_3\left(\frac{\mu n \pi}{m}, q_1\right)}{\vartheta_3\left(\frac{\mu\pi}{m}, q_1\right)},$$

folglich auch

$$\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\mathrm{S}\gamma} \prod_\mu^{*} \left\{ \frac{\vartheta_1\left(\frac{\mu n\pi}{m}, q_1\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\mu\pi}{m}, q_1\right)} : \frac{\vartheta_3\left(\frac{\mu n\pi}{m}, q_1\right)}{\vartheta_3\left(\frac{\mu\pi}{m}, q_1\right)} \right\}.$$

Multiplicirt man endlich μ, also auch ν, mit $r = 2$, so wird

$$\left(\frac{n}{m}\right) = \prod_\mu^{*} \left\{ \frac{\vartheta_1\left(\frac{2\mu n\pi}{m}, q_1\right)}{\vartheta_1\left(\frac{2\mu\pi}{m}, q_1\right)} : \frac{\vartheta_3\left(\frac{2\mu n\pi}{m}, q_1\right)}{\vartheta_3\left(\frac{2\mu\pi}{m}, q_1\right)} \right\}.$$

Nun hatten wir allgemein für eine normale complexe Zahl n als Multiplicator und ein beliebiges Restensystem ϖ die Formeln

$$\frac{\vartheta_1(nu)}{\vartheta_1 u} \prod_\varpi \vartheta_1\left(\frac{\varpi\pi}{n}\right) = e^{gui - \frac{n}{\pi} qu^2 i}\, n \prod_\varpi \vartheta_1\left(u + \frac{\varpi\pi}{n}\right)$$

$$\frac{\vartheta_3(nu)}{\vartheta_3 u} \prod_\varpi \vartheta_1\left(\frac{\varpi\pi}{n}\right) = Ce^{gui - \frac{n}{\pi} qu^2 i}\, n \prod_\varpi \vartheta_3\left(u + \frac{\varpi\pi}{n}\right)$$

$$C = (-1)^{\frac{1}{2}(p - 1 + g + qr + q\sigma r)}\, i^{\frac{1}{2}pq(r-1)}\, e^{-\frac{1}{2}gh - \frac{\pi i}{n}\mathrm{S}\varpi},$$

mithin durch Division, neben $\frac{\vartheta_1(ui)}{\vartheta_3(ui)} = i\frac{\vartheta_1 u}{\vartheta_3 u}$,

$$\frac{\vartheta_1(nu)}{\vartheta_1 u} : \frac{\vartheta_3(nu)}{\vartheta_3 u} = \frac{1}{C} \prod_\varpi \frac{\vartheta_1}{\vartheta_3}\left(u + \frac{\varpi\pi}{n}\right),$$

wo die Bezeichnung des Arguments $u + \frac{\varpi\pi}{n}$ leicht verständlich sein wird. Setzt man das Restensystem ϖ aus den Viertelsystemen 2ϖ, $2\varpi i$, -2ϖ und $-2\varpi i$ von je $\frac{N-1}{4}$ nicht associirten Resten zusammen, so dass $\mathrm{S}\varpi = \mathrm{S}\varpi^2 = 0$, und substituirt $u = \frac{2\mu\pi}{m}$, so ergibt sich

$$\frac{\vartheta_1\left(\frac{2\mu n\pi}{m}, q_1\right)}{\vartheta_1\left(\frac{2\mu\pi}{m}, q_1\right)} : \frac{\vartheta_3\left(\frac{2\mu n\pi}{m}, q_1\right)}{\vartheta_3\left(\frac{2\mu\pi}{m}, q_1\right)} = \frac{1}{C} \prod_\varpi^{*} \frac{\vartheta_1}{\vartheta_3}\left(\frac{2\mu\pi}{m} \pm \frac{2\varpi\pi}{n}\right) \frac{\vartheta_1}{\vartheta_3}\left(\frac{2\mu\pi}{m} \pm \frac{2\varpi\pi i}{n}\right),$$

wenn die $\pm$ Zeichen der Kürze halber für *zwei* entsprechende Factoren des Zählers und Nenners geschrieben sind.

Bildet man hier das Product über ein Theilsystem μ mod m und berücksichtigt, dass wegen $\mathfrak{g} = 0$, $\sigma = 0$, $\tau = 1$, $S\varpi = 0$, $h = \pi$

$$C = (-1)^{\frac{1}{2}(\mathfrak{p}+\mathfrak{q}-1)}$$

wird, also für ein *primäres* $n \equiv 1 \bmod 2(1+i)$ $C = 1$, so erhält man für den Werth des biquadratischen Symbols:

$$\left(\frac{n}{m}\right)_4 = \prod_{\mu\varpi}^{*} \frac{\vartheta_1}{\vartheta_3}\left(\frac{2\mu\pi}{m} \pm \frac{2\varpi\pi}{n}\right) \frac{\vartheta_1}{\vartheta_3}\left(\frac{2\mu\pi}{m} \pm \frac{2\varpi\pi i}{n}\right).$$

Durch Vertauschung der primären Zahlen n und $m = \mathfrak{p}' + \mathfrak{q}' i$ folgt

$$\left(\frac{m}{n}\right)_4 = \prod_{\mu\varpi}^{*} \frac{\vartheta_1}{\vartheta_3}\left(\frac{2\varpi\pi}{n} \pm \frac{2\mu\pi}{m}\right) \frac{\vartheta_1}{\vartheta_3}\left(\frac{2\varpi\pi}{n} \pm \frac{2\mu\pi i}{m}\right),$$

und durch eine leichte Ueberlegung geht hieraus das *biquadratische Reciprocitätsgesetz* in der seit Gauss bekannten Form[1])

$$\left(\frac{n}{m}\right)_4 = (-1)^{\frac{M-1}{4}\cdot\frac{N-1}{4}} \left(\frac{m}{n}\right)_4 = (-1)^{\frac{1}{4}\mathfrak{q}\mathfrak{q}'} \left(\frac{m}{n}\right)_4$$

hervor.

Am Schlusse des Art. 13 ergab sich, dass wenn vermöge des Reciprocitätssatzes

$$\left(\frac{n}{m}\right) = i^{\lambda}\left(\frac{m}{n}\right), \quad \left(\frac{n'}{m}\right) = i^{\lambda'}\left(\frac{m}{n'}\right), \quad \left(\frac{nn'}{m}\right) = i^{\lambda''}\left(\frac{m}{nn'}\right),$$

das Stattfinden der Gleichung

$$\left(\frac{m}{nn'}\right) = \left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{m}{n'}\right) \text{ an die Congruenz } \lambda + \lambda' \equiv \lambda'' \bmod 4$$

geknüpft ist. Wenn aber für $l = \frac{M-1}{4}$

$$\lambda = 2l\frac{N-1}{4}, \quad \lambda' = 2l\frac{N'-1}{4}, \quad \lambda'' = 2l\frac{NN'-1}{4},$$

so ist $\lambda'' - \lambda - \lambda' = 8l\frac{N-1}{4}\frac{N'-1}{4}$ offenbar durch 8 theilbar.

35.

Da wir $\left(\frac{i}{m}\right) = i^{\frac{M-1}{4}}$ gefunden haben, so bleibt nur noch der sogenannte Ergänzungssatz für $\left(\frac{1+i}{m}\right)$ zu entwickeln. Wir schlagen

1) *Theoria resid. biquadrat.* Art. 67.

dazu einen von Eisenstein[1]) angedeuteten Weg ein, indem wir von den beiden Identitäten ausgehen

$$1)\quad m + i = \pm(1+i)m_1$$

oder

$$2)\quad mi + 1 = \pm(1+i)m_1,$$

wo die Vorzeichen so zu bestimmen sind, dass m und m_1 gleichzeitig primär werden. Hierzu setzen wir

$$m = \mathfrak{p} + \mathfrak{q}i = 1 + 2(1+i)(\alpha+\beta i) = 2\alpha - 2\beta + 1 + 2(\alpha+\beta)i\,,$$

wo

$$\alpha = \frac{\mathfrak{p}+\mathfrak{q}-1}{4}\,,\quad \beta = \frac{-\mathfrak{p}+\mathfrak{q}+1}{4}$$

zwei *beliebige* ganze Zahlen bedeuten. Dadurch erhält man

$$1)\quad \pm m_1 = 2\alpha + 1 + 2\beta i$$

$$2)\quad \pm m_1 = 1 - 2\beta + 2\alpha i$$

neben

$$M = 4l + 1,\quad l = 2(\alpha^2+\beta^2) + \alpha - \beta$$

$$M_1 = 4l_1 + 1 \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} 1)\ l_1 = 2l + \mathfrak{q} + 1 = \alpha^2 + \beta^2 + \alpha \\ 2)\ l_1 = 2l - \mathfrak{q} + 1 = \alpha^2 + \beta^2 - \beta\,. \end{array}$$

Damit $\frac{m_1-1}{2}$ durch $1+i$ theilbar, also m_1 primär sei, muss das positive Vorzeichen für $\alpha \equiv \beta$, das negative für $\alpha \equiv \beta + 1 \bmod 2$ genommen, also $\pm 1 = (-1)^l$ gesetzt werden.

Die beiden Identitäten liefern nun

$$m \equiv -i \quad \text{resp.} \quad m \equiv i \bmod m_1,$$

also

$$1)\ \left(\frac{m}{m_1}\right) = (-i)^{l_1} = i^{-l_1}\,, \qquad 2)\ \left(\frac{m}{m_1}\right) = i^{l_1}$$

und weiter

$$\pm i \equiv (1+i)m_1 \quad \text{resp.} \quad \pm 1 \equiv (1+i)m_1 \bmod m,$$

folglich

$$1)\ \left(\frac{1+i}{m}\right)\left(\frac{m_1}{m}\right) = \left(\frac{\pm i}{m}\right) = i^{-l}\,,$$

$$2)\ \left(\frac{1+i}{m}\right)\left(\frac{m_1}{m}\right) = \left(\frac{\pm 1}{m}\right) = (-1)^l.$$

1) Crelle's Journal Bd. 35, S. 256.

Da nun vermöge des Reciprocitätssatzes die Werthe

$$1)\ \left(\frac{m_1}{m}\right) = (-1)^{l l_1} i^{-l_1}\,, \qquad 2)\ \left(\frac{m_1}{m}\right) = (-1)^{l l_1} i^{l_1}$$

hervorgehen, so folgen für $\left(\frac{1+i}{m}\right)$ die beiden Ausdrücke

$$\left(\frac{1+i}{m}\right) = (-1)^{l l_1} i^{l_1 - l} \text{ und } \left(\frac{1+i}{m}\right) = (-1)^{l l_1 + l} i^{-l_1}.$$

Beide Resultate können einander nicht widersprechen, sondern müssen auf einander zurückführbar sein, wenn man die Werthe von l und l_1 einführt. In der That erhält man in beiden Fällen nach leichter Reduction

$$\left(\frac{1+i}{m}\right) = i^{-(\alpha+\beta)^2-\beta} = (-1)^{\alpha\beta + \frac{1}{2}\beta(\beta+1)} i^{-\alpha^2}$$

$$= i^{\frac{1}{4}(\mathfrak{p}\mathfrak{q} - \mathfrak{q}^2 - 2l)} = i^{\frac{1}{8}(-\mathfrak{p}^2 + 2\mathfrak{p}\mathfrak{q} - 3\mathfrak{q}^2 + 1)}.\text{[1]}$$

Damit ergeben sich weiter ohne Schwierigkeit die Werthe

$$\left(\frac{1-i}{m}\right) = i^{(\alpha+\beta)^2-\alpha} = (-1)^{\alpha\beta + \frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)} i^{\beta^2}$$

$$= i^{\frac{1}{4}(\mathfrak{p}\mathfrak{q} + \mathfrak{q}^2 + 2l)} = i^{\frac{1}{8}(\mathfrak{p}^2 + 2\mathfrak{p}\mathfrak{q} + 3\mathfrak{q}^2 - 1)}$$

$$\left(\frac{2}{m}\right) = i^{-\alpha-\beta} = i^{\frac{1}{2}\mathfrak{p}\mathfrak{q}}.$$

Durch Quadrirung der gefundenen Ausdrücke erhält man sogleich für unsere complexen Zahlen die Ergänzungssätze des *quadratischen* Reciprocitätsgesetzes $\left(\frac{n}{m}\right)_2 = \left(\frac{m}{n}\right)_2$ in der Form

$$\left(\frac{i}{m}\right)_2 = (-1)^{\frac{M-1}{4}}, \quad \left(\frac{1+i}{m}\right)_2 = (-1)^{\alpha} = (-1)^{\frac{1}{4}(\mathfrak{p}+\mathfrak{q}-1)},\text{[2]}$$

also auch

$$\left(\frac{1-i}{m}\right)_2 = (-1)^{\beta} = (-1)^{\frac{1}{4}(\mathfrak{p}-\mathfrak{q}-1)},$$

$$\left(\frac{2}{m}\right)_2 = (-1)^{\frac{1}{2}(\mathfrak{p}-1)} = (-1)^{\frac{1}{2}\mathfrak{q}} = (-1)^{\frac{M-1}{4}}.$$

---

1) GAUSS, *Theoria resid. biquadrat.* Art. 63 (1831).

2) DIRICHLET (Crelle Bd. 24, S. 312) schreibt $\left(\frac{1+i}{m}\right)_2 = (-1)^{\frac{1}{8}((\mathfrak{p}+\mathfrak{q})^2-1)}$, wie sich ergibt, weil $\frac{1}{2}(\mathfrak{p}+\mathfrak{q}+1)$ ungerade ist.

Excurs III.

36.

Eisenstein's Ausdrücke für das biquadratische und das bicubische Reciprocitätsgesetz.

Eisenstein findet die Reciprocitätssätze für biquadratische und bicubische Zahlen (S. 253 seiner mehr citirten Abhandlung) in der gemeinsamen Form

$$\varrho'^{p'}\left(\frac{k}{l}\right) = (-1)^{p'q'}\varrho^{q'}\left(\frac{l}{k}\right).$$

Hier ist

$$N(k) = 4p' + 1, \quad N(l) = 4q' + 1$$

$$\varrho = i^{b^2+a+b+1} \text{ und analog } \varrho' = i^{b'^2+a'+b'+1}$$

geschrieben, während die *biquadratischen* Zahlen

$$k = a + bi, \quad l = a' + b'i$$

nicht durch $1 + i$ theilbar sein sollen. Für *bicubische* Zahlen dagegen

$$k = a + br, \quad l = a' + b'r, \quad r = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{i}{2}\sqrt{3} = j^2$$

wird

$$k \equiv l \equiv 1 \mod 2(1-r) \quad \text{oder} \quad \mod 2(1+j)$$

vorausgesetzt, nebst

$$N(k) = 6p' + 1, \quad N(l) = 6q' + 1, \quad \varrho = (-1)^{\frac{1}{2}(a+b-1)}r^{-b} \quad \text{u. s. w.}$$

Um diess für

$$n = \mathfrak{p} + \mathfrak{q}i \text{ resp. } \mathfrak{q}j, \quad m = \mathfrak{p}' + \mathfrak{q}'i \text{ resp. } \mathfrak{q}'j$$

in unsere Bezeichnung zu übertragen, hat man $k\,l\,p'q'$ durch $n\,m\,l\,l'$ zu ersetzen und für *biquadratische* Zahlen $a\,b\,a'b'$ mit $\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{p}'\mathfrak{q}'$ zu vertauschen, während im *bicubischen* Falle, wegen $r = j - 1$

$$a = \mathfrak{p} + \mathfrak{q}, \quad b = \mathfrak{q}, \quad \varrho = (-1)^{\frac{\mathfrak{p}-1}{2}+\mathfrak{q}}j^{-2\mathfrak{q}}$$

zu schreiben ist. Da vermöge der postulirten Congruenz m und n primär in dem früher adoptirten Sinne werden, also $\mathfrak{q}$ gerade und $\mathfrak{p} - 1 \equiv \mathfrak{q} \mod 6$, so erhält man wegen $l = \frac{1}{2}\mathfrak{q} \mod 2$:

$$j^{\mathfrak{q}} = j^{\mathfrak{p}-1}, \quad \varrho = j^{-\frac{\mathfrak{p}-1}{2}}, \quad \varrho' = j^{-\frac{\mathfrak{p}'-1}{2}},$$

$$j^{l'\frac{\mathfrak{p}-1}{2}}\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{ll'}j^{l\frac{\mathfrak{p}'-1}{2}}\left(\frac{m}{n}\right) = (-1)^{\frac{\mathfrak{q}\mathfrak{q}'}{4}}j^{l\frac{\mathfrak{p}'-1}{2}}\left(\frac{m}{n}\right).$$

Für *biquadratische* Zahlen ist $\varrho = i^{\mathfrak{q}^2 + \mathfrak{p} + \mathfrak{q} - 1}$, und wenn auch hier $m \equiv n \equiv 1 \mod 2(1+i)$, also m und n primär genommen werden, wegen

$$\mathfrak{p} - 1 \equiv \mathfrak{q} \equiv 2l \mod 4, \quad \varrho = \varrho' = 1:$$

$$\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{ll'}\left(\frac{m}{n}\right) = (-1)^{\frac{\mathfrak{q}\mathfrak{q}'}{4}}\left(\frac{m}{n}\right).$$

Eisenstein weist dann noch nach, dass man die Definition der *primären bicubischen* Zahlen dergestalt abändern könne, dass auch für sie die nämliche einfache Form des Reciprocitätssatzes Geltung behalte. Zu diesem Behufe sei der Definition primärer Zahlen die Congruenz

$$n = \mathfrak{p} + \mathfrak{q}j \equiv \pm 1 \mod 3$$

zu Grunde zu legen und hier das Vorzeichen so zu bestimmen, dass

1) für $n \equiv \pm 1 \mod 6$, $\quad \mathfrak{p} \equiv 1 \mod 4$

2) für $n \equiv \pm(2 - 3j) \mod 6$, $\quad \mathfrak{p} + \mathfrak{q} \equiv -1 \mod 4$

3) für $n \equiv \pm(1 - 3j) \mod 6$, $\quad \mathfrak{q} \equiv 1 \mod 4$

werden. Dann bringt das Product zweier primärer Zahlen wiederum eine primäre Zahl hervor, wie die Untersuchung der sechs möglichen Fälle lehrt.

37.

Es ist mir nicht gelungen, die Eisenstein'schen Resultate vollständig zu reproduciren, vielmehr scheint schon seine für bicubische Zahlen $\equiv 1 \mod 2(1+j)$ gegebene Reciprocitätsformel auf Widersprüche zu führen. Um diess an einem Beispiel zu erläutern, will ich analog wie bei den biquadratischen Zahlen setzen:

$$n = \mathfrak{p} + \mathfrak{q}j = 1 + 2(1+j)(\alpha + \beta j) = 2\alpha - 2\beta + 1 + 2(\alpha + 2\beta)j,$$

mich aber der Kürze halber auf den Fall $n \equiv 1 \mod 6$ oder

$$\alpha \equiv \beta \mod 3, \quad \alpha - \beta = 3\gamma$$

beschränken. Daneben bemerke man die Relationen

$$\alpha = \frac{2\mathfrak{p} + \mathfrak{q} - 2}{6}, \quad \beta = \frac{-\mathfrak{p} + \mathfrak{q} + 1}{6}$$

$$\alpha - \beta = \frac{\mathfrak{p} - 1}{2} \equiv \tfrac{1}{2}\mathfrak{q} \mod 3 \quad \text{und} \quad \alpha + 2\beta = \tfrac{1}{2}\mathfrak{q} \equiv l \mod 2.$$

Jetzt gelten die Identitäten

$$1)\quad n + j = (1+j)n_1, \quad n_1 = 2\alpha + 1 + 2\beta j$$

$$2)\quad nj + 1 = (1+j)n_1, \quad n_1 = 1 - 2\beta + 2(\alpha+\beta)j$$

für primäre Zahlen n und n_1, während zugleich

$$N = 6l + 1, \qquad l = 2(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) + \alpha = 18\gamma^2 + 6\alpha\beta + \alpha \equiv \alpha$$

$$N_1 = 6l_1 + 1, \quad \begin{array}{l} 1)\ l_1 = 6\gamma^2 - 6\alpha\gamma + 2\alpha^2 + \alpha - \gamma \equiv 2\alpha^2 + \alpha - \gamma \\ 2)\ l_1 = 6\gamma^2 - 6\alpha\gamma + 2\alpha^2 + \gamma \equiv 2\alpha^2 + \gamma \mod 6. \end{array}$$

Man erhält ferner ebenso wie früher die Congruenzen

$$n \equiv -j \quad \text{resp.} \quad n \equiv j^2 = j - 1 \mod n_1$$

$$(1+j)n_1 \equiv j \quad \text{resp.} \quad (1+j)n_1 \equiv 1 \mod n.$$

Daraus folgt

$$\left(\frac{n}{n_1}\right) = \left(\frac{-j}{n_1}\right) = j^{-2l_1} \quad \text{resp.} \quad \left(\frac{n}{n_1}\right) = j^{2l_1},$$

sowie

$$\left(\frac{1+j}{n}\right)\left(\frac{n_1}{n}\right) = j^l \quad \text{resp.} \quad \left(\frac{1+j}{n}\right)\left(\frac{n_1}{n}\right) = 1.$$

Wir wollen jetzt das vorläufig noch unbekannte bicubische Reciprocitätsgesetz in der Form schreiben

$$\left(\frac{n}{n_1}\right) = j^{\lambda}\left(\frac{n_1}{n}\right),$$

wo der Exponent λ in den beiden zur Erörterung stehenden Fällen die Werthe λ_1 und λ_2 erhalten mag. Dann wird

$$1)\ \left(\frac{1+j}{n}\right) = j^{\lambda_1 + l + 2l_1}, \qquad 2)\ \left(\frac{1+j}{n}\right) = j^{\lambda_2 - 2l_1}$$

und nach Substitution der Werthe von l und l_1, wegen $l \equiv \alpha \mod 6$:

$$\left(\frac{1+j}{n}\right) = j^{\lambda_1 + \alpha^2 - 2\gamma} = j^{\lambda_2 + 2\alpha^2 - 2\gamma}.$$

Diese Gleichheit ist nur möglich, wenn vermöge des Reciprocitätssatzes $j^{\lambda_1 - \lambda_2} = j^{\alpha^2}$ wird, und es fragt sich, ob die Eisenstein'sche Formel die dazu nöthige Bedingung

$$\lambda_1 - \lambda_2 \equiv \alpha^2 \mod 6$$

erfüllt. Aus der Formel des Art. 36 folgt

$$\lambda = 3ll_1 + l\,\frac{\mathfrak{p}_1 - 1}{2} - l_1\,\frac{\mathfrak{p} - 1}{2},$$

also wegen

$$\frac{\mathfrak{p}-1}{2} = \alpha - \beta = 3\gamma\,, \quad \frac{\mathfrak{p}_1 - 1}{2} = \alpha \quad \text{resp.} \quad \frac{\mathfrak{p}_1 - 1}{2} = -\beta = 3\gamma - \alpha$$

$$\lambda_1 \equiv 3\alpha(\alpha-\gamma) + \alpha^2 - 3\gamma(\alpha-\gamma) \equiv 4\alpha^2 + 3\gamma^2 \mod 6$$

$$\lambda_2 \equiv 3\alpha\gamma + \alpha(3\gamma-\alpha) - 3\gamma^2 \equiv -\alpha^2 - 3\gamma^2 \mod 6$$

$$\lambda_1 - \lambda_2 \equiv -\alpha^2 \mod 6\,,$$

d. h. die beiden Identitäten, von denen wir ausgegangen sind, führen unter Voraussetzung der EISENSTEIN'schen Reciprocitätsformel zu *verschiedenen* Resultaten, falls α nicht durch 3 theilbar ist.

c) Der Reciprocitätssatz für bicubische Zahlen.

38.

Die im biquadratischen Falle zur Ableitung des Reciprocitätsgesetzes angewandte Methode scheint für die bicubischen Zahlen nicht auszureichen, da die Function $r = fu$, oder deren Multiplicationstheorem, hier eine complicirtere Gestalt annimmt. Vielleicht gelingt es, wie EISENSTEIN versucht hat, den Stier bei den Hörnern zu fassen, resp. direct aus den beiden Fundamentalgleichungen

$$\left(\frac{n}{m}\right)_6 = (-1)^{\mathfrak{s}\gamma} P_\mu \prod_\mu^{*} \frac{\vartheta_1\left(\frac{\mu n \pi}{m}, q_2\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\mu\pi}{m}, q_2\right)}$$

und

$$\frac{\vartheta_1(nu)}{\vartheta_1 u} = e^{\mathfrak{g}ui - \frac{n}{\pi}\mathfrak{q}u^2 i}\, n \prod_\varpi \frac{\vartheta_1\left(u + \frac{\varpi\pi}{n}, q_2\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\varpi\pi}{n}, q_2\right)}$$

das Reciprocitätsgesetz nebst den Ergänzungssätzen für $\left(\frac{1+j}{n}\right)$ und $\left(\frac{2}{n}\right)$ herzuleiten. Erst dann wird sich entscheiden lassen, für welche Definition der *primären* bicubischen Zahlen die Resultate sich am einfachsten gestalten. Nach den umfangreichen Entwickelungen von EISENSTEIN in den Artt. 6 und 7, S. 230—57 seiner Abhandlung wird man allerdings kaum erwarten dürfen, dass die folgende Ableitung ohne weitläufige Rechnung zum Ziele führt.

Wie bereits erwähnt, verschwindet $\mathfrak{g}$, sobald $\prod_\varpi \vartheta\left(u + \frac{\varpi\pi}{n}\right)$ eine gerade Function von u wird. Diess ist z. B. der Fall, wenn

n eine Normalzahl bedeutet, also $N-1=6l$ ist und ϖ aus sechs associirten Theilsystemen besteht. Dann hat man

$$\frac{\vartheta_1(nu)}{\vartheta_1 u}\prod_{\varpi}^{*}\vartheta_1\left(\pm\frac{\varpi\pi}{n}\right)\vartheta_1\left(\mp\frac{\varpi\pi}{n}j\right)\vartheta_1\left(\pm\frac{\varpi\pi}{n}j^2\right)=$$

$$=e^{-\frac{n}{\pi}\mathfrak{q}u^2 i}\,n\prod_{\varpi}^{*}\vartheta_1\left(u\pm\frac{\varpi\pi}{n}\right)\vartheta_1\left(u\mp\frac{\varpi\pi j}{n}\right)\vartheta_1\left(u\pm\frac{\varpi\pi j^2}{n}\right),$$

wo die doppelten Vorzeichen je *zwei* Factoren des Products $\prod^{*}$ angehören sollen. Da aber

$$\vartheta_1(\pm uj)=\pm je^{-j\frac{u^2 i}{\pi}}\vartheta_1 u \quad \text{und} \quad \vartheta_1(\pm uj^2)=\pm j^2 e^{-j^2\frac{u^2 i}{\pi}}\vartheta_1 u,$$

also auch

$$\vartheta_1 u\,\vartheta_1(-uj)\,\vartheta_1(uj^2)=e^{\frac{\sqrt{3}}{\pi}u^2}\vartheta_1^3 u,$$

$$\prod_{\varpi}\vartheta_1(\varpi u)=\prod_{\varpi}^{*}\vartheta_1(\pm\varpi u j^s)_{s=0,1,2}=(-1)^l e^{\frac{2\sqrt{3}}{\pi}u^2\overset{*}{S}\varpi^2}\prod_{\varpi}^{*}\vartheta_1^6(\varpi u),$$

so folgt wegen

$$n\mathfrak{q}i\sqrt{3}=n^2-N$$

$$\prod_{\varpi}\vartheta_1\left(u+\frac{\varpi\pi}{n}\right)=(-1)^l e^{\frac{2\pi\sqrt{3}}{n^2}\overset{*}{S}\varpi^2-\frac{2l\sqrt{3}}{\pi}u^2}\prod_{\varpi}^{*}\vartheta_1\left(\frac{\varpi\pi}{n}\pm uj^s\right):$$

$$\frac{\vartheta_1(nu)}{\vartheta_1 u}\prod_{\varpi}^{*}\vartheta_1^6\left(\frac{\varpi\pi}{n},\ q_2\right)=e^{-\frac{n^2-1}{\pi\sqrt{3}}u^2}n\prod_{\varpi}^{*}\vartheta_1\left(\frac{\varpi\pi}{n}\pm uj^s\right).$$

39.

Betrachtet man die beiden Ergänzungsfälle

$$n=1+j,\quad N=3,\quad \varpi=\pm 1,\quad \mathfrak{q}=1,\quad S\varpi=0,$$

und

$$n=2,\quad N=4,\quad \varpi=1,\ -j,\ j^2,\quad \mathfrak{q}=0,\quad S\varpi=S\varpi^2=0,$$

so verschwindet gleichfalls $\mathfrak{g}$, und man erhält

$$\frac{\vartheta_1(\overline{1+j}\cdot u)}{\vartheta_1 u}\vartheta_1^2\left(\frac{\pi}{1+j},\ q_2\right)=e^{-\frac{1+j}{\pi}u^2 i}(1+j)\,\vartheta_1\left(\frac{\pi}{1+j}+u\right)\vartheta_1\left(\frac{\pi}{1+j}-u\right)$$

nebst

$$\frac{\vartheta_1(2u)}{\vartheta_1 u}\vartheta_1\left(\frac{\pi}{2}\right)\vartheta_1\left(-\frac{\pi j}{2}\right)\vartheta_1\left(\frac{\pi j^2}{2}\right)=2\vartheta_1\left(u+\frac{\pi}{2}\right)\vartheta_1\left(u-\frac{\pi j}{2}\right)\vartheta_1\left(u+\frac{\pi j^2}{2}\right)$$

$$=2e^{\frac{1}{4}\pi\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{\pi}u^2}\vartheta_1\left(\frac{\pi}{2}+u\right)\vartheta_1\left(\frac{\pi}{2}-uj\right)\vartheta_1\left(u+uj^2\right)$$

oder

$$\frac{\vartheta_1(2u)}{\vartheta_1 u}\vartheta_2^2(0, q_2) = 2e^{\frac{\pi i}{4}}\vartheta u \vartheta_2 u \vartheta_3 u,$$

wie sich leicht direct verificiren lässt. Auch die Gleichung für $n = 1 + j$ lässt sich vereinfachen, wenn man von den Identitäten Gebrauch macht:

$$\frac{\pi}{1+j} = \frac{h}{\sqrt{3}} = -\frac{j\pi i}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\pi - \frac{\pi i}{2\sqrt{3}}, \quad hj = (1+j)\frac{\pi}{\sqrt{3}},$$

$$1 + j = e^{\frac{\pi i}{6}}\sqrt{3} = \frac{i}{j}\sqrt{3}, \quad j(1+j) = 2j - 1 = i\sqrt{3}.$$

Damit wird

$$\vartheta_1(\overline{1+j}\cdot u) = \vartheta_1\left(\frac{ui\sqrt{3}}{j}\right) = \frac{1}{j}e^{\frac{3\beta u^2 i}{\pi}}\vartheta_1(ui\sqrt{3})$$

$$\vartheta_1\left(\frac{\pi}{1+j}\right) = \vartheta_1\left(\frac{-j\pi i}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{i}e^{\frac{\pi}{2\sqrt{3}}}\vartheta_1\left(\frac{\pi i}{\sqrt{3}}\right) = \vartheta_2\left(\frac{\pi i}{2\sqrt{3}}\right)$$

$$\frac{\vartheta_1(ui\sqrt{3})}{\vartheta_1 u}\vartheta_2^2\left(\frac{\pi i}{2\sqrt{3}}\right) = i\sqrt{3}\,e^{\frac{2\sqrt{3}}{\pi}u^2}\vartheta_2\left(u + \frac{\pi i}{2\sqrt{3}}\right)\vartheta_2\left(u - \frac{\pi i}{2\sqrt{3}}\right).$$

Schreibt man nun

$$(1+j)\mu = m v_1 + j^{\lambda_1} r_\mu, \quad \gamma_1 = v_1 v_1', \quad \left(\frac{1+j}{m}\right) = j^{\overset{*}{S}\lambda_1}$$

$$2\mu = m v_2 + j^{\lambda_2} r_\mu, \quad \gamma_2 = v_2 v_2', \quad \left(\frac{2}{m}\right) = j^{\overset{*}{S}\lambda_2},$$

so erhält man

$$\left(\frac{1+j}{m}\right) = (-1)^{\overset{*}{S}\gamma_1} P_{\mu,1} \prod_\mu^{*} \frac{\vartheta_1\left(\frac{\overline{1+j}\,\mu\pi}{m}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\mu\pi}{m}\right)}$$

$$P_{\mu,1} = e^{\frac{\pi}{\sqrt{3}}\left\{\overset{*}{S}\gamma_1 + \frac{2}{m^2}\overset{*}{S}\mu^2 - \frac{2(1+j)}{m}\overset{*}{S}\mu v_1'\right\}},$$

$$\left(\frac{2}{m}\right) = (-1)^{\overset{*}{S}\gamma_2} P_{\mu,2} \prod_\mu^{*} \frac{\vartheta_1\left(\frac{2\mu\pi}{m}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\mu\pi}{m}\right)} = (-1)^{\overset{*}{S}\gamma_2} P_{\mu,2}\, 2^{l'} \chi_1^{2l'}$$

$$P_{\mu,2} = e^{\frac{\pi}{\sqrt{3}}\left\{\overset{*}{S}\gamma_2 + \frac{3}{m^2}\overset{*}{S}\mu^2 - \frac{4}{m}\overset{*}{S}\mu v_2'\right\}},$$

und durch Substitution der obigen Formeln, für $M = 6l' + 1$:

$$\left(\frac{1+j}{m}\right)\vartheta_2^{2l'}\left(\frac{\pi i}{2\sqrt{3}}, q_2\right) = (-1)^{\overset{*}{S}\gamma_1} P_{\mu,1}\, e^{\frac{\pi\sqrt{3}}{m^2 j}\overset{*}{S}\mu^2}\, 3^{\frac{1}{2}l'}\, e^{\frac{l'\pi i}{6}} \prod_\mu^{*} \vartheta_2\left(\frac{\mu\pi}{m} \pm \frac{\pi i}{2\sqrt{3}}\right)$$

$$\left(\frac{2}{m}\right)\vartheta_2^{3l'}(0, q_2) = (-1)^{\overset{*}{S}\gamma_2} P_{\mu,2}\, 2^{l'} e^{\frac{l'\pi i}{4}} \prod_\mu^{*} \vartheta\left(\frac{\mu\pi}{m}\right)\vartheta_2\left(\frac{\mu\pi}{m}\right)\vartheta_3\left(\frac{\mu\pi}{m}\right).$$

Setzen wir jetzt die beiden bicubischen Zahlen m und n als normal und ohne gemeinschaftlichen Theiler voraus, so ergibt sich für $u = \frac{\mu\pi}{m}$

$$\prod_{\mu}^{*} \frac{\vartheta_1\left(\frac{\mu n \pi}{m}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\mu\pi}{m}\right)} \prod_{\varpi}^{*} \vartheta_1^{M-1}\left(\frac{\varpi\pi}{n}\right) = e^{-\frac{n^2-1}{m^2}\frac{\pi}{\sqrt{3}}\overset{*}{S}\mu^2}\, n^{l'} \prod_{\mu\varpi}^{**} \vartheta_1\left(\frac{\varpi\pi}{n} \pm \frac{\mu\pi}{m} j^{\bullet}\right),$$

und durch Einführung des Ausdruckes für $\left(\frac{n}{m}\right)_6$:

$$\left(\frac{n}{m}\right) \prod_{\varpi}^{*} \vartheta_1^{M-1}\left(\frac{\varpi\pi}{n}\right) = (-1)^{\overset{*}{S}\gamma} P_\mu\, e^{-\frac{n^2-1}{m^2}\frac{\pi}{\sqrt{3}}\overset{*}{S}\mu^2}\, n^{l'} \prod_{\mu\varpi}^{**} \vartheta_1\left(\frac{\varpi\pi}{n} \pm \frac{\mu\pi}{m} j^{\bullet}\right)$$

$$= (-1)^{\overset{*}{S}\gamma} e^{\frac{\pi}{\sqrt{3}}\left\{\overset{*}{S}\gamma - \frac{2n}{m}\overset{*}{S}\mu\nu'\right\}}\, n^{l'} \prod_{\mu\varpi}^{**} \vartheta_1\left(\frac{\varpi\pi}{n} \pm \frac{\mu\pi}{m} j^{\bullet}\right).$$

Will man hier m und n vertauschen und schreibt neben

$$\mu n = \nu m + j^{\lambda} r_\mu, \quad \nu\nu' = \gamma, \quad \left(\frac{n}{m}\right) = j^{\overset{*}{S}\lambda},$$

$$\varpi m = \mu_0 n + j^{\lambda'} r_\varpi, \quad \mu_0 \mu_0' = \gamma', \quad \left(\frac{m}{n}\right) = j^{\overset{*}{S}\lambda'},$$

so wird

$$\left(\frac{m}{n}\right) \prod_{\mu}^{*} \vartheta_1^{N-1}\left(\frac{\mu\pi}{m}\right) = (-1)^{\overset{*}{S}\gamma'} e^{\frac{\pi}{\sqrt{3}}\left\{\overset{*}{S}\gamma' - \frac{2m}{n}\overset{*}{S}\varpi\mu_0'\right\}}\, m^{l} \prod_{\mu\varpi}^{**} \vartheta_1\left(\frac{\mu\pi}{m} \pm \frac{\varpi\pi}{n} j^{\bullet}\right).$$

Da aber

$$\prod_{\varpi}^{*} \vartheta_1\left(u \pm \frac{\varpi\pi}{n} j^{\bullet}\right) = (-1)^{l} e^{\frac{2\pi\sqrt{3}}{n^2}\overset{*}{S}\varpi^2 - \frac{2l\sqrt{3}}{\pi}u^2} \prod_{\varpi}^{*} \vartheta_1\left(\frac{\varpi\pi}{n} \pm u j^{\bullet}\right),$$

so hat man für $u = \frac{\mu\pi}{m}$

$$\prod_{\mu\varpi}^{**} \vartheta_1\left(\frac{\mu\pi}{m} \pm \frac{\varpi\pi}{n} j^{\bullet}\right) = (-1)^{ll'} e^{\frac{2l'\pi\sqrt{3}}{n^2}\overset{*}{S}\varpi^2 - \frac{2l\pi\sqrt{3}}{m^2}\overset{*}{S}\mu^2} \prod_{\mu\varpi}^{**} \vartheta_1\left(\frac{\varpi\pi}{n} \pm \frac{\mu\pi}{m} j^{\bullet}\right).$$

Durch Elimination des Doppelproductes $\prod_{\mu\varpi}^{**} \vartheta_1\left(\frac{\varpi\pi}{n} \pm \frac{\mu\pi}{m} j^{\bullet}\right)$ geht hieraus die Proportion hervor:

$$\left(\frac{n}{m}\right) : \left(\frac{m}{n}\right) = (-1)^{\overset{*}{S}\gamma} e^{\frac{\pi}{\sqrt{3}}\left\{\overset{*}{S}\gamma + \frac{N-1}{m^2}\overset{*}{S}\mu^2 - \frac{2n}{m}\overset{*}{S}\mu\nu'\right\}}\, n^{l'} \prod_{\mu}^{*} \vartheta_1^{N-1}\left(\frac{\mu\pi}{m}\right) :$$

$$: (-1)^{ll' + \overset{*}{S}\gamma'} e^{\frac{\pi}{\sqrt{3}}\left\{\overset{*}{S}\gamma' + \frac{M-1}{n^2}\overset{*}{S}\varpi^2 - \frac{2m}{n}\overset{*}{S}\varpi\mu_0'\right\}}\, m^{l} \prod_{\varpi}^{*} \vartheta_1^{M-1}\left(\frac{\varpi\pi}{n}\right),$$

für welche wir etwas kürzer schreiben wollen:

$$\binom{n}{m}:\binom{m}{n} = (-1)^{\dot{S}\gamma} P'_\mu n^{l'} \prod_\mu^{\bullet} \vartheta_1^{N-1}\left(\frac{\mu\pi}{m}\right) : (-1)^{ll'+\dot{S}\gamma'} P'_\varpi m^l \prod_\varpi^{\bullet} \vartheta_1^{M-1}\left(\frac{\varpi\pi}{n}\right).$$

40.

Um das Verhältniss der restirenden Producte $\prod\limits_\mu^{\bullet}$ und $\prod\limits_\varpi^{\bullet}$ zu bestimmen, wollen wir von der Beschränkung, dass m und n Normalzahlen sein sollen, für einen Augenblick absehen, und μ und ϖ *volle* Restensysteme (nur mit Ausschluss der durch m resp. n theilbaren Zahl) durchlaufen lassen. Dann folgt nicht allein

$$\prod_\mu \frac{\vartheta_1\left(\frac{\mu n\pi}{m}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\mu\pi}{m}\right)} \prod_\varpi \vartheta_1^{M-1}\left(\frac{\varpi\pi}{n}\right) = e^{\mathfrak{g}\frac{\pi i}{m}S\mu - \frac{n}{m^2}\mathfrak{q}\pi i S\mu^2} n^{M-1} \prod_{\mu\varpi} \vartheta_1\left(\frac{\mu\pi}{m} + \frac{\varpi\pi}{n}\right),$$

sondern auch durch Vertauschung von m und n

$$\prod_\varpi \frac{\vartheta_1\left(\frac{\varpi m\pi}{n}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\varpi\pi}{n}\right)} \prod_\mu \vartheta_1^{N-1}\left(\frac{\mu\pi}{m}\right) = e^{\mathfrak{g}'\frac{\pi i}{n}S\varpi - \frac{m}{n^2}\mathfrak{q}'\pi i S\varpi^2} m^{N-1} \prod_{\mu\varpi} \vartheta_1\left(\frac{\mu\pi}{m} + \frac{\varpi\pi}{n}\right),$$

mithin durch Elimination des Doppelproductes:

$$e^{\mathfrak{g}'\frac{\pi i}{n}S\varpi - \frac{m}{n^2}\mathfrak{q}'\pi i S\varpi^2} m^{N-1} \prod_\mu \frac{\vartheta_1\left(\frac{\mu n\pi}{m}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\mu\pi}{m}\right)} \prod_\varpi \vartheta_1^{M-1}\left(\frac{\varpi\pi}{n}\right) =$$

$$= e^{\mathfrak{g}\frac{\pi i}{m}S\mu - \frac{n}{m^2}\mathfrak{q}\pi i S\mu^2} n^{M-1} \prod_\varpi \frac{\vartheta_1\left(\frac{\varpi m\pi}{n}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\varpi\pi}{n}\right)} \prod_\mu \vartheta_1^{N-1}\left(\frac{\mu\pi}{m}\right).$$

Bevor wir weiter gehen, führen wir hier beispielshalber

$$m = 1 + j, \quad \mu = \pm 1, \quad n = 2, \quad \varpi = 1,\ -j,\ j^2$$

ein. Dann verschwinden $S\mu$, $S\varpi$, $S\varpi^2$, so wie $\mathfrak{q}$, und man erhält

$$(1+j)^3 \vartheta_1^2\left(\frac{2\pi}{1+j}\right)\left\{\vartheta_1\left(\frac{\pi}{2}\right)\vartheta_1\left(-j\frac{\pi}{2}\right)\vartheta_1\left(j^2\frac{\pi}{2}\right)\right\}^3 =$$

$$= -2^2 \vartheta_1\left(\overline{1+j}\frac{\pi}{2}\right)\vartheta_1\left(-j\cdot\overline{1+j}\frac{\pi}{2}\right)\vartheta_1\left(j^2\cdot\overline{1+j}\frac{\pi}{2}\right)\vartheta_1^8\left(\frac{\pi}{1+j}\right),$$

oder nach einer leichten Reduction, da nicht allein nach dem Früheren

$$\vartheta_1\left(\frac{\pi}{1+j}\right) = \frac{1}{i} e^{-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}} \vartheta_1\left(\frac{\pi i}{\sqrt{3}}\right) = \vartheta_2\left(\frac{\pi i}{2\sqrt{3}}\right),$$

sondern auch

$$\vartheta_1\left(\frac{2\pi}{1+j}\right) = \vartheta_1\left(\pi - \frac{\pi i}{\sqrt{3}}\right) = \vartheta_1\left(\frac{\pi i}{\sqrt{3}}\right) = i e^{\frac{\pi}{2\sqrt{3}}} \vartheta_2\left(\frac{\pi i}{2\sqrt{3}}\right) = e^{-\frac{4\pi}{\sqrt{3}}} \vartheta_1\left(\frac{2\pi i}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\vartheta_1\left(\overline{1+j}\,\frac{\pi}{2}\right) = \vartheta_2\left(j\frac{\pi}{2}\right) = e^{-\frac{j\pi i}{4}} \vartheta_3(0, q_2) = e^{-\frac{\pi i}{12} - \frac{j\pi i}{4}} \vartheta_2(0, q_2) :$$

$$3i\sqrt{3}\,\vartheta_1^2\left(\frac{\pi i}{\sqrt{3}}\right) e^{\frac{3\pi\sqrt{3}}{4}} \vartheta_2^9(0, q_2) = -4 e^{\frac{3j\pi\sqrt{3}}{4} - \frac{4\pi}{\sqrt{3}}} \vartheta_2^3\left(\frac{j\pi}{2}\right) \vartheta_1^8\left(\frac{\pi i}{\sqrt{3}}\right),$$

d. i.

$$\vartheta_2^6\left(\frac{\pi i}{2\sqrt{3}}\right) = \tfrac{1}{4}\sqrt{27}\, e^{\frac{\pi}{\sqrt{3}}} \vartheta_2^6(0, q_2).$$

Ist aber m normal, $M = 6l' + 1$, so dass μ in sechs associirte Theilsysteme zerfällt, so verschwinden $\mathfrak{g}'$ und die Summen $\mathrm{S}\mu^k$, so oft k nicht durch 6 theilbar ist, und es wird

$$m^{N-1} \prod_\mu \frac{\vartheta_1\left(\frac{\mu n \pi}{m}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\mu\pi}{m}\right)} \prod_\varpi \vartheta_1^{M-1}\left(\frac{\varpi\pi}{n}\right) = e^{\frac{m}{n^2}\mathfrak{g}'\pi i \mathrm{S}\varpi^2}\, n^{M-1} \prod_\varpi \frac{\vartheta_1\left(\frac{m\varpi\pi}{n}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\varpi\pi}{n}\right)} \prod_\mu \vartheta_1^{N-1}\left(\frac{\mu\pi}{m}\right),$$

wo nach dem Früheren

$$\prod_\mu \frac{\vartheta_1\left(\frac{\mu n\pi}{m}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\mu\pi}{m}\right)} = e^{2\pi\sqrt{3}\,\frac{n^2-1}{m^2}\overset{*}{\mathrm{S}}\mu^2} \overset{*}{\prod_\mu} \left[\frac{\vartheta_1\left(\frac{\mu n\pi}{m}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\mu\pi}{m}\right)}\right]^6$$

$$\prod_\mu \vartheta_1^{N-1}\left(\frac{\mu\pi}{m}\right) = (-1)^{l'(N-1)} e^{2\pi\sqrt{3}\,\frac{N-1}{m^2}\overset{*}{\mathrm{S}}\mu^2} \overset{*}{\prod_\mu} \vartheta_1^{6(N-1)}\left(\frac{\mu\pi}{m}\right).$$

Da nun

$$\left(\frac{n}{m}\right)^6 = 1 = P_\mu^6 \overset{*}{\prod_\mu} \left[\frac{\vartheta_1\left(\frac{\mu n\pi}{m}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\mu\pi}{m}\right)}\right]^6$$

$$P_\mu^6 = e^{2\pi\sqrt{3}\left\{\overset{*}{\mathrm{S}}\gamma + \frac{n^2-1}{m^2}\overset{*}{\mathrm{S}}\mu^2 - \frac{2n}{m}\overset{*}{\mathrm{S}}\mu\nu'\right\}},$$

so liefert die Substitution der angegebenen Werthe für beliebige Werthe von n und ϖ die Formel

$$m^{N-1} \prod_\varpi \vartheta_1^{M-1}\left(\frac{\varpi\pi}{n}\right) =$$

$$= (-1)^{l'(N-1)} e^{\frac{m}{n^2}\mathfrak{g}'\pi i \mathrm{S}\varpi^2} E_\mu(n) n^{M-1} \prod_\varpi \frac{\vartheta_1\left(\frac{m\varpi\pi}{n}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\varpi\pi}{n}\right)} \overset{*}{\prod_\mu} \vartheta_1^{6(N-1)}\left(\frac{\mu\pi}{n}\right)$$

$$E_\mu(n) = e^{2\pi\sqrt{3}\left\{\overset{*}{\mathrm{S}}\gamma + \frac{N-1}{m^2}\overset{*}{\mathrm{S}}\mu^2 - \frac{2n}{m}\overset{*}{\mathrm{S}}\mu\nu'\right\}}.$$

41.

Hier sollen die bereits oben ins Auge gefassten Ergänzungswerthe

$$n = 1 + j, \quad \varpi = \pm 1, \quad (1 + j)\mu = m v_1 + j^{\lambda_1} r_\mu, \quad \gamma_1 = v_1 v_1'$$

und

$$n = 2, \quad \varpi = 1, \ -j, \ j^2, \quad 2\mu = m v_2 + j^{\lambda_2} r_\mu, \quad \gamma_2 = v_2 v_2'$$

eingeführt werden. Man findet dann ohne Schwierigkeit

$$E_\mu(1 + j) = e^{2\pi\sqrt{3}\,\left\{\overset{*}{S}\gamma_1 + \frac{2}{m^2}\overset{*}{S}\mu^2 - \frac{2(1+j)}{m}\overset{*}{S}\mu v_1'\right\}}$$

$$E_\mu(2) = e^{2\pi\sqrt{3}\,\left\{\overset{*}{S}\gamma_2 + \frac{3}{m^2}\overset{*}{S}\mu^2 - \frac{4}{m}\overset{*}{S}\mu v_2'\right\}}$$

$$m^2\vartheta_1^{12l'}\left(\frac{\pi}{1+j}\right) = e^{\frac{2m\mathfrak{q}'\pi i}{(1+j)^2}}(1+j)^{6l'} E_\mu(1+j)\left[\frac{\vartheta_1\left(\frac{m\pi}{1+j}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\pi}{1+j}\right)}\right]^2 \overset{*}{\prod_\mu}\vartheta_1^{12}\left(\frac{\mu\pi}{m}\right),$$

$$m^3 e^{(M-1)\frac{\pi\sqrt{3}}{4}}\vartheta_1^{18l'}\left(\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{l'} e^{(m^2-1)\frac{\pi\sqrt{3}}{4}} 2^{6l'} E_\mu(2)\left[\frac{\vartheta_1\left(\frac{m\pi}{2}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\pi}{2}\right)}\right]^3 \overset{*}{\prod_\mu}\vartheta_1^{18}\left(\frac{\mu\pi}{m}\right)$$

oder

$$m^2\vartheta_2^{12l'}\left(\frac{\pi i}{2\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{27}{16}\right)^{l'} e^{\frac{2l'\pi}{\sqrt{3}}} m^2\vartheta_2^{12l'}(0, q_2)$$

$$= e^{\frac{2m\mathfrak{q}'\pi i}{3j}}(1+j)^{6l'} E_\mu(1+j)\left[\frac{\vartheta_1\left(\frac{m\pi}{1+j}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\pi}{1+j}\right)}\right]^2 \overset{*}{\prod_\mu}\vartheta_1^{12}\left(\frac{\mu\pi}{m}\right),$$

$$m^3\vartheta_2^{18l'}(0, q_2) = (-1)^{l'} e^{\frac{3}{4}m\mathfrak{q}'\pi i} 2^{6l'} E_\mu(2)\left[\frac{\vartheta_1\left(\frac{m\pi}{2}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\pi}{2}\right)}\right]^3 \overset{*}{\prod_\mu}\vartheta_1^{18}\left(\frac{\mu\pi}{m}\right).$$

Setzt man jetzt für ein *primäres* $m \equiv 1 \bmod 2(1+j)$

$$\mathfrak{p}' + \mathfrak{q}'j = 2\alpha' - 2\beta' + 1 + 2(\alpha' + 2\beta')j, \quad l' = 2(\alpha'^2 + \alpha'\beta' + \beta'^2) + \alpha',$$

so wird

$$\frac{\vartheta_1\left(\frac{m\pi}{2}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\vartheta_1\left(\mathfrak{p}'\frac{\pi}{2} + \mathfrak{q}'\frac{hi}{2}\right)}{\vartheta_2(0, q_2)} = (-1)^{\frac{1}{2}(\mathfrak{p}'-1)} e^{-\frac{1}{4}\mathfrak{q}'^2 j\pi i}$$

$$\left[\frac{\vartheta_1\left(\frac{m\pi}{2}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\pi}{2}\right)}\right]^3 = e^{-\frac{3}{4}m\mathfrak{q}'\pi i}(-1)^{\alpha' + \alpha'\beta'} j^{\alpha'} = e^{-\frac{3}{4}m\mathfrak{q}'\pi i}\, i^{l'}\, j^{\frac{-\mathfrak{p}'+\mathfrak{q}'+1}{2}}.$$

Ebenso ist

$$\vartheta_1\left(\frac{m\pi}{1+j}\right) = \vartheta_1\left(\frac{\pi}{1+j} + 2\alpha'\pi + 2\beta' h i\right) = e^{-4\gamma'^2 j\pi i - \frac{4\beta'\pi i}{1+j}}\, \vartheta_1\left(\frac{\pi}{1+j}\right)$$

$$\left[\frac{\vartheta_1\left(\frac{m\pi}{1+j}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\pi}{1+j}\right)}\right]^2 = e^{4\beta'^2\pi\sqrt{3} - \frac{4\beta'\pi}{\sqrt{3}}} = e^{\frac{2l'\pi}{\sqrt{3}} - \frac{2m\mathfrak{q}'\pi i}{3j}}\, j^{\mathfrak{q}'}.$$

Damit ergibt sich

$$m^2\, \vartheta_2^{12l'}(0, q_2) = (-1)^{l'}\, 2^{4l'}\, j^{\mathfrak{q}'}\, E_\mu(1+j) \prod_\mu^{*} \vartheta_1^{12}\left(\frac{\mu\pi}{m}\right)$$

$$m^3\, \vartheta_2^{18l'}(0, q_2) = (-1)^{l'}\, i^{l'}\, 2^{6l'}\, j^{\frac{-\mathfrak{p}'+\mathfrak{q}'+1}{2}}\, E_\mu(2) \prod_\mu^{*} \vartheta_1^{18}\left(\frac{\mu\pi}{m}\right)$$

und durch Division

$$m\, \vartheta^{6l'}(0, q_2) = (4i)^{l'}\, j^{-\frac{\mathfrak{p}'+\mathfrak{q}'-1}{2}}\, \frac{E_\mu(2)}{E_\mu(1+j)} \prod_\mu^{*} \vartheta_1^{6}\left(\frac{\mu\pi}{m}\right).$$

Ist auch $n = \mathfrak{p} + \mathfrak{q} j$ eine primäre Normalzahl, und schreibt man analog

$$(1+j)\varpi = \mu_1 n + j^{\lambda_1'} r_\varpi, \quad 2\varpi = \mu_2 n + j^{\lambda_2'} r_\varpi$$

mit den zugehörigen Normen $\gamma_1' = \mu_1\mu_1'$ und $\gamma_2' = \mu_2\mu_2'$,

$$E_\varpi(1+j) = e^{2\pi\sqrt{3}\left\{\overset{*}{S}\gamma_1' + \frac{2}{n^2}\overset{*}{S}\varpi^3 - \frac{2(1+j)}{n}\overset{*}{S}\varpi\mu_1'\right\}}$$

$$E_\varpi(2) = e^{2\pi\sqrt{3}\left\{\overset{*}{S}\gamma_2' + \frac{3}{n^2}\overset{*}{S}\varpi^3 - \frac{1}{n}\overset{*}{S}\varpi\mu_2'\right\}},$$

so folgt durch Buchstabenvertauschung

$$n\, \vartheta_2^{6l}(0, q_2) = (4i)^l\, j^{-\frac{\mathfrak{p}+\mathfrak{q}-1}{2}}\, \frac{E_\varpi(2)}{E_\varpi(1+j)} \prod_\varpi^{*} \vartheta_1^{6}\left(\frac{\varpi\pi}{n}\right)$$

also

$$j^{l\frac{\mathfrak{p}'+\mathfrak{q}'-1}{2}} \left\{\frac{E_\mu(1+j)}{E_\mu(2)}\right\}^l m^l \prod_\varpi \vartheta_1^{N-1}\left(\frac{\varpi\pi}{n}\right) =$$

$$= j^{l'\frac{\mathfrak{p}+\mathfrak{q}-1}{2}} \left\{\frac{E_\varpi(1+j)}{E_\varpi(2)}\right\}^{l'} n^{l'} \prod_\mu \vartheta_1^{N-1}\left(\frac{\mu\pi}{m}\right).$$

Durch die Substitution in die früher abgeleitete Proportion für $\left(\frac{n}{m}\right) : \left(\frac{m}{n}\right)$ nimmt letztere die Gestalt an:

$$\left(\frac{n}{m}\right) : \left(\frac{m}{n}\right) = j^{-\frac{1}{2}l'(\mathfrak{p}+\mathfrak{q}-1)} (-1)^{\overset{*}{S}\gamma} P_\mu' \left\{\frac{E_\varpi(2)}{E_\varpi(1+j)}\right\}^{l'} :$$

$$: (-1)^{ll'} j^{-\frac{1}{2}l(\mathfrak{p}'+\mathfrak{q}'-1)} (-1)^{\overset{*}{S}\gamma'} P_\varpi' \left\{\frac{E_\mu(2)}{E_\mu(1+j)}\right\}^{l}$$

oder der Gleichung

$$\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{ll'} j^{\frac{1}{2} l(\mathfrak{p}'+\mathfrak{q}'-1) - \frac{1}{2} l'(\mathfrak{p}+\mathfrak{q}-1)} Q_{\mu,\varpi} \left(\frac{m}{n}\right),$$

wo

$$Q_{\mu,\varpi} = (-1)^{\overset{*}{8}\gamma - \overset{*}{8}\gamma'} \frac{P'_\mu}{P'_\varpi} \left\{\frac{E_\varpi(2)}{E_\varpi(1+j)}\right\}^{l'} \left\{\frac{E_\mu(1+j)}{E_\mu(2)}\right\}^{l}.$$

42.

Dieser aus lauter Exponentialfactoren zusammengesetzte Coefficient $Q_{\mu,\varpi}$ kann von der absoluten Einheit nicht verschieden sein, weil die Theilsysteme μ und ϖ ganz beliebig gewählt werden dürfen. Man kann nämlich wie früher μ und ϖ mit einem beliebigen Factor r multipliciren, der mit m und n keinen gemeinschaftlichen Theiler hat, also jedenfalls gleich 2 oder 3 sein darf. Dadurch aber geht gleich wie früher P_μ in P_μ^{rr}, $Q_{\mu,\varpi}$ in Q^{rr}, sagen wir in Q^4 und Q^9 über. Die Gleichungen $Q = Q^4 = Q^9$ liefern aber $Q^3 = Q^5 = 1$, also auch $Q^2 = Q = 1$, so dass wir schliesslich zu dem *bicubischen Reciprocitätsgesetze* in der Form

$$\left(\frac{n}{m}\right)_6 = (-1)^{ll'} j^{\frac{1}{2} l(\mathfrak{p}'+\mathfrak{q}'-1) - \frac{1}{2} l'(\mathfrak{p}+\mathfrak{q}-1)} \left(\frac{m}{n}\right)_6$$

gelangen, wo $m \equiv n \equiv 1 \mod 2(1+j)$ sein sollen. Selbstverständlich kann man hier auch $(-1)^{ll'} = (-1)^{\frac{1}{4}\mathfrak{q}\mathfrak{q}'} = (-1)^{\alpha\alpha'}$ schreiben, sowie im Exponenten von j $\frac{1}{2}(\mathfrak{p}'+\mathfrak{q}'-1)$ und $\frac{1}{2}(\mathfrak{p}+\mathfrak{q}-1)$ durch $2\alpha'+\beta'$ resp. $2\alpha+\beta$ ersetzen, so dass auch

$$\begin{aligned}\left(\frac{n}{m}\right) &= (-1)^{\alpha\alpha'} j^{l(2\alpha'+\beta') - l'(2\alpha+\beta)} \left(\frac{m}{n}\right)\\ &= (-1)^{\alpha\alpha'} j^{l'(\alpha-\beta) - l(\alpha'-\beta')} \left(\frac{m}{n}\right)\\ &= (-1)^{\frac{1}{4}\mathfrak{q}\mathfrak{q}'} j^{\frac{1}{2} l(\mathfrak{p}-1) - \frac{1}{2} l(\mathfrak{p}'-1)} \left(\frac{m}{n}\right).\end{aligned}$$

Der Vergleich mit der Eisenstein'schen Formel zeigt folglich, dass in derselben das Vorzeichen des Exponenten umzukehren ist.

Die gefundenen Ausdrücke lassen sich vermöge der Gleichung $\left(\frac{j^\lambda}{m}\right) = j^{\lambda l'}$ auf die Form bringen

$$\left(\frac{j^{-\frac{\mathfrak{p}-1}{2}} n}{m}\right) = (-1)^{ll'} \left(\frac{j^{-\frac{\mathfrak{p}'-1}{2}} m}{n}\right)$$

oder

$$\left(\frac{j^{\frac{\mathfrak{p}+\mathfrak{q}-1}{2}} n}{m}\right) = (-1)^{ll'} \left(\frac{j^{\frac{\mathfrak{p}'+\mathfrak{q}'-1}{2}} m}{n}\right).$$

Wir erkennen daraus, dass für

$$n^* = j^{-\frac{\mathfrak{p}-1}{2}} n \quad \text{oder} \quad n^{**} = j^{\frac{\mathfrak{p}+\mathfrak{q}-1}{2}} n$$

das Reciprocitätsgesetz die einfache Gestalt annimmt:

$$\left(\frac{n^*}{m^*}\right) = (-1)^{\mu\nu}\left(\frac{m^*}{n^*}\right) \quad \text{oder} \quad \left(\frac{n^{**}}{m^{**}}\right) = (-1)^{\mu\nu}\left(\frac{m^{**}}{n^{**}}\right).$$

Da hier offenbar

$$n^* \equiv j^{-\frac{\mathfrak{p}-1}{2}}, \quad n^{**} \equiv j^{\frac{\mathfrak{p}+\mathfrak{q}-1}{2}} \mod 2(1+j),$$

so kann man diese Congruenzen als Definition neuer *primärer* bicubischer Zahlen an Stelle von $n \equiv 1$ benutzen und hat nur noch nachzuweisen, dass für $n_1^* = j^{-\frac{\mathfrak{p}_1-1}{2}} n_1$ oder $n_1^{**} = j^{\frac{\mathfrak{p}_1+\mathfrak{q}_1-1}{2}} n_1$ die Producte

$$n^* n_1^* = j^{-\frac{\mathfrak{p}-1}{2}-\frac{\mathfrak{p}_1-1}{2}} n n_1 \quad \text{resp.} \quad n^{**} n_1^{**} = j^{\frac{\mathfrak{p}+\mathfrak{q}-1}{2}+\frac{\mathfrak{p}_1+\mathfrak{q}_1-1}{2}} n n_1$$
$$= j^{-\alpha+\beta-\alpha_1+\beta_1} n n_1 \qquad\qquad = j^{2\alpha+\beta+2\alpha_1+\beta_1} n n_1$$

gleichfalls primär bleiben. Wenn

$$n n_1 = \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{q}_2 j = 1 + 2(\alpha_2 + \beta_2 j)(1+j),$$

so bleibt mithin nur zu zeigen, dass

$$j^{-\alpha+\beta-\alpha_1+\beta_1} = j^{-\alpha_2+\beta_2} \quad \text{und} \quad j^{2\alpha+\beta+2\alpha_1+\beta_1} = j^{2\alpha_2+\beta_2}.$$

Dazu führen die leicht erweislichen Identitäten

$$-\alpha_2 + \beta_2 = -\alpha + \beta - \alpha_1 + \beta_1 + 6(\alpha\beta' + \alpha'\beta + \beta\beta')$$
$$\alpha_2 + 2\beta_2 = \alpha + 2\beta + \alpha_1 + 2\beta_1 + 6(\alpha\alpha' + \alpha\beta' + \alpha'\beta),$$

folglich auch

$$2\alpha_2 + \beta_2 = 2\alpha + \beta + 2\alpha_1 + \beta_1 + 6(\alpha\alpha' - \beta\beta'),$$

und es ist nunmehr die Frage beantwortet, wie für die in der Einleitung zur Abh. I, S. 371 angeführte Reciprocitätsgleichung

$$\left(\frac{m}{n}\right) = (-1)^{\frac{M-1}{6}\cdot\frac{N-1}{6}}\left(\frac{n}{m}\right)$$

die *primären* bicubischen Zahlen m und n bestimmt werden müssen.

43.

Um die Bedingungen eines primären n^* und n^{**} etwas näher zu präcisiren, unterscheiden wir die drei Fälle

$$n \equiv 1, \quad n \equiv -1-2j \quad \text{und} \quad n \equiv 3+2j \mod 6.$$

Im ersten Falle ist folglich

$$\tfrac{1}{2}(\mathfrak{p}-1)\equiv 0,\quad \tfrac{1}{2}(\mathfrak{p}+\mathfrak{q}-1)\equiv 0,\quad \alpha\equiv\beta,$$

im zweiten

$$\tfrac{1}{2}(\mathfrak{p}-1)\equiv -1,\quad \tfrac{1}{2}(\mathfrak{p}+\mathfrak{q}-1)\equiv 1,\quad \alpha+1\equiv\beta,$$

im dritten endlich

$$\tfrac{1}{2}(\mathfrak{p}-1)\equiv 1,\quad \tfrac{1}{2}(\mathfrak{p}+\mathfrak{q}-1)\equiv -1,\quad \alpha-1\equiv\beta,$$

sämmtlich in Bezug auf den *Modul 3.* Hiermit haben wir die Congruenzen $\mathfrak{p}\equiv\pm 1$ und $\mathfrak{p}+\mathfrak{q}\equiv\pm 1$ nach dem *Modul 4* zu verbinden und erhalten

ad 1) für $\mathfrak{p}\equiv 1 \mod 4,\quad j^{-\frac{1}{2}(\mathfrak{p}-1)}=1,\quad n^*=n\equiv 1 \mod 6$

für $\mathfrak{p}\equiv -1 \mod 4,\ j^{-\frac{1}{2}(\mathfrak{p}-1)}=-1,\ n^*=-n\equiv -1 \mod 6$

$$\mathfrak{p}^*\equiv 1 \mod 4.$$

Man hat folglich $n^*\equiv\pm 1 \mod 6$ mit solchem Vorzeichen zu wählen, dass dabei die Congruenz $\mathfrak{p}^*\equiv 1 \mod 4$ erfüllt wird.

ad 2) für $\mathfrak{p}\equiv 1 \mod 4,\quad j^{-\frac{1}{2}(\mathfrak{p}-1)}=j^{-2},\ n^*=nj^{-2}\equiv -2+3j \mod 6$

für $\mathfrak{p}\equiv -1 \mod 4,\ j^{-\frac{1}{2}(\mathfrak{p}-1)}=j,\quad n^*=nj\equiv 2-3j \mod 6$

$$\mathfrak{p}^*+\mathfrak{q}^*\equiv -1 \mod 4;$$

ad 3) für $\mathfrak{p}\equiv 1 \mod 4,\quad j^{-\frac{1}{2}(\mathfrak{p}-1)}=j^2,\quad n^*=nj^2\equiv 1+3j \mod 6$

für $\mathfrak{p}\equiv -1 \mod 4,\ j^{-\frac{1}{2}(\mathfrak{p}-1)}=j^{-1},\ n^*=nj^{-1}\equiv -1-3j \mod 6$

$$\mathfrak{q}^*\equiv 1 \mod 4,$$

d. h. $n^*\equiv\pm(2-3j) \mod 6$ ist mit solchem Vorzeichen zu nehmen, dass $\mathfrak{p}^*+\mathfrak{q}^*\equiv -1 \mod 4$, sowie endlich das Vorzeichen in $n^*\equiv\pm(1+3j) \mod 6$ so bestimmt werden muss, dass $\mathfrak{q}\equiv 1 \mod 4$ wird.

Die entwickelten drei Fälle lassen sich in die Vorschrift zusammenziehen — wobei wir die Bezeichnung des * weglassen — dass die betreffenden *primären* Normalzahlen der Congruenz

$$n=\mathfrak{p}+\mathfrak{q}j\equiv\pm 1 \ \mathit{mod}\ 3$$

entsprechen, wenn die Vorzeichen durch die Congruenzen *modulo 4*

entweder $\mathfrak{p} \equiv 1$ (wenn $\mathfrak{p}u\ \mathfrak{q}g$), oder $\mathfrak{p} + \mathfrak{q} \equiv -1$ (wenn $\mathfrak{p}g\ \mathfrak{q}u$),

oder $\mathfrak{q} \equiv 1$ (wenn $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ ungerade sind) bestimmt werden.

Diese Definition kommt im Wesentlichen mit den von EISENSTEIN S. 255 seiner mehr citirten Abhandlung aufgestellten Bedingungen überein: es ist vielleicht zweckmässig zu bemerken, dass die Angaben des Art. 6 über reelle Primzahlen von der Form $6l - 1$ und über conjugirte Zahlen im gegenwärtigen Falle Modificationen erleiden. So werden z. B. die *positiven* Primzahlen 5, 17, 29, 41 . . und ebenso die conjugirten Zahlen $-7 + 12j$ und $5 - 12j$ primär, aber von den beiden $-7 + 6j$ und $-7 + \frac{6}{j} = -1 - 6j$ nur die erstere.

Die primären Zahlen n^{**} führen, wie man sich leicht überzeugt, in Bezug auf das Vorzeichen der Congruenz $n \equiv \pm 1 \bmod 3$ zu etwas abweichenden Bedingungen. Man erhält nämlich für die drei oben entwickelten Fälle die Congruenzen nach dem Modul 4

$$\mathfrak{p} + \mathfrak{q} \equiv 1\,(\mathfrak{p}u,\ \mathfrak{q}g), \quad \mathfrak{q} \equiv -1\,(\mathfrak{p}g,\ \mathfrak{q}u), \quad \mathfrak{p} \equiv -1\,(\mathfrak{p}u\ \mathfrak{q}u).$$

44.

Für das *cubische* Reciprocitätsgesetz, welches sich durch Quadrirung von $\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{ll'}\left(\frac{m}{n}\right)$ resp. $\left(\frac{-1}{n}\right) = (-1)^{l}$ in der einfachen Form

$$\left(\frac{n}{m}\right)_3 = \left(\frac{m}{n}\right)_3$$

ergibt, ist wegen $\left(\frac{-1}{n}\right)_3 = 1$ das Vorzeichen von m und n überhaupt gleichgültig, so dass man die *primären cubischen* Zahlen einfach durch die Congruenz $p + qj \equiv 1 \bmod 3$ definiren darf. Wollte man $p + qj \equiv -1$ setzen, so würden Producte primärer Zahlen aufhören primär zu sein.

Das *quadratische* Reciprocitätsgesetz für cubische Zahlen endlich ergibt sich durch Cubirung des bicubischen $\left(\frac{n}{m}\right)_6$ in der Form

$$\left(\frac{n}{m}\right)_2 = (-1)^{ll' + \frac{1}{2}l(\mathfrak{p}'-1) + \frac{1}{2}l'(\mathfrak{p}-1)}\left(\frac{m}{n}\right)_2$$
$$= (-1)^{\frac{1}{4}(\mathfrak{q}\mathfrak{q}' + \overline{\mathfrak{p}-1}\,\mathfrak{q}' + \overline{\mathfrak{p}'-1}\,\mathfrak{q})}\left(\frac{m}{n}\right)_2$$

für $m \equiv n \equiv 1 \bmod 2(1 + j)$. Dafür schreiben wir

$$\left(\frac{(-1)^{\frac{\mathfrak{p}-1}{2}}\, n}{m}\right)_2 = (-1)^{u'}\left(\frac{(-1)^{\frac{\mathfrak{p}'-1}{2}}\, m}{n}\right)_2 \quad \text{oder} \quad \left(\frac{n^*}{m^*}\right)_2 = (-1)^{u'}\left(\frac{m}{n}\right)_2,$$

wenn $n^* = (-1)^{\frac{\mathfrak{p}-1}{2}}(\mathfrak{p} + \mathfrak{q}j)$, also $\mathfrak{p}^* = (-1)^{\frac{\mathfrak{p}-1}{2}}\mathfrak{p} \equiv 1 \mod 4$, während $\mathfrak{q}^* \equiv \mathfrak{q} \equiv 1 \mod 2$. Hiernach gilt also die Gleichung

$$\left(\frac{n}{m}\right)_2 = (-1)^{\frac{M-1}{2}\cdot\frac{N-1}{2}}\left(\frac{m}{n}\right)_2$$

im Einklang mit den früher bewiesenen Sätzen, sobald die für das quadratische Symbol der binomischen Zahlen $\left(\frac{n}{m}\right)_2$ entwickelten Bedingungen $\mathfrak{p} \equiv 1 \mod 4$ und $\mathfrak{q} \equiv 1 \mod 2$ erfüllt sind.

Es ist noch die Frage nach dem Stattfinden der Gleichung

$$\left(\frac{m}{n n_1}\right) = \left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{m}{n_1}\right)$$

für die primären Zahlen n und n^* zu beantworten. Da nach dem Früheren für

$$\left(\frac{n}{m}\right) = j^{\lambda}\left(\frac{m}{n}\right), \quad \left(\frac{n_1}{m}\right) = j^{\lambda'}\left(\frac{m}{n_1}\right), \quad \left(\frac{n n_1}{m}\right) = j^{\lambda''}\left(\frac{m}{n n_1}\right)$$

dazu die Congruenz $\lambda'' \equiv \lambda + \lambda' \mod 6$ erfordert wird und

$$\lambda = \frac{N-1}{6}(3l' - \alpha' + \beta') + l'(\alpha - \beta)$$

$$\lambda' = \frac{N_1-1}{6}(3l' - \alpha' + \beta') + l'(\alpha_1 - \beta_1)$$

$$\lambda'' = \frac{NN_1-1}{6}(3l' - \alpha' + \beta') + l'(\alpha_2 - \beta_2),$$

so liefern die Identitäten

$$\frac{NN_1-1}{6} - \frac{N-1}{6} - \frac{N_1-1}{6} = 6l\frac{N_1-1}{6}$$

und

$$\alpha - \beta + \alpha_1 - \beta_1 - \alpha_2 + \beta_2 = 6(\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta + \beta\beta_1)$$

den gewünschten Nachweis. Für die Zahlen n^* und n^{**} oder $\lambda = ll'$ reicht selbstverständlich die erste der beiden identischen Gleichungen aus.

45.

Nach Ableitung der Reciprocitätssätze für primäre bicubische Zahlen bedarf es zur Erledigung der Theorie des Symbols $\left(\frac{n}{m}\right)_6$ noch der Aufstellung der sogenannten Ergänzungssätze, also einer

Ermittelung der Werthe von $\left(\frac{1+j}{n}\right)_6$ und $\left(\frac{2}{n}\right)_6$ neben $\left(\frac{j}{n}\right)_6 = j^l$, und zwar zunächst für $n \equiv 1 \mod 2(1+j)$. Zu diesem Behufe wiederholen wir die Identitäten des Art. 37

1) $n + j = (1+j)n_1, \quad n_1 = 2\alpha + 1 + 2\beta j$

$$\frac{p_1 - 1}{2} = \alpha, \quad l_1 \equiv 2\alpha^2 + \alpha - \gamma, \quad \lambda \equiv 2\alpha^2 + 3\gamma^2 \mod 6,$$

2) $nj + 1 = (1+j)n_1, \quad n_1 = 1 - 2\beta + 2(\alpha+\beta)j$

$$\frac{p_1 - 1}{2} = -\beta, \quad l_1 \equiv 2\alpha^2 + \gamma, \quad \lambda \equiv \alpha^2 + 3\gamma^2 \mod 6,$$

in denen die Werthe von n_1 primär sind, wenn $n \equiv 1 \mod 6$, also

$$\alpha - \beta = 3\gamma \equiv 0 \mod 3 \quad \text{und} \quad l \equiv \alpha \mod 6$$

vorausgesetzt wird. Dagegen hat man für $n \equiv -1 - 2j \mod 6$

$$\alpha - \beta = 3\gamma - 1 \equiv -1 \mod 3 \quad \text{und} \quad l \equiv \alpha + 2 \mod 6$$

zu setzen:

3) $n + j = -(1+j)n_1, \quad n_1 = -2\alpha - 1 - 2\beta j$

$$\frac{p_1 - 1}{2} = -\alpha - 1, \quad l_1 \equiv -\alpha^2 + \gamma + 1, \quad \lambda \equiv -\alpha^2 - \gamma + 1 \mod 6,$$

sowie für $n \equiv 3 + 2j, \quad \alpha - \beta = 3\gamma + 1, \quad l \equiv \alpha + 2$:

4) $nj + 1 = -(1+j)n_1, \quad n_1 = 2\beta - 1 - 2(\alpha+\beta)j$

$$\frac{p_1 - 1}{2} = \beta - 1, \quad l_1 \equiv -\alpha^2 + \alpha - \gamma + 1, \quad \lambda \equiv \alpha^2 + \alpha - \gamma - 1 \mod 6,$$

damit die Werthe von n_1, die sich nur durch das Vorzeichen von den früheren unterscheiden, wiederum primär werden und der Reciprocitätsgleichung

$$\left(\frac{n}{n_1}\right) = j^\lambda \left(\frac{n_1}{n}\right), \quad \lambda = 3ll_1 + \tfrac{1}{2}l_1(p-1) - \tfrac{1}{2}l(p_1 - 1)$$

genügen.

Wir wollen die vier angegebenen Fälle einzeln betrachten. Aus 1) ergibt sich

$$\left(\frac{n}{n_1}\right) = \left(\frac{-j}{n_1}\right) = j^{-2l_1} \quad \text{neben} \quad \left(\frac{1+j}{n}\right)\left(\frac{n_1}{n}\right) = \left(\frac{j}{n}\right) = j^l,$$

$$\left(\frac{1+j}{n}\right) = j^{\lambda + l + 2l_1} = j^{3\alpha+\gamma},$$

während aus 2) hervorgeht:

$$\left(\frac{n}{n_1}\right)\left(\frac{j}{n_1}\right) = \left(\frac{-1}{n_1}\right) \quad \text{und} \quad 1 = \left(\frac{1+j}{n}\right)\left(\frac{n_1}{n}\right),$$

$$\left(\frac{1+j}{n}\right) = j^{\lambda - 2l_1} = j^{3\alpha+\gamma},$$

so dass jetzt in völliger Uebereinstimmung für $n \equiv 1 \bmod 6$

$$\left(\frac{1+j}{n}\right) = (-1)^{\alpha} j^{\gamma} = (-1)^{\frac{1}{6}\mathfrak{q}} j^{\frac{1}{6}(\mathfrak{p}-1)}$$

erhalten wird.

Analog wird im Falle 3) oder $n \equiv -1-2j \bmod 6$

$$\left(\frac{n}{n_1}\right) = \left(\frac{-j}{n_1}\right) = j^{-2l_1}, \quad \left(\frac{1+j}{n}\right)\left(\frac{n_1}{n}\right) = \left(\frac{-j}{n}\right) = j^{-2l},$$

$$\left(\frac{1+j}{n}\right) = j^{\lambda-2l-2l_1} = j^{\alpha+\gamma-1} = (-1)^{\frac{1}{6}(\mathfrak{p}+1)} j^{\frac{1}{6}(\mathfrak{q}+2)-2},$$

und im Falle 4) endlich folgt für $n \equiv 3+2j \bmod 6$:

$$\left(\frac{n}{n_1}\right)\left(\frac{j}{n_1}\right) = \left(\frac{-1}{n_1}\right), \quad 1 = \left(\frac{1+j}{n}\right)\left(\frac{n_1}{n}\right)\left(\frac{-1}{n}\right),$$

$$\left(\frac{1+j}{n}\right) = j^{\lambda+3l-2l_1} = j^{-\alpha+\gamma+3} = j^{-\frac{1}{6}(\mathfrak{p}-3)-\frac{1}{6}(\mathfrak{q}-2)+2}.$$

Da nun ferner

$$\left(\frac{1+\frac{1}{j}}{n}\right) = \left(\frac{1+j}{n}\right)\left(\frac{j^{-1}}{n}\right) = j^{-l}\left(\frac{1+j}{n}\right),$$

so erhält man für

$$n \equiv 1: \qquad \left(\frac{1+\frac{1}{j}}{n}\right) = j^{2\alpha+\gamma}$$

$$\left(\frac{3}{n}\right) = j^{-\alpha+\gamma} = j^{-\frac{1}{6}(\mathfrak{p}-1)-\frac{1}{6}\mathfrak{q}},$$

$$n \equiv -1-2j: \qquad \left(\frac{1+\frac{1}{j}}{n}\right) = j^{\gamma-3}$$

$$\left(\frac{3}{n}\right) = j^{\alpha+2\gamma+2} = (-1)^{\frac{1}{6}(\mathfrak{p}+1)} j^{\frac{1}{6}(\mathfrak{p}+1)+\frac{1}{6}(\mathfrak{q}+2)+1},$$

$$n \equiv 3+2j: \qquad \left(\frac{1+\frac{1}{j}}{n}\right) = j^{-2\alpha+\gamma+1}$$

$$\left(\frac{3}{n}\right) = j^{3\alpha+2\gamma-2} = (-1)^{\frac{1}{6}(\mathfrak{p}-3)+\frac{1}{6}(\mathfrak{q}-2)} j^{-\frac{1}{6}(\mathfrak{p}-3)+1}.$$

46.

Um auf dem entsprechenden Wege den Werth von $\left(\frac{2}{n}\right)$ zu finden, schreiben wir

$$1) \quad n+1 = 2n_1, \quad n_1 = 1 + 2(1+j)\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}j\right),$$

während

$$n = 1 + 2(1+j)(\alpha + \beta j), \quad l = 2(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) + \alpha,$$

$$l_1 = \tfrac{1}{2}(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 + \alpha) = \tfrac{1}{4}(l + \alpha),$$

d. h. n_1 ist mit n *primär*, wenn α und β *gerade* Zahlen bedeuten. Ebenso erhält man identisch für *ungerade* Werthe von α und β:

$$2) \quad n + 1 = 2j^2 n_1, \quad n_1 = 1 + 2(1+j)\left(\frac{\beta-1}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2} j\right),$$

sowie für α ungerade, β gerade:

$$3) \quad n + 1 = -2jn_1, \quad n_1 = 1 + 2(1+j)\left(-\frac{\alpha+\beta+1}{2} + \frac{\alpha+1}{2} j\right).$$

Ist dagegen α gerade und β ungerade, so versagt die Methode, weil alsdann $n+1$ durch 4 theilbar wird, mithin eine Congruenz $j^{\sigma} n_1 \equiv 1 \bmod 2(1+j)$ nicht mehr stattfindet. Dieser Umstand steht allerdings in Widerspruch zur Behauptung von Eisenstein (Crelle Bd. 35, S. 256), wonach „man *in allen Fällen* eine complexe Einheit $e = j^{\epsilon}$ finden kann, von der Art, dass $n + e$ durch $\eta = 2$ oder durch $\eta = 1 + j$ theilbar, aber der Quotient $\frac{n+e}{\eta}$ mit n zu $\zeta = 2(1+j)$ relative Primzahl ist."

Man kann sich dann etwa so helfen, dass man in der Gleichung

$$4) \quad n - 1 = 2(1+j)(\alpha + \beta j), \quad \alpha + \beta j = j^{\sigma}(1+j)^{\tau} n_1$$

setzt, und falls α und β nicht gleichzeitig gerade sind, die Exponenten σ und τ so bestimmt, dass $n_1 \equiv 1 \bmod 2(1+j)$ wird. Man erhält dann

$$N(\alpha + \beta j) = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 3^{\tau}(6l_1 + 1),$$

wo τ angibt, wie oft der Factor 3 in $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2 + 3\alpha\beta$ enthalten ist. τ verschwindet, wenn $\alpha - \beta$ nicht durch 3 theilbar ist, während $\tau > 0$ wird für $\alpha \equiv \beta \bmod 3$. Wenn man will, kann man auch von der Gleichung $(1+j)^2 = 3j$ Gebrauch machen.

Wir wollen nun aus den entwickelten Identitäten den Werth von $\left(\frac{2}{n}\right)$ zu ermitteln suchen. Die Rechnung ergibt sogleich

$$1) \quad \alpha \equiv \beta \equiv 0 \bmod 2, \quad \left(\frac{n}{n_1}\right) = \left(\frac{-1}{n_1}\right) = (-1)^{l_1} = j^{\lambda}\left(\frac{n_1}{n}\right),$$

$$\text{neben} \quad 1 = \left(\frac{2}{n}\right)\left(\frac{n_1}{n}\right), \quad \text{während} \quad \lambda = \tfrac{1}{2}(3\alpha^2 - \alpha^3 + \beta^3).$$

Damit folgt

$$\left(\frac{2}{n}\right) = j^{\lambda + 3l_1} = (-1)^{\frac{1}{2}\alpha} j^{\alpha - \beta} = (-1)^{\frac{1}{2}\beta} j^{-\frac{1}{2}(\alpha - \beta)},$$

weil die allgemeine Congruenz $a^3 \equiv a \bmod 6$ für ein gerades a

$$\tfrac{1}{2}a^3 \equiv -a \bmod 6, \quad \text{für } a \text{ ungerade} \quad \tfrac{1}{4}(a^3 - a) \equiv 0 \bmod 6$$

gibt.

$$2) \quad \alpha \equiv \beta \equiv 1 \bmod 2, \quad \left(\frac{n}{n_1}\right) = \left(\frac{-1}{n_1}\right) = (-1)^{l_1} = j^{\lambda}\left(\frac{n_1}{n}\right),$$

neben

$$1 = j^{2l}\left(\frac{2}{n}\right)\left(\frac{n_1}{n}\right), \quad \lambda = -(3\beta - 1)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) - \tfrac{1}{2}(\alpha^3 - \beta^3) - \alpha,$$

also

$$\left(\frac{2}{n}\right) = j^{\lambda - 2l + 3l_1} = (-1)^{\frac{\beta - 1}{2}} j^{-\frac{1}{2}(\alpha - \beta)} = (-1)^{\frac{\alpha - 1}{2}} j^{\alpha - \beta},$$

weil

$$\lambda - 2l + 3l_1 \equiv \tfrac{3}{2}(\alpha - 1) + \alpha - \beta \equiv \tfrac{3}{2}(\beta - 1) - \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) \bmod 6.$$

$$3) \quad \alpha + 1 \equiv \beta \equiv 0 \bmod 2, \quad \left(\frac{n}{n_1}\right) = \left(\frac{-1}{n_1}\right) = (-1)^{l_1} = j^{\lambda}\left(\frac{n_1}{n}\right),$$

so dass

$$\left(\frac{2}{n}\right) = j^{\lambda + 2l + 3l_1} = (-1)^{\frac{1}{2}\beta} j^{-\frac{1}{2}(\alpha - \beta - 3)} = (-1)^{\frac{\alpha - 1}{2}} j^{\alpha - \beta}$$

$$\lambda + 2l + 3l_1 \equiv \tfrac{3}{2}(\alpha - 1) + \alpha - \beta \bmod 6.$$

47.

Wenden wir uns schliesslich zu der Identität

$$n - 1 = 2j^{\sigma}(1 + j)^{\tau + 1} n_1, \quad \alpha + \beta j = j^{\sigma}(1 + j)^{\tau} n_1,$$

welche gilt, sobald α und β nicht gleichzeitig gerade sind, also sowohl in den Fällen 2) und 3), wie in dem Falle

$$4) \quad \alpha \equiv \beta - 1 \equiv 0 \bmod 2.$$

Dann folgt

$$\left(\frac{n}{n_1}\right) = 1 = j^{\lambda}\left(\frac{n_1}{n}\right) \quad \text{neben} \quad \left(\frac{-1}{n}\right) = \left(\frac{2}{n}\right) j^{l\sigma} \left(\frac{1+j}{n}\right)^{\tau + 1} \left(\frac{n_1}{n}\right),$$

mithin für $\left(\frac{1+j}{n}\right) = j^{\lambda_1}$:

$$\left(\frac{2}{n}\right) = (-1)^l j^{\lambda - l\sigma - \lambda_1(\tau + 1)}$$

$$\lambda = 3ll_1 - l(\alpha_1 - \beta_1) + l_1(\alpha - \beta),$$

$$l_1 = \tfrac{1}{6}\left\{\frac{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}{3^{\tau}} - 1\right\} = 2(\alpha_1^2 + \alpha_1\beta_1 + \beta_1^2) + \alpha_1.$$

Da hier die Zahlen $\alpha_1 \beta_1 l_1$ von den Exponenten σ und τ abhängen, welche so gewählt werden müssen, dass n_1 primär wird, so wollen wir zunächst $\tau = 0$ voraussetzen, also $\alpha - \beta \equiv \pm 1 \bmod 3$.

Diese Congruenz wird aber in den Fällen 3) und 4) wegen $\alpha - \beta \equiv \pm 1 \bmod 2$ auch für den Modul 6 gelten, und man hat für $\alpha - \beta \equiv 1 \bmod 6$, $\sigma = -2$, dagegen für $\alpha - \beta \equiv -1 \bmod 6$, $\sigma = 1$ zu nehmen, damit $n_1 \equiv 1 \bmod 2(1+j)$ werde. Nun erhält man im Falle 4)

$$\text{für} \quad \sigma = -2: \quad \alpha = 2\alpha_1 + 4\beta_1, \quad \beta = -(4\alpha_1 + 2\beta_1 + 1)$$

$$\alpha - \beta = 6(\alpha_1 + \beta_1) + 1, \quad \gamma = 2(\alpha_1 + \beta_1)$$

$$\text{für} \quad \sigma = 1: \quad \alpha = -(2\alpha_1 + 4\beta_1), \quad \beta = 4\alpha_1 + 2\beta_1 + 1$$

$$\alpha - \beta = -6(\alpha_1 + \beta_1) - 1, \quad \gamma = -2(\alpha_1 + \beta_1).$$

Um die zugehörigen Werthe von λ_1 oder $(\frac{1+j}{n})$ zu finden, erinnern wir uns, dass

$$\text{für} \quad \alpha - \beta = 3\gamma + 1, \quad (\tfrac{1+j}{n}) = j^{-\alpha+\gamma+2},$$

$$\text{für} \quad \alpha - \beta = 3\gamma - 1, \quad (\tfrac{1+j}{n}) = j^{\alpha+\gamma-1}.$$

Die Ausführung der Substitution ergibt für $\sigma = -2$ wegen

$$l \equiv \alpha + 2 = 2(\alpha_1 + 2\beta_1 + 1), \quad \alpha - \beta \equiv 1 \bmod 6$$

$$3l + 3ll_1 - l(\alpha_1 - \beta_1) + l_1(\alpha - \beta) + 2l - \lambda_1 \equiv 1 - 3\alpha_1$$

und für $\sigma = 1$: $\quad l \equiv -2(\alpha_1 + 2\beta_1 - 1), \quad \alpha - \beta \equiv -1$

$$3l + 3ll_1 - l(\alpha_1 - \beta_1) + l_1(\alpha - \beta) - l - \lambda_1 \equiv 3\alpha_1 - 1,$$

also *entweder* $(\frac{2}{n}) = (-1)^{\alpha_1} j$ *oder* $(\frac{2}{n}) = (-1)^{\alpha_1} j^{-1}$.

Beide Fälle aber lassen sich zusammenziehen in die Formel von 1)

$$(\tfrac{2}{n}) = (-1)^{\frac{\alpha}{2}} j^{\alpha - \beta}.$$

Behandelt man analog den Fall $\tau = 1$ oder $\alpha \equiv \beta \equiv \pm 1 \bmod 3$, so folgt zunächst für die Fälle 3) und 4)

$$\alpha - \beta = 3\gamma, \quad \alpha + \beta j = j^\sigma\{1 + j + 6j(\alpha_1 + \beta_1 j)\},$$

und zwar ergibt sich im Falle 4) für $\sigma = -1$:

$$\alpha = 6\alpha_1 + 2, \quad \beta = 6\beta_1 - 1, \quad \gamma = 2(\alpha_1 + \beta_1) + 1,$$

während für $\sigma = 2$ die entgegengesetzten Werthe gelten

$$\alpha = -(6\alpha_1 + 2), \quad \beta = -(6\beta_1 - 1), \quad \gamma = -2(\alpha_1 + \beta_1) - 1.$$

Hierzu kommt die Congruenz $l \equiv \alpha \bmod 6$, nebst der Gleichung

$$\left(\frac{1+j}{n}\right) = (-1)^{\alpha} j^{\gamma} \quad \text{oder} \quad \lambda_1 = 3\alpha + \gamma \equiv \pm(2\alpha_1 + 2\beta_1 + 1).$$

Beide Werthe von σ führen jetzt zu dem nämlichen Resultat

$$3l + 3ll_1 - l(\alpha_1 - \beta_1) + l_1(\alpha - \beta) + \quad l - 2\lambda_1 \equiv 3\alpha_1,$$

resp.

$$3l + 3ll_1 - l(\alpha_1 - \beta_1) + l_1(\alpha - \beta) - 2l - 2\lambda_1 \equiv 3\alpha_1,$$

$$\left(\frac{2}{n}\right) = (-1)^{\alpha_1},$$

wofür man wiederum schreiben darf

$$\left(\frac{2}{n}\right) = (-1)^{\frac{\alpha}{2}} j^{\alpha - \beta} = (-1)^{\frac{\alpha}{2}} j^{\frac{\mathfrak{p}-1}{2}}.$$

Dieser Ausdruck gilt mithin, so oft α gerade ist, während für ungerade Werthe von α

$$\left(\frac{2}{n}\right) = (-1)^{\frac{\alpha-1}{2}} j^{\alpha - \beta} = (-1)^{\frac{\alpha-1}{2}} j^{\frac{\mathfrak{p}-1}{2}}$$

gefunden worden ist.[1])

48.

Nachdem wir im Vorstehenden die Aufgabe gelöst, in jedem Falle die Werthe von $\left(\frac{1+j}{n}\right)$ und $\left(\frac{2}{n}\right)$ für einen primären Modul $n \equiv 1 \mod 2(1+j)$ zu bestimmen, bliebe in Bezug auf die bicubische Reciprocitätsformel und die zugehörigen Ergänzungssätze noch die Frage zu beantworten, ob sich nicht mittelst einer anderen Definition der primären Moduln, eine Vereinfachung der gefundenen Resultate, resp. Zusammenziehung der verschiedenen Fälle erreichen liesse. In dieser Beziehung mögen zum Schlusse noch einige Bemerkungen folgen über die Einführung solcher primären normalen Zahlen, welche durch die Congruenz

$$n_* \equiv 1 \mod 3$$

definirt werden. Es wird alsdann

$$n_* = \mathfrak{p}_* + \mathfrak{q}_* j = 1 + 3(\alpha_* + \beta_* j),$$

$$\alpha_* = \tfrac{1}{3}(\mathfrak{p}_* - 1), \quad \beta_* = \tfrac{1}{3}\mathfrak{q}_*, \quad l = \tfrac{3}{2}(\alpha_*^2 + \alpha_*\beta_* + \beta_*^2) + \alpha_* + \tfrac{1}{2}\beta_*.$$

1) Wenn die Werthe $\tau > 1$ im Obigen der Kürze halber nicht besonders behandelt worden sind, so ist diess deswegen unterblieben, weil die geraden und die ungeraden Werthe von τ sich analog wie $\tau = 0$ und resp. $\tau = 1$ verhalten, also auf keine abweichenden Resultate führen.

wo α_* und β_* beliebige reelle Zahlen bedeuten können, nur darf für einen *ungeraden* Werth von α_* β_* nicht *gerade* sein, wenn n_* normal bleiben soll.

Man überzeugt sich nun leicht, dass

$$n_* \equiv j^{\mathfrak{q}} n.$$

Denn für $n \equiv 1 \bmod 6$, $\alpha \equiv \beta \bmod 3$ folgt

$$n = n_*, \quad \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_*, \quad \mathfrak{q} = \mathfrak{q}_*, \quad \mathfrak{p}_*(u), \quad \mathfrak{q}_*(g),$$
$$2\alpha = 2\alpha_* + \beta_*, \quad 2\beta = -\alpha_* + \beta_*, \quad \alpha_*(g), \quad \beta_*(g).$$

Für $n \equiv -1 - 2j \bmod 6$, $\alpha + 1 \equiv \beta \bmod 3$ wird

$$n_* = j^{-2} n \equiv -2 + 3j \bmod 6$$

$$\mathfrak{p} = -\mathfrak{p}_* - \mathfrak{q}_*, \quad \mathfrak{q} = \mathfrak{p}_*, \quad \mathfrak{q}_* = -\mathfrak{p} - \mathfrak{q}, \quad \mathfrak{p}_*(g), \quad \mathfrak{q}_*(u),$$
$$2\alpha = -\alpha_* - 2\beta_* - 1, \quad 2\beta = 2\alpha_* + \beta_* + 1, \quad \alpha_*(u), \quad \beta_*(u).$$

Endlich für $n \equiv 3 + 2j \bmod 6$, $\alpha - 1 \equiv \beta \bmod 3$ ist

$$n_* = j^2 n \equiv 1 + 3j \bmod 6$$

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{q}_*, \quad \mathfrak{q} = -\mathfrak{p}_* - \mathfrak{q}_*, \quad \mathfrak{p}_* = -\mathfrak{p} - \mathfrak{q}, \quad \mathfrak{p}_*(u), \quad \mathfrak{q}_*(u),$$
$$2\alpha = -\alpha_* + \beta_* - 1, \quad 2\beta = -\alpha_* - 2\beta_*, \quad \alpha_*(g), \quad \beta_*(u).$$

Schreibt man nun die bicubische Reciprocitätsformel in der Gestalt

$$\left(\frac{n}{m}\right) = \varepsilon j^{l\mathfrak{q}' - l'\mathfrak{q}} \left(\frac{m}{n}\right) = \varepsilon j^{\frac{1}{2}(l'\mathfrak{q} - l\mathfrak{q}')} \left(\frac{m}{n}\right),$$

$$\varepsilon = (-1)^{ll' + l\beta' + l'\beta} = (-1)^{\frac{1}{4}(\mathfrak{q}\mathfrak{q}' + \overline{\mathfrak{p}-1}\,\mathfrak{q}' + \overline{\mathfrak{p}'-1}\,\mathfrak{q})}$$

und führt hier $m_* \equiv n_* \equiv 1 \bmod 3$ ein, so wird

$$\left(\frac{j^{\mathfrak{q}} n}{m}\right) = j^{l'\mathfrak{q}} \left(\frac{n}{m}\right), \quad \left(\frac{n_*}{m_*}\right) = \varepsilon \left(\frac{m_*}{n_*}\right),$$

wo in ε β und β' resp. $\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{p}'\,\mathfrak{q}'$ durch $\alpha_*\beta_*\alpha'_*\beta'_*$ resp. $\mathfrak{p}_*\mathfrak{q}_*\mathfrak{p}'_*\mathfrak{q}'_*$ zu ersetzen sind. Da hierbei für m wie für n je drei Fälle unterschieden werden müssen, so erhält man im Allgemeinen neun verschiedene Ausdrücke für ε, in denen

$$\left.\begin{array}{l} l \equiv \frac{1}{2}\beta_*, \quad \text{oder} \quad \equiv \frac{1}{2}(\alpha_* - 1), \quad \text{oder} \quad \equiv \frac{1}{2}(\alpha_* + \beta_* - 1) \\ \text{und} \\ l' \equiv \frac{1}{2}\beta'_*, \quad \text{oder} \quad \equiv \frac{1}{2}(\alpha'_* - 1), \quad \text{oder} \quad \equiv \frac{1}{2}(\alpha'_* + \beta'_* - 1) \end{array}\right\} \bmod 2$$

werden. Es tritt also keine wesentliche Vereinfachung ein.

Wir wollen in den für $\left(\frac{1+j}{n}\right)$ gefundenen Formeln an Stelle von α und γ noch α_* und β_* einführen. Man erhält leicht, wenn der Bequemlichkeit halber der Index $_*$ überall weggelassen wird,

$$\text{für } n \equiv 1 \bmod 6: \quad \left(\frac{1+j}{n}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}\beta} j^{\frac{1}{2}\alpha} = (-1)^{\frac{1}{6}\mathfrak{q}} j^{\frac{1}{6}(\mathfrak{p}-1)},$$

$$n \equiv -2+3j \bmod 6: \quad \left(\frac{1+j}{n}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}(\beta+1)} j^{-\alpha} = (-1)^{\frac{1}{6}(\mathfrak{q}+3)} j^{-\frac{1}{3}(\mathfrak{p}-1)},$$

$$n \equiv 1+3j \bmod 6: \quad \left(\frac{1+j}{n}\right) = -j^{\frac{1}{2}\alpha} = -j^{\frac{1}{6}(\mathfrak{p}-1)}.$$

Durch Quadrirung folgen die für die *cubischen* Reste geltenden einfachen Gleichungen:

$$n \equiv 1 \bmod 3, \quad \left(\frac{1+j}{n}\right)_3 = j^{-2\alpha} = j^{-\frac{1}{3}(\mathfrak{p}-1)}.$$

Da ferner nach dem Früheren für $n \equiv 1 \bmod 2(1+j)$ allgemein

$$\left(\frac{2}{n}\right)_3 = j^{2(\alpha-\beta)} = j^{\mathfrak{p}-1}$$

gefunden wird, so ergibt sich für $n \equiv 1 \bmod 3$,

$$\text{wenn } \mathfrak{p}(u),\ \mathfrak{q}(g): \quad \left(\frac{2}{n}\right)_3 = 1,$$

$$\text{wenn } \mathfrak{p}(g),\ \mathfrak{q}(u): \quad \left(\frac{2}{n}\right)_3 = j^{-2},$$

$$\text{und wenn } \mathfrak{p}(u),\ \mathfrak{q}(u): \quad \left(\frac{2}{n}\right)_3 = j^2.$$

Will man endlich auch für die *quadratischen* Reste der cubischen Zahlen die Werthe von $\left(\frac{1+j}{n}\right)_2$ und $\left(\frac{2}{n}\right)_2$ entwickeln, so erhält man durch Cubirung

$$\text{für } \mathfrak{p}(u),\ \mathfrak{q}(g): \quad \left(\frac{1+j}{n}\right)_2 = (-1)^{\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} = (-1)^{\frac{1}{6}(\mathfrak{p}+\mathfrak{q}-1)},$$

$$\left(\frac{2}{n}\right)_2 = (-1)^{\frac{1}{4}\mathfrak{q}} \quad \textit{oder} \quad (-1)^{\frac{1}{4}(\mathfrak{q}+2)},$$

$$\text{für } \mathfrak{p}(g),\ \mathfrak{q}(u): \quad \left(\frac{1+j}{n}\right)_2 = (-1)^{\frac{1}{2}(\beta-1)} = (-1)^{\frac{1}{6}(2\mathfrak{p}+\mathfrak{q}+1)},$$

$$\left(\frac{2}{n}\right)_2 = (-1)^{\frac{1}{4}\mathfrak{p}} \quad \textit{oder} \quad (-1)^{\frac{1}{4}(\mathfrak{p}+2)},$$

$$\text{für } \mathfrak{p}(u),\ \mathfrak{q}(u): \quad \left(\frac{1+j}{n}\right)_2 = (-1)^{\frac{1}{2}(\alpha+2)} = (-1)^{\frac{1}{6}(\mathfrak{p}+2\mathfrak{q}-1)},$$

$$\left(\frac{2}{n}\right)_2 = (-1)^{\frac{1}{4}(\mathfrak{p}+\mathfrak{q})} \quad \textit{oder} \quad (-1)^{\frac{1}{4}(\mathfrak{p}+\mathfrak{q}-2)},$$

wo wiederum für $n \equiv 1 \bmod 3$ die Bezeichnung durch $\cdot$ weggeblieben ist. Für $n \equiv 1 \bmod 2(1+j)$ folgt etwas einfacher:

$$\left(\frac{1+j}{n}\right)_2 = (-1)^\beta = (-1)^{\frac{1}{6}(\mathfrak{p}-\mathfrak{q}-1)},$$

$$\left(\frac{2}{n}\right)_2 = (-1)^{\frac{\alpha}{2}+\beta} = (-1)^{\frac{1}{4}\mathfrak{q}}, \quad \mathfrak{q} \equiv 0 \bmod 4,$$

$$\left(\frac{2}{n}\right)_2 = (-1)^{\frac{\alpha+1}{2}+\beta} = (-1)^{\frac{1}{4}(\mathfrak{q}+2)}, \quad \mathfrak{q} \equiv 2 \bmod 4.$$

Druckfehler in der ersten Abhandlung:

S. 377	Z. 12	v. o.	lies:	$(-1)^{\frac{nn'-1}{2}}$
„ 385	„ 6	v. o.	„	$\prod\limits_{l=1}^{\infty}$
„ 396	„ 8	v. o.	„	$\mathrm{S}_{\mu}^{2n} e^{\mu^2 \frac{m\pi i}{2n}}$
„ 398	„ 4	v. u.	„	$\omega_1 = p\pi + p'hi$
„ 399	„ 8	v. o.	„	$\frac{\partial \Theta u}{\partial h}$
„ 399	„ 11	v. o	„	$\frac{\Theta'' u'}{\Theta_1 u'}$
„ 400	„ 10	v. o.	„	e^{-2lui}
S. 400	Z. 9	v. u.	lies:	$\frac{k'\pi - kh'i}{l'\pi - lh'i}$
„ 401	„ 12	v. o.	„	$-\frac{li}{2p}$
„ 402	„ 3	v. o.	„	$h_1 < \pi\sqrt{\frac{3}{4}}$
„ 408	„ 4	v. o.	„	$e^{\frac{lu^2i}{p}} \vartheta_2(uq)$
„ 408	„ 5	v. o.	„	$q^{\frac{1}{4}ll}$
„ 408	„ 12	v. o.	„	$e^{-(2n+1)u'i}$

Druckfehler in der zweiten Abhandlung:

S. 663 Z. 10 v. o. lies: theilen
„ 677 „ 6 v. u. „ *bicubischen*
„ 681 „ 11 v. o. „ μ, r, r'
„ 682 „ 13 v. o. „ $\sqrt{\sigma^2 - 4\tau}$
„ 686 „ 17 v. u. „ $R < 1$
„ 689 „ 13 v. u. „ $\nu = \frac{\mu n}{m}$
„ 698 „ 1 v. u. „ $\mathfrak{p} \equiv 1$
„ 699 „ 3 v. o. „ $\mathfrak{p}$ u. $\mathfrak{q}$ statt p u. q
„ 699 „ 10 v. u. „ $\vartheta_2(nu)$,
„ 700 „ 3 v. o. „ $\mathrm{am}\, \vartheta_3^2 \cdot \left(u \pm \frac{p\pi}{n}\right)$
„ 703 „ 12 v. u. „ $\eta_i''(u)$
„ 707 „ 9 v. u. „ $\mathrm{am}\, \vartheta_3^2 \cdot \left(u \pm \frac{\varpi\pi}{n}\right)$
„ 708 „ 4 v. o. „ $\mathrm{am}\, 4K\left(\frac{\mu}{m} + \frac{\varpi}{n}\right)$
„ 709 „ 3 v. o. „ $\left(\frac{\mathfrak{h}}{m}\right)$ statt $\left(\frac{h}{m}\right)$
„ 709 „ 1 v. u. „ Zusatz: Auch kann man anmerken, dass wenn n eine ungerade Zahl *zweiter* Gattung (S. 682) ist, das Product $n\mathfrak{h}' = n(\sigma - \mathfrak{h})$ von der ersten Gattung, also normal wird, während bei ungeraden Zahlen *dritter* Gattung für $\sigma(u)$, $\tau(u)$ $n\mathfrak{h}$, und für $\sigma(g)$, $\tau(g)$ $n(1 + \mathfrak{h})$ normal sind.
„ 715 „ 11 v. u. „ $\sqrt{4\lambda^3 - \vartheta^8 \cdot \lambda}$
„ 716 „ 1 v. u. „ T. I statt P. I
„ 717 „ 8 v. u. „ $\vartheta_3^8 - 16\vartheta^4\vartheta_2^4$
„ 718 „ 9 v. o. „ $\frac{\vartheta''}{\vartheta}$ statt $\frac{\vartheta^4}{\vartheta}$
„ 719 „ 7 v. o. „ $\sqrt{4(\lambda^3 + \lambda_0'^3)}$
„ 731 „ 11 v. u. „ Komma, statt :
„ 732 „ 10 v. o. „ $\frac{1}{i} e^{-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}}$
„ 738 „ 8 v. u. „ $j^{\frac{1}{2}l'(\mathfrak{p}-1) - \frac{1}{2}l(\mathfrak{p}'-1)}$
„ 743 „ 5, 7, 14, 17, 21 lies: $\mathfrak{p}$ u. $\mathfrak{p}'$ statt p u. p'
„ 746 nach Z. 11 v. o. ist die ganze Zeile ausgefallen:

neben $1 = j^{-2l}\left(\frac{2}{n}\right)\left(\frac{n_1}{n}\right)$, $\lambda = (l + 2\alpha)(\alpha + \frac{1}{2}\beta + 1) + \frac{1}{2}(\alpha^2 - \beta^2 - \alpha)$,

ÜBER DIE

MAXWELL-HERTZ'SCHE THEORIE.

ZWEITE ABHANDLUNG.

VON

C. NEUMANN.

Des XXVII. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

N° VIII.

LEIPZIG
BEI B. G. TEUBNER.
1902.

Vorgetragen für die Abhandlungen am 2. Juni 1902.
Das Manuscript eingeliefert am 4. Juni 1902.
Der letzte Bogen druckfertig erklärt am 2. September 1902.

ÜBER DIE

MAXWELL-HERTZ'SCHE THEORIE.

ZWEITE ABHANDLUNG.

VON

C. NEUMANN.

Die allgemeinen Untersuchungen der vorigen Abhandlung*) sollen hier namentlich in Anwendung gebracht werden auf die *stationären* elektromagnetischen Zustände in *ruhender* Substanz.

Es sei gegeben ein aus beliebig vielen homogenen Substanzen *ringförmig* zusammengesetzter Conductor $\mathfrak{K}$, der allenthalben von homogener Luft $\mathfrak{K}_0$ umgeben ist. Im Allgemeinen werden alsdann in diesem *ringförmigen Conductor* $\mathfrak{K}$, in Folge der an seinen inneren Zusammensetzungsflächen vorhandenen contactelektromotorischen Kräfte, fortdauernde elektrische Strömungen u, v, w vorhanden sein. Ueberdies sind nach Eintritt des stationären Zustandes im Conductor $\mathfrak{K}$ auch bestimmte elektrische Vertheilungen vorhanden. Die im Conductor enthaltene *wahre* Elektricität ist abgelagert theils an seiner äusseren Oberfläche, theils in seinen inneren Uebergangsschichten. Und genau dasselbe ist zu sagen von der im Conductor vorhandenen *freien* Elektricität. Endlich werden zur Zeit des stationären Zustandes im Conductor selbst und auch in der umgebenden Luft überall bestimmte elektrische Zustandscomponenten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ vorhanden sein.

In analytischer Hinsicht tritt uns als der eigentliche Mittelpunkt all' dieser Erscheinungen *das Potential* φ *der freien Elektricität* entgegen. Gelingt es, dieses in irgend welcher Weise zu finden, so ergiebt sich aus ihm alles Uebrige. So z. B. ergeben sich aus φ die u, v, w im Innern des Conductors mittelst der einfachen Formeln:

$$\text{(A.)} \qquad u = -\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = -\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = -\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

wo λ die Leitungsfähigkeit bezeichnet. Ferner ergeben sich aus φ für jedweden Punct, mag derselbe nun im Conductor $\mathfrak{K}$, oder in der umgebenden Luft $\mathfrak{K}_0$ gelegen sein, die elektrischen Zustandscomponenten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ mittelst der Formeln:

*) Im Folgenden soll diese im Jahre 1901 erschienene Abhandlung kurzweg als Abh. I. bezeichnet werden. (Man findet dieselbe im XXVII. Bd. d. Abh. der math.-physischen Classe d. K. Sächs. Ges. d. Wiss.).

(B.) $$\mathfrak{X} = -\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad \mathfrak{Y} = -\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad \mathfrak{Z} = -\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

wo ε den Dielektricitätscoeffizienten vorstellt. Ebenso bestimmen sich durch φ jene elektrischen Belegungen an der äusseren Oberfläche des Conductors und an seinen innern Zusammensetzungsflächen.

Es dreht sich also Alles um die Ermittelung des Potentiales φ; und ich werde im Folgenden (in § 28) die allgemeinen Gleichungen hinstellen, durch welche dieses Potential φ eindeutig bestimmt ist.

Hiermit aber ist der Kreis unserer Untersuchungen noch nicht geschlossen. Denn wenn wir auch voraussetzen [in § 30 (9)—(10)], dass jene homogenen Substanzen, aus denen der Conductor $\mathfrak{K}$ zusammengesetzt ist, alle nur *temporär-magnetischer* Natur sind, dass also *wahrer* Magnetismus nirgends vorhanden ist, so wird trotzdem *freier* Magnetismus sich vorfinden, sowohl an der äusseren Oberfläche des Conductors, wie auch an seinen inneren Zusammensetzungsflächen. Auch werden allenthalben, im Innern des Conductors $\mathfrak{K}$, wie auch in der umgebenden homogenen Luft $\mathfrak{K}_0$ bestimmte magnetische Zustandscomponenten $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ vorhanden sein. Als der eigentliche Mittelpunkt all' dieser magnetischen Vertheilungen und Zustände erscheint, in analytischer Hinsicht, *das Potential ψ des freien Magnetismus.* Und ich werde (in § 30) die zur eindeutigen Bestimmung dieses Potentials ψ dienenden Gleichungen hinstellen.

Denkt man sich ψ mittelst dieser Gleichungen berechnet, so kann man nun aus ψ z. B. die magnetischen Zustandscomponenten $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ für jedweden Punkt (x, y, z), mag nun derselbe innerhalb oder ausserhalb des Conductors $\mathfrak{K}$ liegen, mit Leichtigkeit ableiten. Es gelten nämlich folgende Formeln [§ 31 (27)]:

(C.) $$\mathfrak{L} = -\mu\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} + \xi\right), \quad \mathfrak{M} = -\mu\left(\frac{\partial\psi}{\partial y} + \eta\right), \quad \mathfrak{N} = -\mu\left(\frac{\partial\psi}{\partial z} + \zeta\right),$$

wo μ den Magnetisirungscoefficienten vorstellt, während ξ, η, ζ gewisse Ausdrücke sind, die sich leicht ergeben aus den schon in (A.) berechneten Strömungen u, v, w.

Die den gegebenen *ringförmigen Conductor* $\mathfrak{K}$ zusammensetzenden Substanzen sind nach unserer Voraussetzung durchweg nur temporär-magnetisch; sie sind also von Hause aus völlig unmagnetisch. Und es erscheint daher befremdlich, dass trotzdem zur

Zeit des stationären Zustandes auf der Oberfläche des Conductors $\mathfrak{K}$ und auf seinen innern Zusammensetzungsflächen magnetische Belegungen vorhanden sind. Man kann darauf antworten, dass diese magnetischen Belegungen provocirt sind durch die vorhandenen elektrischen Strömungen u, v, w. Wenigstens lässt sich nachweisen [Ende des § 31], dass jene Belegungen verschwinden, sobald die u, v, w überall $= 0$ sind.

Die Formeln (C.) unterscheiden sich, ihrer äusseren Gestalt nach, von den Formeln (B.) durch das Hinzutreten der Glieder ξ, η, ζ. Auch drängt sich, angesichts der Formeln (C.), die Frage auf, ob man diese ξ, η, ζ nicht vielleicht als die Ableitungen irgend einer Function der Coordinaten darzustellen vermag. Hierauf ist zu antworten [§ 32 (14.)—(17.)]:

Im *Innern* des ringförmigen Conductors $\mathfrak{K}$ ist solches schlechterdings unmöglich. In seinem *Aussenraum* aber sind die ξ, η, ζ in der That in die gewünschte Form versetzbar:

(D.) $$\xi = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \eta = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \zeta = \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Auch ergiebt sich (in § 33.), dass die hier auftretende Function F angesehen werden kann als das Potential gewisser *fingirter magnetischer Massen.*

Was die Lage dieser fingirten Massen anbelangt, so ist zu beachten, dass der gegebene Conductor $\mathfrak{K}$ ringförmig ist, und dass daher sein Aussenraum $\mathfrak{K}_0$ durch eine gewisse Querschnittfläche Ω in einen einfach zusammenhängenden Raum verwandelt werden kann; die Randcurve der Fläche Ω liegt auf der äusseren Oberfläche des gegebenen ringförmigen Conductors $\mathfrak{K}$ (auf derselben hinlaufend nach Art eines Parallelkreises). Jene *fingirten magnetischen Massen*, die das Potential F erzeugen, liegen nun theils im Innern des Conductors $\mathfrak{K}$, theils an seiner äusseren Oberfläche, theils aber auch auf der soeben genannten Fläche Ω [§ 33 (31.)].

Eine charakteristische Eigenschaft dieser fingirten magnetischen Massen besteht darin, dass ihr Potential auf Puncte im *Innern* des Conductors $\mathfrak{K}$ durchweg $= 0$ ist, [§ 33 (32.)—(α.)].

Es kann vielleicht auffallend erscheinen, dass wir hier auf die Erforschung der elektrischen und magnetischen Zustandscomponenten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ so sehr viel Mühe und Zeit verwendet haben. Aber diese Componenten sind von Wichtigkeit

für die Berechnung der betreffenden *ponderomotorischen Kräfte* Ξ_e, H_e, Z_e und Ξ_m, H_m, Z_m [vgl. Abh. I, Seite 305 (38.)—(39.)].

Zu diesen ponderomotorischen Wirkungen übergehend, wollen wir nun gleichzeitig auch den Rahmen unserer Untersuchungen erweitern, indem wir, an Stelle eines Körpers $\mathfrak{K}$, beliebig viele solche Körper $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ etc. uns vorstellen, gelegen wie einzelne Inseln inmitten der sie umgebenden homogenen Luft $\mathfrak{K}_0$. Auch soll jetzt jeder dieser Körper von beliebiger Gestalt sein, nur wollen wir, der Einfachheit halber, annehmen, dass jeder solcher Körper nur *eine* Oberfläche besitzt; sodass also z. B. schaalenförmige Körper von unserer Untersuchung ausgeschlossen sind. Im Grunde genommen, ist übrigens diese Einschränkung ganz unwesentlicher Natur, und nur darauf berechnet, die Ausdrucksweise ein wenig zu erleichtern.

Ferner mag jeder dieser Körper $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ etc. entweder aus homogener Substanz bestehen, oder doch wenigstens aus irgend welcher Anzahl homogener Substanzen in beliebiger Weise zusammengesetzt sein. Endlich mögen diese Substanzen, ganz nach Belieben, theils *temporär-* theils *permanent-magnetischer* Natur sein.

Es handelt sich nun um die ponderomotorischen Kräfte, welche *zwei solche Körper* $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$, vermöge der in ihnen vorhandenen elektrischen und magnetischen Vertheilungen und vermöge der in ihnen vorhandenen elektrischen Strömungen, gegenseitig aufeinander ausüben; und dabei kommen sowohl die translatorischen Kräfte wie auch die Drehungsmomente in Betracht. Ich gelange nun durch meine Untersuchungen zu dem Resultat [vgl. namentlich die letzten Seiten von § 36 und von § 38], *dass all' diese ponderomotorischen Wirkungen im Wesentlichen völlig in Einklang sind mit denjenigen Formeln, die aus den Theorien von* POISSON, AMPÈRE *und* F. NEUMANN *entspringen.* Der Unterschied besteht nur allein darin, dass zu jenen früheren Formeln hier bei der MAXWELL-HERTZ'schen Theorie noch gewisse constante Factoren ϵ_0 und μ_0 hinzutreten. Dabei bezeichnen ϵ_0 und μ_0 den constanten Dielektricitätscoefficienten und den constanten Magnetisirungscoefficienten der umgebenden homogenen Luft $\mathfrak{K}_0$.

Zwei Voraussetzungen indessen sind erforderlich, wenn man diese Uebereinstimmung der beiderlei Theorien wirklich nachweisen will. Beide betreffen die sogenannten *Uebergangsschichten,* die bei den Körpern $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ etc. theils an ihren äusseren Oberflächen, theils an ihren inneren Zusammensetzungsflächen sich

vorfinden. Die *eine* Voraussetzung besteht darin, dass die Dicke einer solchen Uebergangsschicht, so klein sie auch sein mag, doch niemals $= 0$ zu denken ist; diese Voraussetzung bringt z. B. mit sich, dass die Coefficienten ε und μ im ganzen unendlichen Raume allenthalben stetig sind, ohne dass beim Durchgange durch eine äussere Oberfläche oder durch eine innere Zusammensetzungsfläche eine Unterbrechung dieser Stetigkeit bemerkbar würde. Und die *andere* Voraussetzung besteht darin, dass man, falls z. B. die auf den Körper $\mathfrak{K}$ ausgeübten ponderomotorischen Einwirkungen berechnet werden sollen, unter diesem Körper $\mathfrak{K}$ den Körper selbst, *inclusive* seiner äusseren Uebergangsschicht, versteht.

Diese letztere Voraussetzung ist offenbar nicht ganz unbedenklicher Natur. Denn sie involvirt die Vorstellung, dass die äussere Uebergangsschicht dem Körper fest adhärirt; so dass alle auf diese Uebergangsschicht ausgeübten ponderomotorischen Kräfte sich unmittelbar auf den Körper übertragen.

Beachtenswerth dürfte endlich der *letzte Theil* meiner Arbeit sein [§ 39, ff.]. Derselbe zeigt, dass, hinsichtlich der *inducirten* elektrischen Ströme, in der Maxwell-Hertz'schen Theorie ein *wesentlicher Mangel* vorhanden ist, den man einstweilen schwerlich zu beseitigen im Stande sein wird.

§ 25.

Allgemeine Betrachtungen über die stationären elektromagnetischen Zustände in ruhender Substanz.

Die den Weltraum erfüllende Substanz ist nach unserer Vorstellung allenthalben und fortdauernd *continuirlich*; der Art, dass z. B. überall, wo verschiedenartige Theile der Substanz aneinandergrenzen, dünne *Uebergangsschichten* sich vorfinden. Auch haben wir, der Einfachheit willen angenommen, dass diese Substanz überall *isotrop* (d. i. unkrystallinisch) sei. [Vgl. d. Abh. I, S. 219].

Die Art und Weise, in welcher die elektrischen und magnetischen Erscheinungen in dieser Substanz an irgend einer bestimmten *Stelle* sich gestalten, ist nach unserer Vorstellung wesentlich abhängig von der dortigen Beschaffenheit der Substanz, d. i. von den dortigen Werthen gewisser der Substanz zugehöriger Coefficienten: $\lambda, \mu, \varepsilon, X', Y', Z'$. [Vgl. z. B. Abh. I, S. 222 (Note)].

Wir wollen nun gegenwärtig voraussetzen, dass die den Weltraum erfüllende Substanz allenthalben und fortdauernd in

Ruhe ist, und dass sie ferner allenthalben und fortdauernd *ein und dieselbe Temperatur* besitzt. Alsdann sind die substantiellen Geschwindigkeitscomponenten α, β, γ stets $= 0$. Auch werden alsdann jene sechs Coefficienten λ, μ, ε, X', Y', Z' unabhängig von der Zeit, mithin *unveränderliche* Functionen der Coordinaten sein. Also:

$$(1.)\qquad \begin{cases} \alpha = \beta = \gamma = Null, \\ \dfrac{\partial\lambda}{\partial t} = \dfrac{\partial\mu}{\partial t} = \dfrac{\partial\varepsilon}{\partial t} = \dfrac{\partial X'}{\partial t} = \dfrac{\partial Y'}{\partial t} = \dfrac{\partial Z'}{\partial t} = Null; \end{cases}$$

dabei beziehen sich α, β, γ und X', Y', Z' auf drei *ruhende*, zu einander senkrechte Axen x, y, z, die inmitten der *ruhenden* Substanz nach Belieben festgesetzt sein können.*)

Da die betrachtete Substanz überall continuirlich ist, so werden übrigens λ, μ, ε, X', Y', Z' nicht nur *unveränderliche*, sondern auch *stetige* Functionen der Coordinaten sein. Die X', Y', Z' repräsentiren die von der Substanz selber an irgend einer Stelle ausgeübten elektromotorischen Kräfte, sie hängen ab von den an der betrachteten Stelle vorhandenen Structurunterschieden und Temperaturunterschieden [vgl. Abh. I S. 221]; und sie werden daher bei unsern gegenwärtigen Untersuchungen, bei denen die Temperatur allenthalben und fortdauernd ein und dieselbe sein soll, nur allein von den Structurunterschieden abhängen. *Folglich werden sie z. B. $= 0$ sein in homogener Substanz.* Betrachtet man aber zwei aneinandergrenzende homogene Körper, *so werden sie in der zwischen diesen beiden Körpern vorhandenen Uebergangsschicht wirkliche Werthe besitzen.* Jede solche Uebergangsschicht kann man sich, wie beiläufig bemerkt sein mag, gelegen denken zwischen zwei Parallelflächen. Und will man von der eigentlichen Grenzfläche der beiden Körper sprechen, so kann man darunter etwa diejenige Fläche verstehen, welche in der Mitte zwischen diesen beiden Parallelflächen sich hinzieht, von beiden gleich weit abstehend.

Durch irgend welche Ursachen mögen nun in der betrachteten Substanz elektrische und magnetische Vorgänge erregt sein;

---

*) Ob diese Ruhe eine *absolute* oder *relative* sei, ist für uns gleichgültig. Denn wir haben [in der Abh. I] nachgewiesen, dass die HERTZ'schen Differentialgleichungen, auf denen all' unsere Untersuchungen basiren, *invariant* sind, d. h. ein und dieselben bleiben, einerlei, ob das der Betrachtung zu Grunde gelegte rechtwinklige Axensystem in absoluter Ruhe, oder aber in irgend welcher Bewegung sich befindet.

so dass die in der Substanz vorhandenen elektrischen und magnetischen Zustände ($\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$) und ($\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$) im Allgemeinen von Augenblick zu Augenblick sich ändern.

Jene Ursachen aber mögen von solcher Beschaffenheit sein, dass diese Aenderungen $\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t}$, $\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial t}$, $\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial t}$, $\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial t}$, $\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial t}$, $\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial t}$ allmählig kleiner und kleiner werden, bis sie von einem gewissen Augenblick ab gänzlich verschwinden. Von diesem Augenblick ab wird alsdann also ein *stationärer Zustand* eintreten, der characterisirt ist durch die Formeln:

$$(2.)\qquad \frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t} = \frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial t} = \frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial t} = \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial t} = \frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial t} = \frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial t} = \textit{Null},$$

sowie auch durch die hieraus folgenden Formeln:

$$(3.)\qquad \frac{\partial\sigma}{\partial t} = \frac{\partial(\sigma)}{\partial t} = \frac{\partial\tau}{\partial t} = \frac{\partial(\tau)}{\partial t} = \textit{Null};$$

die Formeln (3.) ergeben sich nämlich aus (1.) und (2.) mittelst der allgemeinen Gleichungen Abh. I, S. 268 (1.)—(2.) und S. 281 (I.)—(II.). Die Grössen σ und (σ) bezeichnen die Dichtigkeiten der wahren und freien elektrischen Vertheilung; ebenso bezeichnen τ und (τ) die Dichtigkeiten der wahren und freien magnetischen Vertheilung; und nach den Formeln (3.) werden also diese Vertheilungen zur Zeit des stationären Zustandes fortdauernd ein und dieselben bleiben.

Für diesen stationären Zustand erhalten nun die allgemeinen HERTZ'schen Differentialgleichungen [Abh. I, S. 236] folgende Gestalt*):

$$(4.)\quad \begin{cases} 0 = \frac{1}{A}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{N}}{\mu} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{M}}{\mu}\right) - 4\pi u, \\ 0 = \frac{1}{A}\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{L}}{\mu} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathfrak{N}}{\mu}\right) - 4\pi v, \\ 0 = \frac{1}{A}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathfrak{M}}{\mu} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{L}}{\mu}\right) - 4\pi w, \end{cases} \qquad (5.)\quad \begin{cases} 0 = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}, \\ 0 = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}, \\ 0 = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}. \end{cases}$$

Ferner erkennt man, dass die sogenannten transfigurirten Gleichungen [Abh. I, S. 292 (II.) und S. 291 (I.)] für den hier betrach-

---

*) Nach Abh. I, S. 236 (24.) ist nämlich $\Delta\mathfrak{X}$ definirt durch die Formel:

$$\frac{\Delta\mathfrak{X}}{dt} = \frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t} + (\mathfrak{X}_1 + \mathfrak{Y}_2 + \mathfrak{Z}_3)\alpha + (\mathfrak{X}\beta - \mathfrak{Y}\alpha)_2 + (\mathfrak{X}\gamma - \mathfrak{Z}\alpha)_3.$$

Hieraus aber folgt mit Hinblick auf (1.) sofort:

$$\frac{\Delta\mathfrak{X}}{dt} = \frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t},$$

so dass also, mit Rücksicht auf (2.), sich ergiebt: $\Delta\mathfrak{X} = 0$. — U. s. w.

teten stationären Zustand sich in Formeln verwandeln von folgender Gestalt:

$$(6.)\quad \begin{cases} \frac{\mathfrak{L}}{\mu} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} + A\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right), \\ \frac{\mathfrak{M}}{\mu} = -\frac{\partial\psi}{\partial y} + A\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right), \\ \frac{\mathfrak{N}}{\mu} = -\frac{\partial\psi}{\partial z} + A\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right), \end{cases} \qquad (7.)\quad \begin{cases} \frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \\ \frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \\ \frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}; \end{cases}$$

hier bezeichnen

$$(8.)\qquad \psi = \int\frac{(\tau_1)\,D\mathrm{v}_1}{r} \quad \text{und} \quad \varphi = \int\frac{(\sigma_1)\,D\mathrm{v}_1}{r}$$

die Potentiale aller überhaupt vorhandenen freien Magnetismen und aller überhaupt vorhandenen freien Elektricitäten; während U, V, W die Bedeutungen haben:

$$(9.)\qquad U = \int\frac{u_1\,D\mathrm{v}_1}{r}, \quad V = \int\frac{v_1\,D\mathrm{v}_1}{r}, \quad W = \int\frac{w_1\,D\mathrm{v}_1}{r},$$

die Integrationen [ebenso wie in (8.)] ausgedehnt gedacht über alle Volumelemente $D\mathrm{v}_1$ des ganzen unendlichen Raumes; dabei repräsentiren u_1, v_1, w_1 die Componenten der in einem solchen Element $D\mathrm{v}_1$ vorhandenen elektrischen Strömung.

Noch sind hinzuzufügen die allgemeinen Strömungsgleichungen [Abh. I, S. 237 (29.)]:

$$(10.)\qquad u = \lambda\left(\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} + X'\right), \quad v = \lambda\left(\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} + Y'\right), \quad w = \lambda\left(\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} + Z'\right).$$

Endlich sei bemerkt, dass zwischen den Strömungen u, v, w und der elektrischen Dichtigkeit σ folgende Beziehungen stattfinden [Abh. I, S. 271 (9.) und S. 272 (12.)]:

$$(\alpha.)\qquad \frac{d(\sigma\,D\mathrm{v})}{dt} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)D\mathrm{v},$$

$$(\beta.)\quad \frac{d}{dt}\left(\int_{\mathfrak{R}}\sigma\,D\mathrm{v}\right) = -\int_{\mathfrak{R}}[u\cos(n,x) + v\cos(n,y) + w\cos(n,z)]\,Do.$$

Diese letzte Gleichung (β.) gilt für jeden *beliebigen* Raum $\mathfrak{R}$; dabei sind die Integrationen links und rechts ausgedehnt zu denken über alle Volumelemente $D\mathrm{v}$ des Raumes $\mathfrak{R}$, respective über alle Oberflächenelemente Do dieses Raumes; und n ist die auf Do errichtete *äussere* Normale. — Für den hier betrachteten stationären Zustand werden offenbar die Formeln (α.), (β.), mit Rücksicht auf (3.), folgende einfachere Gestalt annehmen:

$$(11.)\qquad 0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

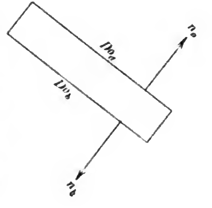
$$(12.)\qquad 0 = \int_{\mathfrak{R}} [u\cos(n,x) + v\cos(n,y) + w\cos(n,z)]\,Do.$$

Diese Formeln (11.), (12.) zeigen in deutlicher Weise, dass die *wahre* Elektricität (deren Strömungscomponenten u, v, w sind, vgl. Abh. I, S. 273) zur Zeit des hier betrachteten stationären Zustandes *nach Art einer incompressiblen Flüssigkeit* sich bewegt. So z. B. zeigt die Formel (12.), dass in jedes gegebene Volumen $\mathfrak{R}$ während der Zeiteinheit ebenso viele wahre Elektricität eintritt, wie aus ihm herausgeht.

Der Raum $\mathfrak{R}$ ist, wie schon gesagt, ein ganz beliebiger. Und wir können daher für $\mathfrak{R}$ z. B. den Raum einer Uebergangsschicht, oder auch ein einzelnes Element einer solchen Uebergangsschicht nehmen. Gehören z. B. zu der den Weltraum erfüllenden ruhenden Substanz zwei aneinander grenzende homogene Körper $\mathfrak{K}_a$ und $\mathfrak{K}_b$, und denkt man sich die zwischen diesen beiden Körpern vorhandene Uebergangsschicht $(\mathfrak{K}_a, \mathfrak{K}_b)$ in lauter *scheibenförmige Elemente* zerlegt [vgl. Abh. I, S. 278, 279], so wird es erlaubt sein, für $\mathfrak{R}$ den Innenraum eines solchen scheibenförmigen Elementes zu nehmen. Die Oberfläche eines solchen scheibenförmigen Elementes besteht aber aus zwei einander gegenüberliegenden Flächenstücken Do_a und Do_b und aus einer verschwindend schmalen gürtelförmigen Fläche. Bringt man daher die Formel (12.) auf dieses scheibenförmige Element in Anwendung, so gelangt man, bei Vernachlässigung jener verschwindend schmalen gürtelförmigen Fläche, zu folgender Gleichung:

$$0 = \begin{Bmatrix} + [u_a\cos(n_a,x) + v_a\cos(n_a,y) + w_a\cos(n_a,z)]\,Do_a \\ + [u_b\cos(n_b,x) + v_b\cos(n_b,y) + w_b\cos(n_b,z)]\,Do_b \end{Bmatrix};$$

hier bezeichnen n_a und n_b die auf Do_a und Do_b errichteten Normalen. Diese Normalen haben entgegengesetzte Richtungen, indem n_a in das Innere des Körpers $\mathfrak{K}_a$, hingegen n_b in das Innere des Körpers $\mathfrak{K}_b$ hineinläuft. — Uebrigens sind die beiden Flächenstücke Do_a und Do_b von *gleicher* Grösse; so dass man also die vorstehende Formel auch so schreiben kann:



$$(13.)\qquad 0=\begin{cases}+u_a\cos(n_a,x)+v_a\cos(n_a,y)+w_a\cos(n_a,z)\\ +u_b\cos(n_b,x)+v_b\cos(n_b,y)+w_b\cos(n_b,z)\end{cases}.$$

Ist insbesondere der Körper $\mathfrak{K}_b$ ein *Isolator*, so sind die u_b, v_b, w_b alle $=0$; so dass also alsdann die Formel (13.) übergeht in:

$$(14.)\qquad 0=u_a\cos(n_a,x)+v_a\cos(n_a,y)+w_a\cos(n_a,z);$$

woraus folgt, dass in diesem Fall die im Körper $\mathfrak{K}_a$ in unmittelbarer Nähe des Elementes Do_a vorhandene elektrische Strömung u_a, v_a, w_a mit diesem Elemente Do_a parallel ist, mithin bezeichnet werden darf als *tangential* zur Oberfläche des Körpers $\mathfrak{K}_a$.

§ 26.

Fortsetzung. Insbesondere über die Werthe der Potentiale φ und ψ an der Contactfläche zweier homogener Körper.

Wir betrachten nach wie vor die beiden homogenen Körper $\mathfrak{K}_a$, $\mathfrak{K}_b$, nebst ihrer Uebergangsschicht $(\mathfrak{K}_a, \mathfrak{K}_b)$. *Namentlich wollen wir die Werthe untersuchen, welche die Potentiale φ und ψ zu beiden Seiten dieser Uebergangsschicht besitzen.*

Es seien p_a und p_b zwei einander gegenüberliegende Puncte der die Uebergangsschicht begrenzenden Parallelflächen. Ferner bezeichne

$$(15.)\qquad n=p_ap_b$$

die die beiden Puncte mit einander verbindende gerade Linie; sodass also die Länge dieser Linie n zu bezeichnen sein wird als die *Dicke* der Uebergangsschicht. — Wir zerlegen diese kleine Linie n in lauter unendlich kleine Elemente Dn, und bilden die einem solchen Element Dn zugehörigen Formeln (7.):

$$(16.)\qquad \begin{cases}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}Dn=-\dfrac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}Dn,\\[2mm] \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}Dn=-\dfrac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}Dn,\\[2mm] \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}Dn=-\dfrac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}Dn.\end{cases}$$

Aus diesen Formeln folgt, durch Multiplication mit $\cos(n,x)$, $\cos(n,y)$, $\cos(n,z)$ und Addition, sofort:

$$(17.)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial n}Dn=-\left(\frac{\mathfrak{X}\cos(n,x)+\mathfrak{Y}\cos(n,y)+\mathfrak{Z}\cos(n,z)}{\varepsilon}\right)Dn;$$

und hieraus ergiebt sich, durch Integration über die ganze Linie $n = p_a p_b$, die Gleichung:

$$(18.)\quad \varphi_b - \varphi_a = -\int_{p_a}^{p_b} \left(\frac{\mathfrak{X} \cos(n, x) + \mathfrak{Y} \cos(n, y) + \mathfrak{Z} \cos(n, z)}{\varepsilon} \right) Dn.$$

wo φ_a und φ_b die Werthe von φ in den Puncten p_a und p_b vorstellen. Die Linie $n = p_a p_b$ (die Dicke der Uebergangsschicht) ist aber nach unserer Vorstellung *ganz ausserordentlich klein*. Folglich wird das über diese Linie hin erstreckte Integral (18.) nahezu $= 0$ sein; so dass man also erhält:

$$(19.)\qquad \varphi_b - \varphi_a = 0.$$

Doch pflegt man diese Formel (19.), mit Rücksicht auf die bekannten Erscheinungen der Contactelektricität als *unrichtig*, oder wenigstens als *nicht* allgemein gültig, zu bezeichnen. Diese Ansicht begründet man durch den Hinweis darauf, dass die Werthe der $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ innerhalb einer solchen Uebergangsschicht möglicherweise von ganz exorbitanter Grösse sein können; so dass jenes Integral (18.), trotz der Kleinheit des Integrationsweges, *nicht* verschwindet.

Um genauer auf die Dinge einzugehen, müssen wir zurückgreifen zu den allgemeinen Strömungsgleichungen (10.), welche, bezogen auf das Element Dn folgendermassen lauten:

$$(20.)\qquad \begin{cases} -\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} Dn = -\frac{u}{\lambda} Dn + X' Dn, \\ -\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} Dn = -\frac{v}{\lambda} Dn + Y' Dn, \\ -\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} Dn = -\frac{w}{\lambda} Dn + Z' Dn. \end{cases}$$

Mit Hinblick auf diese Gleichungen pflegt man nun jene exorbitant grossen Werthe der $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ dadurch zu erklären, *dass in der Uebergangsschicht zweier Substanzen die elektromotorischen Kräfte X', Y', Z' exorbitant hohe Werthe besitzen können.* — Diese Annahme acceptirend, multipliciren wir die Gleichungen (20.) mit $\cos(n, x)$, $\cos(n, y)$, $\cos(n, z)$, und addiren, und integriren sodann über alle Elemente Dn der kleinen Linie $n = p_a p_b$. In der so entstehenden Formel:

$$(21.)\quad -\int_{p_a}^{p_b}\left(\frac{\mathfrak{X}\cos(n,x)+\mathfrak{Y}\cos(n,y)+\mathfrak{Z}\cos(n,z)}{\varepsilon}\right)Dn =$$

$$= -\int_{p_a}^{p_b}\left(\frac{u\cos(n,x)+v\cos(n,y)+w\cos(n,z)}{\lambda}\right)Dn$$

$$+\int_{p_a}^{p_b}[X'\cos(n,x)+Y'\cos(n,y)+Z'\cos(n,z)]\,Dn$$

wird das mit den u, v, w behaftete Integral, in Anbetracht der Kleinheit des Integrationsweges $n = p_a p_b$, nahezu $= 0$ sein, und vernachlässigt werden dürfen; während die beiden andern Integrale, trotz der Kleinheit des Integrationsweges, in Folge jener exorbitant hohen Werthe von $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ und X', Y', Z', ansehnliche Werthe haben können. Somit ergiebt sich:

$$(22.)\quad -\int_{p_a}^{p_b}\left(\frac{\mathfrak{X}\cos(n,x)+\mathfrak{Y}\cos(n,y)+\mathfrak{Z}\cos(n,z)}{\varepsilon}\right)Dn =$$

$$= \underbrace{+\int_{p_a}^{p_b}[X'\cos(n,x)+Y'\cos(n,y)+Z'\cos(n,z)]\,Dn}_{[\mathfrak{K}_b,\ \mathfrak{K}_a]},$$

wo die Signatur $[\mathfrak{K}_b, \mathfrak{K}_a]$ beigefügt ist zur Bezeichnung des Integrales rechter Hand. Das in solcher Weise definirte $[\mathfrak{K}_b, \mathfrak{K}_a]$ wird offenbar die Eigenschaft haben:

$$(23.)\qquad [\mathfrak{K}_b,\ \mathfrak{K}_a] = -[\mathfrak{K}_a,\ \mathfrak{K}_b],$$

weil der Werth eines bestimmten Integrals in sein Gegentheil übergeht, sobald man die beiden Grenzen des Integrals mit einander vertauscht.

Ebenso, wie übrigens X', Y', Z' nur allein abhängen von der Natur der betrachteten Uebergangsschicht, ebenso wird offenbar Gleiches zu sagen sein vom Werthe dieses Integrales $[\mathfrak{K}_b, \mathfrak{K}_a]$: *sodass also dieses $[\mathfrak{K}_b, \mathfrak{K}_a]$ zu bezeichnen ist als eine den beiden Substanzen $\mathfrak{K}_a$ und $\mathfrak{K}_b$ eigenthümlich zugehörige Constante. Man nennt bekanntlich diese Constante den Spannungsunterschied der beiden Substanzen.*

Nunmehr folgt aus (18.) und (22.), (23.) sofort:

$$(24.)\qquad \varphi_b - \varphi_a = [\mathfrak{K}_b,\ \mathfrak{K}_a] = -[\mathfrak{K}_a,\ \mathfrak{K}_b];$$

und von dieser Formel (24.) *soll im Folgenden Gebrauch gemacht werden.*

Wir halten fest an der in (15.) ausgeführten Construction:

$$(25.)\qquad n = p_a p_b,$$

und gehen nun über zum *magnetischen Potential* ψ. Zuvörderst bilden wir für irgend ein Element Dn der kleinen Linie n die Gleichungen (6.):

$$(26.)\qquad \begin{cases} \frac{\partial\psi}{\partial x} Dn = A\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right) Dn - \frac{\mathfrak{L}}{\mu} Dn, \\ \frac{\partial\psi}{\partial y} Dn = A\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right) Dn - \frac{\mathfrak{M}}{\mu} Dn, \\ \frac{\partial\psi}{\partial z} Dn = A\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) Dn - \frac{\mathfrak{N}}{\mu} Dn. \end{cases}$$

Diese Gleichungen multipliciren wir mit $\cos(n, x)$, $\cos(n, y)$, $\cos(n, z)$, und addiren, und integriren sodann über alle Elemente Dn der kleinen Linie $n = p_a p_b$. So ergiebt sich:

$$(27.)\qquad \psi_b - \psi_a = A\int_{p_a}^{p_b}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right)\cos(n, x) + \cdots\right] Dn$$

$$- \int_{p_a}^{p_b}\left[\frac{\mathfrak{L}}{\mu}\cos(n, x) + \cdots\right] Dn.$$

Die Werthe dieser beiden Integrale aber werden, in Anbetracht der Kürze des Integrationsweges, verschwindend klein sein; sodass man also erhält:

$$(28.)\qquad \psi_b - \psi_a = 0;$$

und diese Formel (28.) *pflegt man als ganz allgemein gültig anzusehen;* es hat sich bis jetzt kein Grund ergeben, an ihrer Richtigkeit zu zweifeln.

§ 27.

Ueber die Galvanische Kette, d. i. über einen zusammengesetzten ringförmigen Conductor.

Die einfach geschlossene Galvanische Kette kann im wesentlichen bezeichnet werden als ein aus verschiedenen leitenden

Substanzen zusammengesetzter *ringförmiger Conductor.* Sind jene Substanzen durchweg Metalle, so entsprechen sie dem sogenannten Spannungsgesetz; und es entsteht alsdann in dem ringförmigen Conductor ein bestimmter elektrischer *Gleichgewichtszustand.* Sind hingegen jene Substanzen nur zum Theil Metalle, zum andern Theil aber nichtmetallische Flüssigkeiten, so werden sie dem Spannungsgesetz zum Theil nicht mehr entsprechen; und alsdann entsteht in dem ringförmigen Conductor ein dauernder elektrischer *Strömungszustand.*

An diesen althergebrachten Grundvorstellungen, so *unvollkommen* sie auch sein mögen*), soll hier und in den folgenden Paragraphen festgehalten werden. Es kann sehr wohl sein, dass wir bei unsern Untersuchungen, in Folge der Unvollkommenheit und Unsicherheit dieser Grundvorstellungen, von der Wirklichkeit ganz abgezogen, und in eine blos ideale Welt verschlagen werden; sodass also unsere Untersuchungen vielleicht nur als eine Art *Exercitationes* anzusehen sein werden. Vielleicht aber dürften sie trotzdem von Nutzen sein.

Zweierlei ist namentlich zu beachten: Erstens, dass jene althergebrachten Grundvorstellungen bis zum heutigen Augenblick wohl die einzigen sind, welche ein derart *festes Gepräge* besitzen, dass sie zur Grundlage einer mathematischen Theorie sich eignen. Und zweitens, dass sie durch besondere *Einfachheit* sich auszeichnen und in Folge dessen zu einem vorläufigen Versuch besonders einladend erscheinen.

Wir bezeichnen den gegebenen ringförmigen Conductor mit $\mathfrak{K}$, und denken uns denselben *körperlich* (nicht linear); sodass also die Querschnitte dieses Ringes $\mathfrak{K}$ beliebig gross sind. Die einzelnen *homogenen Substanzen,* aus denen der Ring $\mathfrak{K}$ zusammengesetzt ist, bezeichnen wir mit $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3, \ldots \mathfrak{K}_n$:

$$(1.) \qquad \mathfrak{K} = \mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2 + \mathfrak{K}_3 + \mathfrak{K}_4 + \cdots + \mathfrak{K}_n.$$

Dementsprechend bezeichnen wir die aufeinanderfolgenden Zusammensetzungsflächen mit $(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2)$, $(\mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3)$, $(\mathfrak{K}_3, \mathfrak{K}_4)$, $\ldots$ $(\mathfrak{K}_{n-1}, \mathfrak{K}_n)$,

*) Die Unvollkommenheit dieser Vorstellungen besteht hauptsächlich darin, dass bei denselben die in den nichtmetallischen flüssigen Substanzen eintretenden *Zersetzungen* (die wohl beim Zustandekommen jener andauernden elektrischen Strömungen eine wesentliche Rolle spielen dürften) ganz ausser Betracht bleiben.

($\mathfrak{K}_n$, $\mathfrak{K}_1$). Jede dieser Flächen repräsentirt einen (ebenen oder krummen) Querschnitt des Ringes $\mathfrak{K}$.

Der ringförmige Conductor $\mathfrak{K}$ mag umgeben gedacht werden von *homogener Luft*, die von ihm aus nach allen Seiten sich ins Unendliche erstreckt. Diese homogene Luft bezeichnen wir mit $\mathfrak{K}_0$; sodass also z. B. unter ($\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_0$) die äussere Oberfläche des Ringes $\mathfrak{K}$ zu verstehen ist. Diese Oberfläche ($\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_0$) besteht offenbar aus n Theilen:

$$(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}_0) = (\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_0) + (\mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_0) + \cdots + (\mathfrak{K}_n, \mathfrak{K}_0).$$

Demgemäfs wird z. B. die Substanz $\mathfrak{K}_h$ im Ganzen von drei Flächen begrenzt sein, nämlich von der Fläche ($\mathfrak{K}_h$, $\mathfrak{K}_0$) und von den beiden Zusammensetzungsflächen ($\mathfrak{K}_{h-1}$, $\mathfrak{K}_h$) und ($\mathfrak{K}_h$, $\mathfrak{K}_{h+1}$).

Im Allgemeinen wird in dem ringförmigen Conductor $\mathfrak{K}$ von Hause aus eine gewisse Menge *wahrer* Elektricität

$$E \tag{3.}$$

enthalten sein, die (in Folge der umgebenden Luft $\mathfrak{K}_0$) aus ihm nicht zu entweichen vermag. Aus dieser Menge E (3.) lässt sich übrigens auch sofort ableiten die in dem Conductor $\mathfrak{K}$ enthaltene Menge *freier* Elektricität. Bezeichnet man nämlich diese letztere mit (E), so ist nach einem bekannten allgemeinen Satz [Abh. I, S. 269 (7)]:

$$(E) = \frac{E}{\varepsilon_0}, \tag{3a.}$$

wo ε_0 den constanten Dielektricitätscoefficienten der den Conductor umgebenden Luft $\mathfrak{K}_0$ vorstellt.

In Folge der an den Zusammensetzungsflächen vorhandenen contactelektromotorischen Kräfte X_f, Y_f, Z_f wird nun im Ringe $\mathfrak{K}$ ein *stationärer elektrischer Strömungszustand* entstehen. Und dieser Zustand soll in den folgenden Paragraphen einer näheren Untersuchung unterworfen werden, auf Grund der Maxwell-Hertz'schen Theorie, und namentlich auf Grund der in den beiden vorigen Paragraphen dargelegten Vorstellungen und Formeln.

§ 28.

Fortsetzung. Ueber die Vertheilung der freien Elektricität, und über das von derselben herrührende Potential φ.

Nach Eintritt des stationären Strömungszustandes sind die elektrischen Dichtigkeiten σ, (σ) unabhängig von der Zeit [vgl. S. 761 (3.)]; sodass also zur Zeit dieses stationären Zustandes sowohl die wahre, wie auch die freie Elektricität in ganz be-

stimmter und völlig unveränderlicher Weise vertheilt sein werden. Können wir uns nun über diese Vertheilungen eine nähere Vorstellung verschaffen?

Innerhalb der Luft $\mathfrak{K}_0$ ist $\sigma = 0$ [Abh. I, S. 271]; und innerhalb der homogenen Substanz $\mathfrak{K}_h (h = 1, 2, 3, \dots n)$ wird σ ebenfalls $= 0$ sein [Abh. I, S. 275 (16)]. *Wahre* Elektricität kann daher zur Zeit des stationären Zustandes nur allein in den Uebergangsschichten $(\mathfrak{K}_h, \mathfrak{K}_j)$ vorhanden sein, (wo $h, j = 0, 1, 2, \dots n$).

Was ferner (σ) betrifft, so ist bekanntlich in homogener Substanz $(\sigma) = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ [Abh. I, S.269 (4)]. Ebenso wie σ, ebenso wird also auch (σ) im Innern von $\mathfrak{K}_0$ und im Innern von $\mathfrak{K}_h (h = 1, 2, \dots n)$ überall $= 0$ sein. Und es wird daher sowohl *wahre* wie auch *freie* Elektricität zur Zeit des hier betrachteten stationären Zustandes nur allein in den Uebergangsschichten $(\mathfrak{K}_h, \mathfrak{K}_j)$ sich vorfinden können, (wobei $h, j = 0, 1, 2, \dots n$).

Wir haben vorhin jede Uebergangsschicht in kleine scheibenförmige Elemente zerlegt [vgl. S. 763]. Jedes solches scheibenförmige Element ist ein kleiner Körper, den wir in Elemente *zweiter Ordnung*, nämlich in lauter *unendlich kleine* Elemente Dv zerlegen können. Die in einem solchen Element Dv enthaltenen Mengen wahrer und freier Elektricität werden wir zu bezeichnen haben mit σDv und $(\sigma) Dv$. Alsdann wird z. B. das Potential φ aller überhaupt vorhandenen *freien* Elektricität den Werth besitzen:

$$(4.) \qquad \varphi = \int_{\mathfrak{U}} \frac{(\sigma) Dv}{r},$$

die Integration ausgedehnt gedacht über *die Gesammtheit* $\mathfrak{U}$ *aller überhaupt vorhandenen Uebergangsschichten*, also ausgedehnt gedacht über all' jene *unendlich kleinen* Elemente Dv, aus denen diese Gesammtheit $\mathfrak{U}$ der Uebergangsschichten zusammengesetzt ist.

Was die Werthe φ_h und φ_j des Potentials φ zu beiden Seiten der Uebergangsschicht $(\mathfrak{K}_h, \mathfrak{K}_j)$ betrifft, so ist [nach S. 767 (24)]:

$$(5.) \qquad \varphi_h - \varphi_j = [\mathfrak{K}_h, \mathfrak{K}_j] = -[\mathfrak{K}_j, \mathfrak{K}_h].$$

Für jede der Uebergangsschichten $(\mathfrak{K}_h, \mathfrak{K}_j)$ sind zwei Fälle möglich: Entweder ist der betreffende Spannungsunterschied $[\mathfrak{K}_h, \mathfrak{K}_j] = 0$: sodass also die Formel (5.) für diese Schicht übergeht in $\varphi_h - \varphi_j = 0$: alsdann wird der von dieser Uebergangsschicht herrührende Theil des Potentials φ (4.) sich darstellen als das Potential einer so-

genannten *einfachen* elektrischen Belegung der betreffenden Grenzfläche. Oder aber: Jener Spannungsunterschied $[\mathfrak{K}_h, \mathfrak{K}_j]$ und die Differenz $\varphi_h - \varphi_j$ sind *nicht* $= 0$; alsdann wird der von jener Uebergangsschicht herrührende Theil des Potentials φ (4.) sich darstellen als das Potential einer *zusammengesetzten* elektrischen Belegung der betreffenden Grenzfläche; dabei ist unter einer zusammengesetzten Belegung eine Belegung zu verstehen, die zusammengesetzt ist aus einer einfachen Belegung und aus einer Doppelbelegung. Noch sei bemerkt, dass man die der *Luft* $\mathfrak{K}_0$ entsprechenden Spannungsunterschiede

(6.) $$[\mathfrak{K}_h, \mathfrak{K}_0] = \mathit{Null}$$

anzunehmen pflegt, — eine Annahme, der wir im Folgenden uns anschliessen werden.

Die Formel (4.) giebt eine ungefähre Vorstellung von der Natur des Potentials φ. Um nun den Werth dieses Potentiales φ näher zu bestimmen, notiren wir die aus Seite 762 (7.) und (10.) entspringenden Gleichungen:

(7.) $$\mathfrak{X} = -\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad \mathfrak{Y} = -\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad \mathfrak{Z} = -\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

und

(8.) $$u = -\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \lambda X', \quad v = -\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \lambda Y', \quad w = -\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \lambda Z'.$$

Die X', Y', Z' können aber [vgl. Seite 760] nur allein in den Uebergangsschichten wirkliche Werthe haben; während sie in homogener Substanz stets $= 0$ sind. Demgemäss gewinnen die Formeln (8.) im Innern einer homogenen Substanz die einfachere Gestalt:

(9.) $$u = -\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad v = -\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad w = -\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Denken wir uns nun auf den beiden Parallelflächen der Uebergangsschicht $(\mathfrak{K}_h, \mathfrak{K}_j)$ zwei einander gegenüberliegende Puncte p_h und p_j markirt, so gilt nach S. 764 (13.) die Formel:

(10.) $$\left\{\begin{aligned} &+ u_h\cos(n_h, x) + v_h\cos(n_h, y) + w_h\cos(n_h, z) \\ &+ u_j\cos(n_j, x) + v_j\cos(n_j, y) + w_j\cos(n_j, z) \end{aligned}\right\} = 0;$$

woraus mit Rücksicht auf (9.) sich ergiebt:

(11.) $$\lambda_h\frac{\partial\varphi_h}{\partial n_h} + \lambda_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial n_j} = 0;$$

hier bezeichnen n_h und n_j die in jenen Puncten p_h und p_j auf jenen beiden Parallelflächen errichteten und von einander ab-

gewendeten Normalen. [Wir haben hier also dasselbe Bild vor uns, wie in der Figur S. 763, nur mit dem Unterschiede, dass die dortigen Indices a, b gegenwärtig durch h, j ersetzt sind.]

Wir gelangen also schliesslich für den hier betrachteten stationären Zustand zu folgendem

Resultat. — *Alle überhaupt vorhandene freie Elektricität ist zur Zeit des stationären Zustandes in den Uebergangsschichten angesammelt. Und das von dieser freien Elektricität herrührende Potential* φ *wird daher den Werth* (4.) *haben:*

$$(12.)\qquad \varphi = \int_{\mathfrak{U}} \frac{(\sigma) D\nu}{r},$$

das Integral ausgedehnt gedacht über die Gesammtheit $\mathfrak{U}$ *aller Uebergangsschichten.*

Für dieses Potential φ *gelten in jenen Uebergangsschichten* $(\mathfrak{K}_h, \mathfrak{K}_j)$ *die Formeln* (5.) *und* (11.):

$$(13.)\qquad \varphi_h - \varphi_j = [\mathfrak{K}_h, \mathfrak{K}_j] \quad \textit{und} \quad \lambda_h \frac{\partial \varphi_h}{\partial n_h} + \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial n_j} = 0;$$

woraus z. B. für $j = 0$ *sich ergiebt:*

$$(14.)\qquad \varphi_h - \varphi_0 = 0 \quad \textit{und} \quad \frac{\partial \varphi_h}{\partial n_h} = 0;$$

denn $[\mathfrak{K}_h, \mathfrak{K}_0]$ *ist* $= 0$, *nach* (6); *und das der Luft* $\mathfrak{K}_0$ *entsprechende* λ_0 *ist ebenfalls* $= 0$.

Zusatz. — *Durch diese Formeln* (12.), (13.), (14.) *ist der Werth des Potentials* φ *im Innern des ringförmigen Conductors* $\mathfrak{K}$ *überall eindeutig bestimmt, bis auf eine noch unbekannt bleibende additive Constante* K.

Beweis des Zusatzes. — Wir wollen einstweilen annehmen, es existirten *zwei* jenen Formeln (12.), (13.), (14.) entsprechende Potentiale φ' und φ'':

$$(\alpha.)\qquad \varphi' = \int_{\mathfrak{U}} \frac{(\sigma)' D\nu}{r} \quad \text{und} \quad \varphi'' = \int_{\mathfrak{U}} \frac{(\sigma)'' D\nu}{r};$$

sodass also z. B. für die Differenz Φ dieser beiden Potentiale die Formel stattfindet:

$$(\beta.)\qquad \Phi = \varphi' - \varphi'' = \int_{\mathfrak{U}} \frac{[(\sigma)' - (\sigma)''] D\nu}{r}.$$

Alsdann ist nach (13.): $\varphi_h' - \varphi_j' = [\mathfrak{K}_h, \mathfrak{K}_j]$, und $\varphi_h'' - \varphi_j''$ ebenfalls $= [\mathfrak{K}_h, \mathfrak{K}_j]$, folglich $\Phi_h - \Phi_j = 0$. Kurz, man gelangt alsdann,

auf Grund der Formeln (13.), (14.), für die Differenz $\Phi = \varphi' - \varphi''$ zu folgenden Gleichungen:

$$(\gamma.) \qquad \Phi_h - \Phi_j = 0 \quad \text{und} \quad \lambda_h \frac{\partial \Phi_h}{\partial n_h} + \lambda_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial n_j} = 0,$$

$$(\delta.) \qquad \Phi_h - \Phi_0 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Phi_h}{\partial n_h} = 0.$$

Nun ist nach einem bekannten Green'schen Satz*):

$$(\varepsilon.) \qquad \int\limits_{\mathfrak{K}_h} \square\, \Phi_h \,.\, D\mathrm{v}_h = -\int\limits_{\mathfrak{K}_h} \Phi_h \frac{\partial \Phi_h}{\partial n_h} Do_h, \qquad (h = 1, 2, \ldots n)$$

die Integrationen links und rechts ausgedehnt gedacht über alle Volumelemente $D\mathrm{v}_h$, respective über alle Oberflächenelemente Do_h des Körpers $\mathfrak{K}_h$; wobei indessen die der äussern Oberfläche des ringförmigen Conductors zugehörigen Elemente Do_h fortzulassen sind, weil für diese [vgl. (δ.)] die Ableitung $\frac{\partial \Phi_h}{\partial n_h} = 0$ ist.

Diese Fortlassung ausgeführt gedacht, multipliciren wir nun die Formel (ε.) mit λ_h, und summiren sodann die Formel über alle Körper $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3, \ldots \mathfrak{K}_n$ des gegebenen ringförmigen Conductors $\mathfrak{K}$. So ergiebt sich, wie leicht zu übersehen ist, folgende Gleichung:

$$(\zeta.) \quad \sum_{h=1}^{n} \left\{ \lambda_h \int\limits_{\mathfrak{K}_h} \square\, \Phi_h \,.\, D\mathrm{v}_h \right\} = -\sum \left\{ \int \left(\lambda_h \Phi_h \frac{\partial \Phi_h}{\partial n_h} + \lambda_j \Phi_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial n_j} \right) Do_{hj} \right\},$$

die Summe rechter Hand ausgedehnt gedacht über die auf einanderfolgenden innern Zusammensetzungsflächen $(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2)$, $(\mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3)$, $(\mathfrak{K}_3, \mathfrak{K}_4), \ldots (\mathfrak{K}_{n-1}, \mathfrak{K}_n)$, $(\mathfrak{K}_n, \mathfrak{K}_1)$; dabei sind die einzelnen Elemente einer solchen Fläche $(\mathfrak{K}_h, \mathfrak{K}_j)$ bezeichnet mit Do_{hj}. Die in der Formel (ζ.) mit den einzelnen Do_{hj} multiplicirten Ausdrücke

$$\lambda_h \Phi_h \frac{\partial \Phi_h}{\partial n_h} + \lambda_j \Phi_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial n_j}$$

sind aber sämmtlich $= 0$, wie sich solches aus (γ.) sofort ergiebt. Folglich reducirt sich die Formel (ζ.) auf:

$$(\eta.) \qquad \sum_{h=1}^{n} \left\{ \lambda_h \int\limits_{\mathfrak{K}_h} \square\, \Phi_h \,.\, D\mathrm{v}_h \right\} = 0.$$

*) Unter $\square$ und Δ sind [ebenso wie in Abh. I] die Ausdrücke zu verstehen:

$$\square = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 \quad \text{und} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Hieraus aber folgt, dass Φ in jedem der Körper $\mathfrak{K}_h (h = 1, 2, \ldots n)$ *constant* ist. Auch ergiebt sich aus der ersten der beiden Formeln (γ.), dass alle diese den Körpern $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots \mathfrak{K}_n$ entsprechenden constanten Werthe einander gleich sind. Im ganzen ringförmigen Conductor $\mathfrak{K}$ wird mithin Φ, oder, was dasselbe ist, $\varphi' - \varphi''$ allenthalben gleich ein und derselben unbekannten Constanten sein. D. h.: φ ist im Innern des ganzen Conductors eindeutig bestimmt bis auf eine noch unbekannte additive Constante.

Oder genauer ausgedrückt: Wir sehen, dass die Werthe $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$, welche das Potential φ innerhalb der einzelnen Körper $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots \mathfrak{K}_n$ besitzt, durch die Formeln (12.), (13.), (14.) eindeutig bestimmt sind, bis auf eine all' diesen Werthen gemeinschaftliche, noch unbekannte additive Constante K. — Q. e. d.

Wir gehen weiter. — Da nun der Werth des Potentials φ innerhalb des ringförmigen Conductors $\mathfrak{K}$ durch die Formeln (12.), (13.), (14.) eindentig bestimmt ist, bis auf eine noch unbekannte Constante K, so wird Gleiches z. B. auch von denjenigen Werthen gelten, welche φ an der *äussern Oberfläche* des ringförmigen Conductors besitzt, wobei man unter dieser Oberfläche nach Belieben die innere oder die äussere Parallelfläche der betreffenden Uebergangsschicht verstehen kann; denn nach (14.) ist für diese Uebergangsschicht $\varphi_h = \varphi_0$. Demgemäss ergiebt sich folgender

Zweiter Zusatz. *Zufolge der Formeln* (12.), (13.), (14.) *werden die Werthe von* φ *im Innern und an der äussern Oberfläche des ringförmigen Conductors* $\mathfrak{K}$ *von der Gestalt sein:*

$$\varphi = f + K, \tag{15.}$$

wo f eine völlig bestimmte Function der Coordinaten vorstellt, während K eine unbekannte Constante bezeichnet. — Hieraus aber und mit Hinblick auf die Formeln (12.), (14.) *ergiebt sich [mittelst bekannter Sätze der allgemeinen Potentialtheorie] sofort, dass das in Rede stehende Potential im Aussenraum des Conductors $\mathfrak{K}$, d. i. in der Luft $\mathfrak{K}_0$ Werthe besitzen wird von der Gestalt:*

$$\varphi_0 = f_0 + KF_0, \tag{16.}$$

wo f_0 und F_0 ganz bestimmte Functionen der Coordinaten sind, während K dieselbe Constante vorstellt wie in (15.).

Schliesslich kann man nun auch noch jene Constante K bestimmen. Nach einem allgemeinen Satz der Potentialtheorie ist nämlich:

(17.) $$-4\pi(E) = \int_{\mathfrak{K}} \frac{\partial \varphi_0}{\partial n_0} Do,$$

wo (E) die in dem ganzen Conductor $\mathfrak{K}$ enthaltene Menge *freier* Elektricität vorstellt; dabei ist die Integration rechter Hand ausgedehnt zu denken über alle Elemente Do der äussern Oberfläche des Conductors $\mathfrak{K}$; und zwar bezeichnet n_0 die auf Do errichtete in die umgebende Luft $\mathfrak{K}_0$ hineinlaufende Normale. Nach S. 769 (3a.) ist aber:

(18.) $$(E) = \frac{E}{\varepsilon_0},$$

wo E die in dem Conductor $\mathfrak{K}$ enthaltene *wahre* Elektricität vorstellt. Demgemäss kann man die Formel (17.) auch so schreiben:

(19.) $$-\frac{4\pi E}{\varepsilon_0} = \int_{\mathfrak{K}} \frac{\partial \varphi_0}{\partial n_0} Do.$$

Die Menge E denken wir uns von Hause aus *in bestimmter Weise gegeben*. Demgemäss wird sich die Formel (19.), indem man in ihr für φ_0 seinen Werth (16.) substituirt, anwenden lassen zur Berechnung der Constante K.

§ 29.

Fortsetzung. Die elektrischen Dichtigkeiten, und die elektrischen Zustände und Strömungen.

Wir haben gesehen, wie man auf Grund der Formeln (12.), (13.), (14.) das Potential φ zu bestimmen vermag. Diese Bestimmung ausgeführt gedacht, wird man alsdann auch die elektrischen Dichtigkeiten σ, (σ), ferner die elektrischen Zustände $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ und die elektrischen Strömungen u, v, w näher anzugeben im Stande sein; wie solches im gegenwärtigen Paragraph gezeigt werden soll.

Nach den Hertz'schen Gleichungen [S. 771 (7.)] ist in jedwedem Puncte (x, y, z) des ganzen unendlichen Raumes:

(20.) $$\mathfrak{X} = -\varepsilon\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \mathfrak{Y} = -\varepsilon\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \mathfrak{Z} = -\varepsilon\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Substituirt man diese Werthe in den allgemeinen Hertz'schen Formeln Abh. I, S. 268 (2.), (1.), so erhält man sofort:

(21.) $$\begin{cases} -4\pi(\sigma) = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \\ -4\pi\sigma = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}\right); \end{cases}$$

und hieraus folgt durch Integration über irgend einen ganz *ad libitum* construirten Raum $\mathfrak{R}$:

$$(22.)\quad \begin{cases} -4\pi \int\limits_{\mathfrak{R}} (\sigma) D\mathrm{v} = \int\limits_{\mathfrak{R}} \frac{\partial \varphi}{\partial n} Do, \\ -4\pi \int\limits_{\mathfrak{R}} \sigma\, D\mathrm{v} = \int\limits_{\mathfrak{R}} \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} Do, \end{cases}$$

die Integrationen ausgedehnt gedacht über alle Volumelemente $D\mathrm{v}$, respective über alle Oberflächenelemente Do des Raumes $\mathfrak{R}$; dabei bezeichnet n die auf Do errichtete *äussere* Normale.

Bringt man diese Formeln (22.) auf jene scheibenförmigen Elemente in Anwendung, in welche die Uebergangsschicht $(\mathfrak{K}_h, \mathfrak{K}_j)$ von uns zerlegt worden ist, indem man für $\mathfrak{R}$ den Innenraum eines solchen scheibenförmigen Elementes nimmt, so erhält man:

$$(23.)\quad -4\pi (S_{hj}) Do_{hj} = \left(\frac{\partial \varphi_h}{\partial n_h} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial n_j}\right) Do_{hj},$$

$$(24.)\quad -4\pi S_{hj} Do_{hj} = \left(\varepsilon_h \frac{\partial \varphi_h}{\partial n_h} + \varepsilon_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial n_j}\right) Do_{hj},$$

wo Do_{hj} die gemeinschaftliche Grösse der beiden einander parallelen Flächenstücke vorstellen soll, zwischen denen jenes scheibenförmige Element gelegen ist. Dabei bezeichnen $(S_{hj}) Do_{hj}$ und $S_{hj} Do_{hj}$ die innerhalb des scheibenförmigen Elementes enthaltenen Mengen freier und wahrer Elektricität; während n_h und n_j die auf den beiden Flächenstücken Do_{hj} errichteten respective in das Innere von $\mathfrak{K}_h$ und in das Innere von $\mathfrak{K}_j$ hineinlaufenden Normalen sein sollen. Zu diesen Formeln (23.), (24.) können hinzugefügt werden die früheren Formeln (13.):

$$(25.)\quad \varphi_h - \varphi_j = [\mathfrak{K}_h, \mathfrak{K}_j] \quad \text{und} \quad \lambda_h \frac{\partial \varphi_h}{\partial n_h} + \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial n_j} = 0.$$

Aus der ersten dieser beiden Formeln (25.) folgt, dass die freie elektrische Belegung der Fläche $(\mathfrak{K}_h, \mathfrak{K}_j)$ eine *einfache*, oder *zusammengesetzte* sein wird, je nachdem der constante Spannungsunterschied $[\mathfrak{K}_h, \mathfrak{K}_j]$ gleich Null, oder verschieden von Null ist.

Bringt man die Formeln (23.), (24.), (25.) in Anwendung auf den spezielleren Fall $j = 0$, so ergiebt sich [vgl. (6.)]:

$$(\alpha.)\quad -4\pi (S_{h0}) Do_{h0} = \left(\frac{\partial \varphi_h}{\partial n_h} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial n_0}\right) Do_{h0},$$

$$(\beta.)\quad -4\pi S_{h0} Do_{h0} = \left(\varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_h}{\partial n_h} + \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial n_0}\right) Do_{h0},$$

$$(\gamma.)\quad \varphi_h - \varphi_0 = 0 \quad \text{und} \quad \lambda_h \frac{\partial \varphi_h}{\partial n_h} = 0,$$

weil $\lambda_0 = 0$ ist. Vermöge der letzten Gleichung (γ.) vereinfachen sich die Gleichungen (α.), (β.). Schreibt man also schliesslich (S), S, Do im gegenwärtigen Falle an Stelle von (S_{h0}), S_{h0}, Do_{h0}, so erhält man die Formeln:

$$\left.\begin{array}{ll} (26.) & -4\pi(S)Do = \frac{\partial \varphi_0}{\partial n_0} Do, \\ (27.) & -4\pi\ S\ Do = \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial n_0} Do, \\ (28.) & \varphi_h - \varphi_0 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varphi_h}{\partial n_h} = 0 \end{array}\right\} \text{auf jeder Fläche } (\mathfrak{K}_h, \mathfrak{K}_0).$$

Diese Gleichungen (26.), (27.), (28.) beziehen sich also auf irgend ein Element Do_{h0} oder Do der *äusseren* Oberfläche des Conductors $\mathfrak{K}$; und n_0 und n_h bezeichnen die beiden auf Do errichteten, von einander abgewendeten Normalen; der Art. dass n_0 in die umgebende Luft $\mathfrak{K}_0$ hineingeht. Die erste der Formeln (28.) zeigt, dass die freie elektrische Belegung dieser äusseren Oberfläche eine *einfache* ist; und demgemäss wird es z. B. erlaubt sein, in (26.) den Factor (S) zu bezeichnen als die *Flächendichtigkeit* dieser auf Do ausgebreiteten freien Elektricität.

Was nun ferner die *elektrischen Zustände* $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ und die *elektrischen Strömungen* u, v, w anbelangt, so gelten für die erstern die Formeln [Seite 771 (7.)]:

$$(29.) \qquad \mathfrak{X} = -\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \mathfrak{Y} = -\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \mathfrak{Z} = -\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial z};$$

und für die letzteren gelten, je nach Umständen, bald die Formeln:

$$(30.) \quad u = -\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \lambda X', \quad v = -\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \lambda Y', \quad w = -\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \lambda Z',$$

bald die Formeln:

$$(31.) \qquad u = -\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = -\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = -\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Es werden nämlich [vgl. S. 771 (7.), (8.), (9.)] die Formeln (29.), (30.) ganz allgemein gelten für jedweden Punct (x, y, z) des ganzen unendlichen Raumes; während die Formeln (31.) nur dann Gültigkeit haben, wenn der betrachtete Punct (x, y, z) *ausserhalb der Uebergangsschichten* gelegen ist.

Die u, v, w sind die Strömungscomponenten der *wahren* Elektricität [vgl. Abh. I, S. 273]; und diese wahre Elektricität bewegt sich im Innern des ringförmigen Conductors $\mathfrak{K}$ *nach Art einer incompressiblen Flüssigkeit* [vgl. S. 763]; auch kann sie aus der äusseren Oberfläche des Conductors nirgends heraustreten; so

dass sie also fortdauernd im Innern des Conductors zu bleiben gezwungen ist. Hieraus folgt, dass durch alle Querschnitte des ringförmigen Conductors $\mathfrak{R}$ während der Zeiteinheit ein gleich grosses Quantum wahrer Elektricität hindurchgeht. Dieses Quantum kann kurzweg die *Stromstärke des Ringes* $\mathfrak{R}$ genannt werden, und mag mit J bezeichnet werden. Construirt man also irgend einen (ebenen oder krummen) Querschnitt O des Ringes $\mathfrak{R}$, so wird J den Werth haben:

$$(32.)\qquad J = \int [u\cos(N, x) + v\cos(N, y) + w\cos(N, z)]\, DO,$$

die Integration ausgedehnt gedacht über alle Elemente DO des Querschnittes O. Dabei repräsentirt N die Normale des Elementes DO; und zwar wird es gut sein, die Richtung dieser Normale N so zu wählen, dass J einen *positiven* Werth hat. Solches festgesetzt, wird also J geradezu der *positive Werth der Stromstärke* sein; auch wird alsdann durch die Normale N die Richtung des Stromes wenigstens *angedeutet* sein.*)

Da nun die wahre Elektricität sich im Ringe $\mathfrak{R}$ nach Art einer incompressiblen Flüssigkeit bewegt, so wird die Stromstärke J für den Querschnitt O genau denselben Werth haben wie für jeden andern Querschnitt O_1 des Ringes $\mathfrak{R}$. Dass solches der Fall ist, kann man auch direct nachweisen durch folgende Betrachtung.

Man lasse den Querschnitt O *in der Richtung* N im Innern des Ringes $\mathfrak{R}$ weiter vorrücken (wobei gleichzeitig Gestalt und Grösse von O sich ändern werden), und verwandele in solcher Weise den Querschnitt O in irgend einen andern Querschnitt O_1 mit der Normale N_1. Alsdann wird N eine *innere*, hingegen N_1 eine *äussere* Normale derjenigen Oberfläche sein, von welcher das zwischen O und O_1 befindliche Segment des Ringes $\mathfrak{R}$ umgrenzt ist; und die ganze Grösse dieser Oberfläche wird den Werth haben:

$$(33.)\qquad O + O_1 + \omega,$$

wo ω einen gewissen Theil der äusseren Oberfläche des Ringes $\mathfrak{R}$ vorstellt. — Bringt man nun die allgemeine Formel S. 763 (12.) in Anwendung auf den von dieser Fläche $O + O_1 + \omega$ umgrenzten Raum, so erhält man:

*) Es ist zu beachten, dass N nicht unmittelbar die Richtung des Stromes angiebt, sondern im Allgemeinen gegen diese Richtung unter irgend welchem Winkel geneigt sein wird.

$$(34.)\quad \left\{\begin{array}{l} -\int [u\cos(N,x) + v\cos(N,y) + w\cos(N,z)]\,DO \\ +\int [u\cos(N_1,x) + v\cos(N_1,y) + w\cos(N_1,z)]\,DO_1 \\ +\int [u\cos(\nu,x) + v\cos(\nu,y) + w\cos(\nu,z)]\,D\omega \end{array}\right\} = 0,$$

die Integrationen ausgedehnt gedacht über alle Elemente DO, DO_1 und $D\omega$ der Flächen O, O_1 und ω; dabei bezeichnet ν die äussere Normale des Elementes $D\omega$.

Das letzte der Integrale (34.) ist aber $= 0$, nach S. 764 (14.). Beachtet man dies, und substituirt man zugleich für das erste jener Integrale seinen Werth J (32.), so gewinnt die Formel (34.) folgende Gestalt:

$$(35.)\quad J = \int [u\cos(N_1,x) + v\cos(N_1,y) + w\cos(N_1,z)]\,DO_1.$$

Q. e. d.

§ 30.

Fortsetzung. Die Vertheilung der freien Magnetismen und das von denselben herrührende Potential ψ.

Um auf die *magnetischen* Verhältnisse in dem betrachteten Ringe $\mathfrak{R}$ und in seiner Umgebung näher eingehen zu können, müssen wir zunächst recapituliren und vervollständigen, was wir über die *elektrischen* Verhältnisse uns zurechtgelegt haben. In den Sätzen S. 772—774 haben wir die allgemeinen Regeln kennen gelernt, mit deren Hülfe das elektrische Potential φ zu berechnen ist. Und wir können daher fortan dieses Potential φ als *bekannt*, als *bereits berechnet* uns vorstellen, als eine *feste Grundlage* für unsere weiteren Untersuchungen. Alsdann aber sind die $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ und u, v, w ebenfalls *bekannt*, vermöge der Formeln S. 777:

$$(1.)\qquad \mathfrak{X} = -\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad \mathfrak{Y} = -\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad \mathfrak{Z} = -\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

und

$$(2.)\quad u = -\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \lambda X',\quad v = -\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \lambda Y',\quad w = -\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \lambda Z'.$$

Bekannt werden folglich auch sein die Werthe der drei Integrale:

$$(3.)\qquad U = \int_{\mathfrak{R}} \frac{u_1 D\nu_1}{r},\quad V = \int_{\mathfrak{R}} \frac{v_1 D\nu_1}{r},\quad W = \int_{\mathfrak{R}} \frac{w_1 D\nu_1}{r},$$

die Integrationen ausgedehnt gedacht über alle Elemente Dv_1 des gegebenen ringförmigen Conductors $\mathfrak{K}$. Und *bekannt* werden daher endlich auch sein die aus den U, V, W abgeleiteten Functionen*):

$$(4.)\quad \xi = -A\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right),\quad \eta = -A\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right),\quad \zeta = -A\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right),$$

und der Ausdruck:

$$(5.)\qquad \Pi = \xi\cos(n,x) + \eta\cos(n,y) + \zeta\cos(n,z),$$

wo n irgend eine vom Puncte (x, y, z) ausgehenden Richtung vorstellt; so dass also dieser Ausdruck Π abhängig ist von den im Puncte (x, y, z) vorhandenen Werthen der Functionen ξ, η, ζ, und daneben von jener Richtung n.

In Betreff all' dieser *bereits bekannten* Functionen (1.), (2.), (3.), (4.), (5.) sei noch Folgendes bemerkt: Irgend eine Kugelfläche kann durch Herausnahme einer sehr kleinen Calotte in eine *ungeschlossene* Fläche verwandelt werden, deren Rand alsdann ein sehr kleiner Kreis ist. In analoger Weise wollen wir uns nun eine ungeschlossene Fläche Ω von ganz beliebiger Gestalt denken, deren Rand ebenfalls durch eine äusserst kleine Curve dargestellt sein soll. Das über alle Elemente Do dieser Fläche Ω ausgedehnte Integral

$$(\alpha.)\int\left[\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right)\cos(n,x) + \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right)\cos(n,y) + \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)\cos(n,z)\right] Do,$$

in welchem n die auf Do errichtete Normale sein soll, wird alsdann nach dem STOKES'schen Satz gleichwerthig sein mit dem Integral

$$(\beta.)\qquad \int (U Dx + V Dy + W Dz),$$

letzteres hinerstreckt gedacht über alle Linienelemente (Dx, Dy, Dz) jener sehr kleinen die Fläche Ω begrenzenden Randcurve. Lassen wir nun schliesslich diese Randcurve unendlich klein werden, so wird das Integral (β.), mithin auch das Integral (α.) zu *Null* werden. — Wir gelangen somit zu der Einsicht, dass das Integral (α.) für eine *geschlossene* Fläche Ω stets $= 0$ ist; und wir ge-

*) Die durch (3.), (4.) definirten Functionen U, V, W, $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$, $\frac{\partial V}{\partial x}$, etc. und ξ, η, ζ sind *allenthalben stetig*. Denn die U, V, W (3.) können angesehen werden als Potentiale gewisser Massenvertheilungen, deren räumliche Dichtigkeiten überall endlich sind.

langen daher, unter Anwendung der Bezeichnungen (4.) zu folgendem Satz:

Für eine im Raume ganz beliebig construirte geschlossene Fläche Ω gilt stets die Formel:

$$(6.)\qquad \int [\xi \cos(n, x) + \eta \cos(n, y) + \zeta \cos(n, z)]\, Do = 0,$$

die Integration ausgedehnt gedacht über alle Elemente Do der Fläche Ω; dabei bezeichnet n die auf Do errichtete Normale. — Unter Anwendung der Abreviatur Π (5.) *gewinnt diese Formel* (6.) *die einfachere Gestalt:*

$$(7.)\qquad \int \Pi\, Do = 0.$$

In dem gegebenen ringförmigen Conductor $\mathfrak{K}$ und in der ihn umgebenden Luft $\mathfrak{K}_0$ werden nun möglicherweise, zur Zeit des hier betrachteten stationären Zustandes, irgend welche *magnetischen Zustände* vorhanden sein. Um solches zu ergründen, bedienen wir uns der für die $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ geltenden Gleichungen S. 761 (4.):

$$(8.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\mathfrak{N}}{\mu} - \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\mathfrak{M}}{\mu} = 4\pi A u, \\ \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\mathfrak{L}}{\mu} - \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\mathfrak{N}}{\mu} = 4\pi A v, \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\mathfrak{M}}{\mu} - \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\mathfrak{L}}{\mu} = 4\pi A w, \end{cases}$$

Uebrigens gelten für die $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ auch die Gleichungen S. 762 (6.); und diese letzteren gewinnen, mit Rücksicht auf unsere gegenwärtigen Bezeichnungen (4.), die Gestalt:

$$(9.)\qquad \frac{\mathfrak{L}}{\mu} = -\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \xi\right), \quad \frac{\mathfrak{M}}{\mu} = -\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + \eta\right), \quad \frac{\mathfrak{N}}{\mu} = -\left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + \zeta\right).$$

Da die ξ, η, ζ zu den *bereits bekannten* Functionen gehören, so wird man mittelst dieser Gleichungen (9.) die magnetischen Zustände $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ näher zu bestimmen im Stande sein, falls es nur gelingt, die Function ψ zu ermitteln.

Nun repräsentirt ψ das Potential aller im ganzen unendlichen Raume vorhandenen *freien* Magnetismen. Der Einfachheit willen mag weiterhin vorausgesetzt werden, dass die betrachteten Substanzen $\mathfrak{K}_0$ und $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2 \cdots + \mathfrak{K}_n$ durchweg nur *temporär magnetischer* Natur sind. Alsdann werden allenthalben im ganzen unendlichen Raum die Formeln [Abh. I, S. 284] gelten:

$$(10.)\qquad \tau = 0 \quad \text{und} \quad T = 0.$$

Diese Formeln beziehen sich auf den *wahren* Magnetismus. Was andererseits den *freien* Magnetismus betrifft, so ist im Homogenen: $(\tau) = \frac{\tau}{\mu}$ [Abh. I, S. 281], also nach (10.):

$$(11.) \qquad (\tau) = 0, \quad \text{hingegen} \quad (T) = ?$$

Freier Magnetismus kann also nur allein in den Uebergangsschichten sich vorfinden. Und das Potential ψ aller überhaupt vorhandenen freien Magnetismen wird daher [ähnlich wie das elektrische Potential φ, Seite 770 (4.)] darstellbar sein durch eine Formel von folgender Gestalt:

$$(12.) \qquad \psi = \int_{\mathfrak{U}} \frac{(\tau)\, Dv}{r},$$

die Integration ausgedehnt gedacht über all' diejenigen *unendlich kleinen* Volumelemente Dv, aus denen die Gesammtheit $\mathfrak{U}$ der Uebergangsschichten besteht.

Nun ist aber an jeder Uebergangsschicht: $\psi_b - \psi_a = 0$ [nach Seite 767 (28.)]. Oder mit andern Worten: Für die hier vorhandenen Uebergangsschichten $(\mathfrak{K}_h, \mathfrak{K}_0)$ und $(\mathfrak{K}_h, \mathfrak{K}_j)$ werden die Formeln gelten:

$$(13.) \qquad \psi_h - \psi_0 = 0 \quad \text{und} \quad \psi_h - \psi_j = 0.$$

Und hieraus erkennt man sofort, dass jene in den Uebergangsschichten sitzenden freien Magnetismen angesehen werden können als gewöhnliche *einfache* Belegungen der betreffenden Grenzflächen: so dass man also der Formel (12.) die Gestalt geben kann:

$$(14.) \qquad \psi = \int \frac{(T)\, Do}{r} + \sum \left\{ \int \frac{(T_{hj})\, Do_{hj}}{r} \right\};$$

hier ist das vordere Integral ausgedehnt über die äussere Oberfläche $(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}_0)$ des ringförmigen Conductors, während die übrigen Integrale auf die einzelnen innern Zusammensetzungsflächen $(\mathfrak{K}_h, \mathfrak{K}_j)$ sich beziehen; die Do und Do_{hj} sind die betreffenden Flächenelemente, während die (T) und (T_{hj}) die betreffenden Flächendichtigkeiten darstellen.

Eine weitere Eigenschaft des Potentiales ψ ergiebt sich aus der allgemeinen Formel [Abh. I, Seite 281 (I.)]:

$$4\pi\tau = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial z}.$$

Aus dieser folgt sofort:

$$4\pi\int_{\mathfrak{R}} \tau\, Dv = \int_{\mathfrak{R}} [\mathfrak{L}\cos(n,x) + \mathfrak{M}\cos(n,y) + \mathfrak{N}\cos(n,z)]\, Do,$$

die Integrationen ausgedehnt gedacht über alle Volum- und Oberflächenelemente Dv und Do eines ganz beliebig construirten Raumes $\mathfrak{R}$; dabei bezeichnet n die auf Do errichtete *äussere* Normale. Denkt man sich nun die Uebergangsschicht $(\mathfrak{K}_h, \mathfrak{K}_j)$ in lauter scheibenförmige Elemente zerlegt, und bringt man die letzte Formel in Anwendung auf den Innenraum $\mathfrak{R}$ eines solchen scheibenförmigen Elementes, so erhält man (unter Vernachlässigung der verschwindend schmalen gürtelförmigen Fläche) folgende Gleichung:

$$(15.)\quad 4\pi T_{hj}\, Do_{hj} = \begin{Bmatrix} +\mathfrak{L}_h\cos(n_h,x) + \mathfrak{M}_h\cos(n_h,y) + \mathfrak{N}_h\cos(n_h,z) \\ +\mathfrak{L}_j\cos(n_j,x) + \mathfrak{M}_j\cos(n_j,y) + \mathfrak{N}_j\cos(n_j,z) \end{Bmatrix} Do_{hj}.$$

Hier bezeichnet Do_{hj} die gemeinschaftliche Grösse derjenigen beiden Flächenstücke, zwischen denen das betrachtete scheibenförmige Element gelegen ist, während $T_{hj}Do_{hj}$ die in diesem Element enthaltene Menge von *wahrem* Magnetismus vorstellt. Wahrer Magnetismus aber ist nach (10.) nirgends vorhanden, mithin $T_{hj}Do_{hj} = 0$. Demgemäss wird die Formel (15.), indem man zugleich für die $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ die Werthe (9.) substituirt die Gestalt annehmen:

$$(16.)\qquad 0 = \begin{vmatrix} +\mu_h\dfrac{\partial\psi_h}{\partial n_h} + \mu_h[\xi_h\cos(n_h,x) + \cdots] \\ +\mu_j\dfrac{\partial\psi_j}{\partial n_j} + \mu_j[\xi_j\cos(n_j,x) + \cdots] \end{vmatrix};$$

und hieraus endlich folgt, unter Anwendung der Abbreviatur Π (5.):

$$(17.)\qquad 0 = \left(\mu_h\frac{\partial\psi_h}{\partial n_h} + \mu_j\frac{\partial\psi_j}{\partial n_j}\right) + (\mu_h\Pi_h + \mu_j\Pi_j).$$

Hier ist alsdann:

$$(18.)\qquad \begin{aligned} \Pi_h &= \xi_h\cos(n_h,x) + \eta_h\cos(n_h,y) + \zeta_h\cos(n_h,z), \\ \Pi_j &= \xi_j\cos(n_j,x) + \eta_j\cos(n_j,y) + \zeta_j\cos(n_j,z), \end{aligned}$$

und folglich*):

$$(19.)\qquad \Pi_h + \Pi_j = 0.$$

Diese Formeln (15.), (16.), (17.), (18.), (19.) gelten offenbar

*) Denn die in (15.), (16.) etc. enthaltenen Richtungen n_h und n_j sind einander entgegengesetzt; und überdies sind die Functionen ξ, η, ζ allenthalben stetig [vgl. die Note Seite 780.]

für *alle* Uebergangsschichten $(\mathfrak{K}_h, \mathfrak{K}_j)$, also z. B. auch für die Schicht $(\mathfrak{K}_h, \mathfrak{K}_0)$; sodass man also zu folgendem Resultat gelangt:

Resultat. — *Wir haben vorausgesetzt (Seite 781), dass die Substanzen $\mathfrak{K}_0$ und $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2 + \cdots + \mathfrak{K}_n$ alle nur temporär-magnetischer Natur sind. Alsdann aber wird nirgends auch nur eine Spur von wahrem Magnetismus vorhanden sein [vgl. (10)]. Auch wird alsdann, zur Zeit des hier betrachteten stationären Zustandes, freier Magnetismus nur allein in den Uebergangsschichten anzutreffen sein. Demgemäss wird das von diesem freien Magnetismus herrührende Potential ψ [vgl. (14.)] einen Werth besitzen von folgender Gestalt:*

$$(20.)\qquad \psi = \int \frac{(T)\,Do}{r} + \sum \left\{ \int \frac{(T_{hj})\,Do_{hj}}{r} \right\}, \qquad (h, j = 1, 2, 3, \ldots n),$$

wo Do und Do_{hj} die Elemente der äusseren Oberfläche des ringförmigen Conductors $\mathfrak{K}$ und die Elemente seiner inneren Zusammensetzungsflächen vorstellen, während (T) und (T_{hj}) die betreffenden freien magnetischen Flächendichtigkeiten bezeichnen.

Für das Potential ψ gelten an den Flächen $(\mathfrak{K}_h, \mathfrak{K}_j)$ die vorhin aufgestellten Formeln (13.), (17.):

$$(21.)\qquad \psi_h = \psi_j \quad und \quad \left(\mu_h \frac{\partial \psi}{\partial n_h} + \mu_j \frac{\partial \psi}{\partial n_j}\right) + (\mu_h \Pi_h + \mu_j \Pi_j) = 0.^{*)}$$

So z. B. werden für $j = 0$, d. i. für die Fläche $(\mathfrak{K}_h, \mathfrak{K}_0)$ folgende Formeln gelten:

$$(22.)\qquad \psi_h = \psi_0 \quad und \quad \left(\mu_h \frac{\partial \psi}{\partial n_h} + \mu_0 \frac{\partial \psi}{\partial n_0}\right) + (\mu_h \Pi_h + \mu_0 \Pi_0) = 0.$$

Die in (21.) auftretenden Grössen Π_h und Π_j sind nach (19.) einander entgegengesetzt gleich; sodass also z. B. das letzte in (21.) auftretende Binom auch so darstellbar ist:

$$(23.)\qquad \mu_h \Pi_h + \mu_j \Pi_j = (\mu_h - \mu_j)\,\Pi_h = (\mu_j - \mu_h)\,\Pi_j .$$

Analoges gilt für das letzte Binom der Formel (22.). Es ist nämlich:

$$\mu_h \Pi_h + \mu_0 \Pi_0 = (\mu_h - \mu_0)\,\Pi_h = (\mu_0 - \mu_h)\,\Pi_0 .$$

Zusatz. — *Die Functionen Π gehören zu jenen bereits bekannten Functionen (1.), (2), (3), (4.), (5.), von denen zu Anfang dieses Paragraphs die Rede war. Und mit Rücksicht hierauf kann man*

---

*) Nach (13.) ist: $\psi_h = \psi_j$. Demgemäss sind jene in (17.) auftretenden Ableitungen $\frac{\partial \psi_h}{\partial n_h}$ und $\frac{\partial \psi_j}{\partial n_j}$ hier in (21.) kurzweg mit $\frac{\partial \psi}{\partial n_h}$ und $\frac{\partial \psi}{\partial n_j}$ bezeichnet worden. Analoges ist bei (22.) zu bemerken. U. s. w.

sagen, dass das Potential ψ durch die Formeln (20.), (21.), (22.) *im ganzen unendlichen Raum überall eindeutig bestimmt ist.*

Beweis des Zusatzes. — Wir wollen annehmen, es existirten *zwei* den Formeln (20.), (21.), (22) genügende Potentiale ψ' und ψ'':

$$(\alpha.)\qquad \psi' = \int \frac{(T)' Do}{r} + \sum \int \frac{(T_{hj})' Do_{hj}}{r},$$

$$(\beta.)\qquad \psi'' = \int \frac{(T)'' Do}{r} + \sum \int \frac{(T_{hj})'' Do_{hj}}{r}, \qquad (h, j = 1, 2, \ldots n);$$

so dass also die Differenz $\Psi = \psi' - \psi''$ wiederum ein Potential derselben Art sein wird:

$$(\gamma.)\quad \Psi = \psi' - \psi'' = \int \frac{[(T)' - (T)''] Do}{r} + \sum \int \frac{[(T_{hj})' - (T_{hj})''] Do_{hj}}{r}, \quad (h, j = 1, 2, \ldots n).$$

Für dieses neue Potential $\Psi = \psi' - \psi''$ ergeben sich aus (21.) und (22.) die Formeln:

$$(\delta.)\qquad \Psi_h = \Psi_j \quad \text{und} \quad \mu_h \frac{\partial \Psi}{\partial n_h} + \mu_j \frac{\partial \Psi}{\partial n_j} = 0,$$

$$(\varepsilon.)\qquad \Psi_h = \Psi_0 \quad \text{und} \quad \mu_h \frac{\partial \Psi}{\partial n_h} + \mu_0 \frac{\partial \Psi}{\partial n_0} = 0.$$

Nun werden nach bekannten Green'schen Sätzen folgende Gleichungen gelten*):

$$\int_{\mathfrak{K}_0} \Box \Psi \cdot D\mathrm{v} = -\int_{\mathfrak{K}_0} \Psi_0 \frac{\partial \Psi}{\partial n_0} Do,$$

$$\int_{\mathfrak{K}_h} \Box \Psi \cdot D\mathrm{v} = -\int_{\mathfrak{K}_h} \Psi_h \frac{\partial \Psi}{\partial n_h} Do,$$

wo n_0 und n_h die *inneren* Normalen der Körper $\mathfrak{K}_0$ und $\mathfrak{K}_h$, (d. h. der Oberflächen dieser Körper) sind; sodass also n_0 und n_h hier dieselben Bedeutungen besitzen wie z. B. in (δ.) und (ε.). Aus diesen beiden Green'schen Gleichungen ergiebt sich, durch Multiplication und μ_0 und μ_h und Summation, eine Formel, der man [mit Rücksicht auf die in (δ.), (ε.) notirten Relationen $\Psi_h = \Psi_j$ und $\Psi_h = \Psi_0$] folgende Gestalt geben kann:

*) Die erste dieser beiden Gleichungen kann, obwohl die Substanz $\mathfrak{K}_0$ nach allen Seiten ins Unendliche sich ausdehnt, keinem Zweifel unterliegen. Denn es ist zu beachten, dass Ψ die in (γ.) angegebene Bedeutung hat, und dass daher für unendlich ferne Punkte $\Psi = \frac{C}{\varrho}$ ist, wo C eine Constante vorstellt, während ϱ den Abstand eines solchen unendlich fernen Punktes vom Anfangspunkt des Coordinatensystems bezeichnen soll.

$$(\zeta.)\qquad \mu_0\int\limits_{\mathfrak{K}_0}\Box\Psi\cdot D\mathrm{v}+\sum_{h=1}^{n}\Big\{\mu_h\int\limits_{\mathfrak{K}_h}\Box\Psi\cdot D\mathrm{v}\Big\}=$$

$$=-\sum\Big\{\int\Psi\Big(\mu_0\frac{\partial\Psi}{\partial n_0}+\mu_h\frac{\partial\Psi}{\partial n_h}\Big)Do\Big\}-\sum\Big\{\int\Psi\Big(\mu_h\frac{\partial\Psi}{\partial n_h}+\mu_j\frac{\partial\Psi}{\partial n_j}\Big)Do_{hj}\Big\}.$$
$$(h,\, j=1,\, 2,\, \ldots\, n).$$

Die letzte Zeile dieser Formel ($\zeta.$) ist aber $=0$, wie aus ($\delta.$), ($\varepsilon.$) ersichtlich ist. Somit folgt:

$$(\eta.)\qquad \mu_0\int\limits_{\mathfrak{K}_0}\Box\Psi\cdot D\mathrm{v}+\sum_{h=1}^{n}\Big\{\mu_h\int\limits_{\mathfrak{K}_h}\Box\Psi\cdot D\mathrm{v}\Big\}=0.$$

Hieraus folgt weiter, dafs Ψ in jedem der Körper $\mathfrak{K}_0, \mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots \mathfrak{K}_n$ *constant* ist. Auch werden, wie aus den in ($\delta.$), ($\varepsilon.$) notirten Formeln $\Psi_h=\Psi_j$ und $\Psi_h=\Psi_0$ sich ergiebt, all' diese Constanten einander gleich sein; so dass also das Potential Ψ im ganzen unendlichen Raum allenthalben ein und denselben constanten Werth hat. Dieser Werth aber kann kein anderer als die *Null* sein, weil das Potential Ψ im Unendlichen verschwindet.*)

Folglich ist Ψ allenthalben $=0$, d. i. $\psi'=\psi''$. D. h. es kann nur *ein* Potential ψ existiren, welches den Formeln (20.), (21.), (22.) entspricht. — *Q. e. d.*

§ 31.

Fortsetzung. Die magnetischen Dichtigkeiten und die magnetischen Zustände.

Die bereits berechnet gedachten Functionen (1.), (2.), (3.), (4.), (5.) Seite 779 werden nach wie vor die *Basis unserer weiteren Untersuchungen* bilden. Zu jenen Functionen aber ist gegenwärtig noch das Potential ψ hinzugetreten; denn dieses ist, wie soeben gezeigt wurde, durch die Formeln (20.), (21.), (22.) eindeutig bestimmt, und kann auf Grund dieser Formeln berechnet gedacht werden.

Wir haben soeben hervorgehoben [vgl. das Resultat Seite 784], dass im ganzen unendlichen Raum nirgends eine Spur von *wahrem* Magnetismus vorhanden ist.

Auch wissen wir [vgl. die Formeln Seite 784], dass zur Zeit des hier betrachteten stationären Zustandes alle überhaupt vorhandenen

*) Vgl. die vorige Note.

freien Magnetismen in den Uebergangsschichten abgelagert sein werden, in Gestalt gewöhnlicher *einfacher* Flächenbelegungen. Die betreffenden Flächendichtigkeiten sind in der Formel (20.) mit (T) und (T_{hj}) bezeichnet, und besitzen, wie aus jener Formel ohne Weiteres ersichtlich ist, folgende Werthe:

$$(25.)\qquad -4\pi(T_{hj}) = \frac{\partial\psi}{\partial n_h} + \frac{\partial\psi}{\partial n_j},$$

$$(26.)\qquad -4\pi(T_{h0}) = \frac{\partial\psi}{\partial n_h} + \frac{\partial\psi}{\partial n_0};$$

die äussere Oberfläche $(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}_0)$ des ringförmigen Conductors $\mathfrak{K}$ besteht nämlich aus n Theilen:

$$(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}_0) = (\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_0) + (\mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_0) + \cdots + (\mathfrak{K}_n, \mathfrak{K}_0):$$

und die jener äussern Oberfläche entsprechende Flächendichtigkeit (T) wird daher, diesen n Theilen entsprechend, in n Flächendichtigkeiten (T_{10}), (T_{20}), ... (T_{n0}) zerfallen; und für diese letzteren gilt die Formel (26.). Kaum noch bedarf es der Bemerkung, dass in (25.), (26.) die Normalen n_h, n_j, n_0 respective in das Innere der Substanzen $\mathfrak{K}_h$, $\mathfrak{K}_j$, $\mathfrak{K}_0$ hineinlaufen. — Wir sind also zu folgendem Resultat gelangt:

Resultat. — *Wahrer Magnetismus ist nirgends vorhanden. Und freier Magnetismus befindet sich nur allein auf den Grenzflächen, in Gestalt von gewöhnlichen einfachen Belegungen, deren Flächendichtigkeiten dargestellt sind durch die Formeln* (25.), (26.).

Zusatz. — *Die Gesammtmasse des auf all' diesen Grenzflächen vorhandenen freien Magnetismus ist stets* $= 0$.

Beweis des Zusatzes. — Integrirt man die Formel (21.) über alle Elemente Do_{hj} der innern Zusammensetzungsfläche $(\mathfrak{K}_h, \mathfrak{K}_j)$, und die Formel (22.) über alle Elemente Do_{h0} der äussern Oberfläche $(\mathfrak{K}_h, \mathfrak{K}_0)$, so erhält man:

$$(\alpha.)\qquad \mu_h \int\left(\frac{\partial\psi}{\partial n_h} + \Pi_h\right) Do_{hj} + \mu_j \int\left(\frac{\partial\psi}{\partial n_j} + \Pi_j\right) Do_{hj} = 0,$$

$$(\beta.)\qquad \mu_h \int\left(\frac{\partial\psi}{\partial n_h} + \Pi_h\right) Do_{h0} + \mu_0 \int\left(\frac{\partial\psi}{\partial n_0} + \Pi_0\right) Do_{h0} = 0.$$

Denkt man sich nun die Formel (α.) der Reihe nach für alle Flächen $(\mathfrak{K}_h, \mathfrak{K}_j)$, und die Formel ($\beta$.) der Reihe nach für alle Flächen $(\mathfrak{K}_h, \mathfrak{K}_0)$ hingeschrieben, so gelangt man, wie leicht zu übersehen ist, durch Addition all dieser Formeln zu folgender Gleichung:

$$(\gamma.)\qquad \mu_0 \int \left(\frac{\partial \psi}{\partial n_0} + \Pi_0\right) Do + \sum_{h=1}^{n} \left\{ \mu_h \int \left(\frac{\partial \psi}{\partial n_h} + \Pi_h\right) Do_h \right\} = 0;$$

wo jedes einzelne Integral über eine *geschlossene* Fläche sich ausdehnt. So z. B. bezieht sich das vordere Integral auf alle Elemente Do der *äusseren Oberfläche* ($\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_0$), während das unter dem Summenzeichen befindliche Integral ausgedehnt zu denken ist über *sämmtliche Oberflächenelemente* Do_h *des Körpers* $\mathfrak{K}_h$. Dabei sind n_0 und n_h die respective in $\mathfrak{K}_0$ und in $\mathfrak{K}_h$ hineinlaufenden Normalen.

Diese Formel (γ.) reducirt sich, durch Anwendung des allgemeinen Satzes (6.), (7.) Seite 781, auf

$$(\delta.)\qquad \mu_0 \int \frac{\partial \psi}{\partial n_0} Do + \sum_{h=1}^{n} \mu_h \int \frac{\partial \psi}{\partial n_h} Do_h = 0.$$

Aus (20.) ergiebt sich aber sofort, dass für jedweden Körper $\mathfrak{K}_h$ das zugehörige Oberflächen-Integral

$$\int \frac{\partial \psi}{\partial n_h} Do_h = 0$$

ist. Demgemäss reducirt sich die Formel (δ.) auf

$$(\varepsilon.)\qquad \int \frac{\partial \psi}{\partial n_0} Do = 0;$$

und hieraus folgt nach einem bekannten Satze der Potentialtheorie, dass die Summe aller das Potential ψ erzeugender Massen $= 0$ ist. — *Q. e. d.*

Die ξ, η, ζ und ψ gehören zu denjenigen Functionen, die als bereits berechnet zu betrachten sind. [*Vgl. den Anfang des gegenwärtigen Paragraphs.*] *Demgemäss können wir sagen, dass zur Zeit des hier betrachteten stationären Zustandes die magnetischen Zustände $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ in allen Puncten (x, y, z) des ganzen unendlichen Raumes sich bestimmen durch die Formeln* (9.) *Seite* 781:

$$(27.)\quad \mathfrak{L} = -\mu\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \xi\right), \quad \mathfrak{M} = -\mu\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + \eta\right), \quad \mathfrak{N} = -\mu\left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + \zeta\right),$$

wo μ den Werth des Magnetisirungs-Coefficienten im Punct (x, y, z) vorstellt.

Wahrer Magnetismus ist [vgl. das Resultat Seite 787] nirgends vorhanden. Wie kommt es nun, dass trotzdem *freier* Magnetismus, freie magnetische Flächenbelegungen (T_{hj}), (T_{h0}) und bestimmte magnetische Zustände $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ sich vorfinden? — Wir haben zu antworten, dass das einstweilen nur *leere Worte* sind, nur Namen

zur Bezeichnung der aus der HERTZ'schen Theorie sich ergebenden Dinge.

Mit einer gewissen Berechtigung kann man indessen behaupten, dass diese magnetischen Belegungen und magnetischen Zustände provocirt werden durch die vorhandenen elektrischen Strömungen u, v, w. Denn man kann nachweisen, dass jene magnetischen Belegungen und magnetischen Zustände alle = 0 sein würden, sobald nur die u, v, w alle = 0 sind.

Sind nämlich die u, v, w alle $= 0$*), so werden nach (3.), (4.), (5.) Seite 779, 780 die U, V, W, ξ, η, ζ, Π ebenfalls alle $= 0$ sein. Solches constatirt, ergiebt alsdann sich aus den zur eindeutigen Bestimmung von ψ dienenden Formeln (20.), (21.), (22.) sofort, dass denselben Genüge geschieht durch $\psi = 0$, und dass also das Potential ψ wirklich $= 0$ sein muss, weil es durch jene Formeln eindeutig bestimmt ist. Aus dem Nullsein der Grössen ξ, η, ζ und ψ folgt nun aber weiter, auf Grund der Formeln (25), (26.), (27.), dass alsdann auch die (T_{hj}), (T_{h0}), $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ alle $= 0$ sind. — *Q. e. d.*

§ 32.

Fortsetzung. Weiteres über die magnetischen Zustände, namentlich über die in ihren Werthen enthaltenen ξ, η, ζ.

Die magnetischen Zustände $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ spielen nicht nur in der *Entwickelung* der HERTZ'schen Theorie eine grosse Rolle, sondern auch in ihren *Endresultaten*; denn sie dienen wesentlich zur Berechnung der ponderomotorischen Kräfte magnetischen Ursprungs. [Vgl. z. B. Abh. I, S. 305 (39.)]. Demgemäss erscheint es nicht unwichtig, die Werthe der $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ (27.) S. 788 näher zu untersuchen; namentlich fragt es sich, ob man die in diesen Werthen enthaltenen ξ, η, ζ nicht vielleicht als die *partiellen Ableitungen* irgend einer Function F nach x, y, z darzustellen im Stande ist. Auf diese Frage soll hier eingegangen werden.

Nach (4.) S. 780 ist:

$$(1.)\quad \xi = -A\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right),\quad \eta = -A\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right),\quad \zeta = -A\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right),$$

wo U, V, W die Bedeutungen haben:

*) Dieser Fall wird wirklich eintreten, wenn die Substanzen $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, ... $\mathfrak{K}_n$ alle *Metalle* sind.

(2.) $$U = \int_{\mathfrak{K}} \frac{u_1 Dv_1}{r}, \quad V = \int_{\mathfrak{K}} \frac{v_1 Dv_1}{r}, \quad W = \int_{\mathfrak{K}} \frac{w_1 Dv_1}{r}.$$

Man kann [die Bezeichnungen (x, y, z) und (x_1, y_1, z_1) mit einander vertauschend] die erste dieser Formeln (2.) auch so schreiben:

$$U_1 = \int_{\mathfrak{K}} \frac{u\, Dv}{r},$$

oder auch so:

$$U_1 = \sum_{h=1}^{n} \left\{ \int_{\mathfrak{K}_h} \frac{u\, Dv}{r} \right\};$$

denn es ist $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2 + \cdots + \mathfrak{K}_n$. Aus der letzten Formel folgt sofort:

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_1} = \sum_{h=1}^{n} \left\{ \int_{\mathfrak{K}_h} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} u\, Dv \right\} = - \sum_{h=1}^{n} \left\{ \int_{\mathfrak{K}_h} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} u\, Dv \right\};$$

denn die Ableitungen von $\frac{1}{r}$ nach x und nach x_1 sind einander entgegengesetzt gleich. Diese Gleichung kann man auch so schreiben:

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_1} = - \sum_{h=1}^{n} \left\{ \int_{\mathfrak{K}_h} \frac{\partial \frac{u}{r}}{\partial x} Dv \right\} + \sum_{h=1}^{n} \left\{ \int_{\mathfrak{K}_h} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{1}{r} Dv \right\},$$

oder auch so:

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_1} = \sum_{h=1}^{n} \left\{ \int_{\mathfrak{K}_h} \frac{u \cos(n, x)}{r} Do \right\} + \sum_{h=1}^{n} \left\{ \int_{\mathfrak{K}_h} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{1}{r} Dv \right\},$$

die Integrationen ausgedehnt gedacht über alle Oberflächen- und Volumelemente Do und Dv des Körpers $\mathfrak{K}_h$; dabei ist n die innere, d. h. die in den Körper $\mathfrak{K}_h$ hineinlaufende Normale des Elementes Do. — In Anbetracht der letzten Formel erhält man nun sofort:

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_1}{\partial y_1} + \frac{\partial W_1}{\partial z_1} = \sum_{h=1}^{n} \left\{ \int_{\mathfrak{K}_h} [u \cos(n, x) + v \cos(n, y) + w \cos(n, z)] \frac{Do}{r} \right\}$$
$$+ \sum_{h=1}^{n} \left\{ \int_{\mathfrak{K}_h} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \frac{Dv}{r} \right\}.$$

Von den Integralen *erster Zeile* zerstören sich gegenseitig die der inneren Zusammensetzungsfläche $(\mathfrak{K}_h, \mathfrak{K}_j)$ entsprechenden Theile [zufolge (13.) S. 764]. Es bleiben also nur noch übrig die den äusseren Oberflächen $(\mathfrak{K}_h, \mathfrak{K}_0)$ entsprechenden Theile; diese aber

sind $= 0$ [zufolge (14.) S. 764]. Ferner sind die Integrale *zweiter Zeile* ebenfalls $= 0$ [zufolge (11.) S. 763]. Die Formel reducirt sich also auf:

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_1}{\partial y_1} + \frac{\partial W_1}{\partial z_1} = 0.$$

Diese Betrachtungen gelten für jedweden Punct (x_1, y_1, z_1) des ganzen unendlichen Raumes. Bezeichnet man diesen ganz beliebig zu wählenden Punct also nicht mit (x_1, y_1, z_1), sondern mit (x, y, z), so erhält man:

$$(3.) \qquad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0.$$

Solches constatirt, bedienen wir uns jetzt der schon früher [Abh. I, S. 291 (7.)] benutzten *identischen* Gleichung:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right)$$

deren rechte Seite, vermöge der Formeln (3.) und (1.), sich reducirt auf:

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\zeta}{A} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\eta}{A};$$

während ihre linke Seite, zufolge (2.), $= 0$ oder $= -4\pi u$ sein wird, jenachdem der Punct (x, y, z) ausserhalb oder innerhalb des Conductors $\mathfrak{K}$ gelegen ist. Wir erhalten somit folgende Formeln:

$$(4.) \quad \overset{(x,\, y,\, z) \text{ ausserhalb } \mathfrak{K}.}{\begin{cases} 0 = \dfrac{\partial \zeta}{\partial y} - \dfrac{\partial \eta}{\partial z}, \\ 0 = \dfrac{\partial \xi}{\partial z} - \dfrac{\partial \zeta}{\partial x}; \\ 0 = \dfrac{\partial \eta}{\partial x} - \dfrac{\partial \xi}{\partial y}, \end{cases}} \qquad (5.) \quad \overset{(x,\, y,\, z) \text{ innerhalb } \mathfrak{K}.}{\begin{cases} -4\pi A u = \dfrac{\partial \zeta}{\partial y} - \dfrac{\partial \eta}{\partial z}, \\ -4\pi A v = \dfrac{\partial \xi}{\partial z} - \dfrac{\partial \zeta}{\partial x}, \\ -4\pi A w = \dfrac{\partial \eta}{\partial x} - \dfrac{\partial \xi}{\partial y}. \end{cases}}$$

Die Formeln (4.) machen es mehr oder weniger wahrscheinlich, dass die ξ, η, ζ im *Aussenraum* des Conductors $\mathfrak{K}$, d. i. in der Luft $\mathfrak{K}_0$, wirklich darstellbar sind als die Ableitungen einer noch unbekannten Function F; während andererseits die Formeln (5.) zeigen, dass von einer solchen Darstellung im *Innenraum* des Conductors $\mathfrak{K}$ schlechterdings nicht die Rede sein kann. Um näher auf die Dinge eingehen zu können, bedarf es zunächst gewisser geometrischer Betrachtungen.

Es sei O (ebenso wie früher S. 778) ein Querschnitt des gegebenen ringförmigen Conductors $\mathfrak{K}$; und zwar mag diese Querschnitts-

fläche O alle im Conductor $\mathfrak{K}$ vorhandenen elektrischen Strömungscurven *orthogonal* durchschneiden. Sind nun a und b irgend zwei zu beiden Seiten der Fläche O einander gegenüberliegende Puncte, so wird man die durch diese Puncte gehende Strömungscurve mit amb bezeichnen können, wo m irgend ein intermediarer Punct der Curve sein soll. Dabei mag die Beifügung der Buchstaben a und b so eingerichtet sein, dass die Strömung in der Curve von a über m nach b geht; so dass man also a als den Anfangspunct, und b als den Endpunct der Curve ansehen kann. Im Puncte a mag auf der Fläche O diejenige Normale N_a errichtet werden, welche die Richtung der durch a gehenden elektrischen Strömung anzeigt, so dass also diese Richtung N_a z. B. identisch sein wird mit der Richtung des von b nach a gehenden unendlich kleinen Linienelementes ba.

Ebenso mag unter N (ohne Index) die auf einem beliebigen Element DO der Fläche O in der Richtung der elektrischen Strömung construirte Normale verstanden werden. Die im Ringe $\mathfrak{K}$ vorhandene Stromstärke J hat alsdann [vgl. (32.) S. 778] folgenden Werth:

$$(6.) \qquad J = \int [u \cos(N, x) + v \cos(N, y) + w \cos(N, z)]\, DO,$$

die Integration ausgedehnt gedacht über alle Elemente DO der Fläche O.

Bei jener *Strömungscurve*

$$(7.) \qquad amb$$

kann man von einer positiven und von einer negativen Richtung sprechen; die positive wird durch amb, die negative durch bma dargestellt sein. Desgleichen wird man aber auch bei der *Randcurve der Fläche* O von einer positiven und von einer negativen Richtung sprechen können. Dabei wollen wir als *positiv* diejenige festsetzen, welche *positiv* ist zu jener Stromrichtung N_a. [Vgl. Abh. I, S. 223 (untere Figur)].

Wir betrachten nun ferner den von Luft erfüllten *Aussenraum* $\mathfrak{K}_0$ des Ringes $\mathfrak{K}$, und bezeichnen irgend einen Querschnitt dieses Raumes $\mathfrak{K}_0$ mit Ω; so dass also Ω eine Fläche sein wird, deren Randcurve auf der Oberfläche des Ringes $\mathfrak{K}$ liegt.*) Es

*) Sollte z. B. die Oberfläche des Ringes $\mathfrak{K}$ eine Rotationsfläche sein, so könnte man zur Fläche Ω eine gewöhnliche ebene Kreisfläche nehmen, deren Rand identisch ist mit einem Parallelkreis jener Rotationsfläche.

handelt sich nun darum, die beiden Seiten dieser Fläche Ω in bestimmter Weise von einander zu unterscheiden.

Zu diesem Zweck benutzen wir die schon erwähnte Randcurve der Fläche O, und bezeichnen diese Curve mit

$$(8.) \qquad \alpha\mu\beta;$$

und zwar der Art, dass α und β zwei zu beiden Seiten der Fläche Ω einander gegenüberliegende Punkte sind; während μ irgend ein intermediarer Punct der Curve sein soll.†) Dabei mögen die Buchstaben α und β in solcher Weise angewendet sein, dass die Curvenrichtung $\alpha\mu\beta$ identisch ist mit jener vor wenig Augenblicken festgesetzten *positiven* Richtung dieser Curve; so dass also diese Curvenrichtung $\alpha\mu\beta$ *positiv* liegt in Bezug auf die Strömungsrichtung. — Hierdurch sind alsdann die beiden Seiten der Fläche Ω in bestimmter Weise unterschieden, nämlich die α-Seite und β-Seite. Erstere kann man etwa die *positive* und letztere die *negative* Seite nennen.

Durch den Querschnitt Ω verwandelt sich der Aussenraum $\mathfrak{R}_0$ des gegebenen Ringes $\mathfrak{R}$ in einen *einfach zusammenhängenden* Raum, der $\mathfrak{R}_0^*$ heissen mag. Auf diesen letztern sind nun gewisse einfache Ueberlegungen anwendbar, die ganz analog sind unsern früheren Betrachtungen in Abh. I, S. 262—266.

Markirt man nämlich innerhalb $\mathfrak{R}_0^*$ irgend zwei Puncte (x_0, y_0, z_0) und (x, y, z), und zieht man vom einen Puncte zum andern irgend zwei völlig innerhalb $\mathfrak{R}_0^*$ verlaufende Curven s und σ, so wird das über alle Elemente (Dx, Dy, Dz) der *geschlossenen* Curve $s + \sigma$ hinerstreckte Integral

$$(9.) \qquad \int_{s+\sigma} (\xi\, Dx + \eta\, Dy + \zeta\, Dz)$$

nach dem STOKES'schen Satz gleichwerthig sein mit folgendem Flächenintegral:

$$(10.) \int \left[\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y} - \frac{\partial\eta}{\partial z}\right)\cos(n, x) + \left(\frac{\partial\xi}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)\cos(n, y) + \left(\frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\partial\xi}{\partial y}\right)\cos(n, z)\right] Do,$$

dieses letztere ausgedehnt gedacht über alle Elemente Do einer von der Curve $s + \sigma$ umgrenzten Fläche; dabei ist diese Fläche

†) Ebenso wie a, b zwei Puncte zu beiden Seiten der Fläche O waren, ebenso sind hier mit α, β zwei Puncte zu beiden Seiten der Fläche Ω bezeichnet.

völlig innerhalb $\mathfrak{R}_0^*$ zu denken; auch ist hinzuzufügen, dass n die auf Do errichtete Normale bezeichnet.

Das Integral (10.) dehnt sich also aus über eine völlig innerhalb $\mathfrak{R}_0^*$ liegende Fläche, d. i. über eine Fläche, die *ausserhalb* des gegebenen Ringes $\mathfrak{R}$ liegt, und wird daher, auf Grund der Formeln (4.), gleich *Null* sein. Das mit ihm gleichwerthige Integral (9.) ist daher ebenfalls gleich *Null*. Aus dem Nullsein dieses Integrales (9.) folgt aber sofort, dass die beiden Integrale

$$(11.) \quad \int_s (\xi Dx + \eta Dy + \zeta Dz) \quad \text{und} \quad \int_\sigma (\xi Dx + \eta Dy + \zeta Dz)$$

einander gleich sind, falls man nur jedes derselben sich hinerstreckt denkt vom Puncte (x_0, y_0, z_0) zum Puncte (x, y, z), das eine über den Weg s, das andere über den Weg σ. — Folglich wird das Integral

$$(12.) \qquad \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} (\xi Dx + \eta Dy + \zeta Dz)$$

nur allein von der Lage der beiden Puncte (x_0, y_0, z_0) und (x, y, z) abhängen, nämlich unabhängig sein von der Wahl des die beiden Puncte mit einander verbindenden Integrationsweges, — vorausgesetzt, dass dieser Weg stets völlig innerhalb $\mathfrak{R}_0^*$ bleibt.

Betrachtet man also den Punct (x_0, y_0, z_0) als *fest*, und nur noch den Punct (x, y, z) als *beweglich*, so wird der Werth des Integrals (12.) eine *eindeutige* Function von (x, y, z) sein, falls man nur die Voraussetzung aufrecht erhält, dass der Integrationsweg stets innerhalb $\mathfrak{R}_0^*$ bleiben solle. Diese eindeutige Function mag mit F oder $F(x, y, z)$ bezeichnet werden:

$$(13.) \quad F = F(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} (\xi Dx + \eta Dy + \zeta Dz), \ [\text{innerhalb } \mathfrak{R}_0^*].$$

Aus (13.) folgt sofort:

$$(14.) \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = \xi, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \eta, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \zeta, \quad [\text{innerhalb } \mathfrak{R}_0^*];$$

so dass also die zu Anfang dieses Paragraphs aufgeworfene Frage *bejahend* zu beantworten ist für den *Aussenraum* $\mathfrak{R}_0$ des gegebenen Conductors $\mathfrak{R}$. — Fügen wir hinzu, was schon vorhin (S. 791) über den *Innenraum* bemerkt wurde, so haben wir folgendes

Resultat. — *Im Innenraum des ringförmigen Conductors $\mathfrak{R}$ sind die ξ, η, ζ nicht darstellbar als Ableitungen irgend welcher Function.*

Hingegen sind dieselben einer solchen Darstellung fähig im Aussenraum $\mathfrak{R}_0$ des Ringes $\mathfrak{R}$. Denkt man sich nämlich diesen Aussenraum $\mathfrak{R}_0$ durch irgend einen Querschnitt Ω in einen einfach zusammenhängenden Raum $\mathfrak{R}_0^*$ verwandelt, ferner innerhalb $\mathfrak{R}_0^*$ irgend zwei Puncte (x_0, y_0, z_0) und (x, y, z) markirt, und bildet man sodann das Integral:

$$(15.)\qquad F = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} (\xi Dx + \eta Dy + \zeta Dz),$$

indem man dabei festsetzt, dass die von (x_0, y_0, z_0) nach (x, y, z) gehende Integrationscurve die Grenzen des Raumes $\mathfrak{R}_0^*$ niemals überschreiten solle, — so wird F eine Function von (x, y, z) sein, die innerhalb $\mathfrak{R}_0^*$ überall eindeutig und stetig ist. Und gleichzeitig werden alsdann die innerhalb $\mathfrak{R}_0^*$ befindlichen Werthe von ξ, η, ζ nichts Andres sein, als die partiellen Ableitungen dieser Function F nach x, y, z; so dass also die Formeln zu notiren sind:

$$(16.)\qquad \xi = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \eta = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \zeta = \frac{\partial F}{\partial z}, \quad [\textit{innerhalb } \mathfrak{R}_0^*].$$

Zusatz. — *Die Function F ist im Querschnittt Ω mit einer constanten Werthdifferenz behaftet. Sind nämlich α und β irgend zwei auf der positiven und negativen Seite der Fläche Ω einander gegenüberliegende Puncte [vgl. S. 793], so ist:*

$$(17.)\qquad F_\alpha - F_\beta = +4\pi AJ,$$

wo J die im Ringe $\mathfrak{R}$ vorhandene Stromstärke bezeichnet, während A die in den Hertz'schen Differentialgleichungen vorhandene Constante vorstellt.

Beweis des Zusatzes. — Markirt man im Raume $\mathfrak{R}_0^*$ irgend drei Puncte:

$$(\text{A}.)\qquad o(x_o, y_o, z_o), \quad p(x_p, y_p, z_p), \quad q(x_q, y_q, z_q),$$

so wird man stets eine von o nach p gehende Curve σ_{op} und eine von p nach q gehende Curve σ_{pq} construiren können, der Art, dass beide Curven völlig innerhalb des Raumes $\mathfrak{R}_0^*$ liegen (also die Grenzen dieses Raumes nirgends überschreiten). Alsdann besitzt die Function F (15.) in den Puncten p und q folgende Werthe:

$$(\mathrm{B.})\quad \begin{cases} F_p = \int\limits_o^p (\xi\, Dx + \eta\, Dy + \zeta\, Dz), & [\text{Integrationsweg: } \sigma_{op}], \\ F_q = \int\limits_o^q (\xi\, Dx + \eta\, Dy + \zeta\, Dz), & [\text{Integrationsweg: } \sigma_{op} + \sigma_{pq}]; \end{cases}$$

woraus durch Subtraction folgt:

$$(\mathrm{C.})\quad F_q - F_p = \int\limits_p^q (\xi\, Dx + \eta\, Dy + \zeta\, Dz), \quad [\text{Integrationsweg: } \sigma_{pq}].$$

Mittelst dieser Formel (C.) wird man die Differenz derjenigen Werthe berechnen können, welche die Function F in irgend zwei Puncten p und q des Raumes $\mathfrak{K}_0^*$ besitzt; man hat zu diesem Zweck, wie hier ersichtlich ist, irgend einen beliebigen von p nach q gehenden, aber völlig innerhalb $\mathfrak{K}_0^*$ bleibenden Integrationsweg σ_{pq} in Anwendung zu bringen.

Dies vorangeschickt, construiren wir nun dicht an der Fläche Ω zwei auf ihrer positiven und negativen Seite einander gegenüberliegende Curven $\alpha_1\alpha_2$ und $\beta_1\beta_2$, der Art, dass α_1 und α_2 einander genau gegenüberliegen, ebenso β_1 und β_2, und ebenso überhaupt je zwei intermediare Puncte der beiden Curven. Alsdann ist nach (C.):

$$(\mathrm{D.})\quad \begin{cases} F_{\alpha_2} - F_{\alpha_1} = \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} (\xi\, Dx + \eta\, Dy + \zeta\, Dz), & [\text{Integrationsweg: } \alpha_1\alpha_2], \\ F_{\beta_2} - F_{\beta_1} = \int\limits_{\beta_1}^{\beta_2} (\xi\, Dx + \eta\, Dy + \zeta\, Dz), & [\text{Integrationsweg: } \beta_1\beta_2], \end{cases}$$

Die ξ, η, ζ sind überall eindeutig und stetig [vgl. die Note S. 780]. Folglich werden die ξ, η, ζ in jenen dicht nebeneinander liegenden Curven $\alpha_1\alpha_2$ und $\beta_1\beta_2$ genau dieselben Werthe besitzen; sodass also die beiden Integrale in (D.) unter einander gleichwerthig sind. Somit folgt aus (D.):

$$(\mathrm{E.})\qquad F_{\alpha_2} - F_{\alpha_1} = F_{\beta_2} - F_{\beta_1},$$

oder was dasselbe ist:

$$(\mathrm{F.})\qquad F_{\alpha_2} - F_{\beta_2} = F_{\alpha_1} - F_{\beta_1}.$$

Demgemäss ist also die Function F im Querschnitt Ω mit einer Werthdifferenz behaftet, die an allen Stellen dieses Querschnittes

eine und dieselbe ist. Wie gross ist nun diese constante Werthdifferenz?

Zur Beantwortung dieser Frage construiren wir einen die elektrischen Strömungscurven orthogonal durchschneidenden Querschnitt O des gegebenen Ringes $\mathfrak{R}$, und bezeichnen [ebenso wie früher in (8.) S. 793] die Randcurve dieser Fläche O mit $\alpha\mu\beta$. Alsdann ist nach (C.):

$$\text{(G.)} \quad F_\beta - F_\alpha = \int_\alpha^\beta (\xi Dx + \eta Dy + \zeta Dz), \quad \text{[Integrationsweg: } \alpha\mu\beta\text{]};$$

wofür man nach dem STOKES'schen Satz auch schreiben kann:

$$\text{(H.)} \qquad F_\beta - F_\alpha = \int \left[\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \cos(N, x) + \cdots \right] DO,$$

die Integration ausgedehnt gedacht über alle Elemente DO jener Querschnittfläche O. Dabei bezeichnet N die Normale des Elementes DO; und zwar muss, falls die Integrale (G.) und (H.) einander wirklich gleich sein sollen, zur Normale N diejenige Richtung erwählt werden, in Bezug auf welche die in (G.) angegebene Umlaufsrichtung $\alpha\mu\beta$ positiv ist. Das aber ist der Fall, wenn wir N identificiren mit der Stromrichtung [vgl. S. 793].

Die Formel (H.) können wir nun, mit Hinblick auf (5.) S. 791, auch so schreiben:

$$\text{(I.)} \quad F_\beta - F_\alpha = -4\pi A \int [u \cos(N, x) + v \cos(N, y) + w \cos(N, z)] DO;$$

also mit Rücksicht auf (6.) S. 792 auch so:

$$\text{(K.)} \qquad F_\beta - F_\alpha = -4\pi A J.$$

Endlich folgt nun aus (F.) und (K.)

$$\text{(L.)} \qquad F_{\alpha_2} - F_{\beta_2} = F_{\alpha_1} - F_{\beta_1} = F_\alpha - F_\beta = +4\pi A J. - \textit{Q. e. d.}$$

§ 33.

Fortsetzung. Wie man die ξ, η, ζ im Aussenraum des ringförmigen Conductors durch fingirte magnetische Massen darstellen kann.

Für jedweden Raumpunct (x, y, z) gelten die Formeln S. 788 (27.):

$$\text{(18.)} \quad \mathfrak{L} = -\mu\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \xi\right), \quad \mathfrak{M} = -\mu\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + \eta\right), \quad \mathfrak{N} = -\mu\left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + \zeta\right).$$

Insbesondere werden nun, falls der Punct (x, y, z) innerhalb des Raumes $\mathfrak{K}_0^*$ liegt, für ξ, η, ζ die Formeln Seite 795 (16.) gelten:

$$(19.) \qquad \xi = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \eta = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \zeta = \frac{\partial F}{\partial z}, \quad \text{(innerhalb } \mathfrak{K}_0^*\text{)}.$$

Durch Elimination von ξ, η, ζ aus (18.) und (19.) ergiebt sich:

$$(20.) \quad \mathfrak{L} = -\mu \frac{\partial(\psi + F)}{\partial x}, \quad \mathfrak{M} = -\mu \frac{\partial(\psi + F)}{\partial y}, \quad \mathfrak{N} = -\mu \frac{\partial(\psi + F)}{\partial z}, \text{(innerhalb } \mathfrak{K}_0^*\text{)}.$$

Das ψ ist bekanntlich das Potential aller überhaupt vorhandenen freien Magnetismen. Und angesichts der Formeln (20) entsteht nun die Frage, ob man nicht vielleicht auch die Function F als das Potential irgend welcher magnetischen Massen darzustellen vermag. Sollte das wirklich der Fall sein, so würden selbstverständlich diese neuen Massen nur als fingirte magnetische Massen anzusehen sein, d. h. als Massen, die im Sinne der Hertz'*schen Theorie zu bezeichnen sind als fingirte freie magnetische Massen.*

Die U, V, W, die ξ, η, ζ und F sind im Unendlichen resp. von den Ordnungen:

$$(21) \qquad \frac{1}{\varrho}, \quad \left(\frac{1}{\varrho}\right)^2 \text{ und } \frac{1}{\varrho};$$

wie solches aus den Formeln S. 789 (1.), (2.) und S. 795 (15), (16) sich leicht ergiebt. Auch erkennt man aus jenen Formeln, dass die Function F im Raume $\mathfrak{K}_0^*$ folgende Eigenschaften hat:

$$(22.) \quad \left.\begin{array}{l} F, \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \text{ stetig und eindeutig} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0 \end{array}\right\} \text{ im Raume } \mathfrak{K}_0^*.$$

Auch wird z. B. $\frac{\partial F}{\partial x}$ nicht nur in $\mathfrak{K}_0^*$, sondern auch in $\mathfrak{K}_0$ selber überall eindeutig und stetig sein; denn es ist $\frac{\partial F}{\partial x} = \xi$ (19.), und ξ besitzt die soeben genannten Eigenschaften [vgl. die Note auf S. 780]. Also

$$(23.) \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = \xi, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \eta, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \zeta$$

sind eindeutig und stetig im Raume $\mathfrak{K}_0$.

Auf Grund der Eigenschaften (21.), (22.), (23.) ergiebt sich nach bekannten Green'schen Sätzen die Formel†):

$$(24.)\qquad F_1 = \int_{\mathfrak{K}_0^*} \frac{1}{4\pi}\left(F\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial n}\right) Do,$$

die Integration ausgedehnt gedacht über alle Oberflächenelemente Do des Raumes $\mathfrak{K}_0^*$. Hier bezeichnet n die auf Do errichtete, in den Raum $\mathfrak{K}_0^*$ hineinlaufende Normale. Ferner bezeichnet r den Abstand des Elementes Do von irgend einem *innerhalb* $\mathfrak{K}_0^*$ markirten festen Puncte (x_1, y_1, z_1). Endlich bezeichnet F_1 den Werth von F in diesem Puncte (x_1, y_1, z_1). — Beiläufig sei bemerkt, dass der Werth des Integrales (24.)

$$(24a.)\qquad \text{nicht } = F_1, \text{ sondern } = 0$$

sein würde, falls man jenen festen Punct (x_1, y_1, z_1) sich *innerhalb* $\mathfrak{K}$ denken wollte.††)

Die Oberfläche des Raumes $\mathfrak{K}_0^*$ besteht offenbar theils aus der Oberfläche des ringförmigen Conductors $\mathfrak{K}$, theils aus den beiden Seiten der von uns konstruirten Querschnittfläche Ω. Beachtet man dies, und beachtet man ausserdem, dass die Werthe der

†) Bekanntlich gilt nach Green z. B. folgende Formel

$$(\text{f.})\qquad \int_{\mathfrak{R}} (V\Delta W - W\Delta V)\,D\text{v} = -\int_{\mathfrak{R}}\left(V\frac{\partial W}{\partial n} - W\frac{\partial V}{\partial n}\right) Do$$

die Integrationen ausgedehnt gedacht über alle Volum- und Oberflächenelemente $D\text{v}$ und Do eines beliebig gegebenen endlichen Raumes $\mathfrak{R}$; dabei ist n die *innere* Normale des Elementes Do. Und zwar gilt diese Formel (f.) für je zwei Functionen V, W, die sammt ihren ersten Ableitungen nach den Coordinaten im gegebenen Raume $\mathfrak{R}$ eindeutig und stetig sind. — Bringt man nun diese Formel (f.) in Anwendung auf denjenigen Theil $\mathfrak{R}$ des Raumes $\mathfrak{K}_0^*$, welcher gelegen ist zwischen zwei um den festen Punct (x_1, y_1, z_1) beschriebenen Kugelflächen, indem man sich dabei den Radius der einen Kugelfläche sehr klein, den der andern sehr gross denkt, und nimmt man dabei zugleich für V die Function F, und für W die Function $\frac{1}{r}$, u. s. w., — so gelangt man zur obigen Gleichung (24.).

††) Zu diesem Resultat gelangt man ebenfalls auf Grund der in der vorigen Note angegebenen Green'schen Formel (f.). Man hat in diesem Falle übrigens nur *eine* Kugelfläche zu construiren, mit sehr grossem Radius, und zwar um jenen jetzt innerhalb $\mathfrak{K}$ (also ausserhalb $\mathfrak{K}_0^*$) gelegenen festen Punct (x_1, y_1, z_1). Auf den innerhalb dieser Kugelfläche befindlichen Theil $\mathfrak{R}$ des Raumes $\mathfrak{K}_0^*$ hat man alsdann jene Formel (f.) anzuwenden, indem man dabei wiederum $V = F$ und $W = \frac{1}{r}$ setzt, u. s. w.

Ableitungen $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ [vgl. (23.)] zu beiden Seiten der Fläche Ω stetig miteinander zusammenhängen, so sieht man, dass die Formel (24.) in folgende Gestalt versetzbar ist:

$$(25.)\quad F_1 = \int_{\mathfrak{K}} \frac{1}{4\pi}\left(F\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_0} - \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial n_0}\right) Do + \int_{\Omega} \frac{1}{4\pi}(F_\alpha - F_\beta)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial N}\cdot D\Omega,$$

wo n_0 (ebenso wie bisher) die auf der Conductoroberfläche errichtete, in den Aussenraum $\mathfrak{K}_0$ hineinlaufende Normale vorstellt, während N diejenige Normale der Fläche Ω bezeichnet, welche auf ihrer *positiven* Seite, d. i. auf ihrer α-Seite errichtet ist. Nach S. 795 (17.) ist aber $F_\alpha - F_\beta = 4\pi AJ$; sodass man also die Formel (25.) auch so schreiben kann*):

$$(26.)\quad F_1 = -\int_{\mathfrak{K}} \frac{1}{4\pi}\frac{\partial F}{\partial n_0}\frac{Do}{r} + \int_{\mathfrak{K}} \frac{F}{4\pi}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_0} Do + AJ\int_{\Omega} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial N} D\Omega.$$

Folglich kann das F_1 angesehen werden als ein auf den Punct (x_1, y_1, z_1) von gewissen fingirten magnetischen Massen ausgeübtes Potential; und zwar bestehen diese fingirten Massen, wie man sieht, aus einer einfachen Belegung der Conductoroberfläche, ferner aus einer gewissen Doppelbelegung derselben, und endlich aus einer Doppelbelegung der Fläche Ω.

Uebrigens ist das *erste* der Integrale (26.) einer beachtenswerthen Umgestaltung fähig. Es ist nämlich:

$$\frac{\partial F}{\partial n_0} = \frac{\partial F}{\partial x}\cos(n_0, x) + \frac{\partial F}{\partial y}\cos(n_0, y) + \frac{\partial F}{\partial z}\cos(n_0, z),$$

also nach (23.):

$$\frac{\partial F}{\partial n_0} = \xi\cos(n_0, x) + \eta\cos(n_0, y) + \zeta\cos(n_0, z),$$

folglich:

$$(27.)\quad \int_{\mathfrak{K}} \frac{\partial F}{\partial n_0}\frac{Do}{r} = \int_{\mathfrak{K}} \left[\frac{\xi}{r}\cos(n_0, x) + \frac{\eta}{r}\cos(n_0, y) + \frac{\zeta}{r}\cos(n_0, z)\right] Do,$$

---

*) Bei der Anwendung auf einen *linearen* Stromring (d. i. auf einen ringförmigen Conductor $\mathfrak{K}$, dessen Querschnitte durchweg äusserst klein sind), wird die äussere Oberfläche o des Ringes *klein* sein gegenüber der Fläche Ω (der sogenannten Stromfläche). Demgemäss kann man vielleicht sagen, dass in diesem Falle die beiden ersten Integrale der Formel (26.) sehr *klein* sind gegenüber dem Werthe des letzten Integrals. Es hängt dies zusammen mit dem bekannten Satz über *die Ersetzbarkeit eines geschlossenen elektrischen Stromes durch eine magnetische Fläche.*

also nach einer bekannten Green'schen Transformation*):

(28.) $$\int_{\mathfrak{K}} \frac{\partial F}{\partial n_0} \frac{Do}{r} = + \int_{\mathfrak{K}} \left(\frac{\partial \frac{\xi}{r}}{\partial x} + \frac{\partial \frac{\eta}{r}}{\partial y} + \frac{\partial \frac{\zeta}{r}}{\partial z} \right) Dv,$$

das letzte Integral ausgedehnt gedacht über alle Volumelemente Dv des Conductors $\mathfrak{K}$. — Nun ist nach S. 780 (4.):

(29.) $$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0.$$

Somit reducirt sich die Formel (28.) auf:

(30.) $$\int_{\mathfrak{K}} \frac{\partial F}{\partial n_0} \frac{Do}{r} = \int_{\mathfrak{K}} \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \xi + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \eta + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \zeta \right) Dv.$$

Dies in (26.) substituirt, erhält man:

(31.) $$F_1 = \left\{ \begin{array}{l} - \int_{\mathfrak{K}} \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \xi + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \eta + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \zeta \right) Dv \\ + \int_{\mathfrak{K}} \frac{F}{4\pi} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_0} Do + AJ \int_{\Omega} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial N} D\Omega \end{array} \right\}.$$

Somit kann also F_1 angesehen werden als das Potential gewisser fingirter magnetischer Massen, die theils im Innern des Conductors $\mathfrak{K}$, theils an seiner Oberfläche, theils auf der Fläche Ω sich vorfinden; und zwar sind ξ, η, ζ die sogenannten magnetischen Momente der im Innern des Conductors vorhandenen magnetischen Massenvertheilung, oder wenigstens proportional mit diesen Momenten.

Nach (19) ist:

(32.) $$\xi = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \eta = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \zeta = \frac{\partial F}{\partial z}, \quad \text{aber nur innerhalb } \mathfrak{K}_0^*,$$

also nur im *Aussenraum* des von uns betrachteten ringförmigen Conductors. Von einer derartigen Darstellung der ξ, η, ζ im *Innenraum* $\mathfrak{K}$ des Conductors kann schlechterdings nicht die Rede sein, wie aus den Formeln S. 791 (5) deutlich hervorgeht. *Dem-*

*) Die Formel (28.) hat auf der rechten Seite ein über den *Innenraum* $\mathfrak{K}$ des gegebenen ringförmigen Conductors ausgedehntes Integral. Uebrigens kann die Richtigkeit der Formel (28.) keinem Bedenken unterliegen, weil die ξ, η, ζ [vgl. die Note S. 780] allenthalben stetig sind, und weil überdies innerhalb des Innenraumes $\mathfrak{K}$ auch $\frac{1}{r}$ stetig ist; denn der feste Anfangspunct (x_1, y_1, z_1) der Linie r liegt *ausserhalb* $\mathfrak{K}$, nämlich in $\mathfrak{K}_0$.

gemäss wird also eine Function F, welche die ξ, η, ζ zu Ableitungen hat, überhaupt nur im Aussenraum des Conductors existiren können, nicht aber in seinem Innenraum. Und hiermit hängt zusammen, dass wir in unseren Formeln, namentlich in (24.), (25.), (26.) und (31.), stets denjenigen Werth F_1 berechnet haben, welchen die Function F in einem Puncte (x_1, y_1, z_1) des *Aussenraumes* besitzt.

Hätten wir übrigens gleich zu Anfang einen Punkt (x_1, y_1, z_1) im *Innenraum* des Conductors markirt, so würden wir [vgl. (24a.)] zu genau denselben Formeln (24.), (25.), (26) und (31.) gelangt sein, nur mit dem Unterschiede, dass wir alsdann als linke Seite dieser Formeln nicht das F_1, sondern die *Null* erhalten haben würden.*) *Jene aus* (26.) *und* (31.) *ersichtlichen, das Potential F_1 erzeugenden fingirten magnetischen Massen sind also von solcher Beschaffenheit, dass ihr Potential auf Puncte im Innenraum des Conductors $\mathfrak{K}$ durchweg $= 0$ sein würde.*

Hierin liegt offenbar eine charakteristische Eigenschaft jener fingirten magnetischen Massen. Eine andere solche charakteristische Eigenschaft derselben besteht darin, *dass ihre Summe stets $= 0$ ist.* Einigermassen geht solches schon hervor aus dem Anblicke der Formel (31.). Um zur vollen Einsicht zu gelangen, construiren wir irgend eine den Conductor $\mathfrak{K}$ und die Fläche Ω umschliessende Kugelfläche s, und betrachten das über alle Elemente Ds dieser Fläche s ausgedehnte Integral

$$(\alpha.)\quad \int_s \frac{\partial F}{\partial n}\, Ds = \int_s \left[\frac{\partial F}{\partial x}\cos(n, x) + \frac{\partial F}{\partial y}\cos(n, y) + \frac{\partial F}{\partial z}\cos(n, z)\right] Ds;$$

dabei soll n die auf Ds errichtete *äussere* Normale sein. Diese Formel erhält, mit Rücksicht auf (19.), die Gestalt:

$$(\beta.)\quad \int_s \frac{\partial F}{\partial n}\, Ds = \int_s [\xi \cos(n, x) + \eta \cos(n, y) + \zeta \cos(n, z)]\, Ds.$$

Hieraus aber folgt nach einem früheren Satz [Seite 781 (6.)] sofort, dass

$$(\gamma.)\quad \int_s \frac{\partial F}{\partial n}\, Ds = 0$$

ist; und hieraus endlich ergiebt sich auf Grund eines bekannten

*) Leicht erkennt man, dass die Hülfsformeln (27.), (28.), (29.), (30.) in diesem Falle, wo (x_1, y_1, z_1) im *Innenraum* des Conductors liegt, vollkommen correct bleiben, ohne dass irgend welche Aenderung an ihnen vorzunehmen wäre.

Satzes der Potentialtheorie, dass die Summe jener das Potential F erzeugenden Massen in der That $= 0$ ist. — *Q. e. d.*

Beiläufige Bemerkung. Man setze*):

$$\text{(A.)} \qquad Q = \int_{\mathfrak{T}} \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \xi + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \eta + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \zeta \right) D\mathrm{v},$$

das Integral ausgedehnt gedacht über alle Elemente $D\mathrm{v}$ des *ganzen unendlichen Raumes* $\mathfrak{T}$. Dabei soll r den Abstand des Elementes $D\mathrm{v}$ von einem beliebig gegebenen *festen Puncte* (x_1, y_1, z_1) vorstellen. Diese Formel (A.) kann man, in Anbetracht der Gleichung (29.), auch so schreiben:

$$\text{(B.)} \qquad Q = \int_{\mathfrak{T}} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\xi}{r} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\eta}{r} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\zeta}{r} \right) D\mathrm{v}.$$

Hieraus ergiebt sich mittelst einer bekannten GREEN'schen Transformation:

$$\text{(C.)} \qquad Q = \int_{\mathfrak{T}} [\xi \cos(n, x) + \eta \cos(n, y) + \zeta \cos(n, z)] \frac{Do}{r},$$

die Integration ausgedehnt über alle Elemente Do einer den ganzen unendlichen Raum $\mathfrak{T}$ umschliessenden Fläche; dabei ist n die auf Do errichtete äussere Normale. Die ξ, η, ζ sind aber, nach (21), im Unendlichen von der Ordnung $\left(\frac{1}{\varrho}\right)^2$. Somit folgt aus (C.):

$$\text{(D.)} \qquad Q = 0.$$

Dies in (A.) substituirt, erhält man:

$$\text{(E.)} \qquad \int_{\mathfrak{T}} \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \xi + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \eta + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \zeta \right) D\mathrm{v} = 0.$$

Der ganze unendliche Raum $\mathfrak{T}$ ist aber $= \mathfrak{K} + \mathfrak{K}_0$; und man kann daher der Formel (E.) die Gestalt geben:

$$\text{(F.)} \quad \int_{\mathfrak{K}} \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \xi + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \eta + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \zeta \right) D\mathrm{v} + \int_{\mathfrak{K}_0} \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \xi + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \eta + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \zeta \right) D\mathrm{v} = 0.$$

Demgemäss kann man, falls es beliebt, in der Formel (31.) das erste über $\mathfrak{K}$ ausgedehnte Integral ersetzen durch ein über $\mathfrak{K}_0$ ausgedehntes Integral. D. h. man kann in jener Formel (31.) die magnetische Vertheilung im *Innenraum* des Conductors ersetzen durch eine magnetische Vertheilung in seinem *Aussenraum*.

---

*) Es ist zu beachten, dass ξ, η, ζ allenthalben stetig, und im Unendlichen von der Ordnung $\left(\frac{1}{\varrho}\right)^2$ sind. [Vgl. die Note Seite 780 und Seite 798 (21.)].

§ 34.

Ueber die ponderomotorischen Kräfte elektrischen und magnetischen Ursprungs in ruhender Substanz zur Zeit des stationären Zustandes.

In der vorigen Abhandlung [Abh. I, Seite 322—330 und Seite 344, 345] ist von mir gezeigt worden, dass die auf irgend ein *einzelnes Element* der Substanz ausgeübten ponderomotorischen Kräfte elektrischen und magnetischen Ursprungs, wie sie aus der Maxwell-Hertz'schen Theorie sich ergeben, *nicht* völlig in Einklang sind mit den Resultaten der Poisson'schen Theorie, dass sie vielmehr den Resultaten der Poisson'schen Theorie zum Theil ganz *fremdartig* gegenüberstehen. — Im Folgenden werde ich nun aber zeigen, dass zwischen den beiderlei Theorieen *Einklang* stattfindet, wenn man statt der einzelnen Elemente der Substanz, einen *ganzen von homogener Luft umgebenen Körper* betrachtet, nämlich diejenigen ponderomotorischen Kräfte ins Auge fasst, welche auf einen solchen Körper *inclusive* seiner Uebergangsschicht, ausgeübt werden.

Schwierigkeiten entstehen dabei eigentlich nur durch die Coefficienten ε und μ (den Dialektricitätscoefficienten und den Magnetisirungscoefficienten). Und diese Schwierigkeiten sind nur dadurch zu überwinden, dass man die Dicke der sogenannten Uebergangsschichten *sehr klein*, nicht aber $= 0$ sich denkt; der Art, dass die Werthe von ε und μ in der den ganzen Weltraum erfüllenden Substanz allenthalben *stetige* Functionen der Coordinaten sind; — was übrigens in vollem Einklang ist mit dem Inhalt der vorigen Abhandlung [Abh. I], sowie auch mit den bisherigen Betrachtungen der gegenwärtigen Abhandlung.

Ueberhaupt wollen wir an den bisherigen Vorstellungen [vgl. namentlich Seite 767—769] im Wesentlichen festhalten, und dieselben nur einer gewissen Verallgemeinerung unterwerfen, indem wir, inmitten der den unendlichen Raum erfüllenden homogenen Luft $\mathfrak{K}_0$, nicht *einen*, sondern *beliebig viele* Körper uns denken. Diese Körper seien theils *einfache*, theils *zusammengesetzte* Körper. Dabei mag jeder Körper als einfach oder als zusammengesetzt bezeichnet werden, je nachdem er aus homogener Substanz besteht, oder aber aus beliebig vielen homogenen Substanzen in irgend welcher Weise zusammengesetzt ist. Auch mögen jene homogene Substanzen [ebenso wie früher] theils *fester*, theils *flüssiger* Natur sein.

Die in Rede stehenden theils einfachen, theils zusammengesetzten Körper, die inmitten der Luft $\mathfrak{K}_0$ wie einzelne Inseln erscheinen, bezeichnen wir mit $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, etc. Auch wollen wir, über die früheren Grenzen hinausgehend [vgl. Seite 781], gegenwärtig annehmen, dass die homogenen Substanzen, aus denen die Körper $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, etc. bestehen, theils *temporär-*, theils *permanent-magnetischer* Natur sind.

Sowohl die Körper $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, etc., wie auch die umgebende homogene Luft $\mathfrak{K}_0$, sowie auch das der Betrachtung zu Grunde zu legende Axensystem (x, y, z) denken wir uns in *vollkommener Ruhe.**) Auch mag jeder der Körper $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, etc. von Hause aus mit irgend welchem Quantum wahrer Elektricität geladen sein, die, in Folge der umgebenden Luft $\mathfrak{K}_0$, aus ihm nicht zu entweichen vermag; [ähnlich, wie solches früher (Seite 769) bei dem ringförmigen Conductor vorausgesetzt wurde].

Jeder der Körper $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, etc. ist, wie soeben festgesetzt wurde, entweder homogen, oder aber aus einer gewissen Anzahl homogener Substanzen zusammengesetzt. Im letztern Fall können im Innern des Körpers, in Folge der contactelektromotorischen Kräfte, andauernde elektrische Ströme entstehen.

Jeder von den Körpern $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, etc. kann eine oder mehrere Oberflächen haben. Es macht das für unsere Untersuchungen keinen wesentlichen Unterschied. Zur Vereinfachung der Ausdrucksweise wollen wir indessen annehmen, dass jeder von diesen Körpern immer nur *eine* Oberfläche besitzt; sodass z. B. schaalenförmige Körper von unserer Untersuchung ausgeschlossen sein werden.

Ist der Körper $\mathfrak{K}$ aus irgend welcher Anzahl homogener Substanzen zusammengesetzt, so versteht es sich wohl von selber, dass die *inneren* Uebergangsschichten (die an den einzelnen Zusammensetzungsflächen sich vorfinden) mit zum Körper zu rechnen sind. Fraglich erscheint, ob die *äussere* Uebergangsschicht (welche zwischen dem Körper und der umgebenden Luft sich vorfindet) zum Körper oder zur Luft zu rechnen ist. Diese äussere Uebergangsschicht liegt, nach unserer Vorstellung, zwischen zwei einander sehr nahen Parallelflächen; und es wird also zweifelhaft sein, ob

*) Ob diese Ruhe eine *absolute* oder *relative* sei, ist für uns gleichgültig. [Vgl. die Note auf Seite 760.]

die engere Parallelfläche oder die weitere Parallelfläche als die eigentliche Begrenzungsfläche des Körpers anzusehen ist. — *Wir wollen nun im Folgenden unter dem Buchstaben $\mathfrak{K}$ stets den Körper, inclusive seiner äussern Uebergangsschicht, verstehen; sodass also dieses $\mathfrak{K}$ den Körper andeuten soll im weiteren Sinne, d. h. umgrenzt gedacht von jener weiteren Parallelfläche. Gleiches soll selbstverständlich für $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, etc. gelten. Hingegen soll unter $\mathfrak{K}_0$ die die Körper umgebende Luft, exclusive der Uebergangsschichten, verstanden werden; sodass also $\mathfrak{K}_0$ eine vollkommen homogene Substanz repräsentirt.*

Die umgebende homogene Luft $\mathfrak{K}_0$ erstreckt sich, wie wir angenommen haben, nach allen Seiten ins Unendliche. Der ganze unendliche Raum $\mathfrak{T}$ wird daher durch die Körper $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, etc. und durch die homogene Luft $\mathfrak{K}_0$ vollständig ausgefüllt sein; was angedeutet werden kann durch die Formel:

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{K}_0 + (\mathfrak{K} + \mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2 + \cdots).$$

Uebrigens werden wir, an Stelle von $\mathfrak{T}$, und genau in demselben Sinne, zuweilen auch die Bezeichnung $\mathfrak{T}_1$ anwenden, aus Symmetrie-Rücksichten. [Vgl. z. B. S. 808 (3.)].

Unsere Aufgabe besteht nun darin, die *ponderomotorischen Kräfte elektrischen und magnetischen Ursprungs* zu ermitteln, mit denen die Körper $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, etc. zur Zeit des hier betrachteten stationären Zustandes gegenseitig auf einander einwirken. Dabei werden namentlich in Betracht zu ziehen sein die auf die einzelnen Körper ausgeübten *translatorischen Kräfte* und *Drehungsmomente*, oder allgemeiner diejenigen *Arbeiten*, welche von jenen ponderomotorischen Kräften verrichtet werden würden, falls man irgend einen der Körper $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, etc. einer unendlich kleinen Verrückung unterwerfen wollte.

Die den ganzen unendlichen Raum erfüllende, aus $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, etc. und der Luft $\mathfrak{K}_0$ bestehende Substanz befindet sich, nach unserer Vorstellung, in fortdauernder *Ruhe*; und die in ihr vorhandenen elektrischen und magnetischen Vertheilungen und elektrischen Strömungen sind fortdauernd *ein und dieselben* [vgl. S. 761]; sodass also die Dichtigkeiten σ, (σ), τ, (τ) und die Strömungscomponenten u, v, w als *unveränderliche* Functionen der Coordinaten anzusehen sind. Bei der Berechnung jener translatorischen Kräfte, Drehungsmomente und Arbeiten wird es nun aber hin und wieder nothwendig sein, einen der gegebenen Körper, z. B. den Körper $\mathfrak{K}$ einer kleinen

virtuellen Verrückung zu unterwerfen. Solche virtuelle Verrückungen sind ganz willkührlich; sie gehören lediglich unserer Gedankenwelt an; sie sind nur Mittel zum Zweck; und wir werden daher über diese virtuellen Verrückungen ganz *ad libitum* disponiren dürfen. Von dieser Erlaubniss Gebrauch machend, treffen wir ein für alle Mal folgende Festsetzungen:

(A.) Die *virtuelle Verrückung* des Körpers $\mathfrak{K}$ (der im Allgemeinen theils aus festen, theils aus flüssigen Substanzen zusammengesetzt ist) soll stets erfolgen *nach Art eines starren Systems;* sodass also die *relative Lage* der den Körper $\mathfrak{K}$ constituirenden substantiellen Puncte während einer solchen Verrückung völlig ungeändert bleibt.

(B.) Die in dem Körper $\mathfrak{K}$ enthaltenen Werthe von σ, (σ), τ, (τ), u, v, w sollen während einer solchen *virtuellen Verrückung* des Körpers *ganz ungeändert* bleiben; sodass also diese Werthe ein und dieselben Functionen der Coordinaten bleiben würden, falls man die Coordinaten auf ein mit dem Körper $\mathfrak{K}$ fest verbundenes Axensystem beziehen wollte.

Eigentlich könnten wir nun sofort die in Rede stehenden ponderomotorischen *Arbeiten* zu berechnen suchen, um sodann später aus diesen die *translatorischen Kräfte* und *Drehungsmomente* (als specielle Fälle) abzuleiten. Doch dürfte es bequemer und anschaulicher sein, wenn wir mit den *translatorischen Kräften* beginnen.

§ 35.

Fortsetzung. Die translatorischen Kräfte elektrischen Ursprungs.

Das elektrische Potential φ wird, zur Zeit des hier betrachteten stationären Zustandes, in irgend einem Puncte (x_1, y_1, z_1) den Werth haben:

$$(1.)\qquad \varphi_1 = \int_{\mathfrak{U}} \frac{(\sigma)\, D\mathrm{v}}{r},$$

die Integration ausgedehnt gedacht über die unendlich kleinen Volumelemente $D\mathrm{v}$, aus denen die Gesammtheit $\mathfrak{U}$ der Uebergangsschichten besteht; dabei bezeichnet (σ) die in einem solchen Element $D\mathrm{v}$ vorhandene freie elektrische Dichtigkeit. Es ergiebt sich diese Formel in genau derselben Art wie die Formel (12.)

Seite 772. Auch wird, ebenso wie damals, die freie elektrische Dichtigkeit (σ) nur allein in den Uebergangsschichten wirkliche Werthe haben, sonst aber allenthalben $= 0$ sein. Demgemäss kann man die Formel (1.), falls es beliebt, auch so schreiben:

$$\varphi_1 = \int_{\mathfrak{T}} \frac{(\sigma)\, D\mathrm{v}}{r}, \tag{2.}$$

wo der Index $\mathfrak{T}$ eine Integration über den *totalen Raum*, d. i. über den *ganzen unendlichen Raum* andeuten soll. Endlich kann man der Formel (2.), die Bezeichnungen (x, y, z) und (x_1, y_1, z_1) mit einander vertauschend, auch folgende Gestalt geben:

$$\varphi = \int_{\mathfrak{T}_1} \frac{(\sigma_1)\, D\mathrm{v}_1}{r}, \tag{3.}$$

wo alsdann φ den Werth des Potentials im Puncte (x, y, z) bezeichnet, während das Element $D\mathrm{v}_1$ im Puncte (x_1, y_1, z_1) zu denken ist. Hier in (3.) ist alsdann, der Symmetrie willen, die Gesammtheit der Elemente $D\mathrm{v}_1$ mit $\mathfrak{T}_1$ bezeichnet; sodass also dieses $\mathfrak{T}_1$ genau dieselbe Bedeutung hat wie $\mathfrak{T}$, nämlich, ebenso wie $\mathfrak{T}$, den ganzen unendlichen Raum repräsentirt.

Mit dem elektrischen Potential φ hängen die elektrischen Zustandscomponenten $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ zusammen durch folgende Formeln [vgl. Seite 775 (20.)]:

$$\mathfrak{X} = -\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \mathfrak{Y} = -\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \mathfrak{Z} = -\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \tag{4.}$$

Ferner werden auf ein im Puncte (x, y, z) gedachtes *substantielles Volumelement* $D\mathrm{v}$ gewisse ponderomotorische Kräfte elektrischen Ursprungs ausgeübt werden, die folgende Werthe besitzen [vgl. Abh. I, Seite 305]:

$$\begin{cases} \Xi_e D\mathrm{v} = \left(\frac{\partial p_{11}}{\partial x} + \frac{\partial p_{12}}{\partial y} + \frac{\partial p_{13}}{\partial z}\right) D\mathrm{v}, \\ \mathrm{H}_e D\mathrm{v} = \left(\frac{\partial p_{21}}{\partial x} + \frac{\partial p_{22}}{\partial y} + \frac{\partial p_{23}}{\partial z}\right) D\mathrm{v}, \\ \mathrm{Z}_e D\mathrm{v} = \left(\frac{\partial p_{31}}{\partial x} + \frac{\partial p_{32}}{\partial y} + \frac{\partial p_{33}}{\partial z}\right) D\mathrm{v}, \end{cases} \tag{5.}$$

wo die p_{hj} die Bedeutungen haben:

$$\begin{cases} p_{11} = \frac{\mathfrak{X}^2 - \mathfrak{Y}^2 - \mathfrak{Z}^2}{8\pi\varepsilon}, \\ p_{22} = \frac{\mathfrak{Y}^2 - \mathfrak{Z}^2 - \mathfrak{X}^2}{8\pi\varepsilon}, \\ p_{33} = \frac{\mathfrak{Z}^2 - \mathfrak{X}^2 - \mathfrak{Y}^2}{8\pi\varepsilon}, \end{cases} \qquad \begin{cases} p_{23} = \frac{2\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}}{8\pi\varepsilon}, \\ p_{31} = \frac{2\mathfrak{Z}\mathfrak{X}}{8\pi\varepsilon}, \\ p_{12} = \frac{2\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}{8\pi\varepsilon}, \end{cases} \tag{6.}$$

Substituirt man in (6.) die Werthe (4.), so erhält man z. B. für p_{11}, p_{12}, p_{13} folgende Ausdrücke:

$$(7.)\qquad p_{11} = \frac{\varepsilon}{8\pi}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right],\qquad p_{12} = \frac{\varepsilon}{8\pi}\left[2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right],$$

$$p_{13} = \frac{\varepsilon}{8\pi}\left[2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right].$$

Somit folgt aus (5.):

$$(8.)\qquad \Xi_e D\mathrm{v} = \left\{\begin{array}{l}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varepsilon}{8\pi}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]\right)\\ + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\varepsilon}{8\pi}\left[2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\varepsilon}{8\pi}\left[2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right]\right)\end{array}\right\} D\mathrm{v}.$$

Befindet sich nun das Volumelement $D\mathrm{v}$ in *homogener Substanz,* so ist ε innerhalb dieses Elementes *constant* (d. h. unabhängig von x, y, z); sodass man alsdann also erhält:

$$\Xi_e D\mathrm{v} = \frac{\varepsilon}{8\pi}\left\{\begin{array}{l}2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - 2\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial x} - 2\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial x}\\ + 2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right) + 2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)\end{array}\right\} D\mathrm{v}$$

oder was dasselbe ist:

$$\Xi_e D\mathrm{v} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right) D\mathrm{v},$$

also nach bekanntem Satze [vgl. die Formel (3.)]:

$$(9.)\qquad \Xi_e D\mathrm{v} = -\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x}(\sigma)\, D\mathrm{v},$$

wo (σ) die freie elektrische Dichtigkeit im Elemente $D\mathrm{v}$ vorstellt.

Die homogene Luft $\mathfrak{K}_0$ betrachten wir [wie in Abh. I, Seite 271 ein für alle Mal festgesetzt wurde] als einen absoluten Isolator und als völlig unelektrisch; so dass also (σ) in dieser Luft $\mathfrak{K}_0$ allenthalben $= 0$ ist. Aus der Formel (9.) ergiebt sich daher, dass $\Xi_e D\mathrm{v} = 0$ ist, falls $D\mathrm{v}$ ein Volumelement der Luft vorstellt. *Kurz, wir sehen, dass die auf die homogene Luft $\mathfrak{K}_0$ einwirkenden ponderomotorischen Kräfte elektrischen Ursprungs Ξ_e, H_e, Z_e allenthalben $= 0$ sind.*

Wir wollen nun, was die von der homogenen Luft $\mathfrak{K}_0$ umgebenen Körper $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, etc. betrifft, etwa den Körper $\mathfrak{K}$ ins Auge fassen, *und diejenige translatorische Kraft elektrischen Ursprungs zu berechnen suchen, welche auf den ganzen Körper $\mathfrak{K}$ ausgeübt wird.* Diese Kraft — wir bezeichnen sie mit $\Xi_e(\mathfrak{K})$ — besitzt offenbar folgenden Werth:

$$(10.)\qquad \Xi_e(\mathfrak{K}) = \int_{\mathfrak{K}} \Xi_e D\mathrm{v},$$

die Integration ausgedehnt gedacht über alle Volumelemente Dv des Körpers $\mathfrak{K}$.

Substituirt man in (10) für $\Xi_e Dv$ seinen Werth (8.), so erhält man:

$$(11.)\quad \Xi_e(\mathfrak{K}) = \left\{\begin{array}{l} \int\limits_{\mathfrak{K}} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varepsilon}{8\pi}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]\right) Dv \\ + \int\limits_{\mathfrak{K}} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\varepsilon}{8\pi}\left[2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]\right) Dv + \int\limits_{\mathfrak{K}} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\varepsilon}{8\pi}\left[2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right]\right) Dv \end{array}\right\},$$

die Integrationen ausgedehnt gedacht über alle Dv des Körpers $\mathfrak{K}$.

Das erste der Integrale hat die Gestalt:

$$(\alpha.)\quad \int\limits_{\mathfrak{K}} \frac{\partial(\varepsilon f)}{\partial x} Dv.$$

Nun ist aber nach einer bekannten GREEN'schen Transformation:

$$(\beta.)\quad \int\limits_{\mathfrak{K}} \frac{\partial(\varepsilon f)}{\partial x} Dv = \int\limits_{\mathfrak{K}} \varepsilon f \cos(n, x)\, Do,$$

und ebenso:

$$(\gamma.)\quad \int\limits_{\mathfrak{K}} \frac{\partial f}{\partial x} Dv = \int\limits_{\mathfrak{K}} f \cos(n, x)\, Do,$$

die Integrationen rechter Hand ausgedehnt gedacht über alle Elemente Do der Begrenzungsfläche des Körpers $\mathfrak{K}$; dabei bezeichnet n die *äussere* Normale dieser Fläche. *In der homogenen Luft* $\mathfrak{K}_0$ *hat* ε *den constanten Werth* ε_0; und diesen selben constanten Werth ε_0 wird ε auch besitzen auf jener Begrenzungsfläche*) des Körpers $\mathfrak{K}$. Im Integral $(\beta.)$ rechter Hand kann man daher diesen constanten Faktor $\varepsilon = \varepsilon_0$ *vor* das Integralzeichen ziehen; und erhält alsdann aus $(\beta.)$ und $(\gamma.)$ folgende Formel**):

$$(\delta.)\quad \int\limits_{\mathfrak{K}} \frac{\partial(\varepsilon f)}{\partial x} Dv = \varepsilon_0 \int\limits_{\mathfrak{K}} \frac{\partial f}{\partial x} Dv.$$

Nach Maassgabe dieser und ähnlicher Formeln kann man nun dem Ausdruck (11.) folgende Gestalt verleihen:

$$(12.)\quad \Xi_e(\mathfrak{K}) = \frac{\varepsilon_0}{8\pi}\left\{\begin{array}{l} \int\limits_{\mathfrak{K}} \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] Dv \\ + \int\limits_{\mathfrak{K}} \frac{\partial}{\partial y}\left[2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right] Dv + \int\limits_{\mathfrak{K}} \frac{\partial}{\partial z}\left[2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right] Dv \end{array}\right\}.$$

---

*) d. i. auf jener *weiteren* Parallelfläche [vgl. S. 806].

**) Meine weiter folgenden Untersuchungen (bis zu Seite 839) waren zu Anfang äusserst mühsam und langwierig, — bis es mir schliesslich gelang, dieselben durch Aufstellung des obigen Satzes $(\delta.)$ einigermaassen zu vereinfachen.

Hieraus folgt, falls man die Differentiationen ausführt und die drei Integrale in eins zusammenzieht, sofort:

$$(13.)\qquad \Xi_e(\mathfrak{K}) = \frac{\varepsilon_0}{8\pi}\int\limits_{\mathfrak{K}} 2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right) Dv,$$

also mit Hinblick auf (3.):

$$(14.)\qquad \Xi_e(\mathfrak{K}) = -\varepsilon_0\int\limits_{\mathfrak{K}}\frac{\partial\varphi}{\partial x}(\sigma)\,Dv.$$

Auch ergiebt sich aus (3):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \int\limits_{\mathfrak{T}_1}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}(\sigma_1)\,Dv_1.$$

Dies in (14.) substituirt, erhält man

$$(15.)\qquad \Xi_e(\mathfrak{K}) = -\varepsilon_0\int\limits_{\mathfrak{K}}\int\limits_{\mathfrak{T}_1}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}(\sigma)\,Dv\cdot(\sigma_1)\,Dv_1.$$

Das hier auftretende Integral steht in einfacher Beziehung zum Integral

$$(16.)\qquad \int\limits_{\mathfrak{K}}\int\limits_{\mathfrak{T}_1}\frac{(\sigma)\,Dv\cdot(\sigma_1)\,Dv_1}{r};$$

wie man solches leicht erkennt durch eine gewisse [den Festsetzungen (A.), (B.) S. 807 entsprechende] *virtuelle Verrückung* des Körpers $\mathfrak{K}$. Denkt man sich nämlich diese virtuelle Verrückung als eine Verschiebung des Körpers $\mathfrak{K}$ in der Richtung der x-Axe um die Strecke ∂x, und denkt man sich den bei dieser Verschiebung entstehenden Zuwachs des Integrals (16.) durch jene kleine Strecke ∂x dividirt, so wird der in solcher Weise entstehende Differentialquotient nichts anderes sein, als der Werth des Integrals (15.). Demgemäss kann man also der Formel (15.) folgende Gestalt geben*):

*) Das Zeichen $\frac{\partial}{\partial x}$ in der nächstfolgenden Formel (17.) ist nur *symbolischer* Natur. Besser würde es vielleicht sein, dasselbe dort zu ersetzen durch $\frac{\partial}{\partial a}$, indem man unter a, b, c die Coordinaten des Schwerpunktes des Körpers $\mathfrak{K}$ versteht. Aber auch dann würde immer noch hinzuzufügen sein, dass es sich hier um eine *Parallelverschiebung* in der Richtung der x-Axe handelt. Demgemäss mag es gestattet sein, die Schreibweise (17.), so *unvollkommen* sie auch sein mag, beizubehalten.

$$(17.)\qquad \Xi_e(\mathfrak{K}) = -\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial x}\left(\int\limits_{\mathfrak{K}}\int\limits_{\mathfrak{T}_1}\frac{(\sigma)\,D\mathrm{v}\cdot(\sigma_1)\,D\mathrm{v}_1}{r}\right).$$

Der ganze unendliche Raum $\mathfrak{T}_1$ ist zerlegbar in einzelne Theile [vgl. S. 806]:

$$(18.)\qquad \mathfrak{T}_1 = \mathfrak{K}_0 + (\mathfrak{K} + \mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2 + \cdots).$$

Entsprechend dieser Zerlegung (18.) kann man nun offenbar auch den Ausdruck (17.) in ebenso viele einzelne Theile zerlegen; von denen übrigens der erste $= 0$ sein wird, weil die elektrische Dichtigkeit der Luft überall $= 0$ ist. Man kann somit die auf den Körper $\mathfrak{K}$ ausgeübte ponderomotorische Kraft (17.) in ebenso viele einzelne Theile zerlegen, als Körper $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, etc. vorhanden sind. Dabei wird alsdann z. B. der von $\mathfrak{K}_1$ herrührende Theil den Werth haben:

$$(19.)\qquad -\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial x}\left(\int\limits_{\mathfrak{K}}\int\limits_{\mathfrak{K}_1}\frac{(\sigma)\,D\mathrm{v}\cdot(\sigma_1)\,D\mathrm{v}_1}{r}\right);$$

und dieser spezielle Theil (19.) wird alsdann *gewissermaassen* als diejenige ponderomotorische Kraft anzusehen sein, welche speziell der Körper $\mathfrak{K}_1$ auf den betrachteten Körper $\mathfrak{K}$ ausübt. Selbstverständlich liegt in dieser Ausdrucksweise ein gewisses Zugeständnis an das *Conventionelle* und *Althergebrachte*. Denn die in Rede stehenden Kräfte rühren ja im Sinne der hier entwickelten Theorie keineswegs her von irgend welchen directen gegenseitigen Einwirkungen der einzelnen Körper auf einander.

§ 36.

Fortsetzung. Die Drehungsmomente elektrischen Ursprungs und die ponderomotorischen Arbeiten elektrischen Ursprungs.

Wir denken uns den Körper $\mathfrak{K}$ in lauter unendlich kleine substantielle Volumelemente $D\mathrm{v}$ zerlegt, und markiren überdies innerhalb des Körpers irgend einen bestimmten substantiellen Punct $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$. Unterwerfen wir nun den Körper $\mathfrak{K}$ irgend einer [den Festsetzungen (A.), (B.) S. 807 entsprechenden] *virtuellen Verrückung*, so werden hierbei die Coordinaten x, y, z des Elementes $D\mathrm{v}$ gewisse Zuwüchse δx, δy, δz erhalten; und zwar werden diese Zuwüchse stets darstellbar sein durch Formeln von folgender Gestalt*):

*) Vgl. z. B. C. Neumann: „*Die elektrischen Kräfte*", Theil II, bei Teubner, 1898, daselbst S. 123 (6.).

$$(1.)\quad \begin{cases} \delta x = \delta \mathfrak{x} + (z - \mathfrak{z})\delta \mathfrak{b} - (y - \mathfrak{y})\delta \mathfrak{c}, \\ \delta y = \delta \mathfrak{y} + (x - \mathfrak{x})\delta \mathfrak{c} - (z - \mathfrak{z})\delta \mathfrak{a}, \\ \delta z = \delta \mathfrak{z} + (y - \mathfrak{y})\delta \mathfrak{a} - (x - \mathfrak{x})\delta \mathfrak{b}, \end{cases}$$

wo $\delta\mathfrak{x}$, $\delta\mathfrak{y}$, $\delta\mathfrak{z}$ und $\delta\mathfrak{a}$, $\delta\mathfrak{b}$, $\delta\mathfrak{c}$ völlig willkührliche unendlich kleine Constanten sind. Diese Constanten haben ihre bestimmten Bedeutungen. Es sind nämlich $\delta\mathfrak{x}$, $\delta\mathfrak{y}$, $\delta\mathfrak{z}$ die Verrückungen jenes zu Anfang markirten substantiellen Punctes $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$. Ferner sind $\delta\mathfrak{a}$, $\delta\mathfrak{b}$, $\delta\mathfrak{c}$ die unendlich kleinen Winkel, um welche der Körper $\mathfrak{K}$ respective um die Coordinatenaxen x, y, z sich gedreht hat.

Sind nun, ebenso wie im vorigen Paragraph, $\Xi_e Dv$, $H_e Dv$, $Z_e Dv$ die auf das substantielle Element $Dv(x, y, z)$ einwirkenden ponderomotorischen Kräfte elektrischen Ursprungs, so wird von diesen Kräften während jener virtuellen Verrückung eine gewisse Arbeit δA_e verrichtet werden, welche den Werth hat:

$$(2.)\quad \delta A_e = \int_{\mathfrak{K}} (\Xi_e \delta x + H_e \delta y + Z_e \delta z)\, Dv,$$

die Integration ausgedehnt gedacht über alle Volumelemente Dv des Körpers $\mathfrak{K}$.

Zur Abkürzung wollen wir die unendlich kleinen Verrückungen δx, δy, δz mit f, g, h bezeichnen; so dass also die Gleichungen (1.) die Gestalt erhalten:

$$(3.)\quad \begin{cases} f = \delta \mathfrak{x} + (z - \mathfrak{z})\delta \mathfrak{b} - (y - \mathfrak{y})\delta \mathfrak{c}. \\ g = \delta \mathfrak{y} + (x - \mathfrak{x})\delta \mathfrak{c} - (z - \mathfrak{z})\delta \mathfrak{a}, \\ h = \delta \mathfrak{z} + (y - \mathfrak{y})\delta \mathfrak{a} - (x - \mathfrak{x})\delta \mathfrak{b}, \end{cases}$$

während gleichzeitig die Formel (2.) übergeht in:

$$(4.)\quad \delta A_e = \int_{\mathfrak{K}} (\Xi_e f + H_e g + Z_e h)\, Dv.$$

Macht man jene willkührlichen Constanten $\delta\mathfrak{x}$, $\delta\mathfrak{y}$, $\delta\mathfrak{z}$, $\delta\mathfrak{a}$, $\delta\mathfrak{b}$, $\delta\mathfrak{c}$ alle $=0$, mit alleiniger Ausnahme von $\delta\mathfrak{x}$, so wird nach (3.): $f = \delta\mathfrak{x}$, $g = 0$, $h = 0$; wodurch die Arbeit (4.) sich reducirt auf:

$$(4a.)\quad \delta A_e = (\delta\mathfrak{x}) \cdot \int_{\mathfrak{K}} \Xi_e\, Dv.$$

Macht man andererseits jene sechs Constanten $\delta\mathfrak{x}$, $\delta\mathfrak{y}$, $\delta\mathfrak{z}$, $\delta\mathfrak{a}$, $\delta\mathfrak{b}$, $\delta\mathfrak{c}$ alle $=0$, mit alleiniger Ausnahme von $\delta\mathfrak{a}$, so wird nach (3.): $f = 0$, $g = -(z - \mathfrak{z})\delta\mathfrak{a}$, $h = (y - \mathfrak{y})\delta\mathfrak{a}$; wodurch die Arbeit (4.) alsdann sich reducirt auf:

(4b.) $$\delta \mathsf{A}_e = (\delta \mathfrak{a}) \cdot \int_{\mathfrak{K}} [(y - \mathfrak{y}) \mathsf{Z}_e - (z - \mathfrak{z}) \mathsf{H}_e] \, Dv.$$

Die allgemeine Formel (4.) enthält also als Specialfälle die Formeln (4a.) und (4b.). Oder mit anderen Worten: Die auf den Körper $\mathfrak{K}$ ausgeübte *ponderomotorische Arbeit* $\delta \mathsf{A}_e$ (4.) enthält als Specialfälle in sich: Die auf den Körper ausgeübten *translatorischen Kräfte* und *Drehungsmomente*. Solche Specialitäten bei Seite lassend, wollen wir nun ganz allgemein die ponderomotorische Arbeit in Betracht ziehen. Dabei sei bemerkt, dass die in dieser ponderomotorischen Arbeit $\delta \mathsf{A}_e$ (4.) enthaltenen Verrückungen f, g, h die Werthe (3.) haben, also Functionen von x, y, z sind, die folgenden Gleichungen Genüge leisten:

(5.) $$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial y} = \dfrac{\partial h}{\partial z} = Null, \\ \dfrac{\partial h}{\partial y} + \dfrac{\partial g}{\partial z} = \dfrac{\partial f}{\partial z} + \dfrac{\partial h}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} = Null. \end{cases}$$

Dies vorangeschickt, handelt es sich nun um die weitere Entwicklung des Ausdruckes $\delta \mathsf{A}_e$ (4.), *unter Anwendung der im vorigen Paragraph notirten Formeln Seite* 808 (4.), (5.), (6.), (7.). — Nach jenen Formeln ist:

(6.) $$\Xi_e f + \mathsf{H}_e g + \mathsf{Z}_e h = \frac{\partial (p_{11} f + p_{12} g + p_{13} h)}{\partial x} + \frac{\partial (p_{21} f + p_{22} g + p_{23} h)}{\partial y} + \frac{\partial (p_{31} f + p_{32} g + p_{33} h)}{\partial z} - \omega,$$

wo ω die Bedeutung hat:

$$\omega = p_{11} \frac{\partial f}{\partial x} + p_{22} \frac{\partial g}{\partial y} + p_{33} \frac{\partial h}{\partial z} + p_{23} \left(\frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} \right) + p_{31} \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial h}{\partial x} \right) + p_{12} \left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Dieses ω ist aber nach (5.) gleich *Null*. Solches constatirt, ergiebt sich aus (4.) durch Substitution des Wertes (6.):

(7.) $$\delta \mathsf{A}_e = \int_{\mathfrak{K}} \left[\frac{\partial (p_{11} f + p_{12} g + p_{13} h)}{\partial x} + \frac{\partial (p_{21} f + p_{22} g + p_{23} h)}{\partial y} + \frac{\partial (p_{31} f + p_{32} g + p_{33} h)}{\partial z} \right] Dv.$$

Die hier auftretenden Trinome besitzen [nach Seite 809 (7.)] folgende Werthe:

(8.) $$\begin{cases} p_{11} f + p_{12} g + p_{13} h = \frac{\varepsilon}{8\pi} [(\varphi_1^2 - \varphi_2^2 - \varphi_3^2) f + 2 \varphi_1 \varphi_2 g + 2 \varphi_1 \varphi_3 h], \\ p_{21} f + p_{22} g + p_{23} h = \frac{\varepsilon}{8\pi} [2 \varphi_2 \varphi_1 f + (\varphi_2^2 - \varphi_3^2 - \varphi_1^2) g + 2 \varphi_2 \varphi_3 h], \\ p_{31} f + p_{32} g + p_{33} h = \frac{\varepsilon}{8\pi} [2 \varphi_3 \varphi_1 f + 2 \varphi_3 \varphi_2 g + (\varphi_3^2 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2) h], \end{cases}$$

wo rechter Hand die Indices 1, 2, 3 die partiellen Ableitungen nach x, y, z andeuten sollen. Substituirt man nun diese Werthe (8.) in der Formel (7.), und beachtet man dabei den allgemeinen Satz (δ.) Seite 810, so erhält man sofort:

$$(9.)\quad \delta \mathsf{A}_e = \frac{\varepsilon_0}{8\pi}\int_{\mathfrak{R}} \left\{\begin{array}{l} +\frac{\partial}{\partial x}\left[(\varphi_1^2-\varphi_2^2-\varphi_3^2)f+2\varphi_1\varphi_2 g+2\varphi_1\varphi_3 h\right] \\ +\frac{\partial}{\partial y}\left[2\varphi_2\varphi_1 f+(\varphi_2^2-\varphi_3^2-\varphi_1^2)g+2\varphi_2\varphi_3 h\right] \\ +\frac{\partial}{\partial z}\left[2\varphi_3\varphi_1 f+2\varphi_3\varphi_2 g+(\varphi_3^2-\varphi_1^2-\varphi_2^2)h\right] \end{array}\right\} Dv,$$

oder, falls man den in den geschweiften Klammern enthaltenen Ausdruck nach den Grössen f, g, h und nach den Ableitungen dieser Grössen ordnet:

$$(10.)\quad \delta \mathsf{A}_e = \frac{\varepsilon_0}{8\pi}\int_{\mathfrak{R}} \left\{\begin{array}{l} +f\left[\frac{\partial}{\partial x}(\varphi_1^2-\varphi_2^2-\varphi_3^2)+\frac{\partial}{\partial y}(2\varphi_1\varphi_2)+\frac{\partial}{\partial z}(2\varphi_1\varphi_3)\right] \\ +g\left[\frac{\partial}{\partial x}(2\varphi_2\varphi_1)+\frac{\partial}{\partial y}(\varphi_2^2-\varphi_3^2-\varphi_1^2)+\frac{\partial}{\partial z}(2\varphi_2\varphi_3)\right] \\ +h\left[\frac{\partial}{\partial x}(2\varphi_3\varphi_1)+\frac{\partial}{\partial y}(2\varphi_3\varphi_2)+\frac{\partial}{\partial z}(\varphi_3^2-\varphi_1^2-\varphi_2^2)\right] \end{array}\right\} Dv;$$

in der That erkennt man nämlich, auf Grund der Formeln (5.), sofort, dass in jenem Ausdrucke die mit den *Ableitungen* der f, g, h behafteten Glieder alle $= 0$ sind. Was nun ferner in (10.) den Factor von f betrifft, so ist derselbe so darstellbar:

$$2(\varphi_1\varphi_{11}-\varphi_2\varphi_{21}-\varphi_3\varphi_{31})+2(\varphi_{12}\varphi_2+\varphi_1\varphi_{22})+2(\varphi_{13}\varphi_3+\varphi_1\varphi_{33});$$

es reducirt sich also dieser Factor auf:

$$2\varphi_1(\varphi_{11}+\varphi_{22}+\varphi_{33}) = -2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot 4\pi(\sigma) = -8\pi\frac{\partial\varphi}{\partial x}(\sigma);\ \text{[vgl. Seite 808 (3.)]}.$$

U. s. w. Es wird also die Formel (10.) übergehen in:

$$(11.)\qquad \delta \mathsf{A}_e = -\varepsilon_0\int_{\mathfrak{R}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}f+\frac{\partial\varphi}{\partial y}g+\frac{\partial\varphi}{\partial z}h\right)(\sigma)\,Dv.$$

Nun sind aber f, g, h nur Abbreviaturen für δx, δy, δz. Folglich ist:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}f+\frac{\partial\varphi}{\partial y}g+\frac{\partial\varphi}{\partial z}h = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\delta y+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\delta z = \delta\varphi;$$

sodass also die Formel (11.) die Gestalt erhält:

$$(12.)\qquad \delta \mathsf{A}_e = -\varepsilon_0\int_{\mathfrak{R}}\delta\varphi\cdot(\sigma)\,Dv;$$

wofür man auch schreiben kann:

(13.) $$\delta A_e = -\varepsilon_0 \cdot \delta \left(\int_{\mathfrak{K}} \varphi(\sigma)\, Dv \right);$$

hier bezeichnet alsdann δ diejenige Aenderung, welche das Integral durch die in Rede stehende virtuelle Verrückung erleidet. Schliesslich kann man die Formel (13.), indem man für φ seinen eigentlichen Werth [Seite 808 (3.)] substituirt, auch so schreiben:

(14.) $$\delta A_e = -\varepsilon_0 \cdot \delta \left(\int_{\mathfrak{K}} \int_{\mathfrak{T}_1} \frac{(\sigma)\, Dv \cdot (\sigma_1)\, Dv_1}{r} \right).$$

Das hier auftretende Integral ist identisch mit dem Integral auf Seite 812 (17.), und wird daher, ebenso wie jenes, entsprechend der Formel

(15.) $$\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{K}_0 + (\mathfrak{K} + \mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2 + \cdots),$$

in einzelne Theile zerlegbar sein, von denen der erste verschwindet. Demgemäss wird die Arbeit δA_e (14.) in einzelne Theile zerfallen, die respective von $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, etc. herrühren; sodass man also zu folgendem Resultat gelangt:

Resultat. — *Die ponderomotorischen Kräfte, welche die beiden Körper $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$, vermöge der in ihnen enthaltenen freien elektrischen Dichtigkeiten (σ) und (σ_1) gegenseitig auf einander ausüben, stehen in einfacher Beziehung zu dem elektrostatischen Potential:*

(16.) $$F = \int_{\mathfrak{K}} \int_{\mathfrak{K}_1} \frac{(\sigma)\, Dv \cdot (\sigma_1)\, Dv_1}{r}.$$

Denkt man sich nämlich den Körper $\mathfrak{K}$ irgend einer [*den Festsetzungen* (A.), (B.) *Seite* 807 *entsprechenden*] *virtuellen Verrückung unterworfen, so wird die von jenen ponderomotorischen Kräften während dieser Verrückung verrichtete Arbeit δA_e den Werth besitzen:*

(17.) $$\delta A_e = -\varepsilon_0 \cdot \delta F,$$

wo δF denjenigen Zuwachs bezeichnet, den das Potential F während der in Rede stehenden virtuellen Verrückung erfährt; dabei repräsentirt ε_0 den constanten Dielectricitätscoefficienten der umgebenden homogenen Luft $\mathfrak{K}_0$.

Aus dieser Arbeit wird man, als Specialfälle, ableiten können die vom Körper $\mathfrak{K}_1$ auf den Körper $\mathfrak{K}$ ausgeübten *translatorischen Kräfte* und *Drehungsmomente* [vgl. Seite 813 (4.), (4a.), (4b.)]; sodass man in solcher Weise z. B. für die vom Körper $\mathfrak{K}_1$ auf den

Körper $\mathfrak{K}$ in der Richtung der x-Axe ausgeübte translatorische Kraft $\Xi_e(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K})$ den Werth erhält:

$$(18.)\qquad \Xi_e(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}) = -\varepsilon_0 \frac{\partial F}{\partial x},$$

was in Einklang ist mit der Formel Seite 812 (19.).

§ 37.

Fortsetzung. Die translatorischen Kräfte magnetischen Ursprungs.

Statt der Kräfte Ξ_e, H_e, Z_e, sollen jetzt die Kräfte Ξ_m, H_m, Z_m ins Auge gefasst werden, unter Beibehaltung der bisherigen Vorstellungen, [vgl. namentlich Seite 804—807]. Dabei beginnen wir mit dem *magnetischem Potential* ψ.

Dieses Potential ψ besitzt zur Zeit des hier betrachteten stationären Zustandes den Werth [Seite 782 (12.)]:

$$(1.)\qquad \psi_1 = \int_{\mathfrak{U}} \frac{(\tau)\, D\mathrm{v}}{r},$$

die Integration ausgedehnt gedacht über diejenigen Elemente $D\mathrm{v}$, aus denen die Gesammtheit $\mathfrak{U}$ aller Uebergangsschichten besteht. Diese Formel (1.) kann man auch so schreiben:

$$(2.)\qquad \psi_1 = \int_{\mathfrak{T}} \frac{(\tau)\, D\mathrm{v}}{r},$$

oder endlich auch so:

$$(3.)\qquad \psi = \int_{\mathfrak{T}_1} \frac{(\tau_1)\, D\mathrm{v}_1}{r};$$

[man vgl. die analogen Formeln Seite 807 (1.), (2.), (3.)]. Man setze nun überdies:

$$(4.)\qquad U = \int_{\mathfrak{T}_1} \frac{u_1\, D\mathrm{v}_1}{r}, \qquad V = \int_{\mathfrak{T}_1} \frac{v_1\, D\mathrm{v}_1}{r}, \qquad W = \int_{\mathfrak{T}_1} \frac{w_1\, D\mathrm{v}_1}{r};$$

sodass also zwischen diesen Functionen U, V, W die Relation stattfindet:

$$(5.)\qquad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0, \quad \text{[vgl. Seite 791 (3.)].}$$

Alsdann werden die magnetischen Zustandscomponenten $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ in irgend einem Puncte (x, y, z) zur Zeit des hier betrachteten stationären Zustandes folgende Werthe haben [vgl. Seite 788 (27.) und Seite 780 (4.)]:

$$\mathfrak{L} = -\mu \frac{\partial \psi}{\partial x} + \mu A \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right), \qquad \mathfrak{M} = \text{etc.}, \qquad \mathfrak{N} = \text{etc.}$$

Diese Formeln kann man offenbar auch so schreiben:

$$(6.) \qquad \mathfrak{L} = \mu L, \qquad \mathfrak{M} = \mu M, \qquad \mathfrak{N} = \mu N,$$

wo alsdann L, M, N die Bedeutungen haben:

$$(7.) \qquad \begin{cases} L = -\frac{\partial \psi}{\partial x} + A\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right), \\ M = -\frac{\partial \psi}{\partial y} + A\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right), \\ N = -\frac{\partial \psi}{\partial z} + A\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right). \end{cases}$$

Die auf das substantielle Element $Dv(x, y, z)$ einwirkenden *ponderomotorischen Kräfte* $\Xi_m Dv$, $\mathsf{H}_m Dv$, $\mathsf{Z}_m Dv$ *magnetischen Ursprungs* haben nun bekanntlich die Werthe [vgl. Abh. I, S. 305]:

$$(8.) \qquad \begin{cases} \Xi_m Dv = \left(\frac{\partial q_{11}}{\partial x} + \frac{\partial q_{12}}{\partial y} + \frac{\partial q_{13}}{\partial z}\right) Dv, \\ \mathsf{H}_m Dv = \left(\frac{\partial q_{21}}{\partial x} + \frac{\partial q_{22}}{\partial y} + \frac{\partial q_{23}}{\partial z}\right) Dv, \\ \mathsf{Z}_m Dv = \left(\frac{\partial q_{31}}{\partial x} + \frac{\partial q_{32}}{\partial y} + \frac{\partial q_{33}}{\partial z}\right) Dv, \end{cases}$$

wo die q_{hj} folgende Bedeutungen besitzen:

$$q_{11} = \frac{\mathfrak{L}^2 - \mathfrak{M}^2 - \mathfrak{N}^2}{8\pi\mu}, \qquad q_{23} = \frac{2\mathfrak{M}\mathfrak{N}}{8\pi\mu}, \qquad \text{etc. etc.}$$

Diese Ausdrücke q_{11}, q_{23}, etc. kann man offenbar, mit Hinblick auf (6.), auch so schreiben:

$$(9.) \qquad \begin{cases} q_{11} = \frac{\mu}{8\pi}(L^2 - M^2 - N^2), \\ q_{22} = \frac{\mu}{8\pi}(M^2 - N^2 - L^2), \\ q_{33} = \frac{\mu}{8\pi}(N^2 - L^2 - M^2), \end{cases} \qquad \begin{cases} q_{23} = \frac{\mu}{8\pi}(2MN), \\ q_{31} = \frac{\mu}{8\pi}(2NL), \\ q_{12} = \frac{\mu}{8\pi}(2LM). \end{cases}$$

Dies vorangeschickt, stellen wir uns nun die Aufgabe, diejenige translatorische Kraft magnetischen Ursprungs: $\Xi_m(\mathfrak{K})$ zu berechnen, welche auf den ganzen Körper $\mathfrak{K}$ ausgeübt wird in der Richtung der x-Axe. Nach (8.) hat diese Kraft folgenden Werth:

$$(10.) \qquad \Xi_m(\mathfrak{K}) = \int_{\mathfrak{K}} \Xi_m Dv = \int_{\mathfrak{K}} \left(\frac{\partial q_{11}}{\partial x} + \frac{\partial q_{12}}{\partial y} + \frac{\partial q_{13}}{\partial z}\right) Dv,$$

die Integration ausgedehnt gedacht über alle Elemente Dv des Körpers $\mathfrak{K}$. Substituirt man hier in (10.) die Werthe (9.), und

bringt man sodann den allgemeinen Satz (δ.) S. 810 in Anwendung*), so erhält man sofort:

$$(11.)\quad \Xi_m(\mathfrak{R}) = \frac{\mu_0}{8\pi}\int_{\mathfrak{R}}\left(\frac{\partial(L^2 - M^2 - N^2)}{\partial x} + \frac{\partial(2LM)}{\partial y} + \frac{\partial(2LN)}{\partial z}\right)Dv,$$

wo μ_0 die constanten Magnetisirungscoefficienten der umgebenden homogenen Luft $\mathfrak{R}_0$ vorstellt. Das hier unter dem Integralzeichen stehende Trinom ist offenbar

$$= 2(LL_1 - MM_1 - NN_1) + 2(L_2M + LM_2) + 2(L_3N + LN_3),$$

d. i. $$= 2L(L_1 + M_2 + N_3) + 2M(L_2 - M_1) + 2N(L_3 - N_1),$$

wo die Indices 1, 2, 3 die Ableitungen nach x, y, z andeuten sollen. Dies in (11.) substituirt, erhält man:

$$(12.)\quad \Xi_m(\mathfrak{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathfrak{R}}[L(L_1 + M_2 + N_3) + M(L_2 - M_1) + N(L_3 - N_1)]\,Dv.$$

Nun ist nach (7.):

$$(13.)\quad \begin{cases} L = -\psi_1 + A(W_2 - V_3), \\ M = -\psi_2 + A(U_3 - W_1), \\ N = -\psi_3 + A(V_1 - U_2), \end{cases}$$

folglich:

$$L_1 + M_2 + N_3 = -(\psi_{11} + \psi_{22} + \psi_{33}) = -\Delta\psi,$$

also mit Rücksicht auf (3.):

$$(14.)\quad L_1 + M_2 + N_3 = 4\pi(\tau),$$

wo $\Delta\psi$ den Laplace'schen Differentialausdruck vorstellt, und wo (τ) die freie magnetische Dichtigkeit an der betrachteten Stelle, d. i. im Puncte (x, y, z) bezeichnet. — Ferner ergiebt sich aus (13.):

$$\begin{aligned} N_2 - M_3 &= A(V_{12} - U_{22}) - A(U_{33} - W_{13}), \\ &= A(U_{11} + V_{12} + W_{13}) - A(U_{11} + U_{22} + U_{33}), \\ &= A(U_1 + V_2 + W_3)_1 - A\Delta U, \end{aligned}$$

also mit Rücksicht auf (4.) und (5.):

$$(15.)\quad \begin{cases} N_2 - M_3 = A\cdot 4\pi u. \quad \text{Ebenso ergiebt sich:} \\ L_3 - N_1 = A\cdot 4\pi v, \\ M_1 - L_2 = A\cdot 4\pi w. \end{cases}$$

---

*) Bei Anwendung jenes Satzes (δ.) Seite 810 sind im vorliegenden Fall die Grössen ε, ε_0 zu ersetzen durch μ, μ_0.

Substituirt man jetzt in der Formel (12.) die Werthe (14.), (15.), so erhält man:

(16.) $$\Xi_m(\mathfrak{K}) = \mu_0 \cdot \int_{\mathfrak{K}} [L(\tau) - AMw + ANv] D\mathrm{v}.$$

Das hier unter dem Integralzeichen stehende Trinom kann, durch Substitution der Werthe (13.), folgendermassen umgestaltet werden:

(17.) $$L(\tau) - AMw + ANv = \\ = \left\{ \begin{array}{l} -\psi_1(\tau) + A(W_2 - V_3)(\tau) + A(\psi_2 w - \psi_3 v) \\ \quad + A^2[v(V_1 - U_2) + w(W_1 - U_3)] \end{array} \right\}.$$

Dies in (16.) substituirt, erhält man:

(18.) $$\Xi_m(\mathfrak{K}) = Q^{(1)} + Q^{(2)} + Q^{(3)} + Q^{(4)},$$

wo $Q^{(1)}$, $Q^{(2)}$, $Q^{(3)}$, $Q^{(4)}$ folgende Bedeutungen haben:

(19.) $$\left\{ \begin{array}{l} Q^{(1)} = \mu_0 \cdot \int_{\mathfrak{K}} (-1) \frac{\partial \psi}{\partial x}(\tau) D\mathrm{v}, \\ Q^{(2)} = \mu_0 \cdot \int_{\mathfrak{K}} A \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right)(\tau) D\mathrm{v}, \\ Q^{(3)} = \mu_0 \cdot \int_{\mathfrak{K}} A \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} w - \frac{\partial \psi}{\partial z} v \right) D\mathrm{v}, \\ Q^{(4)} = \mu_0 \cdot \int_{\mathfrak{K}} A^2 \left[v \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) + w \left(\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z} \right) \right] D\mathrm{v}. \end{array} \right.$$

Offenbar ist der Ausdruck $Q^{(1)}$ von ganz ähnlicher Beschaffenheit wie der Ausdruck S. 811 (14.), so dass man also [vgl. den damaligen Uebergang auf S. 811 von (14.) zu (17.)] zu folgendem Resultat gelangen wird:

(20.) $$Q^{(1)} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{\mathfrak{K}} \int_{\Sigma_1} \frac{(\tau) D\mathrm{v} \cdot (\tau_1) D\mathrm{v}_1}{r} \right);$$

wofür man schreiben kann:

(21.) $$Q^{(1)} = -\mu_0 \frac{\partial F^{(1)}}{\partial x},$$

wo alsdann $F^{(1)}$ die Bedeutung hat:

(22.) $$F^{(1)} = \int_{\mathfrak{K}} \int_{\Sigma_1} \frac{(\tau) D\mathrm{v} \cdot (\tau_1) D\mathrm{v}_1}{r}.$$

In den Formeln (20.), (21.) bezieht sich das Zeichen $\frac{\partial}{\partial x}$ auf eine [den Festsetzungen (A.), (B.) S. 807 entsprechende] *virtuelle*

Verschiebung des Körpers $\mathfrak{K}$ in der Richtung der x-Axe*). Ueberdies wird der Ausdruck $F^{(1)}$ (22.) zu bezeichnen sein als *das Potential aller im ganzen unendlichen Raume $\mathfrak{T}_1$ vorhandenen freien Magnetismen in Bezug auf den im Körper $\mathfrak{K}$ enthaltenen freien Magnetismus.*

Die Grösse $Q^{(2)}$ hat nach (19.) **den Werth:**

(23.) $$Q^{(2)} = \mu_0 \cdot \int_{\mathfrak{K}} A\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right)(\tau)\,Dv,$$

und kann daher, indem man für V, W die Integralausdrücke (4.) substituirt, auch so dargestellt werden:

(24.) $$Q^{(2)} = \mu_0 A \int_{\mathfrak{K}} \left\{(\tau)\,Dv \int_{\mathfrak{T}_1} Dv_1 \left(w_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - v_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right)\right\}.$$

Die Ableitungen von r nach x, y, z sind aber entgegengesetzt gleich mit denen nach x_1, y_1, z_1. Somit folgt:

(25.) $$Q^{(2)} = -\mu_0 \int_{\mathfrak{K}} \left\{(\tau)\,Dv \cdot A \int_{\mathfrak{T}_1} Dv_1 \left(w_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} - v_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1}\right)\right\}.$$

Der hier in den geschweiften Klammern stehende Ausdruck

(26.) $$\mathfrak{F} = (\tau)\,Dv \cdot A \int_{\mathfrak{T}_1} Dv_1 \left(w_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} - v_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1}\right)$$

bezieht sich auf die im Element Dv enthaltene Menge $(\tau)\,Dv$ von freiem Magnetismus, und wird zu bezeichnen sein als *eine Function der Coordinaten x, y, z dieses Elementes* $(\tau)\,Dv$.

Will man von dieser Function $\mathfrak{F}$ (26.) eine deutlichere und einfachere Vorstellung haben, so ist zu beachten, dass es sich hier immer nur um den stationären Zustand handelt, und dass also die im ganzen unendlichen Raume $\mathfrak{T}_1$ vorhandenen elektrischen Strömungen u_1, v_1, w_1 in ihrer Gesammtheit anzusehen sind als unendlich viele *elektrische Stromringe*, deren jeder einen unendlich kleinen Querschnitt und eine bestimmte Stromstärke besitzt**). Man denke sich in einem solchen Ringe, dessen Strom-

*) Man vgl. auch die Note auf S. 811.

**) Der unendlich kleine Querschnitt eines solchen Stromringes wird im Allgemeinen an verschiedenen Stellen des Ringes von verschiedener Grösse sein. Hingegen ist die Stromstärke des Ringes an allen Stellen des Ringes *ein und dieselbe*.

stärke J_1 heissen mag, zwei aufeinanderfolgende senkrechte Querschnitte construirt, und das zwischen diesen beiden Querschnitten gelegene Volumelement des Ringes mit $D\mathrm{v}_1$ bezeichnet. Auch mag die *Länge* dieses Elementes (d. i. der gegenseitige Abstand jener beiden Querschnitte) mit Ds_1 bezeichnet werden. Alsdann haben die diesem Volumelement $D\mathrm{v}_1$ entsprechenden Producte $u_1 D\mathrm{v}_1$, $v_1 D\mathrm{v}_1$, $w_1 D\mathrm{v}_1$ folgende Werthe*):

(27.) $u_1 D\mathrm{v}_1 = J_1 Dx_1, \quad v_1 D\mathrm{v}_1 = J_1 Dy_1, \quad w_1 D\mathrm{v}_1 = J_1 Dz_1,$

wo Dx_1, Dy_1, Dz_1 die rechtwinkligen Componenten des Linienelementes Ds_1 vorstellen. Bezeichnet man also den speziell *vom Ringe* J_1 herrrührenden Theil des Ausdruckes $\mathfrak{F}$ mit $\mathfrak{f}$, so ergiebt sich für dieses $\mathfrak{f}$, mit Rücksicht auf (27.), folgender Ausdruck:

$$\mathfrak{f} = -(\tau) D\mathrm{v} \cdot AJ_1 \int \left(Dy_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} - Dz_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} \right),$$

das Integral hinerstreckt gedacht über alle Elemente $Ds_1(Dx_1, Dy_1, Dz_1)$ des Ringes J_1. Dieses Ringintegral kann, mittels des Stokes'schen Satzes, in ein Flächenintegral verwandelt werden. Man erhält in solcher Weise:

$$\mathfrak{f} = -(\tau) D\mathrm{v} \cdot AJ_1 \int \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x_1^2} a_1 + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x_1 \partial y_1} b_1 + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x_1 \partial z_1} c_1 \right) Do_1,$$

die Integration ausgedehnt gedacht über alle Elemente Do_1 der *Stromfläche* (d. i. einer vom Ringe J_1 umgrenzten Fläche). Dabei bezeichnet r den Abstand des Elementes Do_1 von dem an der Stelle (x, y, z) gelegenen magnetischen Massenelement $(\tau) D\mathrm{v}$. Ferner sind a_1, b_1, c_1 die Richtungscosinus der auf Do_1 errichteten Normale n_1; wobei dieser Normale n_1 diejenige Richtung zuzuertheilen ist, in Bezug auf welche die Richtung des Stromes J_1 *positiv* ist, [vgl. die Abh. I, S. 223]. Die letzte Formel kann man offenbar auch so schreiben:

$$\mathfrak{f} = +(\tau) D\mathrm{v} \cdot AJ_1 \int \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} a_1 + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} b_1 + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} c_1 \right) Do_1,$$

oder auch so:

$$\mathfrak{f} = +(\tau) D\mathrm{v} \cdot AJ_1 \int \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_1} Do_1,$$

*) Man vgl. z. B. C. Neumann: *Die elektrischen Kräfte, zweiter Theil*, Leipzig, bei Teubner 1898, daselbst Seite 66 (12.).

wo n_1 jene schon genannte Richtung vorstellt. Endlich kann man dieser letzten Formel die Gestalt geben:

$$(28.) \qquad \mathfrak{f} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (\tau) D\mathfrak{v} \cdot AJ_1 \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_1} Do_1 \right\}.$$

Hier bezieht sich das Zeichen $\frac{\partial}{\partial x}$ auf eine kleine [den Festsetzungen (A.), (B.) S. 807 entsprechende] *virtuelle Verschiebung* des Elementes $(\tau) D\mathfrak{v}$ in der Richtung der xAxe.

$\mathfrak{f}$ ist nur ein Theil von $\mathfrak{F}$. Um $\mathfrak{F}$ selber zu erhalten, hat hat man den Ausdruck $\mathfrak{f}$ (28.) noch zu summiren über alle im ganzen unendlichen Raum $\mathfrak{T}_1$ vorhandenen Stromringe J_1. Somit ergiebt sich:

$$(29.) \qquad \mathfrak{F} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (\tau) D\mathfrak{v} \cdot \sum_{\mathfrak{T}_1} \left[AJ_1 \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_1} Do_1 \right] \right\},$$

wo jene Summation angedeutet ist durch das grosse Sigma mit dem Index $\mathfrak{T}_1$. Die in (28.), (29.) in der geschweiften Klammer stehenden Ausdrücke haben bekanntlich ihre bestimmten Namen, an denen wir hier festhalten wollen. Der in (28.) in den geschweiften Klammern enthaltene Ausdruck heisst*): *das Potential des Ringes J_1 in Bezug auf das magnetische Massenelement* $(\tau) D\mathfrak{v}$; und dementsprechend wird der in (29.) in den geschweiften Klammern enthaltene Ausdruck zu bezeichnen sein als *das Potential aller im ganzen unendlichem Raume $\mathfrak{T}_1$ vorhandenen Stromringe J_1 in Bezug auf jenes Element* $(\tau) D\mathfrak{v}$.

Die Formel (29.) gewinnt, falls man für $\mathfrak{F}$ seine eigentliche Bedeutung (26.) substituirt, die Gestalt:

$$(30.) \quad (\tau) D\mathfrak{v} \cdot A \int_{\mathfrak{T}_1} D\mathfrak{v}_1 \left(w_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} - v_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (\tau) D\mathfrak{v} \cdot \sum_{\mathfrak{T}_1} \left[AJ_1 \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_1} Do_1 \right] \right\}.$$

Macht man nun endlich von dieser Umgestaltung Gebrauch in in der Formel (25.) so erhält man:

$$(31.) \qquad Q^{(2)} = -\mu_0 \int_{\mathfrak{R}} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (\tau) D\mathfrak{v} \cdot \sum_{\mathfrak{T}_1} \left[AJ_1 \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_1} Do_1 \right] \right\};$$

wofür man schreiben kann:

$$(32.) \qquad Q^{(2)} = -\mu_0 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial x};$$

*) Man vgl. den letzten Paragraph der vorliegenden Abhandlung.

wo alsdann $F^{(2)}$ die Bedeutung besitzt:

$$(33.)\qquad F^{(2)} = \int\limits_{\mathfrak{K}} \left((\tau)\, D\mathrm{v} \cdot \sum_{\mathfrak{T}_1} \left[A J_1 \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_1} Do_1 \right] \right).$$

Das Zeichen $\frac{\partial}{\partial x}$ in (32.) bezieht sich alsdann auf eine [den Festsetzungen (A.), (B.) S. 807 entsprechende] *virtuelle Verschiebung* des Körpers $\mathfrak{K}$ in der Richtung der x-Axe. Ueberdies wird der Ausdruck $F^{(2)}$ (33.) zu bezeichnen sein als *das Potential aller im ganzen unendlichen Raume $\mathfrak{T}_1$ vorhandenen elektrischen Stromringe J_1 in Bezug auf den im Körper $\mathfrak{K}$ enthaltenen freien Magnetismus.*

Wir gehen über zum Ausdruck $Q^{(3)}$ (19):

$$(34.)\qquad Q^{(3)} = \mu_0 A \int\limits_{\mathfrak{K}} D\mathrm{v} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} w - \frac{\partial \psi}{\partial z} v \right)$$

welcher, wenn man für ψ seinen Werth (3.) substituirt, die Gestalt erhält:

$$(35.)\qquad Q^{(3)} = \mu_0 A \int\limits_{\mathfrak{K}} \left\{ D\mathrm{v} \int\limits_{\mathfrak{T}_1} (\tau_1)\, D\mathrm{v}_1 \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} w - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} v \right) \right\};$$

wofür man offenbar auch schreiben kann:

$$(36.)\qquad Q^{(3)} = \mu_0 \int\limits_{\mathfrak{T}_1} \left\{ (\tau_1)\, D\mathrm{v}_1 \cdot A \int\limits_{\mathfrak{K}} D\mathrm{v} \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} w - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} v \right) \right\}.$$

Der hier in den geschweiften Klammern befindliche Ausdruck wird offenbar einer Umgestaltung fähig sein, die vollkommen analog ist mit der in (30.) angegebenen Umgestaltung. Man erhält in solcher Weise:

$$(37.)\qquad (\tau_1) D\mathrm{v}_1 \cdot A \int\limits_{\mathfrak{K}} D\mathrm{v} \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} w - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} v \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ (\tau_1) D\mathrm{v}_1 \cdot \sum_{\mathfrak{K}} \left[A J \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} Do \right] \right\}.$$

Dies in (36.) substituirt, erhält man;

$$(38.)\qquad Q^{(3)} = + \mu_0 \int\limits_{\mathfrak{T}_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ (\tau_1)\, D\mathrm{v}_1 \cdot \sum_{\mathfrak{K}} \left[A J \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} Do \right] \right\}.$$

Diese Formel aber kann man auch so schreiben:

$$(39.)\qquad Q^{(3)} = + \mu_0 \frac{\partial F^{(3)}}{\partial x_1},$$

oder auch so:

$$(40.)\qquad Q^{(3)} = -\mu_0 \frac{\partial F^{(3)}}{\partial x},$$

wo alsdann $F^{(3)}$ die Bedeutung hat:

$$(41.)\qquad F^{(3)} = \int\limits_{\mathfrak{T}_1} \left((\tau_1)\, D\mathrm{v}_1 \cdot \sum_{\mathfrak{K}} \left[AJ \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, Do \right] \right).$$

In (39.) bezieht sich das Zeichen $\frac{\partial}{\partial x_1}$ auf eine virtuelle Verschiebung *des Raumes* $\mathfrak{T}_1$ in der Richtung der x-Axe, wobei über diese virtuelle Verschiebung des Raumes $\mathfrak{T}_1$ Analoges vorauszusetzen ist, wie früher [in (A.), (B.) S. 807] festgesetzt wurde über virtuelle Verrückungen des Körpers $\mathfrak{K}$. Andererseits bezieht sich in (40.) das Zeichen $\frac{\partial}{\partial x}$ auf eine [jenen Festsetzungen (A.), (B.) S. 807 entsprechende] virtuelle Verschiebung *des Körpers* $\mathfrak{K}$ in der Richtung der x-Axe. Der Uebergang von (39.) zu (40.) findet dadurch seine Begründung, dass die relative Lagenveränderung zwischen $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{K}$ *ein und dieselbe* sein wird, einerlei ob man den Körper $\mathfrak{K}$ in der Richtung der x-Axe verschiebt, oder ob man statt dessen den Raum $\mathfrak{T}_1$ in der *entgegengesetzten* Richtung verschiebt. Endlich ist zu bemerken, dass der Ausdruck $F^{(3)}$ (41.) zu bezeichnen sein wird als *das Potential aller im ganzen unendlichen Raume* $\mathfrak{T}_1$ *vorhandenen freien Magnetismen in Bezug auf alle im Körper* $\mathfrak{K}$ *enthaltenen elektrischen Stromringe* J.

Wir gehen über zum Ausdruck $Q^{(4)}$ (19):

$$(42.)\qquad Q^{(4)} = \mu_0 A^2 \int\limits_{\mathfrak{K}} \left[v \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) + w \left(\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z} \right) \right] D\mathrm{v}.$$

Dieser Ausdruck wird, falls man für U, V, W ihre Werthe [S. 817 (4.)] einsetzt, die Gestalt erhalten:

$$(43.)\ Q^{(4)} = \mu_0 A^2 \int\limits_{\mathfrak{K}} \int\limits_{\mathfrak{T}_1} \left[v \left(v_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} - u_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \right) + w \left(w_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} - u_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) \right] D\mathrm{v}\, D\mathrm{v}_1;$$

wofür man auch schreiben kann:

$$(44.)\qquad Q^{(4)} = \mu_0 A^2 \cdot \left\{ \begin{aligned} &+ \int\limits_{\mathfrak{K}} \int\limits_{\mathfrak{T}_1} (u u_1 + v v_1 + w w_1) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\, D\mathrm{v}\, D\mathrm{v}_1 \\ &- \int\limits_{\mathfrak{K}} \int\limits_{\mathfrak{T}_1} u_1 \left(u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + v \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + w \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) D\mathrm{v}\, D\mathrm{v}_1 \end{aligned} \right\}.$$

Zuvörderst sei bemerkt, dass das über den Körper $\mathfrak{K}$ ausgedehnte Integral

$$(\text{f.}) \qquad \int_{\mathfrak{K}} \left(u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + v \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + w \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) D\text{v}$$

in einzelne Theile zerlegbar ist, entsprechend den einzelnen im Körper $\mathfrak{K}$ vorhandenen Stromringen J. Der einem solchen Ringe J entsprechende Theil des Integrals wird, wie mittelst der Formeln S. 822 (27.) sich sofort ergiebt, die Gestalt besitzen:

$$(\text{g.}) \qquad J \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} Dx + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} Dy + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} Dz \right),$$

die Integration hinerstreckt gedacht über alle Elemente Ds (Dx, Dy, Dz) des Ringes. Dieses Integral (g.) ist nun aber offenbar $= 0$; und Gleiches gilt daher auch vom Integrale (f.). Hieraus folgt sofort, dass im Ausdruck (44.) die *untere* Zeile ebenfalls $= 0$ ist, sodass also jene Formel (44.) sich reducirt auf

$$(45.) \qquad Q^{(4)} = \mu_0 A^2 \int_{\mathfrak{K}} \int_{\mathfrak{T}_1} (u u_1 + v v_1 + w w_1) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} D\text{v}\, D\text{v}_1.$$

Hierfür kann man schreiben:

$$(46.) \qquad Q^{(4)} = -\mu_0 \frac{\partial F^{(4)}}{\partial x},$$

wo alsdann $F^{(4)}$ die Bedeutung hat:

$$(47.) \qquad F^{(4)} = -A^2 \int_{\mathfrak{K}} \int_{\mathfrak{T}_1} \frac{u u_1 + v v_1 + w w_1}{r} D\text{v}\, D\text{v}_1.$$

Das Zeichen $\frac{\partial}{\partial x}$ in (46.) bezieht sich auf eine [den Festsetzungen (A.), (B.) S. 807 entsprechende] virtuelle Verschiebung des Körpers $\mathfrak{K}$ in der Richtung der x-Axe; und der Ausdruck $F^{(4)}$ (47.) wird zu bezeichnen sein*) als *das Potential aller im ganzen unendlichen Raume $\mathfrak{T}_1$ vorhandenen elektrischen Ströme in Bezug auf die im Körper $\mathfrak{K}$ enthaltenen Ströme.*

Zusammenfassung. — Substituirt man schliesslich in der eigentlichen Hauptformel (18.) für $Q^{(1)}$, $Q^{(2)}$, $Q^{(3)}$, $Q^{(4)}$ die successive in (21.), (32.), (40.), (46.) gefundenen Ausdrücke, so erhält man:

$$(48.) \qquad \Xi_m(\mathfrak{K}) = -\mu_0 \frac{\partial F}{\partial x},$$

*) Man vgl. das in der Note Seite 822 genannte Werk; daselbst Seite 56 (5.).

wo F die Bedeutung hat:

(49.) $$F = F^{(1)} + F^{(2)} + F^{(3)} + F^{(4)};$$

und dieses F wird (wie aus der Bedeutung seiner einzelnen Glieder hervorgeht) zu bezeichnen sein als *dasjenige Potential, welches alle im ganzen unendlichen Raume $\mathfrak{T}_1$ vorhandenen freien Magnetismen und elektrischen Ströme besitzen in Bezug auf die im Körper $\mathfrak{K}$ enthaltenen freien Magnetismen und elektrischen Ströme.*

§ 38.

Fortsetzung. — Die Drehungsmomente magnetischen Ursprungs und die ponderomotorischen Arbeiten magnetischen Ursprungs.

Die Drehungsmomente bilden nur einen Specialfall der *Arbeit* [vgl. Seite 813, 814]. Demgemäss mag hier sogleich die *Arbeit* betrachtet werden. Auf den Körper $\mathfrak{K}$ wirken ein: gewisse ponderomotorische Kräfte magnetischen Ursprungs Ξ_m, H_m, Z_m; lassen wir nun den Körper $\mathfrak{K}$ irgend welche [den Festsetzungen (A.), (B.) S. 807 entsprechende] virtuelle Verrückung erleiden, so wird die während dieser Verrückung von jenen ponderomotorischen Kräften verrichtete Arbeit den Werth haben

(1.) $$\delta \mathsf{A}_m = \int_{\mathfrak{K}} (\Xi_m f + \mathsf{H}_m g + \mathsf{Z}_m h)\, Dv,$$

wo $f = \delta x$, $g = \delta y$, $h = \delta z$ Functionen von x, y, z sind, die folgenden Gleichungen Genüge leisten:

(2.) $$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0, & \dfrac{\partial g}{\partial y} = 0, & \dfrac{\partial h}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial h}{\partial y} + \dfrac{\partial g}{\partial z} = 0, & \dfrac{\partial f}{\partial z} + \dfrac{\partial h}{\partial x} = 0, & \dfrac{\partial g}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0; \end{cases}$$

[vgl. S. 813 (4.) und S. 814 (5.)]. Ferner ist [vgl. S. 814 (6.)—(7.)]:

(3.) $$\Xi_m f + \mathsf{H}_m g + \mathsf{Z}_m h = \frac{\partial(q_{11} f + q_{12} g + q_{13} h)}{\partial x} + \frac{\partial(q_{21} f + q_{22} g + q_{23} h)}{\partial y} + \frac{\partial(q_{31} f + q_{32} g + q_{33} h)}{\partial z} - \omega,$$

wo ω den Werth besitzt:

$$\omega = q_{11} \frac{\partial f}{\partial x} + \cdots + q_{23} \left(\frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z}\right) + \cdots;$$

so dass also dieses $\omega = 0$ sein wird, zufolge der Gleichungen (2.). Solches constatirt, ergiebt sich aus (1.), durch Substitution des Werthes (3.), die Formel:

(4.) $$\delta \mathsf{A}_m = \int_{\mathfrak{K}} \left[\frac{\partial(q_{11} f + q_{12} g + q_{13} h)}{\partial x} + \frac{\partial(q_{21} f + q_{22} g + q_{23} h)}{\partial y} + \frac{\partial(q_{31} f + q_{32} g + q_{33} h)}{\partial z}\right] Dv.$$

Nach S. 818 (9) ist aber:

$$(5.)\qquad \begin{cases} q_{11} = \frac{\mu}{8\pi}(L^2 - M^2 - N^2), \\ q_{22} = \frac{\mu}{8\pi}(M^2 - N^2 - L^2), \\ q_{33} = \frac{\mu}{8\pi}(N^2 - L^2 - M^2), \end{cases} \qquad \begin{cases} q_{23} = \frac{\mu}{8\pi}(2MN), \\ q_{31} = \frac{\mu}{8\pi}(2NL), \\ q_{12} = \frac{\mu}{8\pi}(2LM), \end{cases}$$

mithin z. B.

$$q_{11}f + q_{12}g + q_{13}h = \frac{\mu}{8\pi}[(L^2 - M^2 - N^2)f + (2LM)g + (2LN)h].$$

Analoge Werthe gelten offenbar für $q_{21}f + q_{22}g + q_{23}h$ und für $q_{31}f + q_{32}g + q_{33}h$. Substituiren wir nun diese Werthe in (4.), so gelangen wir, mittelst des Hülfssatzes (δ.) S. 810, zu folgender Formel*):

$$(6.)\qquad \delta \mathsf{A}_m = \frac{\mu_0}{8\pi}\int_{\mathfrak{R}}\Big[\frac{\partial[(L^2 - M^2 - N^2)f + (2LM)g + (2LN)h]}{\partial x} + \cdots\Big]Dv;$$

wofür man mit Rücksicht auf (2.) auch schreiben kann:

$$(7.)\qquad \delta \mathsf{A}_m = \frac{\mu_0}{8\pi}\int_{\mathfrak{R}}\Big[\Big(\frac{\partial(L^2 - M^2 - N^2)}{\partial x}f + \frac{\partial(2LM)}{\partial x}g + \frac{\partial(2LN)}{\partial x}h\Big) + \cdots\Big]Dv;$$

und hieraus endlich ergiebt sich, falls man die Glieder unter dem Integralzeichen nach f, g, h ordnet, die Formel:

$$(8.)\qquad \delta \mathsf{A}_m = \frac{\mu_0}{8\pi}\int_{\mathfrak{R}}\Big[\Big(\frac{\partial(L^2 - M^2 - N^2)}{\partial x} + \frac{\partial(2LM)}{\partial y} + \frac{\partial(2LN)}{\partial z}\Big)f + \cdots\Big]Dv.$$

Das hier mit f multiplicirte Trinom ist von uns schon früher behandelt und umgestaltet worden. Unter Anwendung jener damaligen Umgestaltung [vgl. S. 819 den Uebergang von (11.) zu (16.), (17.)] erhalten wir:

$$(9.)\qquad \delta \mathsf{A}_m = \mu_0\int_{\mathfrak{R}}[(L(\tau) - AMw + ANv)f + \cdots]Dv,$$

wo

$$(10.)\qquad L(\tau) - AMw + ANv = \\ = \begin{cases} -\psi_1(\tau) + A(W_2 - V_3)(\tau) + A(\psi_2 w - \psi_3 v) \\ + A^2[v(V_1 - U_2) + w(W_1 - U_3)] \end{cases}.$$

Aus (9.) ergiebt sich nun, durch Substitution dieses complicirten Ausdruckes (10.), sofort:

$$(11.)\qquad \delta \mathsf{A}_m = R^{(1)} + R^{(2)} + R^{(3)} + R^{(4)},$$

*) Vgl. die Note Seite 819.

wo alsdann $R^{(1)}$, $R^{(2)}$, $R^{(3)}$, $R^{(4)}$ folgende Bedeutungen haben:

$$(12.)\quad\begin{cases} R^{(1)} = \mu_0 \cdot \int\limits_{\mathfrak{K}} (-1) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} f + \frac{\partial \psi}{\partial y} g + \frac{\partial \psi}{\partial z} h\right)(\mathfrak{r})\, D\mathfrak{v}, \\ R^{(2)} = \mu_0 \cdot \int\limits_{\mathfrak{K}} A \left[\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right) f + \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right) g + \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) h\right](\mathfrak{r})\, D\mathfrak{v}, \\ R^{(3)} = \mu_0 \cdot \int\limits_{\mathfrak{K}} A \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} w - \frac{\partial \psi}{\partial z} v\right) f + \cdots\right] D\mathfrak{v}, \\ R^{(4)} = \mu_0 \cdot \int\limits_{\mathfrak{K}} A^2 \left\{\left[v \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) + w \left(\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z}\right)\right] f + \cdots\right\} D\mathfrak{v}. \end{cases}$$

Was zunächst den Ausdruck $R^{(1)}$ betrifft, — so ist derselbe von ähnlicher Beschaffenheit, wie der Ausdruck Seite 815 (11.); sodass man ihm also [vgl. den damaligen Uebergang Seite 815 von (11.) zu (13.)] folgende Gestalt geben kann:

$$(13.)\qquad R^{(1)} = -\mu_0 \cdot \delta \left(\int\limits_{\mathfrak{K}} \psi(\mathfrak{r})\, D\mathfrak{v}\right).$$

Substituirt man hier für ψ seinen Werth Seite 817 (3.), so erhält man:

$$(14.)\qquad R^{(1)} = -\mu_0 \cdot \delta \left(\int\limits_{\mathfrak{K}} \int\limits_{\mathfrak{T}_1} \frac{(\mathfrak{r})\, D\mathfrak{v} \,.\, (\mathfrak{r}_1)\, D\mathfrak{v}_1}{r}\right),$$

d. i.

$$(15.)\qquad R^{(1)} = -\mu_0 \cdot \delta F^{(1)},$$

wo alsdann $F^{(1)}$ die Bedeutung hat:

$$(16.)\qquad F^{(1)} = \int\limits_{\mathfrak{K}} \int\limits_{\mathfrak{T}_1} \frac{(\mathfrak{r})\, D\mathfrak{v} \,.\, (\mathfrak{r}_1)\, D\mathfrak{v}_1}{r}.$$

Das Zeichen δ in den Formeln (13.), (14.), (15.) repräsentirt diejenigen Aenderungen, welche die betreffenden Ausdrücke erfahren in Folge der hier betrachteten *virtuellen Verrückung des Körpers* $\mathfrak{K}$; [und von dieser Verrückung wurde vorausgesetzt, dass sie den Festsetzungen (A.), (B.) Seite 807 entspricht]. Ueberdiess ist zu beachten, dass der Ausdruck $F^{(1)}$ (16.) identisch ist mit dem schon früher [Seite 820 (22.)] betrachteten Potential $F^{(1)}$.

Wir gehen über zum Ausdruck $R^{(2)}$ (12.):

$$(17.)\quad R^{(2)} = \mu_0 \cdot \int\limits_{\mathfrak{K}} A \left[\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right) f + \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right) g + \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) h\right](\mathfrak{r})\, D\mathfrak{v}.$$

Nach Seite 817 (4.) ist:

$$\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} = \int\limits_{\mathfrak{T}_1} \left(w_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - v_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) D\mathfrak{v}_1,$$

wofür man offenbar auch schreiben kann:

$$\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} = -\int_{\mathfrak{T}_1} \left(w_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} - v_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} \right) D\mathrm{v}_1 .$$

Hieraus aber folgt, mittelst der auf Seite 823 (30.) angegebenen Transformation:

$$A\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right) = -\frac{\partial}{\partial x} \sum_{\mathfrak{T}_1} \left[A J_1 \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_1} Do_1 \right].$$

Substituirt man diesen Werth und ähnliche Werthe in (17.), und beachtet man, dass die dortigen f, g, h nur Abbreviaturen sind für $\delta x, \delta y, \delta z$, so erhält man:

$$(18.) \qquad R^{(2)} = -\mu_0 \cdot \int_{\mathfrak{K}} \left((\tau)\, D\mathrm{v} \cdot \delta \sum_{\mathfrak{T}_1} \left[A J_1 \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_1} Do_1 \right] \right),$$

eine Formel, die man, weil die betrachtete virtuelle Verrückung des Körpers $\mathfrak{K}$ den in (A.), (B.) Seite 807 gemachten Festsetzungen entsprechen soll, auch so schreiben kann:

$$(19.) \qquad R^{(2)} = -\mu_0 \cdot \delta \int_{\mathfrak{K}} \left((\tau)\, D\mathrm{v} \cdot \sum_{\mathfrak{T}_1} \left[A J_1 \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_1} Do_1 \right] \right).$$

Schliesslich kann man dieser Formel (19.) die Gestalt geben:

$$(20.) \qquad R^{(2)} = -\mu_0 \cdot \delta F^{(2)},$$

wo $F^{(2)}$ die Bedeutung hat:

$$(21.) \qquad F^{(2)} = \int_{\mathfrak{K}} \left((\tau)\, D\mathrm{v} \cdot \sum_{\mathfrak{T}_1} \left[A J_1 \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_1} Do_1 \right] \right).$$

In (19.), (21.) repräsentirt das δ diejenige Aenderung, welche der betreffende Ausdruck erleidet während der hier betrachteten *virtuellen Verrückung des Körpers* $\mathfrak{K}$, [vgl. (A.), (B.) Seite 807]. Ueberdiess ist offenbar der Ausdruck $F^{(2)}$ (21.) identisch mit dem schon früher betrachteten Potential $F^{(2)}$ [Seite 824 (33.)].

Wir gehen über zum Ausdruck $R^{(3)}$ (12.):

$$(22.) \qquad R^{(3)} = \mu_0 A \int_{\mathfrak{K}} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} w - \frac{\partial \psi}{\partial z} v \right) f + \cdots \right] D\mathrm{v} .$$

Substituirt man hier für ψ seinen Werth S. 817 (3.), so erhält man:

$$(23.)\quad R^{(3)} = \mu_0 \cdot \int_{\mathfrak{T}_1} \left((\tau_1)\, D\mathrm{v}_1 \cdot \int_{\mathfrak{K}} D\mathrm{v} \cdot A \left[f\left(w\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} - v\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z} \right) + \cdots \right] \right).$$

Der erste Theil des hier auftretenden innern Integrals lautet:

$$\mathfrak{F} = \int_{\mathfrak{K}} D\mathrm{v} \cdot Af\left(w\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} - v\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z} \right).$$

Dieses Integral $\mathfrak{F}$ dehnt sich aus über den ganzen Körper $\mathfrak{K}$, und wird sich in einzelne Theile zerlegen lassen, entsprechend den einzelnen im Körper $\mathfrak{K}$ vorhandenen Stromringen J. Der einem solchen Ringe J zugehörige Theil $\mathfrak{f}$ des Integrals $\mathfrak{F}$ wird, wie sich mittelst der Formeln Seite 822 (27.) leicht ergiebt, folgendermassen darstellbar sein:

$$\mathfrak{f} = AJ \cdot \int f\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} Dz - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z} Dy \right),$$

die Integration hinerstreckt gedacht über alle Elemente Ds (Dx, Dy, Dz) des Ringes J. Dieses Ring-Integral kann nun, mittelst des Stokes'schen Satzes, in ein Flächen-Integral verwandelt werden; man erhält in solcher Weise:

$$\mathfrak{f} = AJ \cdot \int \left\{ a\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(f\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(f\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z} \right) \right] - b\frac{\partial}{\partial x}\left(f\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} \right) - c\frac{\partial}{\partial x}\left(f\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z} \right) \right\} Do,$$

die Integration ausgedehnt gedacht über alle Elemente Do der *Stromfläche* (d. i. einer vom Ringe J umgrenzten Fläche); dabei sind a, b, c die Richtungscosinus der auf Do errichteten Normale ν; und zwar ist die Richtung dieser Normale der Art zu denken, dass zu ihr die Richtung des Stromes J *positiv* liegt.

Aus $\mathfrak{f}$ ergiebt sich nun das $\mathfrak{F}$ durch Summation über alle im Körper $\mathfrak{K}$ enthaltenen Stromringe J. Also:

$$\mathfrak{F} = \sum_{\mathfrak{K}} \mathfrak{f}.$$

Substituirt man hier für $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{f}$ die vorstehenden Ausdrücke, so erhält man:

$$(24.)\quad \int_{\mathfrak{K}} D\mathrm{v} \cdot Af\left(w\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} - v\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z} \right) =$$

$$= \sum_{\mathfrak{K}} \left(AJ \int \left\{ a\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(f\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(f\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z} \right) \right] - b\frac{\partial}{\partial x}\left(f\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} \right) - c\frac{\partial}{\partial x}\left(f\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z} \right) \right\} Do \right).$$

Diese Gleichung (24.) und die beiden analogen Gleichungen setzen uns in den Stand, der Formel (23.) folgende Gestalt zu geben:

$$(25.)\qquad R^{(3)} = \mu_0 \cdot \int_{\mathfrak{T}_1} \Big((\tau_1)\, D\mathrm{v}_1 \cdot \sum_{\mathfrak{K}} \Big[A J \int \Omega\, Do \Big]\Big).$$

wo alsdann Ω die Bedeutung haben wird:

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} + a\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(f\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(f\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)\right] - b\frac{\partial}{\partial x}\left(f\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\right) - c\frac{\partial}{\partial x}\left(f\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right) \\ + b\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(g\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(g\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right)\right] - c\frac{\partial}{\partial y}\left(g\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right) - a\frac{\partial}{\partial y}\left(g\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right) \\ + c\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\right)\right] - a\frac{\partial}{\partial z}\left(h\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right) - b\frac{\partial}{\partial z}\left(h\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\right) \end{array} \right\}.$$

Ordnet man diesen Ausdruck Ω nach a, b, c, so lautet der Coefficient von a:

$$f\left(\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}$$

$$- g\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y} - h\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial z}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}.$$

Nach (2.) ist aber $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, ebenso $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$ und $\frac{\partial h}{\partial z} = 0$. Demgemäss kann man diesen Coefficienten von a auch so schreiben:

$$-\left(f\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2} + g\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y} + h\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial z}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right).$$

In analoger Weise sind die Coefficienten von b und c darstellbar. Demgemäss gewinnt der Ausdruck Ω, falls man ihn noch mit Do multiplicirt, und zugleich f, g, h durch ihre eigentlichen Bedeutungen δx, δy, δz ersetzt, folgende Gestalt:

$$\Omega\, Do = \left\{ \begin{array}{l} -\left(\delta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right) a\, Do + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\left(\frac{\partial\delta x}{\partial x}a + \frac{\partial\delta y}{\partial x}b + \frac{\partial\delta z}{\partial x}c\right) Do \\ -\left(\delta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\right) b\, Do + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\left(\frac{\partial\delta x}{\partial y}a + \frac{\partial\delta y}{\partial y}b + \frac{\partial\delta z}{\partial y}c\right) Do \\ -\left(\delta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right) c\, Do + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\left(\frac{\partial\delta x}{\partial z}a + \frac{\partial\delta y}{\partial z}b + \frac{\partial\delta z}{\partial z}c\right) Do \end{array} \right\}.$$

Was die Aenderungen betrifft, welche $a\,Do$, $b\,Do$, $c\,Do$ während der Verrückung des Körpers $\mathfrak{K}$ erleiden, so kann man Gebrauch

machen von früheren Formeln [Abh. I, Seite 229 (S.)], und erhält in solcher Weise z. B. die Gleichung:

$$\delta(a\,Do) = \left[a\left(\frac{\partial\,\delta x}{\partial x} + \frac{\partial\,\delta y}{\partial y} + \frac{\partial\,\delta z}{\partial z}\right) - \left(a\frac{\partial\,\delta x}{\partial x} + b\frac{\partial\,\delta y}{\partial x} + c\frac{\partial\,\delta z}{\partial x}\right)\right] Do.$$

Nach den Formeln (2.) ist aber $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial h}{\partial z} = 0$, d. i. $\frac{\partial\,\delta x}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial\,\delta y}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial\,\delta z}{\partial z} = 0$. Somit folgt*):

$$\delta(a\,Do) = -\left(a\frac{\partial\,\delta x}{\partial x} + b\frac{\partial\,\delta y}{\partial x} + c\frac{\partial\,\delta z}{\partial x}\right) Do.$$

Analoge Formeln gelten für $\delta(b\,Do)$ und $\delta(c\,Do)$; sodass man also dem Ausdrucke für das Product $\Omega\,Do$ folgende Gestalt geben kann:

$$\Omega\,Do = \left\{\begin{aligned} &-\left(\delta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right) a\,Do - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\,\delta(a\,Do)\\ &-\left(\delta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\right) b\,Do - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\,\delta(b\,Do)\\ &-\left(\delta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right) c\,Do - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\,\delta(c\,Do)\end{aligned}\right\}.$$

Hieraus aber ergiebt sich sofort:

$$\Omega\,Do = -\,\delta\left[\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}a + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}b + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}c\right) Do\right],$$

d. i.

$$\Omega\,Do = -\,\delta\left[\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,Do\right],$$

wo n jene auf Do errichtete Normale mit den Richtungscosinus a, b, c vorstellt. — Substituirt man jetzt diesen Werth von $\Omega\,Do$ in der Formel (25.), so erhält man:

$$(26.)\qquad R^{(3)} = -\,\mu_0 \int_{\mathfrak{T}_1} \left((\tau_1)\,Dv_1 \cdot \sum_{\mathfrak{R}}\left[A\,J \cdot \int \delta\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,Do\right)\right]\right);$$

*) In dieser und in der vorhergehenden Formel kann man, statt $\delta(a\,Do)$, auch schreiben $(\delta a)\,Do$. Nach unserer allgemeinen Festsetzung (A.), (B.) Seite 807 verhalten sich nämlich der Körper $\mathfrak{K}$ und der in ihm enthaltene Stromring J, während der virtuellen Verrückung des Körpers $\mathfrak{K}$, so, als bildeten $\mathfrak{K}$ und J ein einziges starres System. Gleiches kann daher auch angenommen werden von der *Stromfläche* des Ringes J. Die einzelnen Elemente dieser Stromfläche sind aber mit Do bezeichnet. Und es wird daher die *Grösse* eines solchen Elementes Do während jener virtuellen Verrückung völlig *ungeändert* bleiben. — *Q. e. d.*

wofür man auch schreiben kann [vgl. (A.), (B.) Seite 807]:

$$(27.)\qquad R^{(3)} = -\mu_0 \cdot \delta \int_{\mathfrak{T}_1} \left((\tau_1)\, Dv_1 \cdot \sum_{\mathfrak{K}} \left[AJ \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} Do \right] \right).$$

Schliesslich kann man dieser Formel (27.) die Gestalt geben:

$$(28.)\qquad R^{(3)} = -\mu_0 \cdot \delta F^{(3)},$$

wo alsdann $F^{(3)}$ die Bedeutung hat:

$$(29.)\qquad F^{(3)} = \int_{\mathfrak{T}_1} \left((\tau_1)\, Dv_1 \cdot \sum_{\mathfrak{K}} \left[AJ \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} Do \right] \right).$$

Wiederum bezieht sich hier das Zeichen δ auf die betrachtete virtuelle Verrückung des Körpers $\mathfrak{K}$ [vgl. (A.), (B.) Seite 807]. Auch ist der Ausdruck $F^{(3)}$ (29.) identisch mit dem schon früher betrachteten Potential $F^{(3)}$ [Seite 825 (41.)].

Wir kommen endlich zum Ausdruck $R^{(4)}$ (12.):

$$(30.)\qquad R^{(4)} = \mu_0 A^2 \int_{\mathfrak{K}} \left\{ \left[v\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) + w\left(\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z}\right)\right] f + \cdots \right\} Dv.$$

Substituirt man hier für U, V, W ihre Werthe [Seite 817 (4.)], so erhält man:

$$(31.)\quad R^{(4)} = \mu_0 A^2 \int_{\mathfrak{K}} \int_{\mathfrak{T}_1} \left\{ \left[v\left(v_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} - u_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\right) + w\left(w_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} - u_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right)\right] f + \cdots \right\} Dv\, Dv_1;$$

sodass man also zu folgender Formel gelangt:

$$(32.)\qquad R^{(4)} = \mu_0 A^2 \int_{\mathfrak{T}_1} \int_{\mathfrak{K}} \Phi\, Dv\, Dv_1,$$

wo Φ die Bedeutung hat:

$$\Phi = \left\{ \begin{array}{l} + (uu_1 + vv_1 + ww_1)\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} f + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} g + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} h\right) \\ - \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} u + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} v + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} w\right)(u_1 f + v_1 g + w_1 h) \end{array} \right\};$$

wie solches leicht zu übersehen ist. Es sind aber f, g, h nur Abbreviaturen für δx, δy, δz. Somit folgt:

$$\Phi = (uu_1 + vv_1 + ww_1)\,\delta \frac{1}{r} - \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} u + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} v + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} w\right)(u_1 \delta x + v_1 \delta y + w_1 \delta z).$$

Hierfür kann zur augenblicklichen Abkürzung geschrieben werden:

$$(33.)\qquad \Phi = (uu_1 + vv_1 + ww_1)\,\delta\,\frac{1}{r} - (u_1\mathfrak{U} + v_1\mathfrak{V} + w_1\mathfrak{W}),$$

wo alsdann z. B. $\mathfrak{U}$ die Bedeutung besitzt:

$$\mathfrak{U} = \left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}u + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}v + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}w\right)\delta x;$$

und diesem Ausdruck $\mathfrak{U}$ kann man, wie leicht zu übersehen ist, folgende Gestalt geben:

$$(38.)\quad \mathfrak{U} = \left(u\frac{\partial\left(\frac{\delta x}{r}\right)}{\partial x} + v\frac{\partial\left(\frac{\delta x}{r}\right)}{\partial y} + w\frac{\partial\left(\frac{\delta x}{r}\right)}{\partial z}\right) - \frac{1}{r}\left(u\frac{\partial\delta x}{\partial x} + v\frac{\partial\delta x}{\partial y} + w\frac{\partial\delta x}{\partial z}\right).$$

Bezeichnet man von den beiden Trinomen rechter Hand das erste mit $\mathfrak{U}'$, und beachtet man überdiess, dass das zweite Trinom $= \delta u$ ist*), so erhält man:

$$(39.)\qquad \mathfrak{U} = \mathfrak{U}' - \frac{\delta u}{r};$$

und hieraus folgt sofort:

$$(40.)\qquad \int\limits_{\mathfrak{K}}\mathfrak{U}\,D\mathrm{v} = \int\limits_{\mathfrak{K}}\mathfrak{U}'\,D\mathrm{v} - \int\limits_{\mathfrak{K}}\frac{\delta u}{r}\,D\mathrm{v}.$$

Leicht lässt sich zeigen, dass hier das erste Integral rechter Hand *verschwindet*. Nach der [aus (38.), (39.) ersichtlichen] Bedeutung von $\mathfrak{U}'$ ist nämlich:

---

*) Die Verrückungen $f = \delta x$, $g = \delta y$, $h = \delta z$ entsprechen den Gleichungen [Seite 827 (2.)]:

$$(\alpha.)\qquad \frac{\partial\delta x}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\delta y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\delta z}{\partial z} = 0;$$

und mit Rücksicht hierauf ergiebt sich in der That:

$$(\beta.)\qquad \delta u = \frac{\partial\delta x}{\partial x}u + \frac{\partial\delta x}{\partial y}v + \frac{\partial\delta x}{\partial z}w;$$

vgl. C. Neumann: *Die elektrischen Kräfte*, zweiter Theil, bei Teubner 1898, daselbst Seite 257 (17.), wo δx, δy, δz mit f, g, h bezeichnet sind. Dieses δu bezeichnet alsdann *die Aenderung von u während der betrachteten virtuellen Verrückung des Körpers $\mathfrak{K}$, diese Aenderung bezogen gedacht auf das ursprüngliche ruhende Axensystem x, y, z.*

Beiläufig ergiebt sich aus $(\alpha.)$, dass die für ein substantielles Volumelement $D\mathrm{v}$ geltende Formel:

$$(\gamma.)\qquad \delta(D\mathrm{v}) = \left(\frac{\partial\delta x}{\partial x} + \frac{\partial\delta y}{\partial y} + \frac{\partial\delta z}{\partial z}\right)D\mathrm{v}$$

für die hier betrachtete virtuelle Verrückung des Körpers $\mathfrak{K}$ übergeht in:

$$(\delta.)\qquad \delta(D\mathrm{v}) = 0;$$

was freilich *a priori* zu entnehmen gewesen wäre aus unsern über diese virtuelle Verrückung gemachten Festsetzungen (A.), (B.) Seite 807.

$$\int_{\mathfrak{K}} \mathfrak{U}' D\mathrm{v} = \int_{\mathfrak{K}} \left(u \frac{\partial \left(\frac{\delta x}{r}\right)}{\partial x} + v \frac{\partial \left(\frac{\delta x}{r}\right)}{\partial y} + w \frac{\partial \left(\frac{\delta x}{r}\right)}{\partial z} \right) D\mathrm{v}.$$

Dieser Formel aber kann man, weil die im Körper $\mathfrak{K}$ enthaltenen Strömungen u, v, w aus lauter einzelnen Stromringen J bestehen, unter Anwendung der schon mehrfach benutzten Gleichungen [S. 822 (27.)], folgende Gestalt geben:

$$\int_{\mathfrak{K}} \mathfrak{U}' D\mathrm{v} = \sum_{\mathfrak{K}} \left[J \int \left(\frac{\partial \left(\frac{\delta x}{r}\right)}{\partial x} Dx + \frac{\partial \left(\frac{\delta x}{r}\right)}{\partial y} Dy + \frac{\partial \left(\frac{\delta x}{r}\right)}{\partial z} Dz \right) \right],$$

die Summation ausgedehnt gedacht über alle im Körper $\mathfrak{K}$ enthaltenen Stromringe J; hier ist jedes solches J mit einem Integral multiplicirt, welches sich hinerstreckt über alle Elemente (Dx, Dy, Dz) des Ringes J. Das unter einem solchen Integral stehende Trinom repräsentirt offenbar denjenigen Zuwachs, welchen der Quotient $\frac{\delta x}{r}$ bei Durchlaufung des Elementes (Dx, Dy, Dz) erfährt; das Integral selber repräsentirt daher den bei der Durchlaufung des *ganzen* Ringes entstehenden Zuwachs jenes Quotienten $\frac{\delta x}{r}$, und muss also $= 0$ sein. In der letzten Formel sind somit die Integrale *rechter Hand* sämmtlich $= 0$. Gleiches wird daher vom Integral *linker Hand* gelten. Also:

$$\int_{\mathfrak{K}} \mathfrak{U}' D\mathrm{v} = 0. \quad \text{— } Q.\ e.\ d.$$

Demgemäss reducirt sich die Gleichung (40.) auf:

(41.) $$\int_{\mathfrak{K}} \mathfrak{U}\, D\mathrm{v} = -\int_{\mathfrak{K}} \frac{\delta u}{r}\, D\mathrm{v}.$$

Analoge Gleichungen gelten offenbar für $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{W}$. Integrirt man daher den Ausdruck Φ (33.) über alle Volumelemente $D\mathrm{v}$ des Körpers $\mathfrak{K}$, so wird man mit Rücksicht auf jene Gleichungen erhalten:

(42.) $$\int_{\mathfrak{K}} \Phi\, D\mathrm{v} = \int_{\mathfrak{K}} (u u_1 + \cdots) \left(\delta \frac{1}{r}\right) D\mathrm{v} + \int_{\mathfrak{K}} \frac{(u_1 \delta u + \cdots)}{r} D\mathrm{v}.$$

Dieser Formel kann man [mit Rücksicht auf die über die virtuelle Verrückung des Körpers $\mathfrak{K}$ getroffenen Festsetzungen (A.), (B.) S. 807] auch folgende Gestalt geben:

$$(43.)\qquad \int\limits_{\mathfrak{K}} \Phi\, D\mathrm{v} = \delta \left(\int\limits_{\mathfrak{K}} \frac{(uu_1 + vv_1 + ww_1)\, D\mathrm{v}}{r} \right).$$

Dies in (32.) substituirt, erhält man

$$(44.)\qquad R^{(4)} = \mu_0 A^2 \cdot \delta \left(\int\limits_{\mathfrak{T}_1} \int\limits_{\mathfrak{K}} \frac{(uu_1 + vv_1 + ww_1)\, D\mathrm{v}\, D\mathrm{v}_1}{r} \right).$$

Demgemäss kann man schreiben:

$$(45.)\qquad R^{(4)} = -\mu_0 \cdot \delta F^{(4)},$$

wo alsdann $F^{(4)}$ die Bedeutung hat:

$$(46.)\qquad F^{(4)} = -A^2 \int\limits_{\mathfrak{T}_1} \int\limits_{\mathfrak{K}} \frac{(uu_1 + vv_1 + ww_1)\, D\mathrm{v}\, D\mathrm{v}_1}{r}.$$

In (45.) bezieht sich das Zeichen δ auf die betrachtete virtuelle Verrückung des Körpers $\mathfrak{K}$ [vgl. (A.), (B.) S. 807]; und der Ausdruck $F^{(4)}$ ist offenbar identisch mit dem schon früher angeführten Potential $F^{(4)}$ [S. 826 (47.)].

Zusammenfassung. — Substituiren wir jetzt in unserer *Hauptformel* [S. 828 (11.)]:

$$(47.)\qquad \delta \mathsf{A}_m = R^{(1)} + R^{(2)} + R^{(3)} + R^{(4)}$$

für $R^{(1)}$, $R^{(2)}$, $R^{(3)}$, $R^{(4)}$ die successive in (15.), (20.), (28.), (45.) gefundenen Werthe, so erhalten wir:

$$(48.)\qquad \delta \mathsf{A}_m = -\mu_0 \cdot \delta F,$$

wo F die Bedeutung hat:

$$(49.)\qquad F = F^{(1)} + F^{(2)} + F^{(3)} + F^{(4)}.$$

Dieses F wird ebenso wie seine einzelnen Glieder zu bezeichnen sein als ein *Potential*, und zwar als dasjenige Potential, welches die im ganzen unendlichen Raume $\mathfrak{T}_1$ vorhandenen freien Magnetismen und elektrischen Ströme ausüben auf die im Körper $\mathfrak{K}$ enthaltenen freien Magnetismen und elektrischen Ströme. Auch wird man dieses Potential F [ebenso wie das elektrostatische Potential, S. 816], entsprechend der Formel:

$$(50.)\qquad \mathfrak{T}_1 = \mathfrak{K}_0 + (\mathfrak{K} + \mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2 + \cdots),$$

in einzelne Theile zerlegen können, von denen der *erste* verschwindet [weil σ, (σ), τ, (τ), u, v, w in der homogenen Luft $\mathfrak{K}_0$ allenthalben $= 0$ sind]. In solcher Weise wird man, was die Formel (48.) anbelangt, bestimmte Theile von F, δF und $\delta \mathsf{A}_m$

erhalten, die speciell vom Körper $\mathfrak{K}_1$ herrühren, ebenso andere bestimmte Theile, die speciell von $\mathfrak{K}_2$ herrühren u. s. w. Und man wird also schliesslich zu folgendem Resultat gelangen:

Resultat. — *Die ponderomotorischen Kräfte, welche die beiden Körper $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$, vermöge der in ihnen enthaltenen freien magnetischen Dichtigkeiten (τ) und (τ_1) und vermöge der in ihnen enthaltenen elektrischen Ströme J und J_1, gegenseitig aufeinander ausüben, stehen in einfacher Beziehung zu den betreffenden Potentialen*):*

(51.) $$F^{(1)} = \int\limits_{\mathfrak{K}}\int\limits_{\mathfrak{K}_1} \frac{(\tau) D\mathrm{v} \cdot (\tau_1) D\mathrm{v}_1}{r},$$

(52.) $$F^{(2)} = \int\limits_{\mathfrak{K}} \left((\tau) D\mathrm{v} \cdot \sum\limits_{\mathfrak{K}_1} \left[A J_1 \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_1} Do_1 \right] \right),$$

(53.) $$F^{(3)} = \int\limits_{\mathfrak{K}_1} \left((\tau_1) D\mathrm{v}_1 \cdot \sum\limits_{\mathfrak{K}} \left[A J \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} Do \right] \right),$$

(54.) $$F^{(4)} = -A^2 \int\limits_{\mathfrak{K}}\int\limits_{\mathfrak{K}_1} \frac{(uu_1 + vv_1 + ww_1) D\mathrm{v} D\mathrm{v}_1}{r}.$$

$F^{(1)}$ ist das gegenseitige Potential der beiden Körper $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$ vermöge ihrer freien magnetischen Dichtigkeiten (τ) und (τ_1). Ferner ist $F^{(2)}$ das Potential der beiden Körper, vermöge der magnetischen Dichtigkeiten (τ) in $\mathfrak{K}$ und der elektrischen Ströme J_1 in $\mathfrak{K}_1$. Umgekehrt verhält es sich beim Potential $F^{(3)}$, indem hier die elektrischen Ströme J des Körpers $\mathfrak{K}$ und die magnetischen Dichtigkeiten (τ_1) des Körpers $\mathfrak{K}_1$ in Betracht kommen. Endlich repräsentirt $F^{(4)}$ das gegenseitige Potential der beiden Körper $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$, vermöge der in ihnen enthaltenen Ströme J (u, v, w) und J_1 (u_1, v_1, w_1).

Jene ponderomotorischen Kräfte stehen nun in einfacher Beziehung zur Summe dieser Potentiale:

(55.) $$F = F^{(1)} + F^{(2)} + F^{(3)} + F^{(4)}.$$

Denkt man sich nämlich den Körper $\mathfrak{K}$ irgend einer [den Festsetzungen (A.), (B.) S. 807 entsprechenden] virtuellen Verrückung unterworfen, so wird die während dieser virtuellen Verrückung von jenen ponderomotorischen Kräften verrichtete Arbeit $\delta \mathsf{A}_m$ den Werth haben:

(56.) $$\delta \mathsf{A}_m = -\mu_0 \cdot \delta F,$$

*) Vgl. S. 829 (16.), ferner S. 830 (21.), ferner S. 834 (29.) und endlich S. 837 (46.)

wo δF denjenigen Zuwachs vorstellt, den das Gesammtpotential F (55.) während der in Rede stehenden virtuellen Verrückung erfährt. Dabei bezeichnet μ_0 den constanten Magnetisirungscoefficienten der umgebenden homogenen Luft $\mathfrak{K}_0$.

Kaum bedarf es noch der Bemerkung, dass man aus dieser Arbeit δA_m (56.) als specielle Fälle die *translatorischen Kräfte* und *Drehungsmomente* abzuleiten im Stande ist, mit denen der Körper $\mathfrak{K}_1$ auf den Körper $\mathfrak{K}$ einwirkt [vgl. Seite 813, 814]; so dass man in solcher Weise z. B. für die vom Körper $\mathfrak{K}_1$ auf den Körper $\mathfrak{K}$ in der Richtung der x-Axe ausgeübte translatorische Kraft $\Xi_m(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K})$ folgende Formel findet:

$$\Xi_m(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}) = -\mu_0 \frac{\partial F}{\partial x}.$$

Zu genau derselben Formel hätte man auch gelangen können, auf Grund der früheren Betrachtungen S. 826, 827.

§ 39.

Ueber den in einem linearen Ringe, d. i. in einem geschlossenen linearen Leiter, durch irgend welche Ursachen inducirten elektrischen Strom.

Wir halten fest an unseren bisherigen Vorstellungen [Seite 804—806]; nur wollen wir jetzt die gegebenen Körper $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, etc. nicht mehr in Ruhe, sondern in *beliebiger Bewegung* uns denken. In diese Bewegung wird selbstverständlich hineingezogen werden die die Körper umgebende homogene Luft $\mathfrak{K}_0$, abgesehen von ihren unendlich fernen Theilen, die stets in *Ruhe* bleiben. Uebrigens mag das bei unseren Untersuchungen anzuwendende rechtwinklige Axensystem (x, y, z) ein *ruhendes* sein.*)

Was die gegebenen Körper $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, etc. betrifft, so mag $\mathfrak{K}$ als ein *linearer Ring* gedacht werden, der zusammengesetzt ist aus einzelnen linearen *homogenen Substanzen*, respective von den Längen $l', l'', \ldots l^{(n)}$; sodass also der Umfang des ganzen Ringes $= l' + l'' + \cdots + l^{(n)}$ ist.

Wir stellen uns die Aufgabe, die in irgend einem Augenblick im Ringe $\mathfrak{K}$ vorhandenen elektrischen Strömungen näher zu unter-

*) Wenn wir hier das Wort: *Ruhe* brauchen, so soll dabei wiederum ganz dahingestellt bleiben, ob von der *absoluten* Ruhe oder von einer nur *relativen* Ruhe die Rede ist. [Vgl. die Note auf Seite 760].

suchen. Selbstverständlich werden diese Strömungen, weil der Ring linear ist, immer nur stattfinden können in der Richtung des Ringes.

Für die in irgend einem *Element* Ds des Ringes $\mathfrak{K}$ vorhandenen Strömungscomponenten u, v, w gelten die allgemeinen Strömungsgleichungen [Abh. I, Seite 221 (F.)]:

$$(1.)\qquad \begin{cases} \frac{u}{\lambda} = X' + \frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}, \\ \frac{v}{\lambda} = Y' + \frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}, \\ \frac{w}{\lambda} = Z' + \frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}, \end{cases}$$

wo λ, ε, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ und X', Y', Z' ihre bekannten Bedeutungen haben [vgl. Abh. I, Seite 218—221]. Und zwar werden im gegenwärtigen Falle unter X', Y', Z' die an den Zusammensetzungsstellen des Ringes $\mathfrak{K}$ vorhandenen *contactelektromotorischen Kräfte* zu verstehen sein; sodass also diese X', Y', Z', im Ringe $\mathfrak{K}$, mit alleiniger Ausnahme der an jenen Zusammensetzungsstellen vorhandenen dünnen Uebergangsschichten, überall $= 0$ sind. — Multiplicirt man die Gleichungen (1.) mit den Componenten Dx, Dy, Dz des betrachteten Elementes Ds, und addirt, so erhält man:

$$(2.)\qquad \frac{u\,Dx + v\,Dy + w\,Dz}{\lambda} = (X'Dx + Y'Dy + Z'Dz) + \frac{\mathfrak{X}Dx + \mathfrak{Y}Dy + \mathfrak{Z}Dz}{\varepsilon};$$

und hieraus folgt weiter:

$$(3.)\qquad \int_{\mathfrak{K}} \frac{u\,Dx + v\,Dy + w\,Dz}{\lambda} = \mathsf{A} + \int_{\mathfrak{K}} \frac{\mathfrak{X}Dx + \mathfrak{Y}Dy + \mathfrak{Z}Dz}{\varepsilon},$$

wo A die Bedeutung hat:

$$(4.)\qquad \mathsf{A} = \int_{\mathfrak{K}} (X'Dx + Y'Dy + Z'Dz);$$

dabei sind die Integrationen ausgedehnt zu denken über alle Elemente $Ds\,(Dx, Dy, Dz)$ des gegebenen Ringes $\mathfrak{K}$. Das in (4.) mit A bezeichnete Integral repräsentirt eine dem Ringe $\mathfrak{K}$ eigenthümlich zugehörige *Constante*, die sogenannte *ganze contactelektromotorische Kraft* des Ringes.

Bezeichnet nun J die augenblickliche Stromstärke des Ringes $\mathfrak{K}$ im Elemente $Ds\,(Dx, Dy, Dz)$, und bezeichnet Dv das diesem Elemente Ds entsprechende *Volumelement* des Ringes, so werden

bekanntlich für die in $D\mathrm{v}$ enthaltenen Strömungscomponenten u, v, w die Gleichungen gelten [Seite 822 (27.)]:

$$(\alpha.)\qquad u\,D\mathrm{v} = J\,Dx, \quad v\,D\mathrm{v} = J\,Dy, \quad w\,D\mathrm{v} = J\,Dz;$$

woraus durch Multiplication mit Dx, Dy, Dz und Addition sich ergiebt:

$$(\beta.)\qquad (u\,Dx + v\,Dy + w\,Dz)\,D\mathrm{v} = J(Ds)^2.$$

Es ist aber $D\mathrm{v} = q\,Ds$, wo q den (äusserst kleinen) Querschnitt des Ringes $\mathfrak{R}$ an der Stelle des Elementes Ds vorstellt. Substituirt man diesen Werth $D\mathrm{v} = q\,Ds$ in der vorstehenden Formel so erhält man:

$$(\gamma.)\qquad u\,Dx + v\,Dy + w\,Dz = \frac{J\,Ds}{q}.$$

Und mit Rücksicht hierauf gewinnt die Formel (3.) folgende Gestalt:

$$(5.)\qquad \int_{\mathfrak{R}} \frac{J\,Ds}{q\lambda} = \mathsf{A} + \int_{\mathfrak{R}} \frac{\mathfrak{X}\,Dx + \mathfrak{Y}\,Dy + \mathfrak{Z}\,Dz}{\varepsilon}.$$

Zur Zeit unserer Betrachtungen mag nun die Stärke J des im Ringe $\mathfrak{R}$ vorhandenen elektrischen Stromes bereits an allen Stellen des Ringes gleich gross geworden sein; sodass man also dem Ausdruck linker Hand die Gestalt geben kann:

$$(6.)\qquad J \cdot \int_{\mathfrak{R}} \frac{Ds}{q\lambda}.$$

Was die einzelnen homogenen Segmente l', l'' . . . $l^{(n)}$ des Ringes $\mathfrak{R}$ betrifft, so mag angenommen werden, dass jedes solches Segment $l^{(h)}$ allenthalben *ein und denselben* Querschnitt $q^{(h)}$ besitzt; auch mag die Leitungsfähigkeit λ eines solchen Segmentes $l^{(h)}$ mit $\lambda^{(h)}$ bezeichnet werden. Alsdann geht der Ausdruck (6.) über in:

$$(7.)\qquad J\left(\frac{l'}{q'\lambda'} + \frac{l''}{q''\lambda''} + \cdots + \frac{l^{(n)}}{q^{(n)}\lambda^{(n)}}\right), \text{ d. i. in: } J\mathrm{w},$$

wo w den sogenannten *Widerstand* des Ringes $\mathfrak{R}$ vorstellt. — Dies in (5.) substituirt, erhält man:

$$(8.)\qquad \mathrm{w}J = \mathsf{A} + \int_{\mathfrak{R}} \frac{\mathfrak{X}\,Dx + \mathfrak{Y}\,Dy + \mathfrak{Z}\,Dz}{\varepsilon}.$$

Auf Grund dieser Formel (8.) *ist nun die im Ringe $\mathfrak{R}$ vorhandene Stromstärke J einer nähern Untersuchung zu unterwerfen; dabei sind* A *und* w *zwei dem Ringe $\mathfrak{R}$ eigenthümliche Constanten,* [*vergl.* (4.) *und* (7.)].

Specialfall. — Befinden sich die gegebenen Körper $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, etc. nebst der umgebenden Luft $\mathfrak{K}_0$ in *Ruhe*, und sind die in diesen Körpern vorhandenen elektromagnetischen Zustände *stationär*, so werden die elektrischen Zustandscomponenten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ im ganzen unendlichen Raume allenthalben von folgender Gestalt sein [vgl. die Abh. I, Seite 293 (Ib.)]:

$$(\alpha.) \qquad \mathfrak{X} = -\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad \mathfrak{Y} = -\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad \mathfrak{Z} = -\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

wo φ das Potential aller überhaupt vorhandenen freien Elektricität vorstellt. Substituirt man diese Werthe (α.) in der Formel (8.), so *verschwindet* offenbar das dortige Integral; sodass also in diesem Fall die allgemeine Formel (8.) sich reducirt auf:

$$(\beta.) \qquad \mathrm{w}J = \mathsf{A}.$$

Für den hier betrachteten Fall der substantiellen Ruhe und der stationären Zustände wird also die im Ringe $\mathfrak{R}$ vorhandene Stromstärke J gleich sein der *ganzen contactelektromotorischen Kraft* A des Ringes, dieselbe noch dividirt durch den *Widerstand* w des Ringes.

Was die Dinge *im Allgemeinen* anbelangt, so können wir das in (8.) enthaltene Integral, mittelst des STOKES'schen Satzes, in ein Flächen-Integral verwandeln. Wir erhalten in solcher Weise:

$$(9.) \qquad \int_{\mathfrak{R}} \frac{\mathfrak{X}Dx + \mathfrak{Y}Dy + \mathfrak{Z}Dz}{\varepsilon} = \int_{\Omega} \Big[\Big(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\Big)a + \cdots\Big] Do,$$

die Integration rechter Hand ausgedehnt über alle Elemente Do einer vom Ringe $\mathfrak{R}$ umgrenzten Fläche Ω; dabei sind a, b, c die Richtungscosinus der auf Do errichteten Normale n; und zwar ist die Richtung dieser Normale n der Art zu denken, dass in Bezug auf sie die im Ringe $\mathfrak{R}$ vorhandene Stromrichtung J *positiv* ist, [vgl. Abh. I, Seite 223].

Nach den bekannten HERTZ'schen Gleichungen [Abh. I, S. 236 (22.)] ist nun z. B.:

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} = -A\frac{\Delta\mathfrak{L}}{dt};$$

sodass wir also der Formel (9.) die Gestalt geben können:

$$(10.) \qquad \int_{\mathfrak{R}} \frac{\mathfrak{X}Dx + \mathfrak{Y}Dy + ZDz}{\varepsilon} = -A\int_{\Omega}\Big(\frac{\Delta\mathfrak{L}}{dt}a + \frac{\Delta\mathfrak{M}}{dt}b + \frac{\Delta\mathfrak{N}}{dt}c\Big) Do.$$

Wir können uns nun die Fläche Ω in den Formeln (9.), (10.), als eine *substantielle Fläche* denken, die mit all ihren *substantiellen Elementen* Do an der vorhandenen substantiellen Bewegung theilnimmt. Für ein solches substantielles Element Do gilt aber [nach Abh. I, S. 237 (28.)] ganz allgemein die Gleichung:

$$\Big(\frac{\Delta\mathfrak{L}}{dt}a + \frac{\Delta\mathfrak{M}}{dt}b + \frac{\Delta\mathfrak{N}}{dt}c\Big) Do = \frac{d\,[(\mathfrak{L}a + \mathfrak{M}b + \mathfrak{N}c)\,Do]}{dt},$$

wo alsdann a, b, c [ebenso wie in (10.)] die Richtungscosinus der auf dem substantiellen Element Do errichteten Normale n sind. Dies in (10.) substituirt, erhält man sofort:

$$(11.)\qquad \int_{\mathfrak{R}} \frac{\mathfrak{X}Dx + \mathfrak{Y}Dy + \mathfrak{Z}Dz}{\varepsilon} = -\frac{d}{dt}\left(A\int_{\Omega}(\mathfrak{L}a + \mathfrak{M}b + \mathfrak{N}c)\,Do\right).$$

Unsere eigentliche Hauptformel (8.) *gewinnt jetzt durch Substitution des Werthes* (11.) *folgende Gestalt:*

$$(12.)\qquad \mathsf{w}J = \mathsf{A} - \frac{d\mathfrak{F}}{dt},$$

wo w *der Widerstand des gegebenen Ringes* $\mathfrak{R}$ *ist, während* $\mathfrak{F}$ *die Bedeutung hat:*

$$(13.)\qquad \mathfrak{F} = A\int_{\Omega}(\mathfrak{L}a + \mathfrak{M}b + \mathfrak{N}c)\,Do.$$

Um bei der weiteren Verfolgung unseres Weges nicht durch untergeordnete Dinge belästigt zu werden, wollen wir den Ring $\mathfrak{R}$ als *einen in sich zurücklaufenden dünnen Kupferdraht von überall gleichem Querschnitt uns denken; sodass also* $\mathsf{A} = 0$ *ist. Alsdann gewinnt die Formel* (12.) *die einfachere Gestalt:*

$$(14.)\qquad \mathsf{w}J = -\frac{d\mathfrak{F}}{dt},$$

wo w *den Widerstand des dünnen Kupferringes* $\mathfrak{R}$ *vorstellt, während* $\mathfrak{F}$ *die Bedeutung hat:*

$$(15.)\qquad \mathfrak{F} = A\int_{\Omega}(\mathfrak{L}a + \mathfrak{M}b + \mathfrak{N}c)\,Do:$$

und es handelt sich nun um eine nähere Untersuchung dieses Ausdruckes $\mathfrak{F}$.

Die in (9.), (10.) eingeführte auxiliare Fläche Ω konnte damals ganz beliebig gewählt werden, nur musste sie umgrenzt sein von dem gegebenen Ringe $\mathfrak{R}$. Sodann machte sich beim Uebergange von (10.) zu (11.) die Nothwendigkeit geltend, diese Fläche als *substantiell* zu betrachten.

Wir haben somit in der Formel (15.) *unter* Ω *eine substantielle Fläche zu verstehen, die vom Kupferringe* $\mathfrak{R}$, *etwa von der Mittellinie* s *dieses Ringes begrenzt ist, die sonst aber ganz beliebig sein darf.* Dabei ist unter der Mittellinie s diejenige Curve zu verstehen, welche gebildet wird von den Mittelpuncten der aufeinanderfolgenden Querschnitte des Ringes $\mathfrak{R}$.

Willkührliche Beschränkung der Fläche Ω. — Ohne zwingenden Grund, und nur zur Vereinfachung der weiter folgenden Untersuchungen, wollen wir jetzt die von der Mittellinie s des Ringes $\mathfrak{K}$ umgrenzte substantielle Fläche Ω einer gewissen ganz willkürlichen Beschränkung unterwerfen, nämlich dieselbe in solcher Art uns construirt denken, dass all' ihre Puncte theils dem Ringe $\mathfrak{K}$, theils der umgebenden Luft $\mathfrak{K}_0$, theils der betreffenden Uebergangsschicht $(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}_0)$ angehören.*) Diese Uebergangsschicht $(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}_0)$ liegt zwischen zwei röhrenförmigen Parallelflächen, die beide die Curve s zur Mittellinie haben, und von denen die eine als die *engere*, die andere als die *weitere* zu bezeichnen sein wird. Die Curve, in welcher die Fläche Ω von der *weiteren* Parallelfläche geschnitten wird, mag s_0 heissen; so dass also in allen Puncten dieser Curve s_0 der Coefficient $\mu = \mu_0$ sein wird, wo μ_0 (ebenso wie bisher) den constanten Magnetisirungscoefficienten der homogenen Luft vorstellt. Bezeichnen wir den von s_0 umgrenzten Theil der Fläche Ω mit Ω_0, so ist:

$$\Omega = \Omega_0 + (\Omega - \Omega_0).$$

Die Flächenzone $(\Omega - \Omega_0)$ ist äusserst schmal, und im Allgemeinen äusserst klein im Vergleich mit Ω_0; so dass man also in (15.) die Integration auf Ω_0 einschränken darf. So ergiebt sich:

$$(16.) \qquad \mathfrak{F} = A \cdot \int_{\Omega_0} (\mathfrak{L}a + \mathfrak{M}b + \mathfrak{N}c)\, Do;$$

und wir haben nun den Vortheil, dass diese neue Fläche Ω_0 vollständig der homogenen Luft $\mathfrak{K}_0$ angehört.

Da demzufolge in allen Puncten der Fläche Ω_0 der Coefficient $\mu = \mu_0$ ist, so wird z. B. das unter dem Integral (16.) stehende $\mathfrak{L}$ den Werth haben [Abh. I, S. 292 (II.)]:

$$(17.)\ \mathfrak{L} = -\mu_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{A\mu_0}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial y}\int_{\mathfrak{T}_1}\left(4\pi w_1 + \frac{\Delta \mathfrak{Z}_1}{dt}\right)\frac{Dv_1}{r} - \frac{\partial}{\partial z}\int_{\mathfrak{T}_1}\left(4\pi v_1 + \frac{\Delta \mathfrak{Y}_1}{dt}\right)\frac{Dv_1}{r}\right],$$

die Integrationen ausgedehnt gedacht über alle Volumelemente Dv_1 des ganzen unendlichen Raumes $\mathfrak{T}_1$. Dabei bezeichnet ψ das Potential aller überhaupt vorhandenen freien Magnetismen. Was ferner die Abbreviaturen $\Delta\mathfrak{X}_1$, $\Delta\mathfrak{Y}_1$, $\Delta\mathfrak{Z}_1$ betrifft, so ist z. B. $\Delta\mathfrak{X}_1$ definirt durch die Formel [Abh. I, S. 236 (23.)]:

---

*) Es soll also diese Fläche Ω durch *keinen* der übrigen Körper $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, etc. hindurchgehen.

$$(18.)\quad \frac{\Delta \mathfrak{X}_1}{dt} = \frac{d\mathfrak{X}_1}{dt} + \mathfrak{X}_1\left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \beta_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \gamma_1}{\partial z_1}\right) - \left(\mathfrak{X}_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} + \mathfrak{Y}_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_1} + \mathfrak{Z}_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial z_1}\right),$$

eine Formel, die man auch so schreiben kann [Abh. I, S. 236 (24)]:

$$(19.)\quad \frac{\Delta \mathfrak{X}_1}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial t} + \left(\frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial x_1}\alpha_1 + \frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial y_1}\beta_1 + \frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial z_1}\gamma_1\right) + \mathfrak{X}_1\left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \beta_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \gamma_1}{\partial z_1}\right) - \left(\mathfrak{X}_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} + \mathfrak{Y}_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_1} + \mathfrak{Z}_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial z_1}\right).$$

Wir wollen nun mit Hertz *annehmen, die substantiellen Bewegungen seien von solcher Langsamkeit, dass man in den Ausdrücken* (18.), (19.) *die mit den substantiellen Geschwindigkeiten* α_1, β_1, γ_1 *behafteten Glieder vernachlässigen darf. Alsdann ist nach* (18.) *und* (19):

$$(20.)\quad \frac{\Delta \mathfrak{X}_1}{dt} = \frac{d\mathfrak{X}_1}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial t},\ \textit{ebenso:}\ \frac{\Delta \mathfrak{Y}_1}{dt} = \frac{d\mathfrak{Y}_1}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{Y}_1}{\partial t},\ \textit{und}\ \frac{\Delta \mathfrak{Z}_1}{dt} = \frac{d\mathfrak{Z}_1}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{Z}_1}{\partial t};$$

so dass also die Formel (17.) unter Anwendung der schon früher benutzten Bezeichnungen [S. 817 (4.)]:

$$(21.)\quad U = \int_{\mathfrak{T}_1} \frac{u_1 D\mathrm{v}_1}{r},\quad V = \int_{\mathfrak{T}_1} \frac{v_1 D\mathrm{v}_1}{r},\quad W = \int_{\mathfrak{T}_1} \frac{w_1 D\mathrm{v}_1}{r},$$

die Gestalt erhält:

$$(22.)\quad \mathfrak{L} = -\mu_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} + A\mu_0\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right) + \frac{A\mu_0}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial y}\int_{\mathfrak{T}_1} \frac{\partial \mathfrak{Z}_1}{\partial t}\frac{D\mathrm{v}_1}{r} - \frac{\partial}{\partial z}\int_{\mathfrak{T}_1} \frac{\partial \mathfrak{Y}_1}{\partial t}\frac{D\mathrm{v}_1}{r}\right].$$

Wir wollen nun weiter mit Hertz *annehmen, die substantiellen Bewegungen seien von solcher Langsamkeit, dass die elektrischen Zustandscomponenten* $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ *ebenfalls nur äusserst langsam sich ändern; so dass also z. B.*

$$(23.)\quad \frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial t},\ \frac{\partial \mathfrak{Y}_1}{\partial t},\ \frac{\partial \mathfrak{Z}_1}{\partial t}\ \textit{nahezu} = 0$$

sind. Alsdann reducirt sich die Formel (22.) auf die erste Gleichung folgenden Systems:

$$(24.)\quad \begin{cases} \mathfrak{L} = -\mu_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} + A\mu_0\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right), \\ \mathfrak{M} = -\mu_0 \frac{\partial \psi}{\partial y} + A\mu_0\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right), \\ \mathfrak{N} = -\mu_0 \frac{\partial \psi}{\partial z} + A\mu_0\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right), \end{cases}$$

dessen übrige Gleichungen in analoger Weise zu erhalten sind.

Substituiren wir diese Werthe (24.) in $\mathfrak{F}$ (16.), so erhalten wir, unter Anwendung des Stokes'schen Satzes:

$$(25.)\quad \mathfrak{F} = -\mu_0 A\int_{\Omega} \frac{\partial \psi}{\partial n} Do + \mu_0 A^2 \int_{\kappa} (U Dx + V Dy + W Dz),$$

oder was dasselbe ist:

$$(26.)\quad \mathfrak{F} = -\frac{\mu_0}{K}\cdot AK\int\limits_{\Omega_0}\frac{\partial\psi}{\partial n}Do + \frac{\mu_0}{K}\cdot A^2\int\limits_{\mathfrak{R}}(UKDx + VKDy + WKDz),$$

wo K eine *beliebig zu wählende Constante* vorstellt. Diese Constante K wollen wir uns als die Stärke eines im Ringe $\mathfrak{R}$ vorhandenen *fingirten* Stromes denken. Für die Strömungscomponenten dieses fingirten Stromes K gelten die bekannten Gleichungen [vgl. (α.) S. 841]:

$$KDx = uD\mathrm{v},\quad KDy = vD\mathrm{v},\quad KDz = wD\mathrm{v};$$

sodass also die Formel (26.) übergeht in:

$$(27.)\quad \mathfrak{F} = -\frac{\mu_0}{K}\cdot AK\int\limits_{\Omega_0}\frac{\partial\psi}{\partial n}Do + \frac{\mu_0}{K}\cdot A^2\int\limits_{\mathfrak{R}}(Uu + Vv + Ww)D\mathrm{v}.$$

ψ ist das Potential aller überhaupt vorhandenen freien Magnetismen, und hat also den Werth:

$$(28.)\qquad \psi = \int\limits_{\mathfrak{T}_1}\frac{(\tau_1)D\mathrm{v}_1}{r},$$

die Integration ausgedehnt gedacht über alle Elemente $D\mathrm{v}_1$ des ganzen unendlichen Raumes $\mathfrak{T}_1$. Substituirt man jetzt in (27.) diesen Werth (28.) und zugleich auch die Werthe (21.), so erhält man:

$$(29.)\qquad \mathfrak{F} = -\frac{\mu_0}{K}\int\limits_{\mathfrak{T}_1}\left[(\tau_1)D\mathrm{v}_1\cdot AK\int\limits_{\Omega_0}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}Do\right]$$

$$-\frac{\mu_0}{K}\int\limits_{\mathfrak{T}_1}\int\limits_{\mathfrak{R}}(-A^2)\frac{uu_1 + vv_1 + ww_1}{r}D\mathrm{v}D\mathrm{v}_1.$$

Das Integral erster Zeile bezeichnet offenbar das Potential aller im ganzen unendlichen Raume $\mathfrak{T}_1$ vorhandenen freien Magnetismen in Bezug auf jenen im Ringe $\mathfrak{R}$ fingirten elektrischen Strom K [vgl. S. 823]; und das Integral zweiter Zeile repräsentirt das Potential aller im ganzen Raume $\mathfrak{T}_1$ vorhandenen elektrischen Strömungen u_1, v_1, w_1, ebenfalls auf jenen fingirten Strom K; denn u, v, w sind die Strömungscomponenten von K, [vgl. S. 826]. Bezeichnet man also diese beiden Potentiale mit Π und P, so erhält man:

$$(30.)\qquad \mathfrak{F} = -\frac{\mu_0}{K}(\Pi + P).$$

Substituiren wir jetzt endlich in unserer eigentlichen Hauptformel (14.) den Werth (30.) so erhalten wir:

$$(31.)\qquad \mathrm{w}J = + \frac{\mu_0}{K}\frac{d(\Pi + P)}{dt},$$

oder, falls wir jene *ad libitum* zu wählende Constante $K = 1$ machen:

$$(32.)\qquad wJ = + \mu_0 \frac{d(\Pi + P)}{dt}.$$

Das Product wJ (*d. i. das Product des Widerstandes* w *des gegebenen linearen Ringes* $\mathfrak{R}$ *und der in diesem Ringe inducirten Stromstärke* J) *ist also gleich der mit* μ_0 *multiplicirten zeitlichen Ableitung desjenigen Potentiales* $(\Pi + P)$, *welches von allen im ganzen unendlichen Raume vorhandenen freien Magnetismen und elektrischen Strömen ausgeübt werden würde auf einen im Ringe* $\mathfrak{R}$ *fingirten elektrischen Strom von der Stärke Eins. Dabei bezeichnet* μ_0 *den constanten Magnetisirungscoefficienten der umgebenden homogenen Luft.*

Dieses Gesetz (32.) *ist, abgesehen von dem constanten Factor* μ_0, *völlig identisch mit dem* F. NEUMANN'*schen Inductionsgesetz.*

Die Annahmen (Seite 845), welche uns zu diesem Resultat verholfen haben, dürften völlig übereinstimmen mit denen von HERTZ [Ges. Werke Bd. II, Seite 268—270]. Der einzige Unterschied gegenüber von HERTZ besteht darin, dass HERTZ bei diesen Betrachtungen über inducirte Ströme den Magnetisirungscoefficienten μ aller Substanzen als *gleich gross* ansieht (nämlich $= 1$ setzt). Ein solches Verfahren mag unter Umständen vielleicht näherungsweise berechtigt sein. Zu bedauern aber ist, dass HERTZ, in Folge dieses Verfahrens, gewisse Schwierigkeiten, respective Willkührlichkeiten übersehen hat, von denen im folgenden Paragraph die Rede sein wird.

§ 40.

Die Betrachtungen des vorigen Paragraphs geben Veranlassung zu gewissen ernstlichen Bedenken gegen die Maxwell-Hertz'sche Theorie in ihrer gegenwärtigen Verfassung.

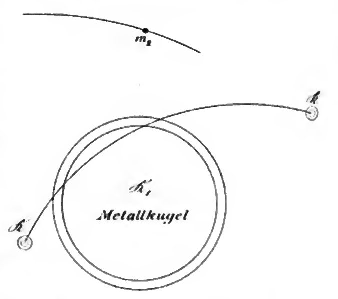
Die von der Mittellinie s des Ringes $\mathfrak{R}$ umgrenzte substantielle Fläche ist im vorigen Paragraph, *ohne zwingenden Grund* und nur zur Erleichterung der Rechnungen, einer gewissen *ganz willkührlichen Beschränkung* unterworfen worden, [vgl. Seite 844]; in solcher Weise ergab sich das F. NEUMANN'sche Inductionsgesetz.

[Seite 847]. Soll nun die Methode des vorigen Paragraphs auf wirkliche Zuverlässigkeit und Sicherheit Anspruch machen dürfen, so muss sich zeigen lassen, dass sie *stets* zum NEUMANN'schen Inductionsgesetz führt, einerlei ob man die auxiliare substantielle Fläche Ω jener willkührlichen Beschränkung unterwirft oder nicht, — d. i. einerlei, ob man diese Fläche Ω blos durch Luft, oder überdiess auch noch durch irgend welche andere Körper hindurchgehen lässt. Dies also ist zu untersuchen.

Dabei wird es gut sein, möglichst einfache Verhältnisse vor Augen zu haben, nämlich anzunehmen, dass im Ganzen nur *vier* Körper in Betracht kommen, nebst ihren gegenseitigen Uebergangsschichten, nämlich erstens der gegebene *dünne Kupferring* $\mathfrak{K}$, zweitens eine *homogene Metallkugel* $\mathfrak{K}_1$, drittens ein *permanenter Stahlmagnet* $\mathfrak{K}_2$, viertens die umgebende *homogene Luft* $\mathfrak{K}_0$, und endlich die Uebergangsschichten $(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}_0)$, $(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_0)$, $(\mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_0)$. Zugleich sei m_2 ein bestimmter Pol des Magneten $\mathfrak{K}_2$, oder vielmehr die in diesem Pol enthaltene Menge von freiem Magnetismus.*)

Wir denken uns $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$ in fortdauernder Ruhe, hingegen den Magneten $\mathfrak{K}_2$ (nebst m_2) in beliebiger Bewegung begriffen, und stellen uns die Aufgabe, denjenigen Strom J zu bestimmen, der unter so bewandten Umständen im Ringe $\mathfrak{K}$ inducirt wird durch die Bewegung des magnetischen Poles oder Massenpunktes m_2.

Um diese Aufgabe zu lösen, bringen wir nun eine von der Mittellinie s des Ringes $\mathfrak{K}$ umgrenzte substantielle Fläche Ω in Anwendung, welche durch die Metallkugel $\mathfrak{K}_1$ hindurchgeht. Vgl. die nebenstehende Figur. In derselben sind vom Ringe $\mathfrak{K}$ nur zwei Querschnitte sichtbar; und zwar sollen bei jedem solchen Querschnitt die kleinen concentrischen Kreise die beiden Parallelflächen andeuten, zwischen denen die Uebergangsschicht $(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}_0)$ sich befindet. Desgleichen sollen,



*) Man vgl. Abh. I, Seite 284 (Note) und Seite 285 ff.

was die homogene Metallkugel $\mathfrak{K}_1$ anbelangt, die beiden in der Figur vorhandenen grossen concentrischen Kreise die beiden Parallelflächen andeuten, zwischen denen die Uebergangsschicht $(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_0)$ gelegen ist. Auch findet man in der Figur eine gewisse Curve mit dem Puncte m_2 gezeichnet; es soll das diejenige Curve sein, längs welcher der magnetische Massenpunct m_2 mit irgend welcher Geschwindigkeit fortschreitet. — Nach (14.) und (16.) ist nun:

(33.) $\quad \mathrm{w} J = -\frac{d\mathfrak{F}}{dt}, \quad$ [w der Widerstand des Ringes $\mathfrak{R}$],

und

(34.) $$\mathfrak{F} = A\int_{\Omega_0}(\mathfrak{L}a + \mathfrak{M}b + \mathfrak{N}c)\,Do,$$

wo Ω_0 den von der Curve s_0 umgrenzten Theil der Fläche Ω bezeichnet; dabei repräsentirt s_0 (ebenso wie früher, Seite 844) diejenige Curve, in welcher Ω geschnitten wird von der *weiteren* Begrenzungsfläche des Ringes $\mathfrak{R}$.

Die substantielle Fläche Ω_0 ist in unserer Figur nur im Durchschnitt angedeutet, durch den Bogen $\mathfrak{R}\mathfrak{R}$; sie besteht offenbar aus drei Theilen:

(35.) $$\Omega_0 = \omega_0 + \omega_{01} + \omega_1,$$

der Art, dass ω_0 in der homogenen Luft $\mathfrak{K}_0$ liegt, während ω_{01} in der Uebergangsschicht $(\mathfrak{K}_0, \mathfrak{K}_1)$ liegt, und ω_1 der homogenen Substanz $\mathfrak{K}_1$ angehört. Der Coefficient μ wird daher auf ω_0 und ω_1 *constante* Werthe μ_0 und μ_1 besitzen, während sein Werth auf der schmalen Flächenzone ω_{01} zwischen μ_0 und μ_1 variirt. Versteht man nun unter μ (ohne Index) den Werth des Coefficienten in einem *beliebigen Puncte* der Fläche Ω_0, so werden die $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ in diesem Puncte dargestellt sein durch folgende Ausdrücke:

$$\mathfrak{L} = -\mu\frac{\partial\psi}{\partial x} + A\mu\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right),$$
$$\mathfrak{M} = -\mu\frac{\partial\psi}{\partial y} + A\mu\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right),$$
$$\mathfrak{N} = -\mu\frac{\partial\psi}{\partial z} + A\mu\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right),$$

die von den früheren Ausdrücken (24.) nur dadurch sich unterscheiden, dass μ an die Stelle von μ_0 getreten ist.

Es soll nun aber — so lautet unsere Aufgabe — nur derjenige Strom J berechnet werden, welcher speciell durch die Bewegung des *magnetischen Massenpunctes* m_2 inducirt wird. Demgemäss sind

in den vorstehenden Formeln $\psi = \frac{m_2}{r}$, und $U = V = W = 0$ zu setzen; sodass jene Formeln sich reduciren auf:

$$(36.)\qquad \mathfrak{L} = -\mu \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \mathfrak{M} = -\mu \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \mathfrak{N} = -\mu \frac{\partial \psi}{\partial z},$$

wo

$$(37.)\qquad \psi = \frac{m_2}{r}.$$

Substituirt man diese Werthe (36.) in (34.), so folgt:

$$(38.)\qquad \mathfrak{F} = -A \int_{\Omega_0} \mu \frac{\partial \psi}{\partial n} Do$$

wo n die auf Do errichtete Normale mit den Richtungscosinus a, b, c vorstellt. Dieses Integral (38.) ist, entsprechend den drei Bestandtheilen von Ω_0 (35.), in drei Theile zerlegbar; und von diesen drei Theilen wird man den der schmalen Flächenzone ω_{01} zugehörigen vernachlässigen dürfen. So ergiebt sich:

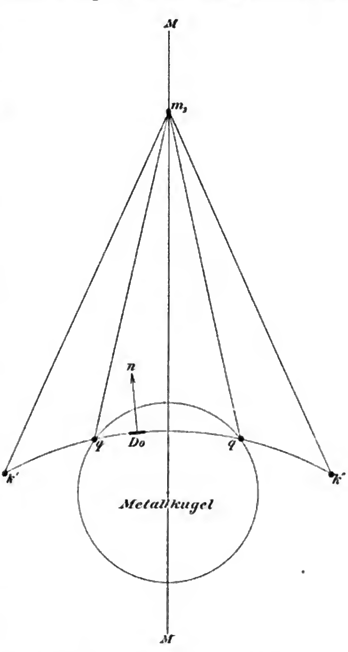
$$(39.)\qquad \mathfrak{F} = -A\mu_0 \int_{\omega_0} \frac{\partial \psi}{\partial n} Do - A\mu_1 \int_{\omega_1} \frac{\partial \psi}{\partial n} Do$$

Um den eigentlichen Werth dieses Ausdruckes $\mathfrak{F}$ in bequemer Weise ermitteln zu können, wollen wir (da es sich hier doch nur um ein Beispiel handelt) die vorliegenden Verhältnisse möglichst einfach gestalten, indem wir annehmen, die betrachteten Einrichtungen und Vorgänge seien *symmetrisch* in Bezug auf eine gegebene Axe MM (vgl. die folgende Figur). Längs dieser Axe MM mag der *magnetische Massenpunct* m_2 nach der einen oder nach der andern Seite hin mit irgend welcher Geschwindigkeit fortschreiten. Ferner liege auf dieser Axe MM der Mittelpunct der *homogenen Metallkugel* $\mathfrak{K}_1$. Ferner mag der *dünne Kupferring* $\mathfrak{K}$ die Gestalt eines Kreises haben; der Mittelpunct dieses Kreises liege in der Axe MM, und seine Ebene sei senkrecht gegen die Axe MM. Endlich mag die *auxiliare substantielle Fläche* Ω als eine vom Ringe $\mathfrak{K}$ umgrenzte *Rotationsfläche* gedacht werden, deren geometrische Axe durch die Linie MM dargestellt ist.

Die beistehende Figur soll mit all' ihren Puncten und Linien in der Ebene des Papiers liegen. Lässt man diese Figur um die Axe MM rotiren, so erzeugt der daselbst vorhandene Kreis die Oberfläche der *homogenen Metallkugel* $\mathfrak{K}_1$. Ferner wird die zur Axe MM symmetrische Curve $k'qqk''$ bei einer solchen Rotation die *auxiliare* Fläche Ω erzeugen. Die Puncte k', k'' erzeugen also

den *dünnen Kupferring* $\mathfrak{K}$; und die Puncte q, q erzeugen diejenige Kreislinie, in welcher die Oberfläche jener homogenen Metallkugel $\mathfrak{K}_1$ und die auxiliare Fläche Ω einander schneiden.

Man kann den dünnen Kupferring $\mathfrak{K}$ etwa mit $k'vk''wk'$ bezeichnen, indem man unter v irgend einen *vordern* Punct des Ringes versteht, während w *hinter* der Ebene des Papiers liegen soll. Solches festgesetzt, mag nun der im Ringe $\mathfrak{K}$ inducirte Strom J gerechnet werden in der Richtung $k'vk''$. — Ferner sei Do irgend ein Element der Fläche Ω; sodass also die in der Figur angegebene, auf Do errichtete Normale n diejenige sein wird, in Bezug auf welche jene Umlaufsrichtung $k'vk''$, nach welcher der Strom J gerechnet wird, *positiv* ist, [vgl. Abh. I, S. 223].



Die auxiliare Fläche Ω zerfällt durch den Kreis qq in einen von diesem Kreise qq umgrenzten *inneren Theil* ω_1, und in einen von den beiden Kreisen qq und $k'k''$ begrenzten *äussern Theil* ω_0. Das in (39.) auftretende, über den innern Theil ω_1 ausgedehnte Integral lautet:

$$\int_{\omega_1} \frac{\partial \Phi}{\partial n} Do = m_2 \int_{\omega_1} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} Do, \quad [\text{vgl. } (37.)],$$

wo r der Abstand des magnetischen Massenpunctes m_2 vom Element Do vorstellt, während n die in der Figur gezeichnete Nor-

male dieses Elementes Do repräsentirt. Man erkennt nun leicht, dass der Werth dieses Integrales $= m_2 Q$ ist, wo Q die Oeffnung des von m_2 aus nach dem Kreise qq gelegten Kegelmantels vorstellt*); und gelangt also zu der Formel:

$$(40.)\qquad \int\limits_{\omega_1} \frac{\partial \psi}{\partial n} Do = m_2 Q.$$

In ähnlicher Weise wird man offenbar, was den *äusseren Theil* ω_0 der Fläche Ω anbelangt, zu folgender Formel gelangen:

$$(41.)\qquad \int\limits_{\omega_0} \frac{\partial \psi}{\partial n} Do = m_2 (K - Q),$$

wo K die Oeffnung des von m_2 aus nach dem Kreise $k'k''$ gelegten Kegels vorstellt.

Substituirt man die Werthe (40.), (41.) in der Formel (39.), so ergiebt sich:

$$(42.)\qquad \mathfrak{F} = - A\mu_0 \cdot m_2 (K - Q) - A\mu_1 \cdot m_2 Q,$$

oder besser geordnet:

$$(43.)\qquad \mathfrak{F} = - A m_2 [\mu_0 K + (\mu_1 - \mu_0) Q].$$

Dies endlich in (33.) substituirt, erhält man für die Stärke des inducirten Stromes J folgenden Werth:

$$(44.)\qquad \mathrm{w} J = A m_2 \left[\mu_0 \frac{dK}{dt} + (\mu_1 - \mu_0) \frac{dQ}{dt}\right].$$

Der Pol oder Massenpunct m_2 ist ein Punct jenes permanenten Stahlmagneten $\mathfrak{K}_2$, der in unserer Figur nicht gezeichnet ist. Dieser Stahlmagnet $\mathfrak{K}_2$ mag als ein Rotationskörper gedacht werden, dessen geometrische Axe mit der Linie MM zusammenfällt, und längs dieser Linie MM sich verschiebt; so dass also jener Punct m_2 fortdauernd auf der Linie MM bleibt.

Andererseits aber mögen (wie übrigens schon früher festgesetzt wurde) der dünne Kupferring $\mathfrak{K}$ $(k'k'')$ und die homogene Metallkugel $\mathfrak{K}_1$ in fortdauernder *Ruhe* gedacht werden. Die umgebende Luft $\mathfrak{K}_0$ wird durch jene Bewegung des Stahlmagneten $\mathfrak{K}_2$ (und des Punctes m_2) mit in Bewegung versetzt werden. Diese Bewegung aber wird offenbar symmetrisch sein in Bezug auf die Axe MM; sodass also jene vom Ringe $\mathfrak{K}(k'k'')$ umgrenzte auxi-

*) Man vgl. z. B. C. NEUMANN, *Die elektrischen Kräfte*, erster Theil, Leipzig, bei Teubner 1873, daselbst S. 241, 242.

liare *substantielle Fläche* Ω, soweit sie der in Bewegung begriffenen Luft $\mathfrak{K}_0$ angehört, fortdauernd eine Rotationsfläche bleibt; während sie andererseits, soweit sie der festliegenden Metallkugel $\mathfrak{K}_1$ angehört, in völliger Ruhe verharren wird.

Uebrigens kann man sich den Stahlmagneten $\mathfrak{K}_2$ (mit dem Punct m_2) so weit entfernt denken, dass die Luft $\mathfrak{K}_0$ in der Nähe von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$ so gut wie in Ruhe bleibt; sodass also dann jene auxiliare substantielle Fläche Ω während der Bewegung von $\mathfrak{K}_2$ (und m_2) nur eine ganz minimale Gestaltsveränderung erleiden wird.*)

Während der Bewegung des Magneten $\mathfrak{K}_2$ (und des Punctes m_2) werden nun die Kegelöffnungen K und Q von Augenblick zu Augenblick sich ändern; und in jedem Augenblick der in Rede stehenden Bewegung wird man die Stärke J des durch den magnetischen Massenpunct m_2 im Ringe $\mathfrak{K}$ $(k'k'')$ inducirten Stromes mittelst der Formel (44.) *erhalten.***)

Diese Formel (44.) ist nun aber völlig *unannehmbar,* und zwar aus zwei Gründen:

Erstens, weil nach dem F. Neumann'schen Gesetz

$$(45.) \qquad wJ = Am_2 \frac{dK}{dt}, \quad \text{respective} = Am_2 \cdot \mu_0 \frac{dK}{dt}$$

sein müsste.

Zweitens aber auch deswegen, weil die Formel (44.) für den inducirten Strom J überhaupt *gar keinen bestimmten Werth* liefert; denn die auxiliare Fläche Ω ist bis zu einem gewissen Grade *willkührlich.****) Und diese Willkührlichkeit überträgt sich auf den

---

*) Auch könnte man, um eine solche Gestaltsveränderung der Fläche Ω ganz zu vermeiden, sich etwa vorstellen, dass die Metallkugel $\mathfrak{K}_1$ und der dünne Kupferring $\mathfrak{K}$ $(k'k'')$ eingebettet seien in eine *grosse Glasmasse.* Diese letztere sei dann umgeben von homogener Luft, und in dieser Luft bewege sich der Stahlmagnet $\mathfrak{K}_2$ (nebst m_2). Alsdann wird die substantielle Fläche Ω theils dem Glase, theils der Metallkugel angehören, und daher, ihrer Gestalt nach, *völlig unveränderlich* sein.

Auch werden all' unsere Formeln, beim Hinzutreten jener Glasmasse, ungeändert bleiben; nur wird in denselben alsdann unter μ_0 nicht mehr der Magnetisirungscoefficient der Luft, sondern der des Glases zu verstehen sein.

**) Abgesehen von t, K, Q und J, sind alle übrigen in der Formel (44.) enthaltenen Grössen gegebene Constanten. So z. B. repräsentirt w den *Widerstand* des gegebenen Kupferringes $\mathfrak{K}$ $(k'k'')$. Vgl. Seite 849 (33.).

***) nämlich nur allein der Beschränkung unterworfen, dass ihr Rand durch den gegebenen Ring $\mathfrak{K}\,(k'k'')$ dargestellt sein soll.

Kreis qq, in welchem die Fläche Ω von der Oberfläche der homogenen Metallkugel $\mathfrak{K}_1$ geschnitten wird, und überträgt sich also auch auf die diesem Kreise qq entsprechende, in (44.) enthaltene Kegelöffnung Q.

Diese im Resultate (44.) enthaltene Willkühr spricht in deutlicher Weise entweder für die Unzulässigkeit der *ganzen Theorie*, oder wenigstens für die Unzulässigkeit derjenigen *Methode*, mittelst welcher das Resultat (44.) aus der Theorie abgeleitet ist. Oder mit anderen Worten: Aus der im Resultate (44.) enthaltenen Willkühr ist zu schliessen entweder auf die Unzulässigkeit der Maxwell-Hertz'*schen Theorie*, oder aber auf die Unzulässigkeit derjenigen Hertz'*schen Annahmen* [Seite 845], mittelst welcher das Resultat (44.) aus jener Theorie sich ergeben hat.

Jedenfalls liegt hier ein Defect vor, den ich nicht zu beseitigen im Stande bin.

Ein oberflächlicher Beurtheiler könnte vielleicht darauf aufmerksam machen, dass jene im Resultat (44.) enthaltene Willkühr sich einfach durch die *Festsetzung* beseitigen lasse, dass die auxiliare substantielle Fläche Ω stets nur allein durch die *Luft* zu legen sei. Gewiss würde er darin völlig Recht haben. Nur ist zu beachten, dass uns mit irgend welchen Festsetzungen *a posteriori* nicht gedient sein kann, dass wir vielmehr *bei der Prüfung einer Theorie* — und hierum handelt es sich — immer nur solche Festsetzungen brauchen können, die unmittelbar aus der Theorie selber sich ergeben. Dass aber jene Fläche Ω immer nur allein durch die Luft geführt werden sollte, — diese Anforderung oder Festsetzung wird man aus der Theorie selber schwerlich abzuleiten im Stande sein.

Man könnte nun andererseits, den in Rede stehenden Defect dadurch zu beseitigen suchen, dass man den Magnetisirungscoefficienten μ für alle Substanzen als *gleich gross* ansieht.*) Eine solche Annahme aber erscheint *unannehmbar;* weil durch sie die Maxwell-Hertz'sche Theorie der Fähigkeit beraubt werden würde, Rechenschaft zu geben von der Thatsache, dass weiches Eisen durch einen ihm genäherten Stahlmagneten in einen magnetischen Zustand versetzt wird.

---

*) Alsdann nämlich würde in (44.) der Factor $\mu_1 - \mu_0$ gleich *Null* werden, und also das mit der willkührlichen Grösse Q behaftete Glied verschwinden.

Nach der Maxwell-Hertz'schen Theorie wird nämlich in einer von Luft umgebenen weichen Eisenmasse oder vielmehr in der betreffenden Uebergangsschicht unter Umständen freier Magnetismus sich ansammeln, — z. B. dann, wenn in der Nähe ein permanenter Stahlmagnet aufgestellt ist. Und zwar werden zur Bestimmung dieses in der Uebergangsschicht sich ansammelnden freien Magnetismus die Formeln Abh. I, Seite 338, (9.), (10.), (11.) dienen, deren letzte lautet:

$$\mu_1 \frac{\partial \psi}{\partial n_1} + \mu_0 \frac{\partial \psi}{\partial n_0} = 0, \quad [\text{auf der Eisenoberfläche}].$$

Hier sind μ_1 und μ_0 die Magnetisirungscoefficienten des Eisens und der umgebenden Luft. Ferner sind n_1 und n_0 die auf dem betrachteten Oberflächenelement errichteten Normalen, der Art, dass n_1 in das Eisen, und n_0 in die umgebende Luft hineingeht. Endlich bezeichnet ψ das Potential aller überhaupt vorhandenen freien Magnetismen.

Wäre nun aber $\mu_1 = \mu_0$, so würde die vorstehende Formel sich reduciren auf

$$\frac{\partial \psi}{\partial n_0} + \frac{\partial \psi}{\partial n_1} = 0, \quad [\text{auf der Eisenoberfläche}];$$

und hieraus würde sofort sich ergeben, dass auf der Eisenoberfläche (trotz des in der Nähe befindlichen Stahlmagneten) keine Spur von freiem Magnetismus vorhanden sein kann.

Somit würde also, falls $\mu_1 = \mu_0$ wäre, keine Möglichkeit vorhanden sein, das weiche Eisen durch Annäherung eines Stahlmagneten in einen magnetischen Zustand zu versetzen. — *Q. e. d.*

Man könnte vielleicht auch das Vorhandensein des in Rede stehenden *Defectes* ganz in Abrede stellen wollen, nämlich darauf hinweisen, dass bei unserer Untersuchung vergessen sei, die durch die Bewegung des Magnetpoles m_2 in der Metallkugel $\mathfrak{K}_1$ inducirten Ströme mit zu berücksichtigen, und dass ferner, falls z. B. diese Kugel aus weichem Eisen bestehen sollte, auch vergessen sei, den in dieser Kugel durch jene Bewegung von m_2 inducirten Magnetismus mit zu berücksichtigen. Darauf ist zu erwidern, dass allerdings diese nicht in Rechnung gebrachten Umstände gewisse Correctionen in dem für J erhaltenen Werthe (44.) liefern würden, dass aber diese Correctionen genau dieselben sein werden, einerlei ob man der auxiliaren Fläche Ω diese oder jene Gestalt zuertheilt, und dass also durch Anbringung dieser Correctionen die in der Formel (44.) enthaltene *willkührliche Grösse* Q nicht beseitigt werden kann.

Endlich könnte man einwenden, dass der hier betrachtete Fall eines *einzelnen* inducirenden Magnetpoles m_2 nur ein *idealer* Fall sei, und dass der in Rede stehende Unterschied zwischen den beiderlei Gesetzen (44.) und (45.) vielleicht verschwinden werde,

falls man, statt eines solchen einzelnen Poles m_2, den *ganzen gegebenen Stahlmagneten* M_2 in Betracht ziehen wollte.

Dieser Stahlmagnet M_2 ist anzusehen als ein System von ausserordentlich vielen einzelnen Magnetpolen. Und man wird daher, falls man diesen ganzen Stahlmagneten M_2 als Inducenten sich vorstellt, an Stelle der Formeln (44.), (45.) folgende Formeln erhalten:

(A.) $$\mathrm{w}J = A\mu_0 \sum m \frac{dK}{dt} + A(\mu_1 - \mu_0) \sum m \frac{dQ}{dt},$$

und

(B.) $$\mathrm{w}J = A\mu_0 \sum m \frac{dK}{dt},$$

die Summationen ausgedehnt gedacht über alle im Stahlmagneten M_2 enthaltenen Magnetpole m.

Wäre nun jenem Einwande irgend welche Bedeutung beizumessen, so müsste sich zeigen lassen, dass im gegenwärtigen Falle der Unterschied zwischen den beiden Formeln (A.) und (B.) verschwindet; es müsste sich also zeigen lassen, dass der Ausdruck

(C.) $$\sum m \frac{dQ}{dt}$$

gleich *Null* sei. Wäre das aber der Fall, so würde offenbar der in ganz analoger Weise gebildete Ausdruck

(D.) $$\sum m \frac{dK}{dt}$$

ebenfalls gleich *Null* sein; und hieraus würde alsdann [sowohl nach (A.), wie auch nach (B.)] weiter folgen, dass auch J gleich *Null* sei; — was offenbar absurd ist.

Der Ausdruck (C.) kann also unmöglich verschwinden. D. h. Der Unterschied zwischen dem Resultate der MAXWELL-HERTZ'schen Theorie und zwischen dem F. NEUMANN'schen Inductionsgesetz bleibt auch dann noch bestehen, wenn man als Inducenten nicht den einzelnen Pol m_2, sondern den ganzen Stahlmagneten M_2 in Betracht zieht.

§ 41.

Recapitulationen.

In meiner Abh. I habe ich gezeigt, dass die MAXWELL-HERTZ'sche Theorie, in ihrer Anwendung auf die Elektrostatik und auf

die Lehre von der Vertheilung des Magnetismus, zu Resultaten führt, die wesentlich abweichen von den Ergebnissen der POISSON-schen Theorie, und dass ebenso auch die betreffenden ponderomotorischen Elementargesetze in der einen Theorie wesentlich andere werden als in der andern. *Ich habe hieraus keinen Schluss ziehen können zu Ungunsten der* MAXWELL-HERTZ'*schen Theorie*, — weil die experimentellen Untersuchungen (die hier allein maassgebend sein können) in der Elektrostatik und in der Vertheilung des Magnetismus nach meiner Ansicht mit zu grossen Unsicherheiten behaftet sind, und weil andererseits jene ponderomotorischen *Elementargesetze* der directen experimentellen Erforschung überhaupt ganz unzugänglich sind.

In der gegenwärtigen Abh. II habe ich nun die *Integralgesetze* der ponderomotorischen Kräfte elektrischen und magnetischen Ursprungs einer genaueren Untersuchung unterworfen; *und in dieser Beziehung habe ich die Resultate der* MAXWELL-HERTZ'*schen Theorie in guter Uebereinstimmung gefunden mit denen der althergebrachten Theorien**), vorausgesetzt, dass man die Uebergangsschichten der einzelnen Körper mit diesen sich fest verbunden denkt, und demgemäss annimmt, dass jedwede auf eine solche Uebergangsschicht ausgeübte ponderomotorische Kraft sich unmittelbar auf den betreffenden Körper überträgt.

Endlich habe ich in der gegenwärtigen Abh. II die *elektromotorischen Kräfte*, auf Grund der MAXWELL-HERTZ'schen Theorie, einer näheren Betrachtung unterworfen. Hier aber bin ich, wie der vorige Paragraph darthut, zu einem Resultat gelangt, welches durchaus *unannehmbar* ist; *sodass auf diese Weise in der* MAXWELL-HERTZ'*schen Theorie sich ein wirklicher Defect herausstellt*, den ich einstweilen nicht zu beseitigen im Stande bin.

Es ist durchaus nicht meine Absicht, hiermit die genannte Theorie etwa ganz umstossen zu wollen. Nur dürfte nach meiner Ansicht aus diesem Defecte deutlich hervorgehen, dass die Theorie wesentlicher Abänderungen bedarf. Welches diese Abänderungen sind, und in welcher Richtung dieselben vorzunehmen seien, — darüber habe ich einstweilen keine bestimmte Vorstellung.**)

*) Der einzige Unterschied besteht in den hinzutretenden constanten Factoren ε_0 und μ_0; dabei bezeichnet ε_0 den Dielektricitäts-, und μ_0 den Magnetisirungs-Coefficienten der umgebenden homogenen Luft.

**) Vgl. die Nachschrift auf Seite 860.

§ 42.

Nachträgliche Erläuterung zu Seite 823.

Es sei gegeben ein Solenoidpol von der Intensität m, oder (was dasselbe ist) ein Magnetpol mit der magnetischen Masse m. Ferner sei gegeben ein geschlossener elektrischer Strom von der Stärke J. Für die ponderomotorische Einwirkung, welche diese beiden Objecte m und J aufeinander ausüben, wird alsdann, nach F. NEUMANN, ein Potential P existiren von folgendem Werthe:

$$(\alpha.) \qquad P = m \cdot AJK,$$

wo $K = \varepsilon \mathsf{K}$ die (positive oder negative) Oeffnung des vom Pole m nach dem Ringe J gelegten *Kegels* vorstellt.*) Und zwar ergiebt sich für dieses $K = \varepsilon \mathsf{K}$ folgender Werth**):

$$(\beta.) \qquad K = \varepsilon \mathsf{K} = \sum (\varepsilon \varkappa) = \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} Do,$$

die Integration ausgedehnt gedacht über alle Elemente Do einer vom Ringe J umgrenzten Fläche. Dabei bezeichnet r den Abstand eines solchen Elementes Do vom Pole m; überdiess repräsentirt n die *positive* Normale des Elementes Do, d. i. diejenige Normale dieses Elementes, in Bezug auf welche die Stromrichtung J *positiv* ist.

Aus (α.) folgt durch Substitution des Werthes (β.) sofort:

$$(\gamma.) \qquad P = m \cdot AJ \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} Do.$$

Und dieses Potential P ist in voller Uebereinstimmung mit dem oben, auf Seite 823 in (28.) auftretenden Ausdruck:

$$(\delta.) \qquad (\tau)\, D\mathsf{v} \cdot AJ_1 \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_1} Do_1\,;$$

nur ist dort die freie magnetische Masse m mit $(\tau)\, D\mathsf{v}$ bezeichnet; auch sind dort die Buchstaben J, Do, n respective durch J_1, Do_1, n_1 ersetzt.

---

*) Vgl. C. NEUMANN: *Die elektrischen Kräfte, erster Theil,* Leipzig bei Teubner 1873; daselbst Seite 256 (47.).

**) Vgl. in dem genannten Werk die Formel Seite 242 (5.); daselbst sind Do und n respective mit λ und ν bezeichnet.

Inhalts-Uebersicht.

Zehntes Capitel.

Ueber die elektromotorischen Kräfte.

Nachschrift.

Was die Bemerkungen zu Ende des § 41 anbelangt, so wäre ein Ausweg aus jenen Schwierigkeiten vielleicht dadurch zu gewinnen, dass man den Magnetisirungscoefficienten μ schlechtweg für *alle* Substanzen $= 1$ setzt, sodann aber die Magnetisirbarkeit einzelner Körper, wie z. B. des weichen Eisens und des Wismuths, — nach dem Vorgange von AMPÈRE und W. WEBER — durch drehbare, resp. inducirbare elektrische Molecularströme zu erklären versucht.

SELENOGRAPHISCHE KOORDINATEN

VON

FRIEDRICH HAYN.

I. ABHANDLUNG.

Des XXVII. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Klasse
der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

Nº IX.

LEIPZIG
BEI B. G. TEUBNER
1902.

Vorgetragen für die Abhandlungen am 9. Juni 1902.
Das Manuskript eingeliefert am 10. Juni 1902.
Der letzte Bogen druckfertig erklärt am 5. September 1902.

SELENOGRAPHISCHE KOORDINATEN

VON

FRIEDRICH HAYN.

I. ABHANDLUNG.

Einleitung.

Im Jahre 1898 begann der Verfasser auf Vorschlag des Direktors der Leipziger Sternwarte, Prof. Bruns, an dem 30 cm-Refraktor der Sternwarte eine längere Beobachtungsreihe zu dem Zwecke, eine größere Anzahl von Punkten der Mondoberfläche selenographisch festzulegen. Bei der Wahl dieser Aufgabe sprach im besondern der Umstand mit, daß der genannte Refraktor vortrefflich für derartige Messungen geeignet ist. Dem Objektiv, für das seinerzeit ein nutzbares Bildfeld von möglichst großer Ausdehnung vorgeschrieben worden war, ist von den Herren Reinfelder und Hertel eine solche Form gegeben worden, daß innerhalb eines Feldes von einem halben Grad Durchmesser die Bilder gleichmäßig gut erscheinen. Dem entsprechend hat dann weiter das Repsoldsche Fadenmikrometer eine solche Einrichtung erhalten, daß man die angegebene Ausdehnung des Bildfeldes sicher und bequem ausnutzen kann. Unter solchen Umständen lag der Gedanke, den reichlich bemessenen Spielraum der Mikrometerschraube unter anderm auch zu selenographischen Ortsbestimmungen zu verwenden, um so näher, als erstens die seitherigen Mikrometermessungen dieser Art den heutigen Ansprüchen in keiner Weise genügen, zweitens aber die bis dahin vorhandenen Heliometer-Beobachtungen im Grunde genommen nur einen einzigen Punkt mit größerer Sicherheit festgelegt hatten, nämlich den Ort des klassisch gewordenen Kraters Moesting A.

Handelt es sich um die Bestimmung einer größeren Anzahl selenographischer Örter, so ist es — gerade wie bei geodätischen Arbeiten — zweckmäßig, die ausgewählten Punkte in ein grobmaschiges „Hauptnetz" einzuhängen, das nur eine mäßige Anzahl von möglichst sicher festzulegenden Ecken enthält. Das im vorliegenden Falle benutzte Hauptnetz enthält nur fünf Punkte, nämlich außer Moesting A noch vier randnahe Objekte, die den Krater Moesting ungefähr in den Richtungen Ost-West und Nord-

58*

Süd einschließen. Eine derartige, für die mikrometrische Einschaltung vorteilhafte, Gestalt des Hauptnetzes gewährte nun aber auch noch die Möglichkeit, eine unabhängige Bestimmung für die Rotationselemente des Mondes zu erlangen, sobald die Beobachtungen in genügender Zahl und hinreichend gleichmäßig auf den Umlauf von Sonne und Mond verteilt wurden.

Wieweit die in den Arbeitsplan aufgenommene Neubestimmung der Rotationselemente erfolgreich gewesen ist, wird in einer späteren Veröffentlichung dargetan werden. Während der Arbeit stellte es sich als sehr wünschenswert heraus, zunächst einmal die mathematische Behandlung der Monddrehung einer Revision zu unterziehen, deren Ergebnis den Inhalt der vorliegenden Abhandlung bildet.

Da die Geschichte unserer Kenntnis von der Monddrehung in den früheren Arbeiten von WICHMANN, HARTWIG und FRANZ eine erschöpfende Behandlung erfahren hat, so habe ich nicht nötig auf diese Seite des Gegenstandes näher einzugehen. Hier kommen für das Verständnis der Entwickelungen nur die Arbeiten der drei genannten Astronomen in Betracht. Die Abhandlung WICHMANNS findet sich in Band 26 und 27 der „Astronomischen Nachrichten". Seine theoretischen Betrachtungen und Entwickelungen stützen sich auf die Untersuchung von LAPLACE im fünften Bande der Mécanique céleste. Die von HARTWIG in seiner Inauguraldissertation (Straßburg 1880) bearbeitete Beobachtungsreihe ist ganz nach den Formeln von WICHMANN berechnet worden. Zuletzt hat FRANZ im 38. Bande der „Königsberger Beobachtungen" eine Abhandlung veröffentlicht, in welcher er aus den Messungen, die SCHLÜTER in Königsberg von 1841 bis 1843 am Heliometer angestellt hat, den Ort von Moesting A und die Konstanten der physischen Libration ableitet. Auf diese Arbeit gründet sich unsere gegenwärtige Kenntnis von den genannten Konstanten; ebenso sind die im Berliner Jahrbuch für den Ort von Moesting A mitgeteilten Ephemeriden mit den FRANZschen Zahlen gerechnet.

Den angeführten Arbeiten ist das Merkmal gemeinsam, daß sie von der vorzunehmenden Integration der Bewegungsgleichungen, die bekanntlich schrittweise durch Näherung zu bewerkstelligen ist, immer nur die erste Näherung angeben; es fehlt der Nachweis, wieweit die angesetzte Lösung den Grundgleichungen genügt, so daß es angezeigt erschien, sich Klarheit darüber zu verschaffen,

wohin die seither vorgenommene außerordentlich häufige Vernachlässigung kleiner Glieder eigentlich führt.

Da alle selenozentrischen Winkel auf der Mondoberfläche von der Erde gesehen nur unter einem 200 mal kleineren Winkel erscheinen, so ist ohne weiteres klar, daß die physische Libration nicht mit derselben Schärfe berechnet zu werden braucht wie die entsprechenden Bewegungen der Erdachse. Bei den verwickelten rechnerischen Operationen aber, die nötig sind, läßt sich nicht ohne weiteres im voraus sagen, diese oder jene Vernachlässigung ist ohne Belang, diese Größe ist klein, also kann sie vernachlässigt werden. Es handelt sich in dem ganzen Problem fortwährend um kleine Größen, welche durch die Integration Einfluß gewinnen können. Ein Urteil, ob dieses oder jenes Glied vernachlässigt werden darf, gibt erst der analytische oder zahlenmäßige Nachweis.

Es soll nicht in Abrede gestellt werden, daß schließlich vielleicht die bisherigen Entwickelungen dem praktischen Bedürfnis genügen können, es hat aber jedenfalls ein wissenschaftliches Interesse über die Rotationsverhältnisse des Mondes bis zu einem gewissen Grade genau unterrichtet zu sein; außerdem entspricht es auch den Gepflogenheiten der Astronomie die Unsicherheit der Beobachtungen nicht durch Ungenauigkeit der Rechnung zu vergrössern. Dies sei vorausgeschickt, um die vorliegende Arbeit zu rechtfertigen, welche es sich zur Aufgabe gestellt hat, die physische Libration mit einer Schärfe darzustellen, welche der bei den analogen irdischen Vorgängen festgehaltenen Genauigkeit entspricht.

Nehmen wir z. B. an, daß unsere Reduktionen auf die Hundertstelsekunde genau durchgeführt werden, so würde dieser Genauigkeitsgrenze selenozentrisch das Zweihundertfache, also etwa 2″ entsprechen. Das ist das Ziel, welches durch die folgenden Rechnungen erreicht werden soll.

Haben die früheren Entwickelungen gewissermaßen sich bemüht die physische Libration des Mondes mehr geometrisch anschaulich in geschlossenen Ausdrücken darzustellen, so wird das hier gesteckte Ziel nur auf dem Wege der numerischen Rechnung zu erreichen sein.

Den empirischen Leitfaden für die Integration bilden die CASSINIschen Gesetze, deren Aussage als der abgekürzte Ausdruck beobachteter Tatsachen anzusehen ist.

In den ersten vier Kapiteln wird zunächst das Problem behandelt werden, als wäre der direkte Einfluß der Sonne auf die Achsenbewegung des Mondes gleich Null. Im Schlußkapitel soll dann noch die Art und Größe der Sonneneinwirkung untersucht werden.

Alle Entwickelungen und Rechnungen sind unabhängig doppelt ausgeführt worden, die grundlegenden sogar öfter, wobei in sehr vielen Fällen zur Erreichung des Zieles ein ganz anderer Weg eingeschlagen wurde. Es ist also die Hoffnung nicht ganz unberechtigt, daß die Resultate der vorliegenden Arbeit im wesentlichen frei von numerischen Fehlern sein werden.

I. Kapitel.

Den Ausgangspunkt für die folgenden Betrachtungen bilden die bekannten CASSINIschen Gesetze, welche besagen:

1. Der Mond dreht sich um eine in ihm feste Achse[1]) in derselben Zeit, in der er einen Umlauf um die Erde vollendet.

2. Die Neigung dieser Achse gegen die Ekliptik ist constant.

3. Mondäquator, Mondbahn und Ekliptik schneiden sich in einer Geraden und zwar so, daß der absteigende Knoten des Mondäquators auf der Ekliptik mit dem aufsteigenden Knoten der Bahn zusammenfällt.

Diese Gesetze gelten für die mittlere Bewegung des Mondes.

Bewegte sich nun der Mond mit gleichförmiger Geschwindigkeit um die Erde in einer Kreisbahn, die mit dem Mondäquator zusammenfiele, so würde ein ganz bestimmter Mondradius stets auf den Schwerpunkt der Erde gerichtet sein.

Dieser „erste Radius", durch den TOBIAS MAYER seinen ersten Meridian legte, ist nun aber in Wirklichkeit nicht immer auf das Erdzentrum gerichtet, da die vorhin genannten Bedingungen nicht erfüllt sind, sondern er weicht von dieser Richtung in dem Maße ab, als die Mondbewegung von der oben angenommenen Kreisbahn abweicht.

Der „erste Radius", welcher in der vorliegenden Untersuchung eine ganz besondere Bedeutung hat, liegt also im Mondäquator,

---

1) Unter Benutzung einer von Prof. BRUNS in seinen Vorlesungen gemachten Bemerkung möge hier betont werden, daß die Unveränderlichkeit der Drehachse im Mondkörper nur näherungsweise gilt. Aus den bekannten POINSOTschen Sätzen fließt unmittelbar die Folgerung, daß die augenblickliche Drehachse eines frei beweglichen Körpers im Raume fest oder beweglich ist, wenn sie es im Körper ist, und umgekehrt. Die Drehachse des Mondes beschreibt nun im Raume angenähert einen Kreiskegel um die Achse der Ekliptik, dessen halber Öffnungswinkel gleich der Neigung des Mondäquators ist. Daraus läßt sich für die Achsenänderungen im Mondkörper und für die entsprechenden Polhöhenschwankungen auf Beträge schließen, die mindestens 20″ oder, geozentrisch gesehen, 0,1″ erreichen.

und sein Abstand vom aufsteigenden Knoten dieser Ebene ist gleich der mittleren Länge des Mondes vermindert um die mittlere Länge des aufsteigenden Knotens seiner Bahn, da eben dieser Abstand Null ist, wenn der mittlere Mond sich in diesem Knoten befindet, und da zufolge des 1. Gesetzes der erste Radius in derselben Zeit einen Umlauf vollendet wie die mittlere Länge.

Nun könnten die Cassinischen Gesetze nicht bestehen, wenn der Mond eine homogene Kugel oder ein Rotationsellipsoid wäre. Der Mond muß vielmehr ein dreiachsiges Ellipsoid sein, und da wir anzunehmen haben, daß der Mond diese Form unter dem Einflusse der Anziehung der Erde und seiner Rotation erlangt habe, bevor er erstarrte, so ist die Vorstellung wohl gerechtfertigt, daß die Lage der Hauptträgheitsachsen folgende sei: Zwei Achsen liegen im Äquator, die dritte fällt mit der Rotationsachse zusammen. Von den ersten beiden wird wiederum die eine mit dem ersten Radius zusammenfallen.

Rotations- und Umlaufszeit müssen bereits gleich gewesen sein, als der Mond erstarrte, da sich außer der Reibung der bedeutenden, durch die Erde hervorgerufenen Flut keine Kraft denken läßt, die imstande gewesen wäre diese Gleichheit hervorzurufen. Hat aber diese Gleichheit schon bestanden, als der Mond noch plastisch war, dann können die bei Franz mit dem Namen „willkürliche Libration“ bezeichneten Glieder nur sehr klein sein, wenn sie überhaupt von Null verschieden sind.

Unter dem Einflusse der Attraktion der Erde mußte sich dann auf dem Monde eine stehende Flutwelle bilden, deren Symmetrieachse mit dem ersten Radius zusammenfällt. Da nun derselbe nicht immer auf die Erde gerichtet ist, so wird der Mondkörper unter dem Einfluß der Erdanziehung pendelartige Schwingungen ausführen, die im allgemeinen, wie sich vermuten läßt, die Ungleichheiten der Mondbewegung widerspiegeln werden.

Es ist also der Ort der Erde gegen das bewegliche Koordinatensystem der Hauptträgheitsachsen des Mondes zu bestimmen, welches so definiert werden soll, daß die positive Seite der x-Achse mit dem ersten Radius zusammenfällt, die positive y-Achse nach dem durchlaufenen Teil der Bahn, desgl. die z-Achse nach dem Nordpol des Mondes gerichtet ist. Nimmt man als festes System dasjenige der Ekliptik an, so ist die Lage des beweglichen Systems gegeben durch die 3 Winkel ϑ, φ, ψ, wo

ϑ die Neigung des Mondäquators gegen die Ekliptik,
φ der Winkelabstand der positiven x-Achse von dem absteigenden Knoten des Mondäquators,
ψ die Länge dieses Knotens ist.

In dem festen System ($\xi\eta\zeta$) sei die ξ-Achse nach dem absteigenden Knoten des Mondäquators, die ζ-Achse nach dem Nordpol der Ekliptik gerichtet. Es bezeichne ferner:

M die Masse der Erde
M_1 die Masse des Mondes
dm ein Massenteilchen des Mondes
x, y, z die Koordinaten des Erdschwerpunktes
x', y', z' die Koordinaten eines Massenteilchens des Mondes
R die Entfernung Erde-Mond
r der Abstand des Teilchens dm vom Mondschwerpunkt
m die mittlere Länge des Mondes
n die Länge des aufsteigenden Knotens der Mondbahn
i die Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik
J die mittlere Neigung des Mondäquators gegen die Ekliptik.

Beständen nun die Cassinischen Gesetze in aller Strenge zu Recht, dann wäre

$$\vartheta = J, \quad \varphi = 180^0 + m - \psi = 180^0 + m - n, \quad \psi = n.$$

Es werden nun aber die 3 Größen ϑ, φ, ψ von diesen ihren Mittelwerten kleine Abweichungen zeigen, da unter dem Einfluß der Erdanziehung die Neigung des Mondäquators und die Rotationsgeschwindigkeit des Mondes nicht konstant sein, und die Länge des absteigenden Knotens des Äquators nicht mit dem aufsteigenden der Bahn zusammenfallen wird. Man wird demnach setzen können

$$\vartheta = J + \varrho, \quad \varphi = 180^0 + (m + \tau) - \psi, \quad \psi = n + \sigma,$$

wo ϱ, τ, σ Funktionen der Zeit sind.

Diese 3 Funktionen ϱ, σ, τ lassen sich bestimmen aus den bekannten Gleichungen

$$(1)\qquad \left.\begin{aligned} p &= -\sin\varphi\sin\vartheta\frac{d\psi}{dt} - \cos\varphi\frac{d\vartheta}{dt}\\ q &= -\cos\varphi\sin\vartheta\frac{d\psi}{dt} + \sin\varphi\frac{d\vartheta}{dt}\\ r &= \frac{d\varphi}{dt} + \cos\vartheta\frac{d\psi}{dt}\end{aligned}\right\}$$

$$(2)\qquad \left.\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} + (C-B)qr &= z\frac{dV}{dy} - y\frac{dV}{dz}\\ B\frac{dq}{dt} + (A-C)pr &= x\frac{dV}{dz} - z\frac{dV}{dx}\\ C\frac{dr}{dt} + (B-A)pq &= y\frac{dV}{dx} - x\frac{dV}{dy}\end{aligned}\right\}$$

Hier ist

$$A = \int(y'^2 + z'^2)dm, \quad B = \int(z'^2 + x'^2)dm, \quad C = \int(x'^2 + y'^2)dm$$

$$V = M\int[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{-\frac{1}{2}}dm.$$

Nun ist

$$[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{-\frac{1}{2}} = R^{-1}\left[1 + \frac{r^2 - 2(xx'+yy'+zz')}{R^2}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

Dies gibt nach steigenden Potenzen entwickelt, unter Vernachlässigung der 3. und höheren Potenzen, da $r:R$ im Maximum nur $1:200$ und x', y', z' von derselben Ordnung wie r sind:

$$\frac{1}{R} - \frac{r^2}{2R^3} + \frac{xx'+yy'+zz'}{R^3} + \frac{3r^4}{8R^5} - \frac{3r^2(xx'+yy'+zz')}{4R^5} + \frac{3(xx'+yy'+zz')^2}{2R^5}.$$

Hier ist das 4. und 5. Glied aus genanntem Grunde zu vernachlässigen.

Diese Genauigkeit in V ist völlig hinreichend, um die gesteckten Genauigkeitsgrenzen einzuhalten.

Das letzte Glied läßt sich schreiben

$$\frac{3}{2}\frac{x^2x'^2 + y^2y'^2 + z^2z'^2}{R^5} + \frac{6}{2}\frac{xyx'y' + xzx'z' + yzy'z'}{R^5}.$$

Demnach ist

$$V = \frac{M}{R}\int dm + \frac{M}{R^3}\int(xx' + yy' + zz')dm - \frac{M}{2R^3}\int(x'^2 + y'^2 + z'^2)dm$$
$$+ \frac{3M}{2R^5}\int(x^2x'^2 + y^2y'^2 + z^2z'^2)dm + \frac{3M}{2R^5}\int 2(xyx'y' + xzx'z' + yzy'z')dm.$$

Da nun nach der Definition des Achsensystems (xyz)

$$\int x'dm = 0 \text{ etc.}, \quad \text{ebenso} \quad \int y'z'dm = 0 \text{ etc.}$$

ist, so wird in der vorstehenden Entwickelung für V der 2. und letzte Ausdruck gleich Null.

Da ferner

$$A = \int y'^2 dm + \int z'^2 dm, \quad \text{so ist} \quad B + C = A + 2\int x'^2 dm$$

$$B = \int z'^2 dm + \int x'^2 dm, \qquad C + A = B + 2\int y'^2 dm$$

$$C = \int x'^2 dm + \int y'^2 dm, \qquad A + B = C + 2\int z'^2 dm$$

und

$$2\left[\int x'^2 dm + \int y'^2 dm + \int z'^2 dm\right] = A + B + C.$$

Folglich ist

$$V = \frac{MM_1}{R} - \frac{M}{4R^3}(A + B + C)$$

$$+ \frac{3M}{4R^5}[x^2(B + C - A) + y^2(C + A - B) + z^2(A + B - C)]$$

$$= \frac{MM_1}{R} - \frac{M}{4R^3}(A + B + C) + \frac{3M}{4R^5}(A + B + C)(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$- \frac{3M}{2R^5}(Ax^2 + By^2 + Cz)^2$$

$$V = \frac{MM_1}{R} + \frac{1}{2}\frac{M}{R^3}(A + B + C) - \frac{3}{2}\frac{M}{R^5}(Ax^2 + By^2 + Cz^2).$$

Differenziert man nun V nach x, y, z und bildet die rechten Seiten der Gleichungen (2), so wird man finden, daß

$$\frac{dV}{dx} = -3MR^{-5}Ax$$

$$\frac{dV}{dy} = -3MR^{-5}By$$

$$\frac{dV}{dz} = -3MR^{-5}Cz$$

und

$$\left.\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} + (C - B)qr &= 3MR^{-5}(C - B)yz \\ B\frac{dq}{dt} + (A - C)pr &= 3MR^{-5}(A - C)zx \\ C\frac{dr}{dt} + (B - A)pq &= 3MR^{-5}(B - A)xy \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

ist. Transformiert man ferner das System (xyz) in das feste System $(\xi\eta\zeta)$ durch Drehung um die 3 Winkel ϑ, φ, ψ, so wird

$$x = \xi\cos\varphi + \eta\cos\vartheta\sin\varphi - \zeta\sin\vartheta\sin\varphi$$

$$y = -\xi\sin\varphi + \eta\cos\vartheta\cos\varphi - \zeta\sin\vartheta\cos\varphi$$

$$z = \zeta\cos\vartheta + \eta\sin\vartheta.$$

Ist nun die wahre Länge und Breite des Mondes L und B, dann ist die wahre Länge der Erde vom Monde gesehen und gerechnet vom absteigenden Knoten des Mondäquators

$$v = L + 180^0 - \psi$$

und die wahre Breite gleich $-B$, demnach

$$\xi = R \cos B \cos v, \quad \eta = R \cos B \sin v, \quad \zeta = -R \cos B \operatorname{tg} B.$$

In der letzten Gleichung hat man bisher immer $-\operatorname{tg} B = \operatorname{tg} i \sin v$ gesetzt, was aber nur in der ungestörten Bahn Gültigkeit hat, und auch dann nur, wenn man $\psi = n$ annimmt. Von dieser näherungsweisen Substitution wird gelegentlich Gebrauch gemacht werden.

Aus diesen Werten von ξ, η, ζ ergeben sich

$$x = R \cos B [\cos v \cos \varphi + \sin v \sin \varphi \cos \vartheta + \operatorname{tg} B \sin \varphi \sin \vartheta]$$
$$y = R \cos B [-\cos v \sin \varphi + \sin v \cos \varphi \cos \vartheta + \operatorname{tg} B \cos \varphi \sin \vartheta]$$
$$z = R \cos B [-\operatorname{tg} B \cos \vartheta + \sin v \sin \vartheta].$$

Hieraus sind nun für die Gleichungen (3) die Produkte yz, zx, xy zu bilden.

Man kann zunächst noch x und y so schreiben:

$$x = R \cos B [\cos (v - \varphi) - \sin v \sin \varphi (1 - \cos \vartheta) + \operatorname{tg} B \sin \varphi \sin \vartheta]$$
$$y = R \cos B [\sin (v - \varphi) - \sin v \cos \varphi (1 - \cos \vartheta) + \operatorname{tg} B \cos \varphi \sin \vartheta]$$

Begnügt man sich damit, daß x, y, z bis auf die 4. Dezimale genau berechnet werden, dann kann man mancherlei Vernachlässigungen einführen, weil $1 - \cos \vartheta = 0.00035$, $\sin \vartheta = 0.0266$, $\operatorname{tg} B \sin \vartheta < 0.0026$, $\operatorname{tg} B \sin^2 \vartheta < 0.00007$, $\operatorname{tg} B (1 - \cos \vartheta) < 0.00004$.

Es ist

$$\begin{aligned} yz = R^2 \cos^2 B [&-\operatorname{tg} B \cos \vartheta \sin (v - \varphi) + \operatorname{tg} B \cos \vartheta \sin v \cos \varphi (1 - \cos \vartheta) \\ &- \operatorname{tg}^2 B \cos \vartheta \sin \vartheta \cos \varphi + \sin (v - \varphi) \sin v \sin \vartheta \\ &- \sin^2 v \cos \varphi \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta) + \operatorname{tg} B \sin v \cos \varphi \sin^2 \vartheta]. \end{aligned}$$

Hierin kann man nach obigen Bemerkungen das 2., 5., 6. Glied fortlassen, demnach ist

$$\begin{aligned} yz = R^2 \cos^2 B [&-\operatorname{tg} B \cos \vartheta \sin (v - \varphi) + \sin (v - \varphi) \sin v \sin \vartheta \\ &- \operatorname{tg}^2 B \cos \vartheta \sin \vartheta \cos \varphi] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} xz = R^2 \cos^2 B [&-\operatorname{tg} B \cos \vartheta \cos (v - \varphi) + \operatorname{tg} B \cos \vartheta \sin v \sin \varphi (1 - \cos \vartheta) \\ &- \operatorname{tg}^2 B \cos \vartheta \sin \varphi \sin \vartheta + \cos (v - \varphi) \sin v \sin \vartheta \\ &- \sin^2 v \sin \varphi \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta) + \operatorname{tg} B \sin v \sin \varphi \sin^2 \vartheta]. \end{aligned}$$

Läßt man auch hierin das 2., 5., 6. Glied weg, dann ist

$$xz = R^2\cos^2 B\,[-\operatorname{tg} B\cos\vartheta\cos(v-\varphi) + \cos(v-\varphi)\sin v\sin\vartheta - \operatorname{tg}^2 B\cos\vartheta\sin\vartheta\sin\varphi].$$

Ferner ist es nach obigen Bemerkungen erlaubt zu schreiben

$$xy = R^2\cos^2 B\,[\sin(v-\varphi)\cos(v-\varphi) - \sin(v-\varphi)\sin v\sin\varphi(1-\cos\vartheta) + \operatorname{tg} B\sin(v-\varphi)\sin\varphi\sin\vartheta - \cos(v-\varphi)\sin v\cos\varphi(1-\cos\vartheta) + \operatorname{tg} B\cos(v-\varphi)\cos\varphi\sin\vartheta]$$

$$xy = R^2\cos^2 B\,\{\tfrac{1}{2}\sin(2v-2\varphi) - \sin v(1-\cos\vartheta)[\sin(v-\varphi)\sin\varphi + \cos(v-\varphi)\cos\varphi] + \operatorname{tg} B\sin\vartheta[\sin(v-\varphi)\sin\varphi + \cos(v-\varphi)\cos\varphi]\}.$$

Ersetzt man nun hier im letzten Gliede, das stets <0.0024 bleibt, $\operatorname{tg} B$ durch $-\operatorname{tg} i\,\sin v$, was hier gestattet ist, nimmt ferner für ϑ seinen Mittelwert J, und nennt die Größe $1-\cos J + \operatorname{tg} i\sin J = \mu$, dann wird

$$xy = R^2\cos^2 B\,[\tfrac{1}{2}\sin(2v-2\varphi) - \tfrac{1}{2}\mu(\sin(2v-2\varphi) + \sin 2\varphi)]$$

$$xy = R^2\cos^2 B\,[\tfrac{1}{2}\sin(2v-2\varphi)(1-\mu) - \tfrac{1}{2}\mu\sin 2\varphi].$$

Es werde gesetzt

$$(C-B):A = \alpha,\quad (C-A):B = \beta,\quad (B-A):C = \gamma,$$

sodaß

$$\alpha - \beta + \gamma - \alpha\beta\gamma = 0.$$

Mit diesen Abkürzungen lauten nun die Gleichungen (3)

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp}{dt} + \alpha qr &= 3M\alpha R^{-5}yz \\ \frac{dq}{dt} - \beta pr &= -3M\beta R^{-5}zx \\ \frac{dr}{dt} + \gamma pq &= 3M\gamma R^{-5}xy \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Die Masse der Erde M findet sich aus der Formel

$$M = 4\pi^2 a^3 : T^2(1 + M_1),$$

wo M_1 die Masse des Mondes, ausgedrückt in Teilen der Erdmasse, a die halbe große Achse der Mondbahn, T die Umlaufszeit des Mondes ist.

Nimmt man nun M_1 zu $\frac{1}{81}$ an, als Zeiteinheit den mittleren Sonnentag, als Längeneinheit die halbe große Achse a, dann ist

$$M = 4\pi^2 : T^2(1 + \tfrac{1}{81}).$$

Nun ist $2\pi : T$ die mittlere tägliche Bewegung des Mondes, die mit m' bezeichnet werden soll, also

$$M = 0.9878\, m'^2.$$

Es sei die wahre Parallaxe des Mondes p, der Erdäquatorialhalbmesser h, die wahre Entfernung des Mondes $R = a(1 + \partial a)$. Da nun $a = 1$, so ist

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{1 + \partial a} \text{ und } \sin p = \frac{h}{R} = \frac{h}{1 + \partial a}.$$

Setzt man $\sin p_0 = h : a = h$, wo p_0 die mittlere Parallaxe ist, und für den Sinus den Bogen, dann ist

$$p = p_0 + \partial p = \frac{h}{1 + \partial a} = \frac{p_0}{1 + \partial a},$$

demnach

$$\frac{1}{1 + \partial a} = 1 + \frac{\partial p}{p_0}, \text{ und } \frac{1}{R^3} = \left(1 + \frac{\partial p}{p_0}\right)^3$$

Schließlich sei $3M = M'$.

Die Gleichungen (4) nehmen nach Einsetzung der Werte für x, y, z folgende Form an:

$$(5a)\ \frac{dp}{dt} + \alpha q r = M'\alpha R^{-3}\cos^2 B[-\operatorname{tg} B \cos\vartheta \sin(v-\varphi) + \sin(v-\varphi)\sin v \sin\vartheta - \operatorname{tg}^2 B \cos\vartheta \sin\vartheta \cos\varphi]$$

$$(5b)\ \frac{dq}{dt} - \beta p r = -M'\beta R^{-3}\cos^2 B[-\operatorname{tg} B \cos\vartheta \cos(v-\varphi) + \cos(v-\varphi)\sin v \sin\vartheta - \operatorname{tg}^2 B \cos\vartheta \sin\vartheta \sin\varphi]$$

$$(5c)\quad \frac{dr}{dt} + \gamma p q = M'\gamma R^{-3}\cos^2 B[\tfrac{1}{2}\sin(2v - 2\varphi)(1-\mu) - \tfrac{1}{2}\mu \sin 2\varphi].$$

Es sind nun als Funktionen der Zeit zu entwickeln

R^{-3}. $\cos^2 B$, $\operatorname{tg} B$, $\operatorname{tg}^2 B$, $\sin(v-\varphi)$, $\cos(v-\varphi)$, $\sin v$ und $\sin(2v-2\varphi)$.

Bevor wir nun an die Entwickelung der genannten Größen gehen, mögen hier einige vergleichende Bemerkungen bezüglich früherer Bearbeitungen Platz finden.

Zunächst muß auffallen, daß bisher stets die Masse des Mondes vernachlässigt worden ist, deren Berücksichtigung keine Schwierigkeit verursacht. Diese Vernachlässigung fälscht die Resultate um etwa $\frac{1}{82}$ ihres Betrages. Bei der Berechnung der Erdmasse findet sich bei WICHMANN Seite 299, ebenso auch bei HARTWIG, die Angabe, daß $M = \varrho^3 : U^2$ und $m' = 1 : U$ sei, während es heißen muß

$$M = 4\pi^2 \varrho^3 : U^2, \ m' = 2\pi : U,$$

wo in unserer Bezeichnungsweise $\varrho = a$ und $U = T$ ist.

Die Gleichung zwischen den 3 Größen α, β, γ ist bei FRANZ angegeben

$$\alpha - \beta + \gamma + \alpha\beta\gamma = 0,$$

was für die Rechnung ohne Belang ist.

Die 3 Störungen der CASSINIschen Gesetze habe ich abweichend von der bisher üblichen Bezeichnungsweise ϱ, σ, τ genannt, um nicht die scheinbare Verwirrung, die in den bisher üblichen Bezeichnungen u, w, w', w'' eingerissen ist, zu vergrößern. Ich habe definiert

$$\vartheta = J + \varrho, \ \psi = n + \sigma, \ \varphi = 180^\circ + (m + \tau) - \psi = 180^\circ + (m + \tau) - (n + \sigma).$$

WICHMANN setzt

$$\vartheta = J + w'', \ -\psi = n + w, \ \varphi = 180^\circ + m - n + w'.$$

FRANZ dagegen gibt folgende Definition

$$\vartheta = J + w'', \ -\psi = n + w, \ \varphi = 180^\circ + (m + u) - (n + w).$$

Daraus folgt, daß nach

WICHMANN	FRANZ
$w'' = \varrho$	$w'' = \varrho$
$w = \sigma$	$w = \sigma$
$w' = \tau - \sigma$	$u = \tau$
$u = w + w' = \tau$	

ist. Man sieht also, daß im Grunde beide Definitionen auf dasselbe hinaus kommen, und doch besteht nach FRANZ, Seite 13, ein großer Zwiespalt zwischen den Resultaten. Das erklärt sich aber dadurch, daß FRANZ für sein $-w$ nur deshalb dasselbe erhält wie WICHMANN für w', weil er bei der Integration Vernachlässigungen einführt, ohne die er eigentlich $u - w$ erhalten müßte, womit eine völlige Übereinstimmung in diesem Punkte erreicht wäre. Auf diesen Punkt wird später noch näher eingegangen werden, es lag mir aber an dieser Stelle daran, scheinbare Widersprüche in den beiden früheren Arbeiten zu beseitigen und darauf hinzuweisen, daß die Ableitung von WICHMANN richtig ist, was durch die oben zitierte Stelle aus der FRANZschen Arbeit in Frage gestellt war.

Schließlich mag noch erwähnt sein, daß die Gleichungen (5) innerhalb der gesteckten Genauigkeitsgrenzen völlig scharf sind

und die Ungleichheiten des Radiusvektors und der Breite eben so gut wie die der Länge zu berücksichtigen gestatten, was die entsprechenden Gleichungen bei WICHMANN und FRANZ nur teilweise tun.

II. Kapitel.

Die Entwickelung der auf den rechten Seiten der Gleichungen (5) enthaltenen Funktionen der Zeit, welche in diesem Kapitel gegeben wird, gründet sich auf die HANSENschen Mondtafeln. Sie kann demnach nur insoweit die physische Libration richtig ergeben, als die HANSENsche Theorie die Mondbewegung darstellt. Etwaige Verbesserungen der HANSENschen Theorie würden sich aber leicht bei den weiteren Entwickelungen in Rechnung ziehen lassen.

In den nun folgenden Rechnungen bezeichnet

L die wahre Länge des Mondes
B „ „ Breite „ „
p „ „ Parallaxe „ „
g „ mittlere Anomalie „ „
g' „ „ „ der Sonne
ω den Abstand des Mondperigäums } vom aufsteigenden
ω' „ „ „ Sonnenperigäums } Knoten der Mondbahn
n die Länge des aufsteigenden Knotens, bei HANSEN mit $-\Theta$ bezeichnet.
e die Exzentrizität der Mondbahn
i die Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik
J die mittlere Neigung des Mondäquators gegen die Ekliptik.

Es ist nach HANSEN für die Epoche 1900 Januar 1.0 m. Z. Greenwich

$$g = 309^\circ 11' \ 0'' + (13 \times 360^\circ + 331\,158''.4)\frac{t}{365\cdot 25}$$

$$g' = 359^\circ 27' 56'' + (360^\circ - 33''.9)\frac{t}{365\cdot 25}$$

$$\omega = 75^\circ 18' 40'' + 216\,115''.2\,\frac{t}{365\cdot 25}$$

$$\omega' = 22^\circ \ 5' 22'' + \ 69\,691''.0\,\frac{t}{365\cdot 25}$$

$$n = -100^\circ 52' 20'' - \ 69\,629''.4\,\frac{t}{365\cdot 25}$$

$$e = 0{,}054\,908$$

$$i = 5^\circ \ 8' \ 40''$$

$$J = 1^\circ \ 31' \ 22''.1 \quad \text{(SCHLÜTER-FRANZ)}$$

HANSEN setzt nun die wahre Anomalie in der Gestalt

$$f = nz + (2e - \tfrac{1}{4}e^3)\sin nz + (\tfrac{5}{4}e^2 - \tfrac{11}{24}e^4)\sin 2nz + \tfrac{13}{12}e^3 \sin 3nz$$

an, wo

$$nz = g + n\delta z.$$

Ferner ist

$$R = -\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} i \sin 2(f + \omega) \qquad R' = -s \operatorname{tg} i \cos(f + \omega)$$

und somit die wahre Länge

$$L = f + \omega + n + R + R',$$

die wahre Breite

$$\sin B = \sin i \sin(f + \omega) + s.$$

Die wahre Parallaxe ist

$$p = C + p' + p'^2 \frac{1}{2 \sin C \cos C} + p'^3 \frac{1 + 2 \sin^2 C}{6 \sin^2 C \cos^2 C},$$

wo

$$C = 56' 59''.57 \qquad p' = -P'' \operatorname{tg} C - w'' \operatorname{tg} C$$

$$-P'' = (e - \tfrac{3}{8}e^3)\cos nz + \tfrac{3}{4}e^2 \cos 2nz + \tfrac{17}{24}e^3 \cos 3nz.$$

Die Größen $n\delta z$, s, w'' sind die HANSENschen Reihenentwickelungen der Störungen.

A. Die wahre Länge.

Es ist zunächst

$$f = g + n\delta z + 22643'' \sin(g + n\delta z) + 776'' \sin 2(g + n\delta z) + 37'' \sin 3(g + n\delta z).$$

In diesem Ausdruck für f wird man nun die Sinus der Summe in die Summe sin cos + cos sin umformen. Auf diese Weise ist die weiter unten folgende Entwickelung für f entstanden. In derselben Tafel ist das HANSENsche $n\delta z$ gegeben. Es sind diejenigen Glieder ausgewählt worden, die vermöge ihrer Größe oder der besonderen Eigenschaft ihres Argumentes Berücksichtigung verdienen. Das Kriterium für diese Auswahl kann erst später mitgeteilt werden.

Mit dem so gefundenen f ergibt sich auf ganz analogem Wege

$$R = -654'' \sin(2g + 2\omega) - 45'' \sin(3g + 2\omega) + 45'' \sin(g + 2\omega) + 4'' \sin(2g' + 2\omega')$$

$$R' = +23'' \sin(+2g' + 2\omega') \qquad + 3'' \sin(g - 2g' + 2\omega - 2\omega')$$
$$-23'' \sin(2g - 2g' + 2\omega - 2\omega') - 3'' \sin(3g - 2g' + 2\omega - 2\omega').$$

Mit den Entwickelungen für f, R, R' erhält man dann den Ausdruck für die wahre Länge des Mondes, wie ihn die beiden letzten

Kolumnen der nachstehenden Tafel geben. Die letzte Kolumne gibt die Koeffizienten in Teilen des Radius.

Die Größen sind mit dem Sinus des Argumentes zu multiplizieren.

Tabelle 6.

Argument	$n\delta z =$	$f = g +$	$L = g + \omega + n +$	$L = g + \omega + n +$
g		+ 22 643″	+ 22 643″	+ 0.10977
$2g$	− 5″	+ 771	+ 771	+ 0.00374
$3g$		+ 37	+ 37	+ 0.00018
$-g-g'$	+ 73	+ 109	+ 109	+ 0.00053
$-g'$	+ 656	+ 666	+ 666	+ 0.00323
$g-g'$	+ 111	+ 147	+ 147	+ 0.00071
$-g'+2\omega-2\omega'$	+ 3.7	+ 2.2	+ 2.2	+ 0.000011
$g-g'+2\omega-2\omega'$	− 28	− 28	− 28	− 0.00014
$2g-g'+2\omega-2\omega'$	− 23	− 23	− 23	− 0.00011
$-2g'+2\omega-2\omega'$	− 42	+ 211	+ 211	+ 0.00102
$g-2g'+2\omega-2\omega'$	+ 4 467	+ 4 583	+ 4 586	+ 0.02223
$2g-2g'+2\omega-2\omega'$	+ 2 145	+ 2 393	+ 2 370	+ 0.01149
$3g-2g'+2\omega-2\omega'$	+ 60	+ 195	+ 192	+ 0.00094
$g-3g'+2\omega-2\omega'$	+ 198	+ 207	+ 207	+ 0.00100
$2g-3g'+2\omega-2\omega'$	+ 155	+ 166	+ 166	+ 0.00080
$2g-4g'+4\omega-4\omega'$	+ 30	+ 31	+ 31	+ 0.00015
$3g-4g'+4\omega-4\omega'$	+ 36	+ 39	+ 39	+ 0.00019
$+2\omega$	+ 6.0	+ 1.3	+ 1.3	+ 0.0000063
$g+2\omega$	− 85	− 85	− 40	− 0.00019
$2g+2\omega$	+ 4	− 1	− 655	− 0.00200
$3g+2\omega$			− 45	− 0.00022
$+2g'+2\omega'$	− 82	− 81	− 58	− 0.00028
$-g'+\omega-\omega'$	− 12	− 18	− 18	− 0.00009
$g-g'+\omega-\omega'$	− 121	− 122	− 122	− 0.00059
$-n+184°7$	+ 7.8	+ 7.8	+ 7.8	+ 0.000038

B. Die wahre Breite.

Es war

$$\sin B = \sin i \sin (f + \omega) + s,$$

also

$$\sin B = \sin i \sin (g + \omega + \delta) + s$$

oder

$$\sin B = +0.089\,67 \sin (g + \omega) \cos \delta + 0.089\,67 \cos (g + \omega) \sin \delta + s,$$

wo die Bedeutung von δ aus der Beziehung $f = g + \delta$ ersichtlich ist.

Die folgende Tafel gibt die in Frage kommenden Glieder von s in Bogensekunden und die Entwickelung für $\sin B$ in Teilen des Radius.

Die Tafelwerte sind mit dem Sinus des Arguments zu multiplizieren.

Tabelle 7.

Argument	s	$\sin B$
$-g+\omega$	$-25''$	-0.00016
$+\omega$	$+22$	-0.00483
$g+\omega$	$+7$	$+0.08942$
$2g+\omega$		$+0.00491$
$3g+\omega$		$+0.00029$
$-2g'+\omega-2\omega'$	-44	$+0.00081$
$g-2g'+\omega-2\omega'$	$+523$	$+0.00301$
$2g-2g'+\omega-2\omega'$	$+31$	$+0.00016$
$g-3g'+\omega-2\omega'$	$+23$	$+0.00015$
$2g-2g'+3\omega-2\omega'$		$+0.00096$
$3g-2g'+3\omega-2\omega'$		$+0.00057$

C. Die wahre Parallaxe.

Für die Parallaxe hatten wir einen Ausdruck erhalten, den man auch so schreiben kann

$$p = C + p' + 30.2\,p'^2 + 607\,p'^3,$$

$$C = 56'\,59''.57 \qquad p' = -P''\operatorname{tg} C - w''\operatorname{tg} C,$$

$$-P''\operatorname{tg} C = +187''.6\cos nz + 7''.7\cos 2nz + 0''.4\cos 3nz.$$

$-P''\operatorname{tg} C$ wird nun ganz analog wie f entwickelt, dazu $-w''\operatorname{tg} C$ addiert u. s. w. Man erhält somit eine Reihenentwickelung für p, die aus einem konstanten Glied und Cosinusgliedern besteht. Die Konstante ist die mittlere Parallaxe p_0, die Summe der Cosinusglieder hatten wir früher mit ∂p bezeichnet. Dividiert man nun $p = p_0 + \partial p$ durch p_0, so erhält man den Ausdruck $1 + \frac{\partial p}{p_0}$. Es ist schließlich noch zu bilden

$$R^{-3} = \left(1 + \frac{\partial p}{p_0}\right)^3 = 1 + 3\,\frac{\partial p}{p_0} + 3\left(\frac{\partial p}{p_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{p_0}\right)^3.$$

Die folgende Tafel gibt die Parallaxe p und die Größe R^{-3}. Jeder Koeffizient ist mit dem Cosinus des Arguments zu multiplizieren.

Tabelle 8.

Argument	p	R^{-3}
	+ 3422″.1	+ 1.0047
g	+ 186.5	+ 0.1644
$2g$	+ 10.2	+ 0.0134
$3g$	+ 0.6	+ 0.0011
$-g-g'$	− 0.9	− 0.0008
$-g'$	− 0.4	− 0.0003
$g-g'$	+ 1.2	+ 0.0010
$g-g'+2\omega-2\omega'$	− 0.2	− 0.0002
$2g-g'+2\omega-2\omega'$	− 0.3	− 0.0003
$-2g'+2\omega-2\omega'$	− 0.3	+ 0.0015
$g-2g'+2\omega-2\omega'$	+ 34.3	+ 0.0315
$2g-2g'+2\omega-2\omega'$	+ 28.2	+ 0.0266
$3g-2g'+2\omega-2\omega'$	+ 3.1	+ 0.0042
$4g-2g'+2\omega-2\omega'$	+ 0.3	+ 0.0005
$g-3g'+2\omega-2\omega'$	+ 1.4	+ 0.0013
$2g-3g'+2\omega-2\omega'$	+ 1.9	+ 0.0018
$3g-3g'+2\omega-2\omega'$	+ 0.2	+ 0.0003
$2g-4g'+4\omega-4\omega'$	+ 0.4	+ 0.0005
$3g-4g'+4\omega-4\omega'$	+ 0.6	+ 0.0008
$4g-4g'+4\omega-4\omega'$	+ 0.2	+ 0.0004
$g+2\omega$	− 0.7	− 0.0006
$g-g'+\omega-\omega'$	− 0.9	− 0.0008

Aus $\sin B$ ist nun abzuleiten $\cos^2 B$, $\operatorname{tg} B$, $\operatorname{tg}^2 B$.

Es ist genügend genau

$$\cos^2 B = 1 - \sin^2 B,\quad \operatorname{tg}^2 B = \sin^2 B + \sin^4 B,\quad \operatorname{tg} B = \sin B(1 + \tfrac{1}{2}\sin^2 B).$$

Somit erhält man

$$\begin{aligned}
\cos^2 B = &+0.99598 \\
&-0.00043\cos(g+2\omega) \\
&+0.00388\cos(2g+2\omega) \\
&+0.00044\cos(3g+2\omega) \\
&-0.00027\cos(2g'+2\omega') \\
&+0.00022\cos(2g-2g'+2\omega-2\omega')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}^2 B = &+0.00404 \\
&+0.00043\cos(g+2\omega) \\
&-0.00391\cos(2g+2\omega) \\
&-0.00044\cos(3g+2\omega) \\
&+0.00027\cos(2g'+2\omega') \\
&-0.00022\cos(2g-2g'+2\omega-2\omega')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} B = &-0.00485 \sin \omega \\ &+ 0.08969 \sin(g + \omega) \\ &+ 0.00493 \sin(2g + \omega) \\ &+ 0.00081 \sin(-2g' + \omega - 2\omega') \\ &+ 0.00302 \sin(g - 2g' + \omega - 2\omega') \\ &+ 0.00096 \sin(2g - 2g' + 3\omega - 2\omega') \\ &+ 0.00057 \sin(3g - 2g' + 3\omega - 2\omega').\end{aligned}$$

Zunächst mag nun der in der Gleichung (5c) vorkommende Ausdruck

$$\tfrac{1}{2} \sin(2v - 2\varphi)(1 - \mu) - \tfrac{1}{2} \mu \sin 2\varphi$$

entwickelt werden.

Es war

$$v = L + 180^0 - \psi, \quad \varphi = 180^0 + m + \tau - \psi,$$

wo

$$m = g + \omega + n \text{ und } L = g + \omega + n + \Sigma$$

$$\mu = +0.00274.$$

Folglich ist

$$v - \varphi = \Sigma - \tau$$

$$\tfrac{1}{2} \sin 2(\Sigma - \tau) = \Sigma - \tfrac{2}{3} \Sigma^3 - \tau(1 - 2\Sigma^2). \tag{9}$$

Diese Entwickelung von $\frac{1}{2}\sin(2v - 2\varphi)$ ist hinreichend scharf.

Ferner ist

$$\sin 2\varphi = \sin(2g + 2\omega + 2\tau - 2\sigma).$$

Setzt man in diesem mit der kleinen Größe $\frac{1}{2}\mu$ multiplizierten Ausdruck $\cos(2\tau - 2\sigma) = 1$, dann wird

$$\sin 2\varphi = \sin(2g + 2\omega) + 2\tau\cos(2g + 2\omega) - 2\sigma\cos(2g + 2\omega),$$

$$\begin{aligned}-\tfrac{1}{2}\mu \sin 2\varphi = &-0.00137 \sin(2g + 2\omega) - 0.00274\tau\cos(2g + 2\omega) \\ &+ 0.00274\sigma\cos(2g + 2\omega).\end{aligned} \tag{10}$$

Es bietet somit keinerlei Schwierigkeiten obigen Ausdruck mit der gewünschten Genauigkeit zu berechnen. Er ist in der folgenden Tafel enthalten, die außerdem in der dritten Kolumne den Wert von $R^{-3}\cos^2 B$ gibt, dessen Berechnung keiner weiteren Erklärung bedarf. Die letzte Kolumne enthält das Produkt

$$R^{-3}\cos^2 B\,[\tfrac{1}{2}\sin(2v - 2\varphi)(1 - \mu) - \tfrac{1}{2}\mu\sin 2\varphi]. \tag{11}$$

Die Koeffizienten des Ausdruckes in [ ] sind mit dem Sinus, die von $R^{-3}\cos^2 B$ sind mit dem Cosinus, und die des Endresultates mit dem Sinus des Argumentes zu multiplizieren.

Tabelle 12.

Argument	[ ]	$R^{-3}\cos^2 B$	[ ] $R^{-3}\cos^2 B$
		+ 1.00069	
g	+ 0.10878	+ 0.16376	+ 0.10831
$2g$	+ 0.00367	+ 0.01339	+ 0.01252
$3g$	+ 0.00040	+ 0.00108	+ 0.00143
$-g-g'$	+ 0.00053	− 0.00083	+ 0.00081
$-g'$	+ 0.00318	− 0.00031	+ 0.00317
$g-g'$	+ 0.00071	+ 0.00102	+ 0.00096
$g-g'+2\omega-2\omega'$	− 0.00014	− 0.00020	− 0.00020
$2g-g'+2\omega-2\omega'$	− 0.00011	− 0.00027	− 0.00016
$-2g'+2\omega-2\omega'$	+ 0.00108	+ 0.00145	+ 0.00120
$g-2g'+2\omega-2\omega'$	+ 0.02191	+ 0.03134	+ 0.02158
$2g-2g'+2\omega-2\omega'$	+ 0.01133	+ 0.02669	+ 0.01468
$3g-2g'+2\omega-2\omega'$	+ 0.00107	+ 0.00417	+ 0.00362
$4g-2g'+2\omega-2\omega'$		+ 0.00050	+ 0.00041
$g-3g'+2\omega-2\omega'$	+ 0.00100	+ 0.00134	+ 0.00102
$2g-3g'+2\omega-2\omega'$	+ 0.00080	+ 0.00177	+ 0.00095
$3g-3g'+2\omega-2\omega'$		+ 0.00029	
$2g-4g'+4\omega-4\omega'$	+ 0.000014	+ 0.00050	+ 0.00048
$3g-4g'+4\omega-4\omega'$	+ 0.000021	+ 0.00080	+ 0.00070
$4g-4g'+4\omega-4\omega'$		+ 0.00038	+ 0.00028
$+2\omega$	+ 0.0000063		− 0.000031
$g+2\omega$	− 0.00019	− 0.00083	− 0.00067
$2g+2\omega$	− 0.00337	+ 0.00390	− 0.00350
$3g+2\omega$	− 0.00022	+ 0.00066	− 0.00028
$+2g'+2\omega'$	− 0.00028	− 0.00022	− 0.00036
$g-g'+\omega-\omega'$	− 0.00059	− 0.00085	− 0.00058
$-g'+\omega-\omega'$	− 0.000088		− 0.000093
$-g'+2\omega-2\omega'$	+ 0.000011		+ 0.000010
$-u+184^\circ 7$	+ 0.000038		+ 0.000038

Zu dem Ausdrucke, welcher in der 1. Kolumne obiger Tafel enthalten ist, treten nun noch folgende Glieder:

$$-0.9873\,\tau + 0.103\,J\sigma\cos(2g+2\omega),$$

wenn man sich auf die Hauptglieder beschränkt, was nach Untersuchungen, die erst später angestellt werden können, gestattet ist.

Zur letzten Kolumne ist demzufolge noch hinzuzufügen

$$-0.988\,\tau - 0.162\,\tau\cos g + 0.103\,J\sigma\cos(2g + 2\omega).$$

Somit ist die rechte Seite der Gleichung (5c) in einer integrabelen Form gegeben.

Gehen wir jetzt zur Entwickelung der beiden anderen Gleichungen (5) über, so ist zunächst

$$\sin\vartheta = \sin(J + \varrho) = +0.02658 + \varrho,$$

$$\cos\vartheta = 0.99965,$$

$$\sin(v - \varphi) = \sin(\Sigma - \tau) = \Sigma - \tfrac{1}{6}\Sigma^3 - \tau(1 - \tfrac{1}{2}\Sigma^2),$$

$$\cos(v - \varphi) = \cos(\Sigma - \tau) = 1 - \tfrac{1}{2}\Sigma^2 + \tau\Sigma,$$

$$\sin v = \sin(L + 180^0 - \psi) = -\sin(g + \omega + \Sigma - \sigma)$$

$$= -\sin(g + \omega)\cos(\Sigma - \sigma) - \cos(g + \omega)\sin(\Sigma - \sigma).$$

Setzt man nun

$$\cos(\Sigma - \sigma) = 1 - \tfrac{1}{2}\Sigma^2 + \sigma\Sigma$$

und

$$\sin(\Sigma - \sigma) = \Sigma - \sigma,$$

dann wird

$$\sin v = -\sin(g + \omega) - \Sigma\cos(g + \omega) + \tfrac{1}{2}\Sigma^2\sin(g + \omega)$$

$$+ \sigma\cos(g + \omega) - \sigma\Sigma\sin(g + \omega).$$

Wir haben somit alles erhalten, um die ersten 2 Glieder der in [ ] eingeschlossenen Ausdrücke berechnen zu können.

Die 3. Glieder, welche sehr klein sind, lassen sich deshalb genau genug so schreiben:

$$-\operatorname{tg}^2 B\cos\vartheta\sin\vartheta\cos\varphi = \operatorname{tg}^2 B\cos J\sin J\cos(g + \omega)$$

$$= \cos(g + \omega)[+0.00011 - 0.00010\cos(2g + 2\omega)]$$

$$= +0.00006\cos(g + \omega) - 0.00005\cos(3g + 3\omega).$$

Analog wird

$$-\operatorname{tg}^2 B\cos\vartheta\sin\vartheta\sin\varphi = +0.00016\sin(g + \omega) - 0.00005\sin(3g + 3\omega).$$

Die nächste Tafel enthält $\sin(v - \varphi)$ und $\cos(v - \varphi)$. Die Koëffizienten sind mit dem Sinus bezw. Cosinus des Argumentes zu multiplizieren.

Tabelle 13.

Argument	$\sin(v-\varphi)$	$\cos(v-\varphi)$
		$+0.99683$
g	$+0.10960$	-0.00033
$2g$	$+0.00373$	$+0.00300$
$3g$	$+0.00023$	$+0.00020$
$-g-g'$	$+0.00053$	-0.00018
$-g'$	$+0.00322$	
$g-g'$	$+0.00071$	$+0.00016$
$g-g'+2\omega-2\omega'$	-0.00014	
$2g-g'+2\omega-2\omega'$	-0.00011	
$-2g'+2\omega-2\omega'$	$+0.00103$	-0.00124
$g-2g'+2\omega-2\omega'$	$+0.02216$	-0.00057
$2g-2g'+2\omega-2\omega'$	$+0.01146$	$+0.00117$
$3g-2g'+2\omega-2\omega'$	$+0.00097$	$+0.00067$
$g-3g'+2\omega-2\omega'$	$+0.00100$	
$2g-3g'+2\omega-2\omega'$	$+0.00080$	
$2g-4g'+4\omega-4\omega'$	$+0.00015$	$+0.00011$
$3g-4g'+4\omega-4\omega'$	$+0.00019$	$+0.00013$
$g+2\omega$	-0.00019	$+0.00011$
$2g+2\omega$	-0.00200	
$3g+2\omega$	-0.00022	-0.00011
$+2g'+2\omega'$	-0.00028	
$g-g'+\omega-\omega'$	-0.00059	

Zu $\sin(v-\varphi)$ tritt noch das Glied $-0.9968\,\tau$,
zu $\cos(v-\varphi)$ $+0.110\,\tau\sin g$.

Berechnet man $\sin v$ auf die oben angegebene Weise und multipliziert mit $\sin\vartheta$, so ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\sin v \sin\vartheta = & +0.00001\sin(-g-\omega) \\
& +0.00146\sin\omega \\
& -0.02647\sin(g+\omega) \\
& -0.00146\sin(2g+\omega) \\
& -0.00009\sin(3g+\omega) \\
& -0.00003\sin(-g-2g'+\omega-2\omega') \\
& -0.00029\sin(-2g'+\omega-2\omega') \\
& -0.00013\sin(g-2g'+\omega-2\omega') \\
& -0.00027\sin(2g-2g'+3\omega-2\omega') \\
& -0.00017\sin(3g-2g'+3\omega-2\omega') \\
& +0.00003\sin(3g+3\omega) \\
& -0.9968\,\varrho\sin(g+\omega)+J\sigma\cos(g+\omega) \\
& -0.110\sin g[\varrho\cos(g+\omega)+J\sigma\sin(g+\omega)].
\end{aligned} \tag{14}
$$

Mit den auf den letzten Seiten gegebenen Größen lassen sich nun die gewünschten Ausdrücke der Gleichungen (5) berechnen. Die folgende Tafel enthält das Resultat.

Schreibt man zur Abkürzung

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= -\operatorname{tg} B \cos\vartheta \sin(v-\varphi) + \sin(v-\varphi)\sin v \sin\vartheta \\ &\qquad - \operatorname{tg}^2 B \cos\vartheta \sin\vartheta \cos\varphi \\ \mathrm{II} &= -\operatorname{tg} B \cos\vartheta \cos(v-\varphi) + \cos(v-\varphi)\sin v \sin\vartheta \\ &\qquad - \operatorname{tg}^2 B \cos\vartheta \sin\vartheta \sin\varphi, \end{aligned}$$

dann sind die Koeffizienten unter I mit dem Cosinus, die unter II mit dem Sinus des Arguments zu multiplizieren.

Tabelle 15.

Argument	I	II
$-g + \omega$	+ 0.00011	− 0.00015
$+ \omega$	− 0.00640	+ 0.00630
$g + \omega$	− 0.00053	− 0.11558
$2g + \omega$	+ 0.00636	− 0.00635
$3g + \omega$	+ 0.00056	− 0.00026
$-g - g' - \omega$	− 0.00016	
$g - g' + \omega$	+ 0.00016	
$-g - 2g' + \omega - 2\omega'$	− 0.00016	− 0.00008
$-2g' + \omega - 2\omega'$	− 0.00148	− 0.00114
$g - 2g' + \omega - 2\omega'$	− 0.00054	− 0.00308
$2g - 2g' + \omega - 2\omega'$	+ 0.00015	+ 0.00003
$g - 2g' + 3\omega - 2\omega'$	− 0.00007	+ 0.00006
$2g - 2g' + 3\omega - 2\omega'$	+ 0.00120	− 0.00121
$3g - 2g' + 3\omega - 2\omega'$	+ 0.00080	− 0.00080
$3g + 3\omega$	− 0.00015	− 0.00004

Es gehören außerdem noch zu I die Glieder

$$+0.116\,\tau \sin(g+\omega) - 0.110 \sin g\,[0.997\,\varrho \sin(g+\omega) - J\sigma \cos(g+\omega)]$$

und zu II die Glieder

$$\begin{aligned} &-0.9937\,\varrho \sin(g+\omega) + J\sigma \cos(g+\omega) \\ &\qquad -0.110 \sin g\,[\varrho \cos(g+\omega) + J\sigma \sin(g+\omega)]. \end{aligned}$$

Werden I und II noch mit $R^{-3}\cos^2 B$ multipliziert, so sind die rechten Seiten sämtlicher drei Gleichungen des Systems (5) ent-

wickelt. Die Gleichung (5c) ist aus Tabelle 12 zu ersehen, die beiden anderen lauten

$$(16a)\qquad \frac{dp}{dt} + \alpha q r = M'\alpha P$$

$$\begin{aligned}
P = &- 0.00041\cos(-g+\omega) - 0.00016\cos(-g-g'-\omega)\\
&- 0.00635\cos\omega \qquad\qquad + 0.00016\cos(g-g'+\omega)\\
&- 0.00054\cos(g+\omega) - 0.00018\cos(-g-2g'+\omega-2\omega')\\
&+ 0.00631\cos(2g+\omega) - 0.00146\cos(-2g'+\omega-2\omega')\\
&+ 0.00108\cos(3g+\omega) - 0.00074\cos(g-2g'+\omega-2\omega')\\
&- 0.00015\cos(3g+3\omega) + 0.00117\cos(2g-2g'+3\omega-2\omega')\\
&\qquad\qquad\qquad + 0.00099\cos(3g-2g'+3\omega-2\omega')\\
&+ 0.116\,\tau\sin(g+\omega)\\
&- 0.110\sin g[0.997\,\varrho\sin(g+\omega) - J\sigma\cos(g+\omega)].
\end{aligned}$$

$$(16b)\qquad \frac{dq}{dt} - \beta p r = M'\beta Q$$

$$\begin{aligned}
Q = &+ 0.00041\sin(-g+\omega) + 0.00002\sin(-g-2g'+\omega-2\omega')\\
&+ 0.00322\sin\omega \qquad\qquad - 0.00050\sin(-2g'+\omega-2\omega')\\
&+ 0.11541\sin(g+\omega) + 0.00172\sin(g-2g'+\omega-2\omega')\\
&+ 0.01575\sin(2g+\omega) + 0.00300\sin(2g-2g'+3\omega-2\omega')\\
&+ 0.00155\sin(3g+\omega) + 0.00253\sin(3g-2g'+3\omega-2\omega')\\
&+ 0.00027\sin(3g+3\omega)\\
&+ 0.994\,\varrho\sin(g+\omega) - J\sigma\cos(g+\omega)\\
&+ 0.110\sin g[\varrho\cos(g+\omega) + J\sigma\sin(g+\omega)]\\
&+ 0.164\cos g[0.994\,\varrho\sin(g+\omega) - J\sigma\cos(g+\omega)].
\end{aligned}$$

Es mag zunächst Befremden hervorrufen, daß in den vorstehenden Entwickelungen Glieder und Größen berücksichtigt worden sind, von denen man aus früheren Untersuchungen wußte, daß sie scheinbar ohne direkten Einfluß waren. Der Grund für diese ziemlich mühevollen und zeitraubenden Entwickelungen war der Wunsch, die Hauptglieder der physischen Libration korrekt zu erhalten. Denn man konnte bisher nicht sagen, innerhalb welcher Grenzen die Koeffizienten der Libration richtig waren. Als Beispiel führe ich die Gleichung (5c) an.

Die rechte Seite dieser Gleichung ist nach FRANZ

$$3\gamma m'^2[+22642''\!.7\sin g+4467''\!.0\sin(g-2g'+2\omega-2\omega')-656''\!.8\sin g'-\tau]$$

nach Tafel (12) aber sind dieselben Glieder

$$2.9634\,\gamma m'^2[+22341''\sin g+4452''\sin(g-2g'+2\omega-2\omega') \\ -654''\sin g'-0.987\,\tau].$$

Dieser Unterschied rührt aus mancherlei Ursachen her.

Bei FRANZ ist z. B. in der Reihe für die wahre Anomalie f $\sin nz=\sin g$ gesetzt etc., ferner sind alle Ungleichheiten des Radiusvektors unberücksichtigt geblieben, dazu kommen dann noch eine Anzahl von weniger bedeutenden Vernachlässigungen. Um sicher zu gehen, daß die Endresultate der Hauptglieder sich wirklich korrekt ergeben, war es nötig viele überflüssig erscheinende Glieder mitzunehmen. Denn bei der Multiplikation von Sinus- oder Cosinusreihen mit einander verändern sich oft die Koeffizienten eines Argumentes mehr, als man von vornherein vermuten kann. Als Beispiel hierfür diene das Glied aus Tafel (12) mit dem Argumente 2ω, das, wie hier vorauserwähnt sei, nicht ohne Einfluß ist.

Dasselbe tritt zunächst in der Reihe für $n\delta z$ mit dem Koeffizienten $+0.000029$ auf, in der wahren Länge L heißt der Koeffizient $+0.000006$, aber durch die Multiplikation mit $R^{-3}\cos^2 B$, d. h. also durch Berücksichtigung der Ungleichheiten des Radiusvektors wird das Glied

$$-0.000031\sin 2\omega$$

also gerade entgegengesetzt dem Ausgangswerte. Infolgedessen tritt denn auch in dem Resultat von τ ein Glied mit dem Argument 2ω auf, das bei FRANZ $+17''\!.6\sin 2\omega$ lautet, während es $-20''\!.2\sin 2\omega$ heißen muß.

In den beiden anderen Gleichungen sind sowohl von FRANZ, wie von WICHMANN die Ungleichheiten des Radiusvektors in ihrem Hauptgliede berücksichtigt worden, dagegen hat hier ersterer die in der Gleichung (16b) auftretenden Glieder

$$+0.994\,\varrho\sin(g'+\omega)-J\sigma\cos(g+\omega)$$

vernachlässigt, was nicht angängig ist, wenn man ein in jeder Beziehung richtiges Integral der Gleichungen erhalten will.

III. Kapitel.

Zunächst soll die Gleichung (5c) integriert werden. Dieselbe lautet, wenn man die letzte Kolumne von Tafel (12) mit $\Sigma H \sin h$ bezeichnet,

$$(17) \quad \begin{aligned} \frac{dr}{dt} + \gamma pq = M'\gamma \Sigma H \sin h - 0.988\, M'\gamma\tau \\ + M'\gamma[-0.162\,\tau\cos g + 0.103\, J\sigma\cos(2g+2\omega)]. \end{aligned}$$

Nun ist nach Gleichungen (1)

$$r = \frac{d\varphi}{dt} + \cos\vartheta \frac{d\psi}{dt} = \frac{dm}{dt} + \frac{d\tau}{dt} - \frac{d\psi}{dt} + \cos\vartheta \frac{d\psi}{dt}$$

oder kürzer

$$r = \frac{dm}{dt} + \frac{d\tau}{dt} - 2\sin^2\frac{1}{2}\vartheta\frac{d\psi}{dt}.$$

Folglich

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d^2\tau}{dt^2} - \frac{d}{dt}\left(2\sin^2\frac{1}{2}\vartheta\frac{d\psi}{dt}\right).$$

Die Gleichung (17) läßt sich daher in der integrabelen Form schreiben:

$$(18) \quad \begin{aligned} \frac{d^2\tau}{dt^2} + 0.988\, M'\gamma\tau = M'\gamma\Sigma H \sin h - \gamma pq \\ + M'\gamma[-0.162\,\tau\cos g + 0.103\, J\sigma\cos(2g+2\omega)] \\ + \frac{d}{dt}\left(2\sin^2\frac{1}{2}\vartheta\frac{d\psi}{dt}\right). \end{aligned}$$

Nun können rechts, wie wir später sehen werden, mit Recht in erster Annäherung sämtliche Glieder mit Ausnahme des ersten weggelassen werden. Wir haben infolgedessen nachstehende einfache Gleichung zu integrieren

$$(19) \quad \frac{d^2\tau}{dt^2} + 0.988\, M'\gamma\tau = M'\gamma\Sigma H \sin h.$$

Setzt man zunächst die rechte Seite Null, also

$$\frac{d^2\tau}{dt^2} + 0.988\, M'\gamma\tau = 0,$$

so wird dieser Gleichung bekanntlich durch das Integral

$$\tau = A\sin(a + \sqrt{0.988\, M'\gamma}\, t)$$

genügt, während jedes Glied der Reihe $M'\gamma\Sigma H \sin h$ bei der Integration einen Ausdruck von der Form

$$-\frac{M'\gamma H \sin h}{h'^2 - 0.988\, M'\gamma}$$

liefert, sodaß das vollständige Integral der Gleichung (19)

$$\tau = A \sin(a + \sqrt{0.988\, M'\gamma}\, t) - \Sigma \frac{M'\gamma H \sin h}{h'^2 - 0.988\, M'\gamma} \qquad (20)$$

lautet. Nun soll der Wert von γ aus später darzulegenden Gründen zu 0.0003128 angenommen werden. Ferner ist $M' = 2.9634\, m'^2$, daraus folgt $M'\gamma = 0.00004903$ und $0.988\, M'\gamma = 0.00004844$.

Man sieht aus der Formel (20), daß die Größe der Glieder abhängig ist von der Größe des Ausdruckes $h'^2 - 0.988\, M'\gamma$, daß der Wert eines Gliedes unendlich groß werden würde für $h'^2 = 0.988\, M'\gamma$.

Nun gibt es unter den Ungleichheiten der Länge des Mondes kein Argument von solcher Beschaffenheit, aber man sieht hieraus, daß es bei der Auswahl der genannten Ungleichheiten nicht allein auf deren Größe, sondern ebenso auf die tägliche Bewegung des Argumentes ankam. Ist z. B. h' sehr klein, so folgt daraus, daß das Glied $H \sin h$ fast genau mit dem Faktor $+1$ multipliert im Integral erscheint.

Es seien zunächst die täglichen Bewegungen der 5 Grundargumente gegeben; es ist

$$\frac{dg}{dt} = +\ 47034''.0, \quad \frac{dg'}{dt} = +\ 3548''.2, \quad \frac{d\omega}{dt} = +\ 591''.7,$$

$$\frac{d\omega'}{dt} = +\ 190''.8, \quad \frac{dn}{dt} = -\ 190''.6.$$

Für die Glieder des Integrals, deren Koeffizienten größer als 0''.5 sind, mag im Folgenden der Wert des Nenners $h'^2 - 0.988\, M'\gamma$ angeführt sein.

Tabelle 21.

Argument	$h'^2 - 0.988\, M'\gamma$
g	+ 0.051948
$2g$	+ 0.207938
$-g'$	+ 0.0002475
$-2g' + 2\omega - 2\omega'$	+ 0.0008829
$g - 2g' + 2\omega - 2\omega'$	+ 0.038962
$2g - 2g' + 2\omega - 2\omega'$	+ 0.181034
$+ 2g' + 2\omega'$	+ 0.001266
$+ 2\omega$	− 0.00001552
$- g' + \omega - \omega'$	+ 0.0001844
$- g' + 2\omega - 2\omega'$	+ 0.0001289
$n - 4^0 7$	− 0.00004759

Das Integral der Gleichung (19) wird demnach

(22)
$$
\begin{aligned}
\tau = A \sin(a + 1435''6\, t) \\
&- 21''1 \sin g \\
&- 0.6 \sin 2g \\
&+ 129.5 \sin g' \\
&- 13.7 \sin(-2g' + 2\omega - 2\omega') \\
&- 5.6 \sin(g - 2g' + 2\omega - 2\omega') \\
&- 0.8 \sin(2g - 2g' + 2\omega - 2\omega') \\
&+ 2.9 \sin(2g' + 2\omega') \\
&- 20.2 \sin 2\omega \\
&+ 5.1 \sin(-g' + \omega - \omega') \\
&- 0.8 \sin(-g' + 2\omega - 2\omega') \\
&+ 8.1 \sin(n - 4^\circ 7)
\end{aligned}
$$

Zu diesen Gliedern, welche in der Hauptsache durch die Ungleichheiten der Mondlänge hervorgerufen werden, müßten nun noch eine Anzahl anderer hinzutreten.

So z. B. führt in seinen Entwickelungen HANSEN noch die Glieder

$$
\begin{aligned}
&+ 15''3 \sin(-g - 16E + 18V + 30^\circ 2) \\
&+ 21''5 \sin(8V - 13E + 274^\circ 2).
\end{aligned}
$$

Diese würden, da die tägliche Bewegung der Argumente $+13''0$ bezw. $+14''9$ ist, mit dem Faktor $+1$ multipliziert in das Integral eingehen. Ich habe sie aber weggelassen, da sie doch etwas unsicher sind, und weil außer ihnen sicher noch andere Glieder vorhanden sind, welche man erst berücksichtigen kann, wenn die HANSENsche Mondtheorie Verbesserungen erfahren hat. So erfordert die NEWCOMBsche empirische Korrektion und die Abweichung, die trotz derselben Beobachtung und Theorie augenblicklich zeigt, höchst wahrscheinlich Störungsglieder, welche nicht ganz ohne Einfluß auf die physische Libration sein werden, da sie teilweise auf ein langsam veränderliches Argument hinweisen.

Die Integration der beiden anderen Differentialgleichungen gestaltet sich nicht so einfach. WICHMANN hat durch Einführung von zwei neuen Unbekannten das System 1. Ordnung in ein inte-

grabeles 2. Ordnung umgewandelt und ist dabei dem Verfahren von LAPLACE gefolgt. FRANZ dagegen hat dadurch, daß er, wie schon oben gesagt, auf den rechten Seiten der Gleichungen (16) die Unbekannten vernachlässigt hat, von vornherein ein integrabeles System 1. Ordnung erhalten, aus dem sich sehr einfach die Geschwindigkeitskomponenten p und q finden lassen. Es hat diese Methode auf den ersten Blick etwas sehr Bestechendes und sie mag von Nutzen sein, wenn man mehr Gewicht auf ein anschauliches Bild des Zustandekommens der Rotationsbewegung des Mondkörpers legt, aber sie gestattet nicht diese Bewegung rechnerisch scharf zu verfolgen. Es sei noch kurz erwähnt, daß FRANZ dann, nachdem er so p und q gefunden hat, aus den Gleichungen (1) ein zweites System 1. Ordnung ableitet, dessen Integration direkt Jw und w'', oder hier $J\sigma$ und ϱ finden läßt.

Ich habe das System (16) nach dieser Methode integriert, habe dann, da dies doch nur eine Näherung war, die gefundenen Lösungen für $J\sigma$ und ϱ in (16) eingesetzt und wieder integriert. Da zeigte sich nun, daß wohl die Glieder mit bekannten Koeffizienten annähernd richtig erhalten worden waren, dagegen lieferte die 2. Integration andere Funktionen der Integrationskonstanten, sodaß man sich sagen mußte, es ist eine Vernachlässigung gemacht worden, die nicht statthaft ist.

Da nun dadurch, daß man p und q durch ϱ und σ nach den Gleichungen (1) ausdrückt, keine Gleichungen entstehen, die sich ohne weiteres integrieren lassen, mußte man versuchen durch Einführung anderer Unbekannten das Ziel zu erreichen.

Will man nun nicht ohne weiteres die LAPLACEsche Substitution anwenden, so legt ein Blick auf die Gleichungen (16) es sehr nahe, als neue Unbekannte die beiden Funktionen einzuführen

$$\varrho \sin(g + \omega) - J\sigma \cos(g + \omega) \quad \text{und} \quad \varrho \cos(g + \omega) + J\sigma \sin(g + \omega).$$

Diese Substitution ist durchgeführt worden, sie ähnelt sehr der von LAPLACE, was auch nicht Wunder nehmen kann, da, wie wir später sehen werden, die LAPLACEschen Unbekannten und die oben definierten nahe verwandt sind; aber sie hat den Nachteil, daß die Formeln wenig elegant und durchsichtig werden, vor allem aber ist man gezwungen, sollen sich die Gleichungen integrieren lassen, wiederum nicht unbedeutende Vernachlässigungen einzuführen.

Alle diese Mängel besitzt nun nicht die von Laplace eingeführte Substitution, sie bietet aber den großen Vorzug in sehr einfacher Weise rechnerisch die Möglichkeit zu gewähren, die Unbekannten in aller nur gewünschten Schärfe zu berechnen und zahlenmäßig den Betrag der Vernachlässigungen festzustellen.

Franz sagt auf Seite 13 seines Werkes, daß durch das Integrieren zweier Systeme erster Ordnung hintereinander seine Methode einfacher werde, und man leicht Glieder höherer Ordnung berücksichtigen könne. Hiergegen wäre einzuwenden, daß die Integration des 1. Systems nur durch Vernachlässigungen möglich ist, und daß ebenso beim 2. System wieder Vernachlässigungen eingeführt werden müssen. Man hat also zwei nur näherungsweise richtige Operationen hintereinander auszuführen, wo die zweite sich auf der ersten aufbaut, während die Integration nach dem Vorgange von Laplace in einer einzigen Operation besteht, die mit großer Annäherung und unter nur geringen Vernachlässigungen sofort zu einem Resultate führt, wobei es sehr leicht ist, zahlenmäßig die begangenen Vernachlässigungen festzustellen und jede gewünschte Genauigkeit zu erreichen.

Nach diesen Bemerkungen, die ich glaubte vorausschicken zu müssen, um zu zeigen, daß die anderen Wege nicht mit der Leichtigkeit und Sicherheit zum Ziele führen, wie derjenige, den schon Laplace gelehrt hat, wollen wir nun an die nötigen Umformungen der Gleichungen (16) gehen.

Es ist nach System (1)

$$p = -\sin\varphi\sin\vartheta\frac{d\psi}{dt} - \cos\varphi\frac{d\vartheta}{dt}$$

$$q = -\cos\varphi\sin\vartheta\frac{d\psi}{dt} + \sin\varphi\frac{d\vartheta}{dt}$$

ferner

$$\psi = 180^0 + m + \tau - \varphi$$

also

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{dm}{dt} + \frac{d\tau}{dt} - \frac{d\varphi}{dt}$$

und

$$p = -\sin\varphi\sin\vartheta\, m' - \sin\varphi\sin\vartheta\frac{d\tau}{dt} + \sin\varphi\sin\vartheta\frac{d\varphi}{dt} - \cos\varphi\frac{d\vartheta}{dt}$$

$$q = -\cos\varphi\sin\vartheta\, m' - \cos\varphi\sin\vartheta\frac{d\tau}{dt} + \cos\varphi\sin\vartheta\frac{d\varphi}{dt} + \sin\varphi\frac{d\vartheta}{dt}.$$

Man sieht aus diesen Gleichungen für p und q, daß dieselben ziemlich einfache Funktionen der Größen $\sin\varphi\sin\vartheta$, $\cos\varphi\sin\vartheta$ und ihrer ersten Ableitungen sind. Setzt man nämlich

$$-\cos\varphi\frac{d\vartheta}{dt} = -\cos\varphi\cos\vartheta\frac{d\vartheta}{dt} - \cos\varphi(1-\cos\vartheta)\frac{d\vartheta}{dt}$$

$$+\sin\varphi\frac{d\vartheta}{dt} = +\sin\varphi\cos\vartheta\frac{d\vartheta}{dt} + \sin\varphi(1-\cos\vartheta)\frac{d\vartheta}{dt}$$

und hierin

$$1-\cos\vartheta = 2\sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta$$

ferner

$$\sin\varphi\sin\vartheta = x, \quad \cos\varphi\sin\vartheta = y$$

dann findet man

$$p = -xm' - x\frac{d\tau}{dt} - \frac{dy}{dt} - 2\cos\varphi\sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}$$

$$q = -ym' - y\frac{d\tau}{dt} + \frac{dx}{dt} + 2\sin\varphi\sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{dx}{dt}m' - \frac{dx}{dt}\frac{d\tau}{dt} - x\frac{d^2\tau}{dt^2} - \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d}{dt}\left(2\cos\varphi\sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}\right)$$

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{dy}{dt}m' - \frac{dy}{dt}\frac{d\tau}{dt} - y\frac{d^2\tau}{dt^2} + \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d}{dt}\left(2\sin\varphi\sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}\right).$$

Bildet man mit Hülfe dieser Werte von p, q, $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$ die linken Seiten der Gleichungen (16) und macht von der Beziehung

$$r = m' + \frac{d\tau}{dt} - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta\frac{d\psi}{dt}$$

Gebrauch, dann wird

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} + \alpha rq = &-\frac{dx}{dt}m'(1-\alpha) - \frac{d^2y}{dt^2} - \alpha m'^2 y \\ &-\frac{dx}{dt}\left(\frac{d\tau}{dt} - \alpha\left(\frac{d\tau}{dt} - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta\frac{d\psi}{dt}\right)\right) \\ &-x\frac{d^2\tau}{dt^2} \\ &-\alpha m' y\left(\frac{d\tau}{dt} - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta\frac{d\psi}{dt}\right) - \alpha y\frac{d\tau}{dt}r \\ &+2\alpha r\sin\varphi\sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta\frac{d\vartheta}{dt} \\ &-\frac{d}{dt}\left(2\cos\varphi\sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}\right)\end{aligned} \tag{23a}$$

$$\begin{aligned}\frac{dq}{dt} - \beta rp = &-\frac{dy}{dt}m'(1-\beta) + \frac{d^2x}{dt^2} + \beta m'^2 x \\ &-\frac{dy}{dt}\left(\frac{d\tau}{dt} - \beta\left(\frac{d\tau}{dt} - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta\frac{d\psi}{dt}\right)\right) \\ &-y\frac{d^2\tau}{dt^2} \\ &+\beta m' x\left(\frac{d\tau}{dt} - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta\frac{d\psi}{dt}\right) + \beta x\frac{d\tau}{dt}r \\ &+2\beta r\cos\varphi\sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta\frac{d\vartheta}{dt} \\ &+\frac{d}{dt}\left(2\sin\varphi\sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}\right).\end{aligned} \tag{23b}$$

Hierdurch haben die linken Seiten die nötige Umformung erfahren, und zwar ohne jede Vernachlässigung, sodaß nur noch die rechten Seiten einer kleinen Umgestaltung bedürfen. Die Gleichung (16a) kann bleiben, wie sie ist, da die auf der rechten Seite auftretenden Funktionen der Unbekannten in der 1. Näherung vernachlässigt werden können. In der Gleichung (16b) aber befindet sich die neue Unbekannte $x = \sin\varphi \sin\vartheta$ mit einer Konstanten multipliziert. Denn es ist

$$x = -\sin(g + \omega + \tau - \sigma)\sin(J + \varrho)$$
$$= -(J + \varrho)[\sin(g + \omega)\cos(\tau - \sigma) + \cos(g + \omega)\sin(\tau - \sigma)].$$

Setzt man hierin $\cos(\tau - \sigma) = 1$, und vernachlässigt das Produkt $\varrho(\tau - \sigma)$ als sehr klein im Verhältnis zu den anderen Gliedern, dann ist

$$x = -J\sin(g + \omega) - J\tau\cos(g + \omega)$$
$$- \varrho\sin(g + \omega) + J\sigma\cos(g + \omega).$$

Wir betrachten zunächst in der Gleichung (5b) den Ausdruck

$$-\operatorname{tg}B\cos\vartheta\cos(v - \varphi) + \cos(v - \varphi)\sin v\sin\vartheta - \operatorname{tg}^2 B\cos\vartheta\sin\vartheta\sin\varphi.$$

Das erste Glied enthält nur die Unbekannte τ, da man für das Produkt $\operatorname{tg}B\cos\vartheta$ mit hinreichender Genauigkeit $\operatorname{tg}B\cos J$ setzen kann. Das dritte Glied ist so klein, daß man darin alle Unbekannten vernachlässigen kann. Von Interesse ist also nur das zweite Glied.

Man kann schreiben, da

$$\sin v = \sin(v - \varphi + \varphi),$$

$$\cos(v - \varphi)\sin v\sin\vartheta = \cos(v - \varphi)\sin(v - \varphi)\cos\varphi\sin\vartheta$$
$$+ \cos^2(v - \varphi)\sin\varphi\sin\vartheta$$
$$= \tfrac{1}{2}\sin(2v - 2\varphi)y + \cos^2(v - \varphi)x.$$

Da nun in diesen Ausdruck y nur mit einem kleinen Faktor multipliziert eingeht, genügt es, für y seinen Wert

$$-J\cos(g + \omega) - \varrho\cos(g + \omega) - J\sigma\sin(g + \omega)$$

einzusetzen, da hierfür J genau genug bekannt ist. Da weiter oben schon alles gegeben ist, dessen man zur Berechnung der Formel benötigt, so soll hier nur das Resultat angesetzt werden. Es wird II in Tabelle (15) in der neuen Form

$$
\begin{aligned}
& - 0.00015 \sin(-g + \omega) \\
& + 0.00630 \sin \omega \\
& - 0.08917 \sin(g + \omega) \\
& - 0.00635 \sin(2g + \omega) \\
& - 0.00026 \sin(3g + \omega) \\
& - 0.00008 \sin(-g - 2g' + \omega - 2\omega') \\
& - 0.00114 \sin(- 2g' + \omega - 2\omega') \\
& - 0.00308 \sin(g - 2g' + \omega - 2\omega') \\
& + 0.00003 \sin(2g - 2g' + \omega - 2\omega') \\
& + 0.00006 \sin(g - 2g' + 3\omega - 2\omega') \\
& - 0.00121 \sin(2g - 2g' + 3\omega - 2\omega') \\
& - 0.00080 \sin(3g - 2g' + 3\omega - 2\omega') \\
& - 0.00004 \sin(3g + 3\omega) \\
& + 0.9937\, x \\
& + 0.0264\, \tau \cos(g + \omega) \\
& - 0.110 \ \sin g [\varrho \cos(g + \omega) + J\sigma \sin(g + \omega)]
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Da nach dem weiter oben gegebenen Werte für x

$$
\begin{aligned}
+ 0.9937\, x = & - 0.02641 \sin(g + \omega) - 0.0264\, \tau \cos(g + \omega) \\
& - 0.9937\, \varrho \sin(g + \omega) + 0.9937\, J\sigma \cos(g + \omega),
\end{aligned}
$$

so ist in der Tat (24) mit II in Tabelle 15 identisch.

Nun ist (24) noch mit $R^{-3} \cos^2 B$ zu multiplizieren und die Umformung (23) einzuführen. Nach diesen Operationen nehmen die zu integrierenden Gleichungen folgende Form an:

$$
\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dx}{dt} m'(1 - \alpha) + \alpha m'^2 y = M' \alpha S + U \tag{25}
$$

$$
\begin{aligned}
S = & + 0.00041 \cos(-g + \omega) + 0.00016 \cos(-g - g' - \omega) \\
& + 0.00635 \cos \omega \qquad\qquad\quad - 0.00016 \cos(g - g' + \omega) \\
& + 0.00054 \cos(g + \omega) + 0.00018 \cos(-g - 2g' + \omega - 2\omega') \\
& - 0.00631 \cos(2g + \omega) + 0.00146 \cos(- 2g' + \omega - 2\omega') \\
& - 0.00108 \cos(3g + \omega) + 0.00074 \cos(g - 2g' + \omega - 2\omega') \\
& + 0.00015 \cos(3g + 3\omega) - 0.00117 \cos(2g - 2g' + 3\omega - 2\omega') \\
& - 0.116\, \tau \sin(g + \omega) \qquad - 0.00099 \cos(3g - 2g' + 3\omega - 2\omega') \\
& + 0.110 \sin g [\varrho \sin(g + \omega) - J\sigma \cos(g + \omega)]
\end{aligned}
$$

$$U = -\frac{dx}{dt}\left(\frac{d\tau}{dt} - \alpha\left(\frac{d\tau}{dt} - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta\frac{d\psi}{dt}\right)\right) - x\frac{d^2\tau}{dt^2}$$

$$-\alpha m' y\left(\frac{d\tau}{dt} - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta\frac{d\psi}{dt}\right) - \alpha y\frac{d\tau}{dt}r$$

$$+ 2\alpha r\sin\varphi\sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}$$

$$-\frac{d}{dt}\left(2\cos\varphi\sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta\frac{d\psi}{dt}\right)$$

(26) $$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dy}{dt}m'(1-\beta) + \beta m'^2 x = M'\beta T + W$$

$$\begin{aligned}T = &+ 0.00041\sin(-g + \omega) + 0.00002\sin(-g - 2g' + \omega - 2\omega')\\ &+ 0.00322\sin\omega \qquad\qquad - 0.00050\sin(-2g' + \omega - 2\omega')\\ &+ 0.08900\sin(g + \omega) + 0.00172\sin(g - 2g' + \omega - 2\omega')\\ &+ 0.01575\sin(2g + \omega) + 0.00300\sin(2g - 2g' + 3\omega - 2\omega')\\ &+ 0.00155\sin(3g + \omega) + 0.00253\sin(3g - 2g' + 3\omega - 2\omega')\\ &+ 0.00027\sin(3g + 3\omega)\\ &- 0.9944\,x\\ &+ 0.110\sin g[\varrho\cos(g+\omega) + J\sigma\sin(g+\omega)]\\ &+ 0.164\cos g[\varrho\sin(g+\omega) - J\sigma\cos(g+\omega)]\end{aligned}$$

$$W = +\frac{dy}{dt}\left(\frac{d\tau}{dt} - \beta\left(\frac{d\tau}{dt} - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta\frac{d\psi}{dt}\right)\right) + y\frac{d^2\tau}{dt^2}$$

$$-\beta m' x\left(\frac{d\tau}{dt} - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta\frac{d\psi}{dt}\right) - \beta x\frac{d\tau}{dt}r$$

$$-2\beta r\cos\varphi\sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}$$

$$-\frac{d}{dt}\left(2\sin\varphi\sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}\right).$$

Nimmt man in (26) das Glied $-0.9944\,M'\beta x$ auf die linke Seite und bedenkt, daß man die Funktionen U und W auf der rechten Seite entwickeln kann in Reihen mit Sinus- und Cosinusgliedern, entsprechend den Reihen für S und T, dann lassen sich die beiden Gleichungen (25) und (26) in nachstehender Form schreiben:

(27) $$\begin{aligned}&\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dy}{dt}m'(1-\beta) + x(\beta m'^2 + 0.9944\,\beta M') = G\sin g,\\ &\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dx}{dt}m'(1-\alpha) + y\alpha m'^2 = F\cos g.\end{aligned}$$

Setzt man zunächst $G\sin g$ und $F\cos g$ gleich Null, dann wird den Gleichungen genügt durch die beiden Wertsysteme

$$\text{I:}\quad x = A_1 \cos \lambda t, \quad y = B_1 \sin \lambda t$$
$$\text{II:}\quad x = A_2 \sin \lambda t, \quad y = B_2 \cos \lambda t.$$

Bildet man mit diesen Werten die Gleichungen (27) ohne rechte Seiten, so entstehen folgende Bedingungsgleichungen für λ:

$$A_1 \lambda^2 + B_1 \lambda (1-\beta) m' - A_1 \beta m'^2 \varepsilon = 0$$
$$B_1 \lambda^2 + A_1 \lambda (1-\alpha) m' - B_1 \alpha m'^2 \quad = 0$$
$$A_2 \lambda^2 - B_2 \lambda (1-\beta) m' - A_2 \beta m'^2 \varepsilon = 0$$
$$B_2 \lambda^2 - A_2 \lambda (1-\alpha) m' - B_2 \alpha m'^2 \quad = 0$$

wo

$$m'^2 \varepsilon = m'^2 + 0.9944\, M' = m'^2 (1 + 2.9468).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} A_1 (\lambda^2 - \beta m'^2 \varepsilon) &= - B_1 \lambda (1-\beta) m' \\ B_1 (\lambda^2 - \alpha m'^2 \ ) &= - A_1 \lambda (1-\alpha) m' \\ A_2 (\lambda^2 - \beta m'^2 \varepsilon) &= + B_2 \lambda (1-\beta) m' \\ B_2 (\lambda^2 - \alpha m'^2 \ ) &= + A_2 \lambda (1-\alpha) m', \end{aligned} \tag{28}$$

woraus sich wieder ergibt:

$$(\lambda^2 - \alpha m'^2)(\lambda^2 - \beta m'^2 \varepsilon) = \lambda^2 m'^2 (1-\alpha)(1-\beta),$$

oder

$$\lambda^4 - \lambda^2 m'^2 (1 + (\varepsilon - 1)\beta + \alpha\beta) = - \alpha \beta \varepsilon m'^4.$$

Da λ reell sein muß, haben wir für die Wurzel λ^2 nur den Wert

$$\lambda^2 - \frac{m'^2}{2}(1 + (\varepsilon-1)\beta + \alpha\beta) = \frac{m'^2}{2}\sqrt{(1 + (\varepsilon-1)\beta + \alpha\beta)^2 - 4\alpha\beta\varepsilon},$$

oder

$$\lambda^2 = \frac{m'^2}{2}(1 + (\varepsilon-1)\beta + \alpha\beta) \pm \frac{m'^2}{2}[(1 + (\varepsilon-1)\beta + \alpha\beta) - 2\alpha\beta\varepsilon].$$

Hierbei sind, wie auch fernerhin, die Quadrate und höheren Potenzen von α und β vernachlässigt.

Somit erhält man die beiden Wurzeln

$$\lambda_1 = m'(1 + 1.473\,\beta)$$
$$\lambda_2 = m'\sqrt{\varepsilon\alpha\beta} = m'\sqrt{3.9468\,\alpha\beta}.$$

Aus den Gleichungen (28) folgt, daß

$$-\frac{B_1}{A_1} = \frac{\lambda^2 - \beta m'^2 \varepsilon}{\lambda(1-\beta) m'} = \frac{\lambda(1-\alpha) m'}{\lambda^2 - \alpha m'^2}$$
$$+\frac{B_2}{A_2} = \frac{\lambda^2 - \beta m'^2 \varepsilon}{\lambda(1-\beta) m'} = \frac{\lambda(1-\alpha) m'}{\lambda^2 - \alpha m'^2}$$

ist. Bezeichnet man $-B_1:A_1$ mit s_1, $B_2:A_2$ mit s_2, so ist

$$s_1 = s_2,\ B_1 = -s_1 A_1,\ B_2 = s_1 A_2.$$

Wir erhalten somit folgende Lösung der Gleichungen (27)

$$x = + \quad A_1 \cos\lambda t + \quad A_2 \sin\lambda t$$
$$y = - s_1 A_1 \sin\lambda t + s_1 A_2 \cos\lambda t.$$

Da nun für λ zwei Wurzelwerte vorhanden sind, die Integration des Systems 2. Ordnung aber 4 Integrationskonstanten liefert, so können wir über letztere so verfügen, daß wir setzen

$$x = + \quad A_1 \cos\lambda_1 t + \quad A_2 \sin\lambda_1 t + \quad A_3 \cos\lambda_2 t + \quad A_4 \sin\lambda_2 t$$
$$y = - s_1 A_1 \sin\lambda_1 t + s_1 A_2 \cos\lambda_1 t - s_3 A_3 \sin\lambda_2 t + s_3 A_4 \cos\lambda_2 t,$$

wo ganz analog

$$-B_3:A_3 = s_3,\ B_4:A_4 = s_4,\ s_3 = s_4.$$

s_1 wird mit λ_1, s_3 mit λ_2 berechnet.

Für die Koeffizienten s_1 und s_3 findet man die Werte

$$s_1 = +1$$
$$s_3 = -1.987\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}.$$

Wenn nun gesetzt wird

$$A_1 = B\sin b,\ A_2 = B\cos b,\ A_3 = C\sin c,\ A_4 = C\cos c,$$

dann wird

$$x = + \quad B\sin(b+\lambda_1 t) + \quad C\sin(c+\lambda_2 t)$$
$$y = + s_1 B\cos(b+\lambda_1 t) + s_3 C\cos(c+\lambda_2 t).$$

Die gesuchten Integrale sind also

$$(29)\quad \begin{aligned} x &= B\sin\big(b + m(1+1.473\beta)\big) + C\sin\big(c + 1.987\, m\sqrt{\alpha\beta}\big) \\ y &= B\cos\big(b + m(1+1.473\beta)\big) - 1.987\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\, C\cos\big(c + 1.987\, m\sqrt{\alpha\beta}\big). \end{aligned}$$

Diese Werte in (27) eingesetzt machen die linken Seiten innerhalb der gewünschten Genauigkeit, d. h. bis auf quadratische Glieder in α und β, gleich Null.

Um nun die vollständigen Integrale der Gleichungen zu erhalten, gehen wir davon aus, daß denselben auch genügt wird durch

$$x = X\sin g,\ y = Y\cos g.$$

Bildet man hiervon die Ableitungen

$$x' = Xg'\cos g,\ y' = -Yg'\sin g,\ x'' = -Xg'^2\sin g,\ y'' = -Yg'^2\cos g,$$

dann erhält man die Bedingungsgleichungen

$$-Xg'^2 + Yg'm'(1-\beta) + X\beta m'^2\varepsilon = G$$
$$-Yg'^2 + Xg'm'(1-\alpha) + Y\alpha m'^2 \quad = F,$$

oder

$$-X(g'^2 - \beta m'^2\varepsilon) + Yg'm'(1-\beta) = G$$
$$-Y(g'^2 - \alpha m'^2\ ) + Xg'm'(1-\alpha) = F.$$

und hieraus

$$X = \frac{-G(g'^2-\alpha m'^2) - Fg'm'(1-\beta)}{(g'^2-\beta m'^2\varepsilon)(g'^2-\alpha m'^2) - g'^2m'^2(1-\alpha)(1-\beta)}$$
$$Y = \frac{-F(g'^2-\beta m'^2\varepsilon) - Gg'm'(1-\alpha)}{(g'^2-\beta m'^2\varepsilon)(g'^2-\alpha m'^2) - g'^2m'^2(1-\alpha)(1-\beta)}. \qquad (30)$$

Den gemeinsamen Nenner, der mit N bezeichnet werden soll, kann man auch so schreiben:

$$N = g'^4 - g'^2m'^2(1 + (\varepsilon - 1)\beta + \alpha\beta) + \alpha\beta m'^4\varepsilon.$$

Ferner kann man kürzer schreiben

$$X = \frac{-G\xi' - F\xi}{N}, \quad Y = \frac{-F\eta' - G\eta}{N},$$

wo die Bedeutung von ξ', ξ, η', η aus (30) ohne weiteres klar ist. Die Formeln (29) und (30) gestatten uns also die vollständigen Integrale der Gleichungen (25) und (26) zu bilden.

Um nun aber x und y berechnen zu können, muß zunächst noch β und α bekannt sein. Es war

$$x = \sin\varphi \sin\vartheta = -\sin(g + \omega + \tau - \sigma)\sin(J + \varrho)$$
$$y = \cos\varphi \sin\vartheta = -\cos(g + \omega + \tau - \sigma)\sin(J + \varrho).$$

Setzt man, wie schon früher geschehen, $\cos\,(\tau - \sigma) = 1$, $\sin(J + \varrho) = J + \varrho$ und vernachlässigt das Produkt $\varrho\,(\tau - \sigma)$ als sehr klein im Verhältnis zu den anderen Gliedern, dann wird

$$x = -J\sin(g+\omega) - \varrho\sin(g+\omega) - J\tau\cos(g+\omega) + J\sigma\cos(g+\omega)$$
$$y = -J\cos(g+\omega) - \varrho\cos(g+\omega) + J\tau\sin(g+\omega) - J\sigma\sin(g+\omega),$$

woraus man dann weiter findet

$$J + \varrho = -x\sin(g+\omega) - y\cos(g+\omega)$$
$$J\sigma - J\tau = +x\cos(g+\omega) - y\sin(g+\omega).$$

Über die hier begangenen Vernachlässigungen findet sich am Schlusse des IV. Kapitels eine kurze Untersuchung. Die Integration von (25) und (26) liefert nun für das Argument $g + \omega$ Werte von X und Y, die wir mit $X_{g+\omega}$ und $Y_{g+\omega}$ bezeichnen wollen. Da nun J durch Beobachtungen bekannt ist, wie wir hier annehmen (für J ist der Wert nach SCHLÜTER-FRANZ angesetzt),

so muß $-x \sin(g+\omega) - y \cos(g+\omega)$ als konstantes Glied J liefern, d. h. es muß sein

(31) $$\tfrac{1}{2}(X_{g+\omega} + Y_{g+\omega}) = -J.$$

Diese Gleichung liefert eine Beziehung zwischen J und den noch unbekannten Größen α und β.

Wir hatten früher die Gleichung

$$\alpha - \beta + \gamma - \alpha\beta\gamma = 0$$

erhalten. Da nun α, β, γ, wie genügend bekannt, sehr kleine Größen sind, so kann man schreiben

$$\alpha - \beta + \gamma = 0.$$

Hat man nun zwischen α und β noch eine Beziehung, die die Beobachtung liefern muß, dann sind alle 3 Größen α, β, γ gegeben. Wir setzen nun, wie bisher gebräuchlich, $\alpha : \beta = f$ und nehmen für die weitere Rechnung den abgerundeten Wert $f = \frac{1}{2}$ an, der nach den Beobachtungen der Wirklichkeit sehr nahe kommen dürfte. Da somit $\alpha = \frac{1}{2}\beta$ ist, gibt uns die Gleichung (31) das Mittel an die Hand, β aus J zu berechnen. Für das Argument $g+\omega$ wird der Nenner

(32a) $$N = [5.356\,179] - [7.919\,531]\,\beta + [7.914\,859]\,f\beta^2,$$

der Zähler von X

(32b) $$-[6.871\,360]\,\beta - [4.652\,622]\,f\beta + [6.870\,514]\,f\beta^2,$$

der Zähler von Y

(32c) $$-[6.869\,619]\,\beta - [4.654\,364]\,f\beta + [6.879\,855]\,f\beta^2.$$

Für f wird nun sein angenommener Wert gesetzt, das Glied in β^2 mit einem genäherten β berechnet, für J sein Wert 0.026578 gesetzt, somit erhalten wir

$$\beta = [3.780\,850] : [6.984\,629].$$

Hier sowohl wie in (32) sind die Logarithmen an Stelle der natürlichen Zahlen gesetzt.

Wir haben also gefunden $\beta = 0.000\,6255$, $\alpha = 0.000\,3127$ und $\gamma = 0.000\,3128$.

Die Gleichung zwischen J und β wird später noch eine sehr unbedeutende Korrektion erhalten, sodaß dann definitiv aus $J = 0.026\,578$ folgt

$$\beta = 0.000\,6256,\quad \alpha = 0.000\,3128,\quad \gamma = 0.000\,3128.$$

Mit diesem Werte von γ ist die Differentialgleichung (19) integriert worden. Wir können nun auch (25) und (26) integrieren,

indem wir mit den so gefundenen α und β die Formeln (29) und (30) berechnen.

Es sind

$$X = \frac{-G\,(g'^2 - 0.000\,01654) - F g'\,[9.361\,402]}{g'^4 - g'^2\,[8.724\,148] + 0.000\,000\,0022}$$

$$Y = \frac{F\,(g'^2 - 0.000\,13059) - G g'\,[9.361\,588]}{g'^4 - g'^2\,[8.724\,148] + 0.000\,000\,0022}. \qquad (33)$$

In den folgenden Tabellen sind zunächst die integrierenden Faktoren $\xi' : N$, $\xi : N$, $\eta' : N$, $\eta : N$ gegeben, ferner die Werte $-G$ und $-F$, welche mit den Faktoren $M'\beta = 0.00009805$, $M'\alpha = 0.00004903$ gebildet worden sind, und schließlich die Koeffizienten X und Y.

Tabelle 34.

Argument	$\xi' : N$	$\xi : N$	$\eta' : N$	$\eta : N$
$-g + \omega$	− 435.0	+ 444.2	− 434.0	+ 444.3
$+ \omega$	+ 19.2	− 1520.1	+ 282.1	− 1520.6
$g + \omega$	+ 3043.5	+ 3030.3	+ 3036.9	+ 3031.2
$2g + \omega$	+ 6.3	+ 3.2	+ 6.3	+ 3.2
$3g + \omega$	+ 2.4	+ 0.8	+ 2.4	+ 0.8
$-g - g' - \omega$	+ 116.7	− 108.1	+ 116.5	− 108.2
$g - g' + \omega$	− 136.6	− 147.0	− 136.2	− 147.0
$-g - 2g' + \omega - 2\omega'$	+ 65.1	− 57.3	+ 65.0	− 57.3
$-2g' + \omega - 2\omega'$	− 19.0	+ 132.7	− 17.0	+ 132.8
$g - 2g' + \omega - 2\omega'$	− 66.2	− 78.2	− 66.0	− 78.2
$2g - 2g' + 3\omega - 2\omega'$	+ 7.7	+ 4.1	+ 7.7	+ 4.1
$3g - 2g' + 3\omega - 2\omega'$	+ 2.6	+ 0.9	+ 2.6	+ 0.9
$3g + 3\omega$	+ 2.1	+ 0.7	+ 2.1	+ 0.7

Tabelle 35.

Argument	$-G$	$-F$	X	Y
$-g + \omega$	− 0.000000040	− 0.000000020	+ 0.000008	− 0.000009
$+ \omega$	− 316	− 311	+ 466	+ 392
$g + \omega$	− 8726	− 26	− 26631	− 26525
$2g + \omega$	− 1544	+ 309	− 9	− 3
$3g + \omega$	− 152	+ 53		
$-g - g' - \omega$		− 8	+ 1	− 1
$g - g' + \omega$		+ 8	− 1	− 1
$-g - 2g' + \omega - 2\omega'$	− 2	− 9		
$-2g' + \omega - 2\omega'$	+ 49	− 72	− 10	+ 8
$g - 2g' + \omega - 2\omega'$	− 168	− 36	+ 14	+ 16
$2g - 2g' + 3\omega - 2\omega'$	− 294	+ 57	− 2	− 1
$3g - 2g' + 3\omega - 2\omega'$	− 248	+ 48		
$3g + 3\omega$	− 26	− 7		

Wir haben somit, wenn man in den Gleichungen (25) und (26) rechts von den Funktionen der Größen ϱ, σ, τ absieht, in erster Annäherung die Lösungen erhalten:

$$
\begin{aligned}
x = &+ B \sin\left(b + m(1 + 1.473\beta)\right) + C \sin\left(c + 1.987\, m \sqrt{\alpha\beta}\right) \\
&+ 0.000008 \sin(-g + \omega) \\
&+ 0.000466 \sin \omega \\
&- 0.026631 \sin(g + \omega) \\
&- 0.000009 \sin(2g + \omega) \\
&- 0.000010 \sin(-2g' + \omega - 2\omega') \\
&+ 0.000014 \sin(g - 2g' + \omega - 2\omega').
\end{aligned} \tag{36 a}
$$

$$
\begin{aligned}
y = &+ B \cos\left(b + m(1 + 1.473\beta)\right) - 1.987 \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\, C \cos\left(c + 1.987\, m \sqrt{\alpha\beta}\right) \\
&- 0.000009 \cos(-g + \omega) \\
&+ 0.000392 \cos \omega \\
&- 0.026525 \cos(g + \omega) \\
&- 0.000003 \cos(2g + \omega) \\
&+ 0.000008 \cos(-2g' + \omega - 2\omega') \\
&+ 0.000016 \cos(g - 2g' + \omega - 2\omega').
\end{aligned} \tag{36 b}
$$

Da nun, wie früher bemerkt,

$$
\begin{aligned}
J + \varrho &= -x \sin(g + \omega) - y \cos(g + \omega) \\
J\sigma - J\tau &= +x \cos(g + \omega) - y \sin(g + \omega),
\end{aligned}
$$

so erhalten wir für die beiden Größen ϱ und $J\sigma$ folgende Ausdrücke

$$
\begin{aligned}
\varrho = &- B \cos(b + m(1 + 1.473\beta) - g - \omega) \\
&+ C\left(\tfrac{1}{2} + 0.99 \sqrt{\tfrac{\beta}{\alpha}}\right) \cos(c + 1.987\, m \sqrt{\alpha\beta} + g + \omega) \\
&- C\left(\tfrac{1}{2} - 0.99 \sqrt{\tfrac{\beta}{\alpha}}\right) \cos(c + 1.987\, m \sqrt{\alpha\beta} - g - \omega) \\
&+ 0.000008 \cos 2\omega \\
&- 0.000424 \cos g \\
&+ 0.000037 \cos(g + 2\omega) \\
&- 0.000053 \cos(2g + 2\omega) \\
&- 0.000003 \cos(3g + 2\omega) \\
&- 0.000009 \cos(g - 2g' + 2\omega - 2\omega') \\
&- 0.000015 \cos(2g' + 2\omega').
\end{aligned} \tag{37 a}
$$

$$J\sigma = J\tau + B\sin(b + m(1 + 1.473\,\beta) - g - \omega)$$
$$+ C\left(\tfrac{1}{2} + 0.99\sqrt{\tfrac{\beta}{\alpha}}\right)\sin(c + 1.987\,m\sqrt{\alpha\beta} + g + \omega)$$
$$+ C\left(\tfrac{1}{2} - 0.99\sqrt{\tfrac{\beta}{\alpha}}\right)\sin(c + 1.987\,m\sqrt{\alpha\beta} - g - \omega)$$
$$+ 0.000008\sin 2\omega$$
$$- 0.000434\sin g \qquad (37\,\mathrm{b})$$
$$+ 0.000037\sin(g + 2\omega)$$
$$- 0.000053\sin(2g + 2\omega)$$
$$- 0.000003\sin(3g + 2\omega)$$
$$- 0.000009\sin(g - 2g' + 2\omega - 2\omega')$$
$$- 0.000015\sin(2g' + 2\omega').$$

In wieweit nun die Formeln (22) und (37), die unter gewissen Vernachlässigungen erhalten worden sind, die Integrale der Differentialgleichungen des vorliegenden Problems darstellen, soll im nächsten Abschnitt rechnerisch untersucht werden.

IV. Kapitel.

Zunächst soll wieder die Gleichung (18) behandelt werden; sie lautete

$$\frac{d^2\tau}{dt^2} + 0.988\,M'\gamma\,\tau = M'\gamma\,\Sigma H\sin h - \gamma p q$$
$$+ M'\gamma[-0.162\,\tau\cos g + 0.103\,J\sigma\cos(2g + 2\omega)]$$
$$+ \frac{d}{dt}\left(2\sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta\,\frac{d\psi}{dt}\right).$$

Bisher war nur das 1. Glied der rechten Seite berücksichtigt worden; die anderen sind die einflußreichsten von den Gliedern, welche Funktionen der Unbekannten sind. Können wir nachweisen, daß ihr Einfluß sehr gering oder verschwindend ist, so ist es derjenige der viel kleineren Glieder um so mehr. Die Frage, welche Terme einflußreich sind, läßt sich für die vorliegende Gleichung aus der Formel (20), für die anderen Gleichungen aus (33) entscheiden.

Bei allen folgenden Entwickelungen der bisher vernachlässigten Glieder sollen der Kürze halber alle Koeffizienten in Einheiten der 6. Dezimale gegeben werden. In den Ausdrücken, welche die

Integrationskonstanten enthalten, wird es genügen die Faktoren bis zur 6. Dezimale zu geben, da nach den bisherigen Erfahrungen die Größen A, B, C, wenn sie überhaupt merkbar sind, sicher nicht größer als $200'' = 0.001$ sind. Die Koeffizienten sind also im folgenden alle auf 9 Dezimalen gegeben, eine Genauigkeit, welche derjenigen der Entwickelungen (12) und (16) entspricht. Zu ihrer Berechnung wurde $f = \frac{1}{2}$ angenommen.

Es ist nun $-0.162\,M'\gamma\tau\cos g = -0.0000079\,\tau\cos g$. Setzt man hier für τ seinen Wert, der für diesen Zweck genau genug

$$\tau = A\sin(a + 0.00696\,t) + 0.00063\sin g'$$

geschrieben werden kann, dann wird

$$\begin{aligned} -0.162\,M'\gamma\tau\cos g\,10^6 = &-4A\sin(a + 0.00696\,t + g) \\ &-4A\sin(a + 0.00696\,t - g) \\ &+0.002\sin(-g - g') \\ &+0.002\sin(g - g'). \end{aligned}$$

Ferner ist

$$+0.103\,M'\gamma J\sigma\cos(2g + 2\omega) = +0.0000051\,J\sigma\cos(2g + 2\omega).$$

Setzt man hier für $J\sigma$ die Hauptglieder ein nach (37), so erhält man

$$\begin{aligned} &+0.103\,M'\gamma J\sigma\cos(2g + 2\omega)\,10^6 = \\ &+2B\sin(b + m_1 + g + \omega) + 2B\sin(b + m_1 - 3g - 3\omega) \\ &+4C\sin(c + m_2 + 3g + 3\omega) + 4C\sin(c + m_2 - g - \omega) \\ &-2C\sin(c + m_2 + g + \omega) - 2C\sin(c + m_2 - 3g - 3\omega) \\ &-0.001\sin(3g + 3\omega) \qquad\qquad +0.001\sin(g + 2\omega). \end{aligned}$$

Hier ist

$$m_1 = m(1 + 1.473\,\beta) \text{ und } m_2 = 1.987\,m\sqrt{\alpha\beta}.$$

In dem letzten Glied kann man $\vartheta = J$ setzen, demnach ist

$$\frac{d}{dt}\left(2\sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta\,\frac{d\psi}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}J^2\left(n' + \frac{d\sigma}{dt}\right)\right) = \tfrac{1}{2}J\,\frac{d^2(J\sigma)}{dt^2}.$$

Bildet man also die 2. Ableitung von $J\sigma$ nach der Zeit und multipliziert mit $\frac{1}{2}J$, so erhält man

$$\begin{aligned} 10^6\,\frac{d}{dt}\left(2\sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta\,\frac{d\psi}{dt}\right) = &-1360\,C\sin(c + m_2 + g + \omega) \\ &+650\,C\sin(c + m_2 - g - \omega) \\ &+0.300\sin g. \end{aligned}$$

Das Produkt $\gamma p q$ ist schließlich ganz verschwindend gegenüber den im Vorstehenden entwickelten Gliedern, da p und q immer sehr klein sind, wie man sich leicht aus den Gleichungen (1) überschlagsweise berechnen kann. Zu Gleichung (18) treten demnach folgende Glieder, welche noch zu integrieren sind:

$$\left[-0.162\,M'\gamma\tau\cos g + 0.103\,M'\gamma J\sigma\cos(2g+2\omega) + \frac{d}{dt}\left(2\sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta\frac{d\psi}{dt}\right)\right]10^6$$

$$\begin{aligned}
= &- 4A\sin(a+0.00696t+g) - 4A\sin(a+0.00696t-g)\\
&+ 2B\sin(b+m_1+g+\omega) + 2B\sin(b+m_1-3g-3\omega)\\
&- 1360\,C\sin(c+m_2+g+\omega) + 650\,C\sin(c+m_2-g-\omega)\\
&+ 4C\sin(c+m_2+3g+3\omega) - 2C\sin(c+m_2-3g-3\omega)\\
&+ 0.300\sin g + 0.002\sin(-g-g')\\
&+ 0.001\sin(g+2\omega) + 0.002\sin(g-g')\\
&- 0.001\sin(3g+2\omega).
\end{aligned} \qquad (38)$$

Die nächste Tabelle ist als eine Ergänzung zu (21) zu betrachten für die hier in Frage kommenden Argumente.

Argument	$h'^2 - 0.988\,M'\gamma$
$a + 0.006960\,t + g$	+ 0.05516
$a + 0.006960\,t - g$	+ 0.04883
$b + m_1 + g + \omega$	+ 0.21254
$b + m_1 - 3g - 3\omega$	+ 0.21386
$c + m_2 + g + \omega$	+ 0.05335
$c + m_2 - g - \omega$	+ 0.05317
$c + m_2 + 3g + 3\omega$	+ 0.48004
$c + m_2 - 3g - 3\omega$	+ 0.47948
g	+ 0.05195
$-g - g'$	+ 0.06009
$g - g'$	+ 0.04440
$g + 2\omega$	+ 0.05460
$3g + 2\omega$	+ 0.47580

Die Integration von (38) liefert nur folgende Glieder, die merkbar werden könnten:

$$\begin{aligned}
&+ 0.025\,C\sin(c + 1.987\,m\sqrt{\alpha\beta} + g + \omega)\\
&- 0.012\,C\sin(c + 1.987\,m\sqrt{\alpha\beta} - g - \omega)\\
&- 0.000006\sin g.
\end{aligned} \qquad (39)$$

Jedenfalls könnten diese Größen ohne Schaden vernachlässigt werden, denn selbst wenn $C = 200''$ wäre, würde das 1. Glied im Maximum $5''$ werden, also von der Erde aus gesehen erst $0''.02$.

Somit wäre dargetan, daß die Vernachlässigung der kleinen Glieder in Gleichung (18) völlig erlaubt ist.

In den vorläufig vernachlässigten Gliedern U und W der Gleichungen (25) und (26) lassen sich wesentliche Vereinfachungen einführen. Verfährt man hier ebenso, wie weiter oben, beschränkt sich zunächst auf die Hauptglieder und zeigt, daß dieselben ohne Einfluß sind, so bleiben in (25) nur übrig

$$(40) \qquad -\frac{dx}{dt}\frac{d\tau}{dt} - x\frac{d^2\tau}{dt^2} - \frac{d}{dt}\left(2\cos\varphi\sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta\frac{d\theta}{dt}\right),$$

denn die anderen mit α multiplizierten Ausdrücke sind weit unterhalb der oben gesteckten Genauigkeitsgrenze. Da r in der Hauptsache gleich m' ist, kann man schreiben

$$-\alpha m' y\frac{d\tau}{dt} - \alpha y\frac{d\tau}{dt}r = -2\alpha m' y\frac{d\tau}{dt},$$

und da das Hauptglied von y ist $-J\cos(g+\omega)$, so erhält man für diese Glieder den Wert

$$+0.00000382\cos(g+\omega)\frac{d\tau}{dt}.$$

Ferner ist

$$+2\alpha r\sin\varphi\sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta\frac{d\theta}{dt} = -2\alpha m'\sin(g+\omega)\tfrac{1}{4}J^2\frac{d\varrho}{dt}$$
$$= -0.000000025\sin(g+\omega)\frac{d\varrho}{dt}.$$

Man sieht also, daß diese mit α multiplizierten Glieder unmerklich sind.

Den Ausdruck (40) kann man nun auch, da

$$-2\cos\varphi\sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta\frac{d\theta}{dt} = \tfrac{1}{2}J^2\cos(g+\omega)\frac{d\varrho}{dt},$$

so schreiben

$$(41) \qquad -\frac{d}{dt}\left(r\frac{d\tau}{dt} - \tfrac{1}{2}J^2\cos(g+\omega)\frac{d\varrho}{dt}\right).$$

Analog sind in der Gleichung (26) die entsprechenden Glieder zu vernachlässigen, was hier nicht ausführlich dargetan werden soll, und man erhält für diese Gleichung die Zusatzglieder

$$(42) \qquad \frac{d}{dt}\left(y\frac{d\tau}{dt} + \tfrac{1}{2}J^2\sin(g+\omega)\frac{d\varrho}{dt}\right).$$

Man wird also erst in (41) und (42) den Klammerinhalt entwickeln und dann differentiieren.

Nun ist

$$x = -0.02663\sin(g+\omega) + 0.00047\sin\omega$$
$$+ B\sin\left(b + m(1+1.473\beta)\right) + C\sin\left(c + 1.987\, m\sqrt{\alpha\beta}\right)$$
$$y = -0.02652\cos(g+\omega) + 0.00039\cos\omega$$
$$+ B\cos\left(b + m(1+1.473\beta)\right) - 2.811\, C\cos\left(c + 1.987\, m\sqrt{\alpha\beta}\right)$$
$$\varrho = -B\cos\left(b + m(1+1.473\beta) - g - \omega\right)$$
$$+ 0.904\, C\cos\left(c + 1.987\, m\sqrt{\alpha\beta} - g - \omega\right)$$
$$+ 1.904\, C\cos\left(c + 1.987\, m\sqrt{\alpha\beta} + g + \omega\right)$$
$$- 0.00042\cos g - 0.00005\cos(2g+2\omega)$$
$$\tau = A\sin(a + \sqrt{988\, M'\gamma}\, t) - 0.00010\sin g + 0.00063\sin g' - 0.00010\sin 2\omega.$$

Bildet man hieraus nun zunächst $\frac{d\tau}{dt}$ und $\frac{d\varrho}{dt}$, und berechnet damit (41) und (42), so wird, wenn man abkürzend

$$m_1 = m(1+1.473\beta),\quad m_2 = 1.987\, m\sqrt{\alpha\beta},\quad u = \sqrt{0.988\, M'\gamma}\, t$$

setzt,

$$\begin{aligned}
10^6(41) = &+ 22A\cos(a+u+g+\omega) + 21A\cos(a+u-g-\omega)\\
&+ 5B\cos(b+m_1+g)\\
&+ 3C\cos(c+m_2+g) - 3C\cos(c+m_2-g)\\
&- 36C\cos(c+m_2+2g+2\omega) - 17C\cos(c+m_2-2g-2\omega)\\
&- 0.003\cos(-g+\omega) + 0.031\cos(g-g'+\omega) \qquad (43)\\
&- 0.001\cos\omega + 0.036\cos(-g-g'-\omega)\\
&+ 0.002\cos(g+\omega) - 0.002\cos(g+3\omega)\\
&- 0.132\cos(2g+\omega) + 0.003\cos(3g+3\omega)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
10^6(42) = &+ 22A\sin(a+u+g+\omega) - 21A\sin(a+u-g-\omega)\\
&+ 5B\sin(b+m_1+g)\\
&- 7C\sin(c+m_2+g) + 7C\sin(c+m_2-g)\\
&- 36C\sin(c+m_2+2g+2\omega) + 17C\sin(c+m_2-2g-2\omega)\\
&+ 0.001\sin(-g+\omega) + 0.031\sin(g-g'+\omega) \qquad (44)\\
&- 0.001\sin\omega - 0.035\sin(-g-g'-\omega)\\
&- 0.000\sin(g+\omega) - 0.002\sin(g+3\omega)\\
&- 0.131\sin(2g+\omega) + 0.003\sin(3g+3\omega).
\end{aligned}$$

Nunmehr sind noch in (25) und (26) die in S und T enthaltenen, bisher vernachlässigten Glieder zu entwickeln.

Setzt man

$$\varrho \sin(g+\omega) - J\sigma\cos(g+\omega) = -x - J\sin(g+\omega) = x_0$$

$$\varrho \cos(g+\omega) + J\sigma\sin(g+\omega) = -y - J\cos(g+\omega) = y_0,$$

dann ist

$$\begin{aligned} x_0 = &- 0.00047 \sin\omega + 0.00005 \sin(g+\omega) \\ &- B\sin(b+m_1) - C\sin(c+m_2) \\ y_0 = &- 0.00039 \cos\omega - 0.00005 \cos(g+\omega) \\ &- B\cos(b+m_1) + 2.811\, C\cos(c+m_2). \end{aligned}$$

Die noch zu entwickelnden Größen heißen dann

(45) $$M'\alpha\,(-0.116\,\tau \sin(g+\omega) + 0.110 x_0 \sin g)$$

(46) $$M'\beta\,(+0.110 y_0 \sin g + 0.164 x_0 \cos g).$$

Es ist alles gegeben, um (45) und (46) berechnen zu können; man erhält dafür folgende Ausdrücke

(47) $$\begin{aligned} 10^6(45) = &+ 3A\cos(a+u+g+\omega) - 3A\cos(a+u-g-\omega) \\ &+ 3B\cos(b+m_1+g) \quad - 3B\cos(b+m_1-g) \\ &+ 3C\cos(c+m_2+g) \quad - 3C\cos(c+m_2-g) \\ &- 0.001\cos(-g+\omega) + 0.002\cos(-g-g'-\omega) \\ &+ 0.001\cos(g+\omega) - 0.002\cos(g-g'+\omega) \end{aligned}$$

(48) $$\begin{aligned} 10^6(46) = &- 13\,B\sin(b+m_1+g) - 3\,B\sin(b+m_1-g) \\ &+ 7\,C\sin(c+m_2+g) - 23\,C\sin(c+m_2-g) \\ &- 0.002\sin(-g+\omega) + 0.001\sin(-g-g'-\omega) \\ &- 0.006\sin(g+\omega) + 0.001\sin(g-g'+\omega). \end{aligned}$$

Die Summen (43) + (47) und (44) + (48) stellen also die Glieder von (25) bezw. (26) dar, welche noch zu integrieren sind.

Die folgende Tafel ist eine Ergänzung zu (34); sie enthält für alle neu hinzugekommenen Argumente die integrierenden Faktoren.

Tabelle 49.

Argument	$\xi' : N$	$\xi : N$	$\eta' : N$	$\eta : N$
$a + u + g + \omega$	+ 278.7	+ 269.4	+ 278.1	+ 269.5
$a + u - g - \omega$	− 352.7	+ 362.1	− 351.9	+ 362.2
$b + m_1 + g$	+ 6.4	+ 3.2	+ 6.4	+ 3.2
$b + m_1 - g$	+ 48.5	− 2028.5	+ 516.2	− 2029.1
$c + m_2 + g$	− 1115.0	− 1123.2	− 1112.6	− 1123.6
$c + m_2 - g$	− 924.9	+ 933.3	− 922.9	+ 933.6
$c + m_2 + 2g + 2\omega$	+ 6.2	+ 3.1	+ 6.2	+ 3.1
$c + m_2 - 2g - 2\omega$	+ 6.2	− 3.1	+ 6.2	− 3.1
$g + 3\omega$	+ 332.1	+ 322.6	+ 331.4	+ 322.7

Führt man nun die Integration durch, so erhält man die kleinen Zusatzglieder, welche in der nächsten Tabelle zusammengestellt sind. Man sieht, daß sie alle sehr klein und völlig zu vernachlässigen sind; die größten Koeffizienten sind noch nicht einmal 2″. Die Werte für x sind mit dem Sinus, die für y mit dem Cosinus des Argumentes zu multiplizieren.

Tabelle 50.

Argument	x	y
$a + u + g + \omega$	− 0.013 A	− 0.013 A
$a + u - g - \omega$	− 0.014 A	+ 0.014 A
$b + m_1 - g$	− 0.006 B	− 0.005 B
$c + m_2 + g$	+ 0.007 C	+ 0.007 C
$c + m_2 - g$	− 0.009 C	+ 0.009 C
$- g + \omega$	+ 0.000001	− 0.000001
ω	− 1	− 1
$g + \omega$	+ 9	+ 9
$2g + \omega$	+ 1	+ 1
$- g - g' - \omega$	+ 8	− 8
$g - g' + \omega$	+ 9	+ 9
$g + 3\omega$	+ 1	+ 1

Die beiden kleinen Zusatzglieder $+ 0.000009 \, {\sin \atop \cos} (g + \omega)$ würden zufolge der Gleichung

$$J + \varrho = - x \sin (g + \omega) - y \cos (g + \omega)$$

ein konstantes Glied − 0.000009 liefern. Es muß also, will man ganz streng verfahren, α und β so bestimmt werden, daß ein konstantes Glied nicht auftritt, d. h. in aller Strenge müßte die Gleichung (31) heißen

$$\tfrac{1}{2}(X_{g+\omega} + Y_{g+\omega}) = -J - 0.000009.$$

Auf diese Weise sind denn auch die Werte von α, β, γ berechnet worden, die kurz vor den Formeln (33) angegeben sind. Auch bei den Werten x und y in (36) ist diese Korrektion schon in Rechnung gezogen worden, sodaß zu diesen Entwickelungen, wenn man von den in A, B, C multiplizierten Gliedern absieht, nur noch hinzutreten die Größen

$$\begin{array}{ll} x & y \\ +0.000009 \sin(-g - g' - \omega) & -0.000009 \cos(-g - g' - \omega) \\ +0.000008 \sin(\ \ g - g' + \omega) & +0.000008 \cos(\ \ g - g' + \omega). \end{array}$$

Für ϱ gibt das keinerlei Korrektionen, für $J\sigma$ aber resultiert das Glied $-0.000017 \sin g'$. In dem Ausdruck für $J\sigma$ (System (37)) findet sich aber noch ein Term $J\tau$. Setzt man hierin für τ seinen Wert, dann ergeben sich hieraus noch die Glieder

$$+0.027\,A \sin(a + 0.006960\,t) + 0.000017 \sin g'.$$

Sieht man hier wieder von dem mit A multiplizierten Gliede ab, so kommt man zu dem Resultate, daß die beiden soeben gefundenen Glieder mit dem Argumente g' sich aufheben, daß also in dem Ausdrucke für $J\sigma$ sich nur insofern etwas ändert, als man das Glied $J\tau$ streichen kann.

Fassen wir noch einmal die Resultate zusammen, so haben wir innerhalb der Grenzen der gesteckten Genauigkeit für die 3 Störungen der CASSINIschen Gesetze die folgenden Ausdrücke gefunden, zu denen die Gleichungen (39) und (50) noch, wenn es nötig sein sollte, die kleinen Zusatzglieder liefern, welche von den 3 Integrationskonstanten A, B, C abhängig sind. Es sind im folgenden nur die Glieder aufgeführt, deren Koeffizient größer als 1″ ist.

$$\begin{array}{lll} \tau = & A \sin\left(a + 0.3935\,t\sqrt{\gamma}\right) & \\ & -\ 22''.3 \sin g & +\ 2''.9 \sin(\ 2g' + 2\omega') \\ (51\,\mathrm{a}) & +\ 129.5 \sin g' & -20.2 \sin\ 2\omega \\ & -\ 13.7 \sin(\ -2g' + 2\omega - 2\omega') & +\ 5.1 \sin(-g' + \omega - \omega') \\ & -\ 5.6 \sin(g - 2g' + 2\omega + 2\omega') & +\ 8.1 \sin(n - 4^\circ.7) \end{array}$$

$$\varrho = -B\cos\left(b + m(1 + 1.473\beta) - g - \omega\right)$$
$$+ C\left(\tfrac{1}{2} + 0.993\sqrt{\tfrac{\beta}{\alpha}}\right)\cos\left(c + 1.987\, m\sqrt{\alpha\beta} + g + \omega\right)$$
$$- C\left(\tfrac{1}{2} - 0.993\sqrt{\tfrac{\beta}{\alpha}}\right)\cos\left(c + 1.987\, m\sqrt{\alpha\beta} - g - \omega\right) \qquad (51\text{b})$$
$$+ 1''.6\cos 2\omega \qquad - 11''.0\cos(2g + 2\omega)$$
$$- 87.4\cos g \qquad - 1.9\cos(g - 2g' + 2\omega - 2\omega')$$
$$+ 7.6\cos(g + 2\omega) - 3.1\cos(2g' + 2\omega')$$

$$J\sigma = +B\sin\left(b + m(1 + 1.473\beta) - g - \omega\right)$$
$$+ C\left(\tfrac{1}{2} + 0.993\sqrt{\tfrac{\beta}{\alpha}}\right)\sin\left(c + 1.987\, m\sqrt{\alpha\beta} + g + \omega\right)$$
$$+ C\left(\tfrac{1}{2} - 0.993\sqrt{\tfrac{\beta}{\alpha}}\right)\sin\left(c + 1.987\, m\sqrt{\alpha\beta} - g - \omega\right) \qquad (51\text{c})$$
$$+ 1''.6\sin 2\omega \qquad - 11''.0\sin(2g + 2\omega)$$
$$- 89.5\sin g \qquad - 1.9\sin(g - 2g' + 2\omega - 2\omega')$$
$$+ 7.6\sin(g + 2\omega) - 3.1\sin(2g' + 2\omega').$$

Die vorstehenden Werte von ϱ, $J\sigma$, τ sind mit Hilfe der Annahme gefunden worden, daß $J = 1^\circ 31' 22''.1$ ist. Diesen Wert hat FRANZ aus den SCHLÜTERschen Beobachtungen abgeleitet. Ferner wurde hier $f = \frac{1}{2}$ angenommen. FRANZ gibt dafür 0.4878 mit dem wahrscheinlichen Fehler $\pm$ 0.0278. Wären die vorliegenden Rechnungen mit diesem Werte durchgeführt worden, so würden sich die Koeffizienten nur unbedeutend von den oben angeführten unterscheiden. Der Unterschied in den Hauptgliedern würde höchstens bis zu einer Bogensekunde gehen.

FRANZ findet der oben genannten Neigung entsprechend

$$\beta = 0.0006143, \quad \alpha = 0.0002996, \quad \gamma = 0.0003147.$$

Aus den Gleichungen (31) und (32) folgt mit dem Werte $f = 0.4878$:

$$\beta = 0.0006257, \quad \alpha = 0.0003052, \quad \gamma = 0.0003205.$$

Um eine Vorstellung zu geben, wie diese 3 Größen variieren, wenn man den Größen J und f andere Werte beilegt, habe ich α, β, γ unter folgenden Voraussetzungen berechnet:

J		$f=0.4$	$f=0.5$	$f=0.6$
1° 29′ 22″.1	$\beta=$	0.0006153	0.0006150	0.0006148
	$\alpha=$	2461	3075	3689
	$\gamma=$	3692	3075	2459
1 31 22.1	$\beta=$	6259	6256	6254
	$\alpha=$	2503	3128	3752
	$\gamma=$	3756	3128	2502
1 33 22.1	$\beta=$	6364	6362	6359
	$\alpha=$	2546	3181	3815
	$\gamma=$	3818	3181	2544

Zur Vergleichung mit den obigen Resultaten möchte ich hier die Formeln anführen, die WICHMANN auf Seite 331 unter (15) als Resultat seiner Entwickelung gibt. Er hat mit $J = 1^\circ\, 28'\, 45''$ berechnet $\beta = 0.000599$. Nimmt man nun $f = \frac{1}{2}$, dann ist sein $\alpha = \gamma = 0.000300$.

Die Gleichungen (15) lauten daher, wenn man die Formeln in der hier angewandten Bezeichnungsweise ausdrückt:

$$w'' = -B\cos\left(b + m(1+1.5\beta) - g - \omega\right)$$
$$+ C\left(\tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{\beta}{\alpha}}\right)\cos\left(c + 2m\sqrt{\alpha\beta} + g + \omega\right)$$
$$- C\left(\tfrac{1}{2} - \sqrt{\tfrac{\beta}{\alpha}}\right)\cos\left(c + 2m\sqrt{\alpha\beta} - g - \omega\right)$$
$$- 95''.6\cos g - 1''.4\cos(g + 2\omega)$$
$$\sin J w' = -B\sin\left(b + m(1+1.5\beta) - g - \omega\right)$$
$$- C\left(\tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{\beta}{\alpha}}\right)\sin\left(c + 2m\sqrt{\alpha\beta} + g + \omega\right)$$
$$- C\left(\tfrac{1}{2} - \sqrt{\tfrac{\beta}{\alpha}}\right)\sin\left(c + 2m\sqrt{\alpha\beta} - g - \omega\right)$$
$$+ 95''.6\sin g + 1''.4\sin(g + 2\omega)$$
$$u = +126''.0\sin g' - 20''.7\sin g + A\sin\left(a + m\sqrt{3\gamma}\right).$$

Da nun WICHMANN seine Störungsgrößen so definiert, daß $w' = \tau - \sigma$, so würde also $\sin Jw' = J\tau - J\sigma$ sein, womit dargetan ist, daß WICHMANNS Formeln (15) sich mit den Resultaten dieser Arbeit decken, wenn man davon absieht, daß er infolge

von mancherlei Vernachlässigungen natürlich andere numerische Werte erhält. Damit wäre der scheinbare Widerspruch, den FRANZ zwischen seiner und WICHMANNS Arbeit zu finden glaubte, völlig beseitigt.

Ersterer hat nun mit dem Werte von J, welcher der vorliegenden Bearbeitung zu Grunde liegt, folgende Integrale gefunden, die ebenfalls in die hier gebrauchte Bezeichnungsweise übersetzt worden sind:

$$\begin{aligned} w'' &= -B\cos(b+n) \\ &\quad - 95''\!.4\cos g + 11''\!.0\cos(2g+2\omega) - 1''\!.6\cos(g+2\omega) \\ \sin J w &= +B\sin(b+n) \\ &\quad - 95''\!.4\sin g + 11''\!.0\sin(2g+2\omega) - 1''\!.6\sin(g+2\omega) \\ u &= +A\sin\left(a + m\sqrt{3\gamma}\right) \\ &\quad + 133''\!.3\sin g' - 21''\!.8\sin g - 5''\!.1\sin(g - 2g' + 2\omega - 2\omega') \\ &\quad + 17''\!.6\sin 2\omega + 7''\!.9\sin(n - 4^\circ\!.7) + 3''\!.2\sin(-g' + \omega - \omega') \\ &\quad + 3''\!.2\sin(2g' + 2\omega') + 2''\!.4\sin(-2g' + 2\omega - 2\omega'). \end{aligned}$$

Am meisten weichen diese Ausdrücke von den Resultaten (51) in den Formeln der Libration in Knoten und Neigung ab, ferner müssen die Koeffizienten des Argumentes $2g + 2\omega$ das entgegengesetzte Vorzeichen erhalten.

Auf den Unterschied bezüglich des in u vorkommenden Gliedes mit dem Argument 2ω ist schon früher hingewiesen worden, nicht unbedeutend ist hier ferner die Differenz bei dem Gliede mit dem Argument $-2g' + 2\omega - 2\omega'$.

Bevor wir nun zur Besprechung des Einflusses der Sonnenanziehung auf die Rotation des Mondes übergehen, muß noch eine Vernachlässigung, die weiter oben, vor Gleichung (31), begangen worden ist, untersucht werden. Wir hatten angenommen

$$\begin{aligned} x &= -J\sin(g+\omega) - \varrho\sin(g+\omega) - J\tau\cos(g+\omega) + J\sigma\cos(g+\omega) \\ y &= -J\cos(g+\omega) - \varrho\cos(g+\omega) + J\tau\sin(g+\omega) - J\sigma\sin(g+\omega). \end{aligned}$$

Nun treten eigentlich noch

$$\begin{aligned} &\text{zu } x\text{:} \quad -\varrho\tau\cos(g+\omega) + \varrho\sigma\cos(g+\omega) \\ &\text{zu } y\text{:} \quad +\varrho\tau\sin(g+\omega) - \varrho\sigma\sin(g+\omega). \end{aligned}$$

Ferner sind je die zwei ersten Glieder von x und y mit $\cos(\tau - \sigma)$ zu multiplizieren. Nun sind die Hauptglieder von τ, ϱ, σ

$$+130'' \sin g', \quad -87'' \cos g, \quad -3370'' \sin g,$$

also ist sicher das Produkt $\varrho\tau$ zu vernachlässigen, und das Produkt $\varrho\sigma = +1''\!.4 \sin g \cos g = +0''\!.7 \sin 2g$ ist so klein, daß es ebenfalls unter der angenommenen Genauigkeitsgrenze liegt. Die weitere Vernachlässigung, $\cos(\tau - \sigma) = 1$, ist ebenfalls gestattet, da im Maximum $\cos(\tau - \sigma) \doteq \cos\sigma = 1 - \frac{1}{2}\sigma^2 = 1 - 0.000066$ werden kann.

V. Kapitel.

Es ist von vornherein zu vermuten, daß die Rotationsbewegung des Mondes nur sehr wenig durch die direkte Anziehung der Sonne beeinflußt wird, da nach den Gleichungen (5) die Einwirkung der Sonne zwar proportional der Masse aber umgekehrt proportional der 3. Potenz der Entfernung ist, also nur etwa den 185ten Teil des Einflusses der Erdanziehung betragen kann.

Es erschien deshalb erlaubt, zunächst von dem direkten Einflusse der Sonne ganz abzusehen und die beiden Körper Erde und Mond für sich zu betrachten. Indirekt kommt hierbei die Sonne insofern zur Wirkung, als ja die Ungleichheiten der Mondbahn Sonnenstörungen enthalten. Dieser Teil des Problems ist in den früheren Kapiteln erledigt.

Da nun die Wirkung der Sonne auf die Rotation des Mondellipsoids so gering ist, kann man annehmen, es werde die Wirkung der Erde auf den Mond dadurch nicht geändert, sondern es träten zu unseren Störungsgrößen ϱ, $J\sigma$, τ additiv kleine Glieder hinzu, welche Funktionen der auf das System der Hauptträgheitsachsen bezogenen Sonnenkoordinaten sind.

Es sind also zunächst diese Koordinaten zu berechnen. Hierbei sei

L' die wahre geozentrische Länge der Sonne,
R' die wahre Entfernung der Sonne von der Erde,
L'' die wahre selenozentrische Länge der Sonne,
B'' die wahre selenozentrische Breite der Sonne,
R'' die wahre Entfernung Mond—Sonne.

Es ist nun nicht nötig die Koordinaten der Sonne mit der Genauigkeit zu berechnen, wie es mit denen der Erde geschehen ist. Deshalb teile ich im folgenden die auf 5 Stellen durchgeführten Rechnungen nur auf 4 Stellen mit.

Nach LEVERRIER ist

$$L' = g' + \omega' + n + 0.03350 \sin g' + 0.00035 \sin 2g'$$

$$R' = 1.00014 - 0.01675 \cos g' - 0.00014 \cos 2g'.$$

Ferner haben wir

$$L = g + \omega + n + 0.1098 \sin g$$

$$R = 0.00255 - 0.00014 \cos g.$$

Hier ist für R die halbe große Achse der Erdbahn als Längeneinheit angenommen worden, weil dies für die weiteren Rechnungen bequemer ist. Diese Längeneinheit ist 391.5 mal größer als die frühere.

Aus dem Dreieck Sonne-Erde-Mond ergibt sich nun auf ganz einfache Weise die Beziehung

$$L'' = L' - \frac{R}{R'} \sin(L - L'), \quad R'' = R' - R\cos(L - L')$$

und

$$B'' = -\frac{1}{R''} 0.0894 \sin(g + \omega).$$

Hier ist genau genug

$$\begin{aligned}\sin(L - L') = \sin(g - g' + \omega - \omega') &+ 0.0549 \sin(2g - g' + \omega - \omega')\\ &- 0.0549 \sin(\quad - g' + \omega - \omega')\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(L - L') = \cos(g - g' + \omega - \omega') &+ 0.0549 \cos(2g - g' + \omega - \omega')\\ &- 0.0549 \cos(\quad - g' + \omega - \omega')\end{aligned}$$

und wir erhalten somit

$$\begin{aligned}L'' = g' + \omega' + n + 0.0335 \sin g' &\qquad + 0.0003 \sin 2g'\\ + 0.0002 \sin(-g' + \omega - \omega') &- 0.0026 \sin(g - g' + \omega - \omega')\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R'' = 1.0001 - 0.0167 \cos g' &\qquad - 0.0001 \cos 2g'\\ + 0.0002 \cos(-g' + \omega - \omega') &- 0.0026 \cos(g - g' + \omega - \omega')\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{R''} = 1.0000 + 0.0167 \cos g' &\qquad + 0.0003 \cos 2g'\\ - 0.0002 \cos(-g' + \omega - \omega') &+ 0.0026 \cos(g - g' + \omega - \omega')\end{aligned}$$

$$B'' = -0.0002 \sin(g + \omega).$$

Die wahre Länge der Sonne vom absteigenden Knoten des Mondäquators ist $v = L'' - \psi$ und ihre Koordinaten bezogen auf das System $(\xi \eta \zeta)$

$$\xi = R'' \cos B'' \cos v, \quad \eta = R'' \cos B'' \sin v, \quad \zeta = R'' \sin B''.$$

Daraus folgt, da $\cos B'' = 1$ und $\sin B'' \sin\vartheta$ unmerklich ist,

$$x = R''(\cos v \cos\varphi + \sin v \sin\varphi \cos\vartheta)$$
$$y = R''(-\cos v \sin\varphi + \sin v \cos\varphi \cos\vartheta)$$
$$z = R''(\sin B'' \cos\vartheta + \sin v \sin\vartheta)$$

oder

$$x = R''[\cos(v-\varphi) - \sin v \sin\varphi (1-\cos\vartheta)]$$
$$y = R''[\sin(v-\varphi) - \sin v \cos\varphi (1-\cos\vartheta)].$$

Bildet man nun die Produkte xy, yz, zx und bezeichnet mit M'' die Sonnenmasse, so erhalten wir die Gleichungen

$$(52\,a)\quad \frac{dp}{dt} + \alpha qr = 3M''\alpha R''^{-3}[\sin B'' \sin(v-\varphi) + \sin(v-\varphi)\sin v \sin\vartheta]$$

$$(52\,b)\quad \frac{dq}{dt} - \beta pr = -3M''\beta R''^{-3}[\sin B'' \cos(v-\varphi) + \cos(v-\varphi)\sin v \sin\vartheta]$$

$$(52\,c)\quad \frac{dr}{dt} + \gamma pq = 3M''\gamma R''^{-3}[\tfrac{1}{2}\sin(2v-2\varphi)\cos\vartheta - \tfrac{\sin^2\vartheta}{2}\sin 2\varphi]$$

Die Klammerausdrücke in den beiden ersten Gleichungen lauten nach Einführung der Unbekannten $x = \sin\varphi \sin\vartheta$, $y = \cos\varphi \sin\vartheta$

$$\sin B'' \sin(v-\varphi) + \tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{2}y\cos(2v-2\varphi) + \tfrac{1}{2}x\sin(2v-2\varphi)$$
$$= \sin B'' \sin(v-\varphi) + \tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{2}\sin\vartheta\cos(2v-\varphi)$$

$$\sin B'' \cos(v-\varphi) + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}y\sin(2v-2\varphi) + \tfrac{1}{2}x\cos(2v-2\varphi)$$
$$= \sin B'' \cos(v-\varphi) + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}\sin\vartheta\sin(2v-\varphi).$$

Setzen wir nun

$$L'' = g' + \omega' + n + \Sigma'',$$

dann ist

$$v = g' + \omega' + \Sigma'' - \sigma$$

und da

$$\varphi = 180^0 + g + \omega + \tau - \sigma,$$

so wird

$$v - \varphi = -g + g' - \omega + \omega' - 180^0 + \Sigma'' - \tau$$
$$2v - 2\varphi = -2g + 2g' - 2\omega + 2\omega' + 2\Sigma'' - 2\tau$$
$$2v - \varphi = -g + 2g' - \omega + 2\omega' - 180^0 + 2\Sigma'' - \sigma - \tau.$$

Es wird nun genügen zu setzen

$$\sin(v-\varphi) = \sin(g - g' + \omega - \omega')$$
$$\cos(v-\varphi) = -\cos(g - g' + \omega - \omega').$$

Ferner ergeben sich folgende Entwickelungen:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\sin(2v-2\varphi) = &+0.0013\sin(g-g'+\omega-\omega')\\ &+0.0167\sin(2g-g'+2\omega-2\omega')\\ &-0.4994\sin(2g-2g'+2\omega-2\omega')\\ &-0.0167\sin(2g-3g'+2\omega-2\omega')\\ &-0.0004\sin(2g-4g'+2\omega-2\omega')\\ &-0.0013\sin(3g-3g'+3\omega-3\omega')\\ &-\tau\cos(2g-2g'+2\omega-2\omega')\end{aligned}$$

$$-\sin^2\frac{\vartheta}{2}\sin 2\varphi = -0.0002\sin(2g+2\omega)$$

$$\begin{aligned}-\tfrac{1}{2}\sin\vartheta\cos(2v-\varphi) = &-0.0004\cos(g-g'+\omega-2\omega')\\ &+0.0133\cos(g-2g'+\omega-2\omega')\\ &+0.0004\cos(g-3g'+\omega-2\omega')\\ &-0.5\,J\sigma\sin(g-2g'+\omega-2\omega')\\ &+0.5\,\varrho\cos(g-2g'+\omega-2\omega')\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}+\tfrac{1}{2}\sin\vartheta\sin(2v-\varphi) = &-0.0004\sin(g-g'+\omega-2\omega')\\ &+0.0133\sin(g-2g'+\omega-2\omega')\\ &+0.0004\sin(g-3g'+\omega-2\omega')\\ &+0.5\,J\sigma\cos(g-2g'+\omega-2\omega')\\ &+0.5\,\varrho\sin(g-2g'+\omega-2\omega')\end{aligned}$$

$B''\sin(v-\varphi)$ und $B''\cos(v-\varphi)$ sind zu vernachlässigen.

$$\begin{aligned}R''^{-3} = 1.0004 &+0.0502\cos g'\\ &+0.0013\cos 2g'\\ &-0.0006\cos(-g'+\omega-\omega')\\ &+0.0076\cos(g-g'+\omega-\omega')\\ &+0.0002\cos(2g-g'+\omega-\omega').\end{aligned}$$

Damit lassen sich die Gleichungen (52) bilden. Drückt man nun noch p und q durch x und y aus, setzt $\frac{d\tau}{dt}=\frac{d^2\tau}{dt^2}$, dann resultieren folgende Gleichungen:

(53) $$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dy}{dt} m'(1-\beta) + \beta m'^2 x = 3 M'' \beta P'$$

$$\begin{aligned} P' = &- 0.0133 \sin(g - 2g' + \omega - 2\omega') - 0.5\, x \\ &- 0.0008 \sin(g - 3g' + \omega - 2\omega') - 0.5\, J\sigma \cos(g - 2g' + \omega - 2\omega') \\ &+ 0.0003 \sin(g - g' + \omega) \qquad - 0.5 \quad \varrho \sin(g - 2g' + \omega - 2\omega') \\ &+ 0.0003 \sin(g + g' + \omega) \end{aligned}$$

(54) $$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dx}{dt} m'(1-\alpha) + \alpha m'^2 y = 3 M'' \alpha Q'$$

$$\begin{aligned} Q' = &- 0.0133 \cos(g - 2g' + \omega - 2\omega') - 0.5\, y \\ &- 0.0008 \cos(g - 3g' + \omega - 2\omega') + 0.5\, J\sigma \sin(g - 2g' + \omega - 2\omega') \\ &+ 0.0003 \cos(g - g' + \omega) \qquad - 0.5 \quad \varrho \cos(g - 2g' + \omega - 2\omega') \\ &+ 0.0003 \cos(g + g' + \omega) \end{aligned}$$

(55) $$\frac{d^2\tau}{dt^2} = 3 M'' \gamma S'$$

$$\begin{aligned} S' = &- 0.0006 \sin(g - g' + \omega - \omega') - 0.0012 \sin(2g - 4g' + 2\omega - 2\omega') \\ &+ 0.0042 \sin(2g - g' + \omega - 2\omega') + 0.0002 \sin(2g - 3g' + 3\omega - 3\omega') \\ &- 0.4994 \sin(2g - 2g' + 2\omega - 2\omega') - 0.0032 \sin(3g - 3g' + 3\omega - 3\omega') \\ &- 0.0293 \sin(2g - 3g' + 2\omega - 2\omega') - \quad \tau \cos(2g - 2g' + 2\omega - 2\omega'). \end{aligned}$$

In diese Gleichungen könnte man nun die früher für ϱ, σ, τ gefundenen Werte einsetzen. Diese Glieder würden aber bei der hier festgesetzten Genauigkeitsgrenze ganz unmerklich werden.

Es würde nun falsch sein, wollte man die Gleichungen (53) und (54) ohne weiteres integrieren, das hieße den Einfluß der Erde Null setzen, denn obige Gleichungen allein können nie den wahren Wert von x und y liefern. Sondern da wir in erster Näherung annahmen, die durch die Erde hervorgerufene Libration werde durch die Sonneneinwirkung nicht geändert, so müssen wir, sollen die Gleichungen (53) und (54) die richtigen Werte für x und y ergeben, noch die rechten Seiten von (26) und (25) hinzufügen, oder besser und sinngemäßer ausgedrückt, die rechten Seiten von (53) und (54) bilden Zusatzglieder zu den rechten Seiten von (26) und (25).

Für die Gleichung (55) ist es gleichgültig, ob wir sie direkt integrieren oder die rechte Seite als Ergänzung zu (19) auffassen. Im ersteren Falle erhalten wir ein Integral von der Form

$$\tau = -\frac{H}{h'^2}\sin h$$

im andern Falle

$$\tau = -\frac{H\sin h}{h'^2 - 0.988\,M'\gamma}.$$

Für das Glied, das den größten Einfluß ausübt, nämlich

$$-3M''\gamma\,0.4994\sin(2g - 2g' + 2\omega - 2\omega')$$

ist $1 : h'^2 = 5.5$ und da, wie wir weiter unten sehen werden, $3M''\gamma = 0.000000265$ ist, so ergibt die Integration von (55) als größtes Glied

$$+0''.15\sin(2g - 2g' + 2\omega - 2\omega').$$

Gehen wir nun wieder zu den beiden anderen Gleichungen über und addieren ihre rechten Seiten zu (25) und (26), dann nehmen diese Gleichungen, da in (53) und (54) die Glieder $-3M''\beta\,0.5x$ und $-3M''\alpha\,0.5y$ vorkommen, die folgende Form an:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dy}{dt}m'(1-\beta) + x(\beta m'^2 + 0.9944\beta M' + 1.5M''\beta) = G\sin g \quad (56a)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dx}{dt}m'(1-\alpha) + y(\alpha m'^2 + 1.5M''\alpha) = F\cos g. \quad (56b)$$

Vor allem muß nun M'' berechnet werden. Es war $3M = 2.9634\,m'^2$. Da nach LEVERRIER $M'' : M = 324\,439$ ist, für die Definition von M aber als Längeneinheit die halbe große Achse der Mondbahn, bei den obigen Entwickelungen aber die halbe große Achse der Erdbahn als Einheit gilt, so ist

$$M'' = \frac{324439}{391.5^3}M$$

und schließlich

$$3M''\beta = 0.000000530, \quad 3M''\alpha = 3M''\gamma = 0.000000265.$$

Werden die Faktoren von x und y in (56) in der Gestalt

$$\beta m'^2\varepsilon \quad \text{und} \quad \alpha m'^2\delta,$$

geschrieben, so ist

$$\varepsilon = 3.9548 \quad \text{und} \quad \delta = 1.0080.$$

Die Formeln (30) lauten dann

$$X = \frac{-G(g'^2 - \alpha m'^2\delta) - Fg'm'(1-\beta)}{N}$$
$$Y = \frac{-F(g'^2 - \beta m'^2\varepsilon) - Gg'm'(1-\alpha)}{N} \quad (57)$$

wo

$$N = g'^4 - g'^2 m'^2(1 + (\varepsilon - 1)\beta + (\delta - 1)\alpha + \alpha\beta) + \alpha\beta m'^4 \delta\varepsilon$$

ist. Für das Argument $g + \omega$ wird dann

$$\text{Zähler von } X = -[6.871360]\beta - [4.652622]f\beta + [6.87396]f\beta^2,$$

$$\text{Zähler von } Y = -[6.869618]\beta - [4.654364]f\beta + [6.87987]f\beta^2,$$

$$N = +0.000022708 - [7.920708]\beta - [5.353867]f\beta + [7.92068]f\beta^2,$$

wo die in [ ] angesetzten Koeffizienten Logarithmen bedeuten. Damit findet man aus der verbesserten Gleichung (31)

$$\beta = 0.0006251,$$

also nur um 5 Einheiten der letzten Dezimale anders als mit Vernachlässigung der Sonnenanziehung.

Wollte man die Integration mit Hülfe von (57) wiederholen, so würden die Koeffizienten in den Lösungen (51) sich höchstens um 0″1 ändern. Die Gleichungen (53) und (54) aber liefern als größtes Glied

für x: $+0''1 \sin(g - 2g' + \omega - 2\omega')$, für y: $+0''1 \cos(g - 2g' + \omega - 2\omega')$.

Wir kommen also zu dem Schlusse:

Die einzig bemerkbare Wirkung der Sonnenanziehung auf das rotierende Mondellipsoid besteht darin, daß hierdurch die mittlere Neigung des Mondäquators um ein geringes sich anders ergibt, als wenn die Erde allein wirkte.

Nimmt man an, es wäre tatsächlich, wie oben berechnet, $\beta = 0.0006251$, $f = \frac{1}{2}$, dann bewirken Sonne und Erde vereint, daß der Mondäquator die Neigung 1° 31′ 22″1 gegen die Ekliptik annimmt. Hingegen würde, wie sich aus der verbesserten Gleichung (31) leicht berechnen läßt, diese Neigung durch die alleinige Wirkung der Erde 1° 31′ 15″3 sein.

Den Einfluß der Sonne auf die mittlere Neigung des Mondäquators, oder wie hier die Frage gestellt ist, auf die Verhältniszahl β, kann man sich auch auf andere Weise berechnet denken, als mit Hülfe der Formeln (57). Setzt man nämlich in (53) und (54) für $-0.5x$ und $-0.5y$ näherungsweise

$$+0.0133 \sin(g + \omega) \quad \text{und} \quad +0.0133 \cos(g + \omega)$$

dann liefern diese Ausdrücke durch Integration für x und y kleine Zusatzglieder mit dem Argument $g + \omega$, und diese wieder be-

deuten kleine Verbesserungen für die Bedingungsgleichung (31) zwischen den 3 Größen J, β, f.

Die Gleichungen (56) liefern naturgemäß auch etwas andere Werte für die Größen λ als die Gleichungen (27). Es wird nämlich nach (56)

$$\lambda_1 = m'(1 + 1.477\,\beta), \quad \lambda_2 = m'\sqrt{\alpha\beta\delta\varepsilon} = m'\sqrt{3.9864\,\alpha\beta}$$

und

$$s_1 = +1, \quad s_3 = -1.981\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}},$$

womit die Resultate (36) und (37) zu verbessern wären.

Das Resultat des letzten Kapitels kann man also dahin zusammenfassen, daß man berechtigt ist den Einfluß der Sonne bei Berechnung der physischen Libration zu vernachlässigen.

Aufgabe der Beobachtung wird es nun sein vor allem J und f zu bestimmen. Weiter wäre es wünschenswert aus den Beobachtungen zu erfahren, ob die Konstanten A, B, C wirklich unmerklich sind, wie es den Anschein hat, und wie man auch vermuten sollte.

